Der Planimeter

René Grothmann

16. Februar 2006

Zusammenfassung

Dies ist der Versuch, den polaren Planimeter mit elementaren Mitteln zu erklären. Leider stellt sich heraus, dass die notwendigen Mittel gar nicht so elementar sind. Wir werden zunächst eine Argumentation mit Summen und Infinitesimalien verwenden, und dann diese Argumentation in Integralschreibweise nachvollziehen.

1 Einführung

Ein Planimeter ist ein Gerät, mit dem man Flächen in der Ebene durch Umfahren messen kann. Es gibt verschiedene Typen von Planimetern. Wir konzentrieren uns hier auf einen besonders eleganten Typ, den polaren Planimeter.

Der polare Planimeter besteht aus zwei gleich langen Armen, die durch ein Gelenk verbunden sind. Am einen Ende der beiden Armen befindet sich eine schwere Scheibe, die auf dem Messtisch fixiert wird. Am anderen Ende befindet sich eine Stift, mit dem man die zu messende Fläche umfährt. Senkrecht zum Arm, der den Stift trägt, findet man ein Rad. Abbildung 1 zeigt den schematischen Aufbau.

Der Stift wird um die zu messende Fläche geführt. Man sieht, dass das Rad dabei zum Teil rollt, zum Teil über die Fläche schleift, je nachdem, in welche Richtung der Stift geführt wird. Bleibt das Gelenk an einem Punkt und wird der Stift im Kreis um diesen Punkt geführt, so rollt die Scheibe nur. Wird der Stift in Richtung des zweiten Armes gezogen, so dreht sie sich nicht und schleift nur auf der Oberfläche.

Damit die Scheibe schön gleitet und rollt, ist sie aus massivem, schwerem Metall mit einer relativ glatten, runden Abrollkante. Die gemessene Fläche wird an einer Skala abgelesen, die direkt an der Scheibe befestigt ist. Über eine Achse wird eine weitere Skala angetrieben, die zusätzlich volle Umdrehungen der Scheibe zählt. In Abbildung 3 sieht man an einem anderen Planimeter genauer, wie die Scheibe mit der Skala auf dem Tisch aufliegt. Die zusätzliche Skala ist hier ebenfalls zu sehen.

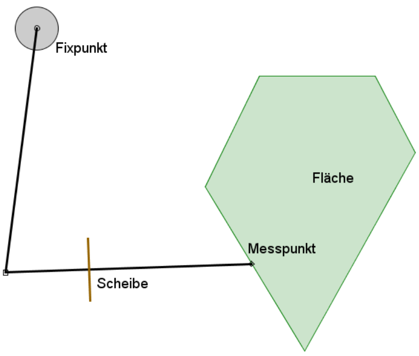

Abbildung 1: Schematischer Aufbau eines Planimeters

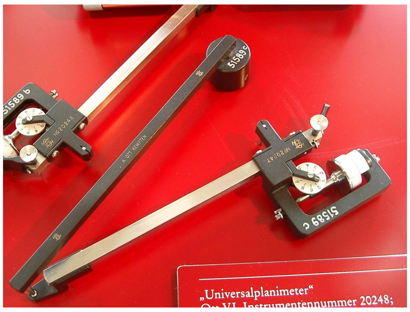

Abbildung 2: Bild eines Planimeters

Ein Planimeter ist damit mechanisch wesentlich einfacher als viele andere Dinge des täglichen Gebrauchs, wie etwa Türschlösser oder Skibindungen. Der Witz liegt in der mathematischen Idee, die hinter diesem Instrument steckt.

Abbildung 2 zeigt eine konkrete Ausführung, bei der die Scheibe auf einer parallelen Achse zur zweiten Achse angebracht ist. Man sieht auch sehr schön die zweite Skala. Beim Planimeter in Abbildung 3 handelt es sich allerdings um einen anderen Typ.

Die Abbildung 4 zeigt einen polaren Planimeter schematisch.

Es besteht die Möglichkeit, die Simulation eines Planimeter in einem Java-Applet auf meiner Webseite auszuprobieren. Dabei handelt es sich um eine Anwendung des Programms Z.u.L. (Zirkel und Lineal), das Sie über meine Webseite

http://www.rene-grothmann.de/

finden. Gehen Sie auf die deutschen Seiten von Z.u.L., dann auf die Demos. Den Planimeter finden Sie unter „Berechnete Konstruktionen“. Führen Sie den Stift einmal um den Kreis, und beobachten Sie, wie sich die Scheibe bewegt.

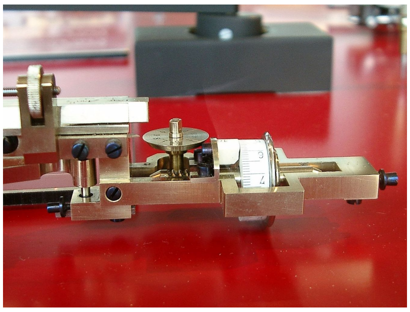

Abbildung 3: Scheibe und Skalen

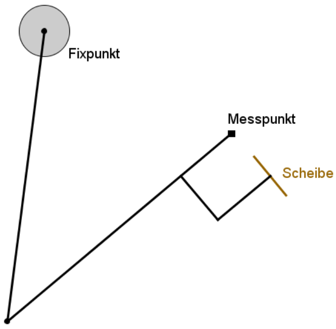

Abbildung 4: Schemazeichnung

2 Mathematische Erklärung

2.1 Leibnizsche Sektorformel

Wir betrachten zuerst einmal die Messungen von überstrichenen Flächen mit Hilfe von Polarkoordinaten. Abbildung 5 zeigt die Fläche, die vom Punkt O aus überstreichen wird, wenn der Strahl in Pfeilrichtung auf der Kurve wandert.

Wir approximieren die Fläche durch die Summe der Flächen der Dreiecke, die in Abbildung 5 eingezeichnet sind, wobei natürlich die Unterteilung feiner und feiner gemacht wird. Der Grenzwert der entsprechenden Summen ergibt die graue Fläche.

Schreibt man die Dreiecksflächen bei n Unterteilungen als

$$D_{1,n}, \dots, D_{n,n}$$

so ist also die Gesamtfläche

$$F = \lim_{n\to\infty} (D_{1,n} + \dots + D_{n,n}).$$

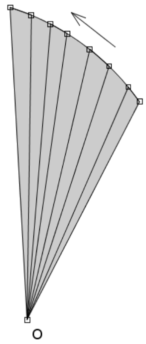

Abbildung 5: Überstreichen einer Fläche

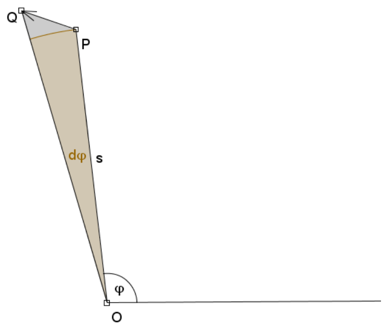

Abbildung 6: Approximation mit Kreissektoren

Betrachten wir in Abbildung 6 eines der Dreiecke im Detail. Die Position des Punktes P hängt von der Zeit t ab, zu der sich der Fahrstrahl in P befindet.

$$P = P(t).$$

Die Position von P ist gegeben durch den Winkel

$$\phi = \phi(t),$$

den OP mit der x-Achse bildet, und den Abstand

$$OP = s = s(t),$$

die beide von der Zeit abhängen. Lassen wir eine Zeit dt verstreichen, so befindet sich der Fahrstrahl an der Stelle

$$Q = P(t + dt).$$

Nun approximieren wir die Fläche des Dreiecks OPQ durch die Fläche

$$dS = \frac{s^2}{2} d\phi$$

des Kreissektors. $d\phi$ wird dabei wie üblich im Bogenmaß gemessen.

Wir nehmen an, dass wir in n Flächen

$$dS_{1,n}, \ldots dS_{n,n}$$

unterteilt haben mit korrespondierenden Winkeländerungen $d\phi_{i,n}$ und Radien $s_{i,n}$, für $i = 1, \ldots, n$. Summieren wir die Fläche der n Kreissektoren zu

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} dS_{i,n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_{i,n}^2}{2} d\phi_{i,n}.$$

und bilden den Grenzwert

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n,$$

so können wir hoffen, dass dieser Grenzwert gegen die gesuchte Fläche konvergiert, wenn die Unterteilungen immer feiner werden.

Man schreibt diese Formeln gerne einfach als

$$S = \sum \frac{s^2}{2} d\phi, \tag{1}$$

mit sozusagen unendlich kleinen Änderungen $d\phi$.

Leibniz hat diesen Summengrenzwert sowohl mit solchen Infinitesimalien $d\phi$, als auch als Integral geschrieben. Dazu nehmen wir an, dass wir zwischen $t = 0$ und $t = T$ eine Fläche S überstreichen. Dann ist die Größe dieser Fläche

$$S = \int_0^T \frac{s(t)^2}{2} \phi'(t)\, dt.$$

Um diese Formel mit dem Grenzwert aus Formel (1) in Beziehung zu setzen, muss man sich vor Augen halten, dass Näherungsweise

$$d\phi \approx \phi'(t)\, dt$$

gilt. Ähnlich wie bei der Approximation mit Kreissektoren macht man hier einen Fehler, der sich aufsummiert, aber dennoch mit immer feinerer Unterteilung gegen 0 konvergiert.

2.2 Situation am Planimeter

In Abbildung 7 ist ein Planimeter schematisch wiedergegeben. Wie haben diesmal die Scheibe direkt an dem Gelenk G der zweiten Achse befestigt. Allerdings wird sich herausstellen, dass die genaue Position der Scheibe keine Rolle spielt.

Jede Position des Planimeters ist durch die beiden Winkel β und α festgelegt. Aufgrund der Winkelsumme im gleichschenkligen Dreieck OGP errechnet man

$$\gamma = \frac{\alpha}{2}.$$

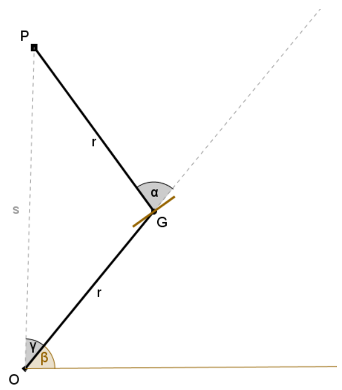

Abbildung 7: Situation am Planimeter

Außerdem ergibt sich mit ein wenig Trigonometrie

$$s = 2r\cos(\gamma) = 2r\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Für die Polarkoordinaten des Punktes P ist also s wie eben berechnet der Radius und $\phi = \gamma + \beta$ der Winkel. Also mit den Bezeichnungen des vorigen Abschnittes

$$dS = \frac{s^2}{2}d\phi = \frac{r^2}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)(d\alpha + d\gamma).$$

Diese kleinen Flächen muss man nun aufsummieren. Wir verwenden die einfachere Notation von Formel 1.

Wenn man annimmt, dass der Planimeter eine Fläche ganz umfährt, so sieht man, dass die Summe der Winkeländerungen sowohl von α also auch von β Null sein muss, also

$$\sum d\alpha = \sum d\beta = 0.$$

Außerdem gilt die trigonometrische Formel

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\alpha)).$$

Also

$$\begin{aligned} S &= \sum dS \\ &= \sum \frac{r^2}{4}(1 - \cos(\alpha))(d\alpha + d\beta) \\ &= -\frac{r^2}{4}\sum \cos(\alpha)(d\alpha + d\beta). \end{aligned}$$

Unser nächstes Ziel wird sein zu zeigen, dass

$$\sum \cos(\alpha)d\alpha = 0$$

ist. Damit wird die Fläche gleich

$$S = \frac{r^2}{4} \sum \cos(\alpha) d\beta. \tag{2}$$

Wir werden weiter unten sehen, dass diese Summe genau die Größe ist, die die Scheibe des Planimeters beim Drehen und Schleifen misst.

Was nun den Ausdruck $\cos(\alpha)d\alpha$ angeht, so gilt wegen $\sin' = \cos$

$$\cos(\alpha)d\alpha \approx d\sin(\alpha).$$

Man überlegt sich, dass der aufsummierte Fehler dieser Approximationen gegen 0 geht, wenn die Feinheit der Unterteilungen dt gegen 0 geht.

Nun ist $\alpha(t)$ am Anfang und am Ende gleich, also auch $\sin(\alpha(t))$. Also löschen sich die Differenzen aus und man erhält

$$\sum d\sin(\alpha) = 0.$$

Es folgt

$$\sum \cos(\alpha)d\alpha = 0.$$

Es bleibt zu überlegen, warum das Planimeter genau die Summe (2) misst. Wenn die Scheibe wie in Abbildung 7 in G angebracht ist, ist dies aber ziemlich klar. Denn die Scheibe steht bei alleiniger Änderung des Winkels α still, und dreht sich bei alleiniger Änderung des Winkels β proportional zu

$$\cos(\alpha)d\beta.$$

Wenn etwa $\alpha = 0$ ist, so dreht sie sich voll proportional zu β. Wenn $\alpha = 90$ ist, so dreht sie sich gar nicht, und wenn $\alpha = 180$ ist, so dreht sie sich proportional zu $-\beta$. Dazwischen hängt die Drehung von der Größe der Projektion der Scheibe auf die Senkrechte zu PG ab.

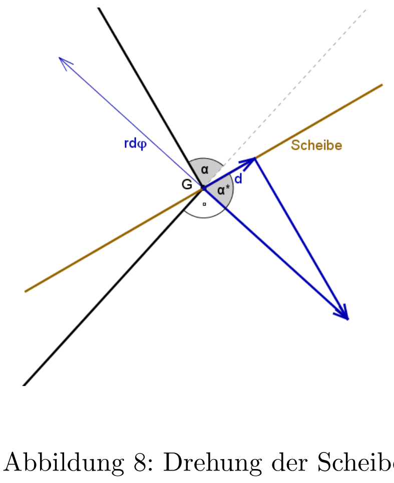

Abbildung 8: Drehung der Scheibe

In Abbildung 8 ist die Situation bei der Scheibe festgehalten. Nehmen wir wieder an, es ändert sich nur der Winkel β, und zwar um $d\beta$. Dann wird die

Scheibe in die angegebene Richtung um $r\,d\beta$ über den Tisch gezogen. Dabei entsteht in entgegengesetzte Richtung eine Reibung, die sich in eine Drehung und in Rutschen aufteilt. Da $\alpha = \alpha^*$ ist, ist die Drehkomponente gleich $r\cos(\alpha)\,d\beta$. Der Drehwinkel hängt dann natürlich noch vom Durchmesser der Scheibe ab.

2.3 Verwendung von Integralrechnung

Wir wollen die gesamte Argumentation noch einmal in Integralschreibweise nachvollziehen. Es gilt, wenn zwischen $t = 0$ und $t = T$ eine Fläche ganz umfahren wird

$$\int_0^T \alpha'(t)\,dt = \alpha(t)|_0^T = 0.$$

Analog

$$\int_0^T \beta'(t)\,dt = \beta(t)|_0^T = 0.$$

und ebenso

$$\int_0^T \cos(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt = \sin(\alpha(t))|_0^T = 0.$$

Also

$$\begin{aligned} S &= \int_0^T \frac{s(t)^2}{2}\phi'(t)\,dt \\ &= \frac{r^2}{4}\int_0^T (1-\cos(\alpha(t)))(\alpha'(t)+\beta'(t))\,dt \\ &= -\frac{r^2}{4}\int_0^T \cos(\alpha(t))\beta'(t)\,dt \end{aligned}$$

An diesem Punkt ist man wieder genauso weit wie oben.

2.4 Position der Scheibe

Wenn die Scheibe nicht genau im Gelenk angebracht ist, so kommt in jedem Schritt eine Drehung proportional zu $d\alpha$ hinzu. Diese Drehungen heben sich aber in der Summe auf, wenn der Planimeter eine Fläche voll umfährt.