Skript zur Vorlesung

Analysis 1 für Lehramtsstudierende (GS/HS/RS)

(Wintersemester 2005/06)

Dieses Geheft enthält in kompakter Form die wesentlichen Inhalte, wie sie in der Vorlesung ,,Analysis für Lehramtsstudierende (GS/HS/RS)" vorgestellt werden.

Es ist zum Gebrauch neben der Vorlesung gedacht und erhebt nicht den Anspruch, ,,in sich selbst verständlich" oder vollständig zu sein.

S. Hilger

Inhaltsverzeichnis

Bezüglich der mathematischen Rigorosität gibt es zwei extreme Standpunkte:

- Streng–mathematisch. Auf der Grundlage von Axiomen (nicht weiter hinterfragbaren Grundsätzen) werden Sätze mit Hilfe der Gesetze der Logik deduziert (abgeleitet).
- Es wird einfach an intuitive Vorstellungen (wie sie beispielsweise auch in der Schule präsentiert werden), angeknüpft.

Hier wird versucht, einen vernünftigen Mittelweg zu gehen.

Ein mathematischer Text gliedert sich im wesentlichen in Definitionen, Axiome, Sätze (auch Propositionen, Lemmata, Korollare, Hilfssätze,...), Beweise, Beispiele und zusätzliche Erläuterungen und Bemerkungen.
Hier kann man ebenfalls rigoros oder sehr locker umgehen. Wir gehen auch den Mittelweg.

Zunächst erfolgen viele Definitionen. Sie werden durch Kursivdruck des zu definierenden Objekts kenntlich gemacht.

1 Mengen und Abbildungen

1.1 Mengen

Cantor'sche Auffassung, Naive Mengenlehre

> Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche die *Elemente* von M genannt werden, zu einem Ganzen.
> [Gesammelte Abhandlungen, ed E. Zermelo, Berlin 1932]
>
> **Georg Cantor** (1845 – 1918, Begründer der Mengenlehre)

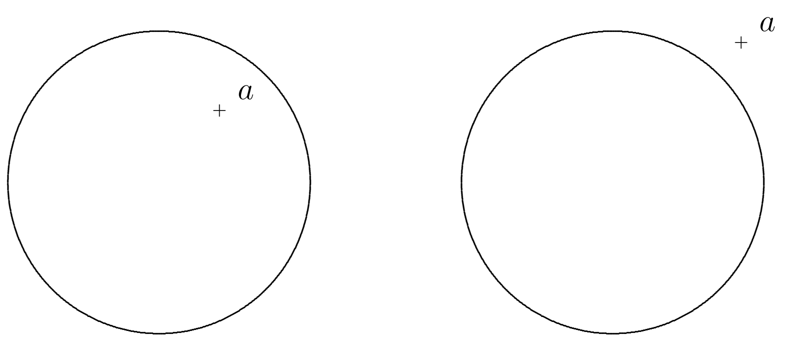
Elemente von Mengen Zentral wichtig, letztlich aber undefiniert, ist die Beobachtung, dass zwischen zwei mathematischen Objekten a und M die Beziehung

$$a \text{ ist Element der Menge } M, \qquad \text{(symb.)} \quad a \in M$$

bestehen kann.

Innerhalb der Mathematik, wie wir sie kennenlernen werden, ist es für zwei Objekte i.a. prinzipiell klar entscheidbar, ob

$$a \in M \qquad \text{oder} \qquad a \notin M.$$



Schreibweise Eine Menge wird — zunächst — durch Aufzählung aller ihrer Elemente beschrieben. Beispiele

$$M = \Big\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\Big\} = \Big\{0,1,2,\ldots,9\Big\},$$

oder

$$M = \Big\{x,y,z,g,e,b,a\Big\}.$$

Beachte dabei:

- In der wissenschaftlichen Mathematik werden zur Trennung Kommata gesetzt, in der Schule Strichpunkte.
- Eine bestimmte Reihenfolge ist mathematisch ohne Belang, manchmal ist sie zweckmäßig. Bei Vorliegen einer ,,bekannten" Reihenfolge kann man eine längere Liste durch Punkte abkürzen.
- Mehrfachnennungen sind möglich:
$$\Big\{1,4,12,20\Big\} = \Big\{12,4,20,1\Big\} = \Big\{1,12,4,20,1,12,20\Big\}.$$
- Auch Mengen können Elemente sein.
$$M = \Big\{1,2,3,\{1,2\}\Big\}, \qquad \text{Beachte } 2 \neq \{2\}.$$

Die leere Menge Die Menge, die kein Element enthält, wird *leere Menge* genannt.

(Symb.) $\varnothing$ oder $\{\ \ \}$ (Schule)

1.2 Aussagen

Naive Beschreibung:

> Eine *Aussage* ist ein sprachliches Gebilde, das eindeutig als *wahr* (w) oder *falsch* (f) erkannt werden kann.

Ist eine Aussage wahr, so sagt man auch sie *gilt*.

Nicht–Beispiele:

- Halt an! (Grammatik)
- Kommst Du nachher vorbei? (Grammatik)
- Der Weitsprung ist knallgelb. (Sinngehalt)
- ,,Grün" ist eine schöne Farbe. (Wertung, Subjektivität)
- Harald hat einen Mittelscheitel. (Kontext)
- $x \leq 0$ (Kontext)

Beispiele: ,,Gute" Beispiele erhält man im allgemeinen dadurch, dass man mathematische Objekte als Inhalt wählt. Mit $X = \{1,2,3\}$ betrachten wir die folgenden Aussagen:

- $1 \in X$. (w)
- $3 \notin X$. (f)
- $5 \in X$. (f)
- 5 ist ungerade. (w)

Andere Beispiele:

- Für $n \geq 3$ hat die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ keine ganzzahlige nichttriviale Lösung. (trivial heißt „für jeden sofort zu sehen" oft ist es die Null–Lösung). Seit 1992 ist die Wahrheit dieser Aussage bewiesen.
- Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge. (Bis heute nicht entschieden)

Aussagen können zu neuen verknüpft werden, deren Wahrheitswert sich aus denen der vorgegebenen nach bestimmten Regeln, den „Gesetzen der Logik", ergibt.

Die Wahrheitswerte der im folgenden zu definierenden Operationen mit Aussagen ergeben sich aus der folgenden Tabelle

		$\mathcal{A}$	w	w	f	f
		$\mathcal{B}$	w	f	w	f
Negation	NICHT $\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$	f		w	
Konjunktion	$\mathcal{A}$ UND (ZUGLEICH) $\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	w	f	f	f
Disjunktion	$\mathcal{A}$ ODER $\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	w	w	w	f
Ausschließende Disjunktion	ENTWEDER $\mathcal{A}$ ODER $\mathcal{B}$		f	w	w	f
Implikation	$\mathcal{A}$ IMPLIZIERT $\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	w	f	w	w
Bijunktion	$\mathcal{A}$ ÄQUIVALENT $\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$	w	f	f	w

Die Negation Beispiel:

- $\mathcal{A}$ Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge.
- $\neg\mathcal{A}$ Es gibt endlich viele Primzahlzwillinge.

Die Konjunktion Beispiel:

- $\mathcal{A}$: n ist eine gerade Zahl.
- $\mathcal{B}$: n ist eine Primzahl.
- $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$: n ist eine gerade Primzahl (Äquivalent zu $n = 2$).

Die Aussage $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}$ ist falsch für alle Aussagen $\mathcal{A}$.

Die Disjunktion Die ODER–Verknüpfung beinhaltet immer auch die Gültigkeit beider Fälle. Das Vorwort ENTWEDER schließt dies aus.
Beispiele: (g, h Geraden im n–dimensionalen Raum)

- $\mathcal{A}$: g und h sind parallel.
- $\mathcal{B}$: g und h schneiden sich in genau einem Punkt.
- $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$: g und h spannen genau eine Ebene auf.

Die Aussage $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$ ist wahr für alle Aussagen $\mathcal{A}$.

Die Implikation Anstelle von „$\mathcal{A}$ IMPLIZIERT $\mathcal{B}$" spricht man auch:

- Aus $\mathcal{A}$ folgt $\mathcal{B}$.
- Wenn $\mathcal{A}$, dann $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{B}$, wenn $\mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ ist hinreichend für $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{B}$ ist notwendig für $\mathcal{A}$.
- (Engl.) If $\mathcal{A}$, then $\mathcal{B}$.

Beim Umgang mit Implikationen sollte man sich nicht zu stark auf die sprachlich–logische Intuition verlassen. Beispiel:

- $\mathcal{A}$: Heute ist Samstag.
- $\mathcal{B}$: Morgen wird Sonntag sein.

Die Aussage $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ist wahr, auch wenn Sie dies an einem Montag lesen.

- $\mathcal{A}$: $3 + 4 = 8$.
- $\mathcal{B}$: $3 = 0$.

Die Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ist wahr. Dies ergibt die Wahrheitswertbelegung. Man kann es aber auch arithmetisch nachweisen: Zieht man auf beiden Seiten der Gleichung 3, dann 4 ab, so stellt sich heraus: $0 = 1$. Beide Seiten dieser Gleichung werden dann mit 3 multipliziert.
Zur Beruhigung: Solche Spitzfindigkeiten werden nicht Ihr mathematischer Alltag sein.

Mathematische Sätze bestehen letztlich aus Aussagen der Form $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. In diesem Zusammenhang heißt $\mathcal{A}$ *Voraussetzung* und $\mathcal{B}$ *Behauptung*. Der Beweis eines mathematischen Satzes besteht letztlich darin, die Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ als wahr zu erweisen. Dies geschieht dadurch, dass man die Voraussetzung $\mathcal{A}$ als wahr betrachtet und dann in kleinen „allgemein nachvollziehbaren" Schritten die Behauptung $\mathcal{B}$ herleitet. Was dabei „allgemein nachvollziehbar" heißt, entzieht sich einer genaueren mathematischen Definition.

Aufgrund der Äquivalenz

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$$

(Begründung durch Wertetabelle), kann die erste Implikation auch durch den Beweis der zweiten bewiesen werden. Man spricht dann auch von einem Beweis durch *Annahme des Gegenteils*.

Eine Variante dieser Idee besteht darin, die Aussage $\mathcal{A}$ und die Aussage $\neg\mathcal{B}$ als wahr anzunehmen. Wenn man daraus eine falsche Aussage (einen Widerspruch) herleiten kann, muss $\mathcal{A}$ falsch oder $\mathcal{B}$ wahr sein. In beiden Fällen ist dann aber die Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ wahr. Diese Methode heißt dann auch *Widerspruchsbeweis*.

Ein solches Vorgehen ist typisch beim Beweis dafür, dass etwas **nicht** existiert. Ein Beispiel stellt der Beweis, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, dar: Wir nehmen an, dass $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ rational (gekürzt). Dann gilt

$$\begin{array}{ll} & \dfrac{p^2}{q^2} = 2 \quad \Longrightarrow \quad p^2 = 2q^2 \\ \Longrightarrow & 2 \text{ ist Primteiler von } p. \\ \Longrightarrow & 4 \text{ teilt } p^2 \\ \Longrightarrow & 2 \text{ teilt } q^2 \\ \Longrightarrow & 2 \text{ ist Primteiler von } q. \end{array}$$

Die Aussagen in der zweiten und letzten Zeile stellen einen Widerspruch zur „Gekürztheit" von $\sqrt{2}$ dar.

Oft ist es bei Formulierungen von Sätzen so, dass die Aussage $\mathcal{A}$ unausgesprochen einen Kontext $\mathcal{K}$ (beispielsweise die bisher behandelten Axiome und Sätze) beinhaltet. Man verzichtet also auf die Angabe der Voraussetzung.

Beispiel eines solchen Satzes: Die Lösungen einer quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{mit } b^2 - 4ac > 0$$

sind gegeben durch

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{und } x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Der Kontext besteht darin, dass die zugrundeliegende Zahlenmenge die Menge der reellen Zahlen ist mit den zugehörigen Rechengesetzen. (Vgl. Schulpraxis: Die Grundmenge)

Die Bijunktion Anstelle von „$\mathcal{A}$ ÄQUIVALENT $\mathcal{B}$" sagt man auch:

- $\mathcal{A}$ ist hinreichend und notwendig für $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{A}$ genau dann, wenn $\mathcal{B}$.
- (Engl.) $\mathcal{A}$, if and only if $\mathcal{B}$, in Kurzform manchmal: $\mathcal{A}$, iff $\mathcal{B}$.

Beispiel (Satz von Thales über Dreieck ΔABC): Ein Kreis mit $[AB]$ als Durchmesser geht genau dann durch C, wenn der Innenwinkel bei C das Maß 90° hat.

Ein Vergleich der Wertetabellen zeigt, dass

$$(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \quad \Leftrightarrow \quad \Big((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})\Big).$$

Das bedeutet, dass der Beweis einer Äquivalenz zwei Teile umfasst: Den Beweis der Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ und den Beweis von $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$.

Aussagenalgebra

In den Übungen. Ein Beispiel:

$$\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$$

Beweis durch Wahrheitstabelle:

$\mathcal{A}$	w	w	w	w	f	f	f	f
$\mathcal{B}$	w	w	f	f	w	w	f	f
$\mathcal{C}$	w	f	w	f	w	f	w	f
$\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$	w	w	w	f	f	f	f	f
$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$	w	w	w	f	f	f	f	f

1.3 Operieren mit Mengen

Gleichheit Zwei Mengen sind (per definitionem, Cantor) gleich, (genau dann,) wenn sie in ihren Elementen übereinstimmen.

$$X = Y \quad \Longleftrightarrow \quad (a \in X \Longrightarrow a \in Y) \text{ und } (a \in Y \Longrightarrow a \in X).$$

Teilmenge Es seien zwei Mengen X, Y gegeben.

- Y heißt *Teilmenge* von X,

  (symb.) $Y \subseteq X$,

  wenn aus $x \in Y$ folgt: $x \in X$.
- Y heißt *echte Teilmenge* von X, wenn zusätzlich $Y \neq X$ gilt.

Folgerungen:

1. Für jede Menge X gilt:

$$\emptyset \subseteq X.$$

2. Für zwei Mengen X und Y sind die beiden Aussagen

$$X = Y, \qquad X \subseteq Y \text{ und } Y \subseteq X$$

äquivalent. Der Nachweis der Gleichheit zweier Mengen geschieht oft durch den Nachweis der wechselweisen Teilmengenbeziehung.

Aussagen definieren Teilmengen Es sei X eine Menge. Für jedes $x \in X$ sei eine Aussage $\mathcal{A}(x)$ vorgegeben. Dann kann die Teilmenge

$$Y = \{x \in X \Big| \mathcal{A}(x) \text{ ist wahr } \}$$

gebildet werden.

- Der senkrechte Strich ist als ,,mit der Eigenschaft, dass" zu lesen.
- die Angabe ,,ist wahr" wird weggelassen.

Differenzmenge Für zwei vorgegebene Mengen X, Y heißt

$$X \setminus Y := \Big\{x \in X \Big| x \notin Y\Big\}$$

die *Differenzmenge*.
(Der Doppelpunkt steht auf der Seite des zu definierenden Objekts.)
Beispiele: Sind

$$X_1 = \{0, 1, 4, 7, 9\}, \qquad Y_1 = \{0, 2, 3, 4, 5\},$$

so gilt:

$$X_1 \setminus Y_1 = \{1, 7, 9\}.$$

Wir haben dabei nicht vorausgesetzt, dass Y eine Teilmenge von X ist. Falls dies der Fall ist, so heißt die Differenzmenge $X \setminus Y$ auch das *Komplement* oder *Komplementärmenge* von Y in X. Beispiel:

$$\{1, 4\} \text{ ist das Komplement von } \{0, 7, 9\} \text{ in } X_1.$$

Vereinigungsmenge Für zwei vorgegebene Mengen X, Y heißt

$$X \cup Y := \{z | z \in X \text{ oder } z \in Y\}$$

die *Vereinigung(-smenge)* von X und Y.
Beispiel:

$$X_1 \cup Y_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}.$$

Schnittmenge Für zwei vorgegebene Mengen X, Y heißt

$$X \cap Y \ := \ \{z | z \in X \ \text{ und } \ z \in Y\}$$

die *Schnittmenge* oder der *Durchschnitt* von X und Y.
Beispiel:

$$X_1 \cap Y_1 = \{0, 4\}.$$

Zwei Mengen X und Y, für die $X \cap Y = \varnothing$ gilt, heißen *disjunkt.*

Graphische Veranschaulichungen durch **Venn–Diagramme**.

Potenzmenge Ist eine Menge X gegeben, so heißt die Menge aller Teilmengen von X die *Potenzmenge* von X. Sie wird mit $\mathcal{P}(X)$ bezeichnet.

Es ist $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\Big\}$.

Mengenalgebra

In den Übungen. Ein Beispiel:

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

Beweis: Es sei $a \in X \cup Y \cup Z$. Wir betrachten die drei Aussagen:

$$\mathcal{A} : a \in X, \qquad \mathcal{B} : a \in Y, \qquad \mathcal{C} : a \in Z.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & a \in X \cap (Y \cup Z) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \\ \Longleftrightarrow \quad & (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \quad \Longleftrightarrow \quad a \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \end{aligned}$$

1.4 Relationen und Funktionen

Geordnete Paare Für zwei vorgegebene Mengen X, Y und Elemente $x \in X$, $y \in Y$ heißt

$$(x, y) := \Big\{\{x, y\}, \{x\}\Big\}$$

das durch x und y gebildete *(geordnete) Paar* oder 2–*Tupel*. x und y heißen in diesem Zusammenhang die erste bzw. zweite Koordinate des Paares.

Satz: Sind X, Y zwei Mengen mit $x_1, x_2 \in X$ und $y_1, y_2 \in Y$ so gilt:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2 \text{ und } y_1 = y_2.$$

Bemerkung: Der Satz wäre mit Mengen anstelle geordneter Paare falsch.

Beweis: Die eine Richtung $\Leftarrow$ ist ,,trivial". Die andere Richtung $\Rightarrow$ muß bewiesen werden.

$$\begin{array}{ll} & (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \\ \Longrightarrow & \Big\{\{x_1, y_1\}, \{x_1\}\Big\} = \Big\{\{x_2, y_2\}, \{x_2\}\Big\} \\ \Longrightarrow & (\{x_1\} = \{x_2\} \text{ und } \{x_1, y_1\} = \{x_2, y_2\}) \quad \text{oder} \\ & (\{x_1\} = \{x_2, y_2\} \text{ und } \{x_2\} = \{x_1, y_1\}). \end{array}$$

Wir betrachten die zwei Fälle:
1. Fall:

$$\begin{array}{ll} & \{x_1\} = \{x_2\} \text{ und } \{x_1, y_1\} = \{x_2, y_2\} \\ \Longrightarrow & x_1 = x_2 \text{ und } y_1 \in \{x_2, y_2\} \text{ und } y_2 \in \{x_1, y_1\} \\ \Longrightarrow & x_1 = x_2 \text{ und } (y_1 = x_2 = x_1 \text{ oder } y_1 = y_2) \text{ und } (y_2 = x_1 = x_2 \text{ oder } y_2 = y_1) \\ \Longrightarrow & x_1 = x_2 \text{ und } y_1 = y_2. \end{array}$$

2. Fall:

$$\begin{array}{ll} & \{x_1\} = \{x_2, y_2\} \text{ und } \{x_2\} = \{x_1, y_1\} \\ \Longrightarrow & x_1 = x_2 = y_2 = y_1. \end{array}$$

Ist der auf der obigen ,,umständlichen" Definition basierende Satz bewusst gemacht und akzeptiert, so kann man die Definition ,,getrost wieder vergessen".

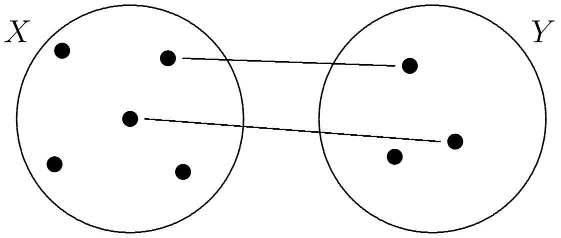
Das kartesische Produkt Das *Kartesische Produkt* (René Descartes, fr, 1596 – 1650) der Mengen X und Y ist die Menge der geordneten Paare:

$$X \times Y := \Big\{(x, y) \Big| \, x \in X, y \in Y\Big\}.$$

Beachte, das im allgemeinen gilt:

$$X \times Y \neq Y \times X.$$

Relationen Eine *Relation R zwischen X und Y* ist eine beliebige Teilmenge von $X \times Y$. Gut kann man das mit Hilfe eines Liniendiagramms oder Pfeildiagramms veranschaulichen:



Zwischen einem Element $x \in X$ und einem Element $y \in Y$ wird genau dann eine Linie gezogen, wenn $(x, y) \in R$.

Ist R eine Relation, so heißt

$$R^{-1} := \Big\{ (y, x) \;\Big|\; (x, y) \in R \Big\}$$

die zu R *gespiegelte* Relation oder *Spiegelrelation.*

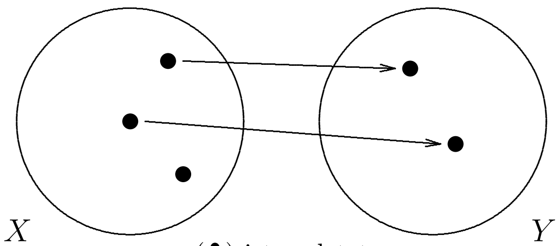
Eine Relation zwischen X und Y heißt

(♣) links–total,	wenn für jedes	$x \in X$ mindestens ein $y \in Y$
(♠) rechts–eindeutig,		$x \in X$ höchstens ein $y \in Y$
(♡) rechts–total,		$y \in Y$ mindestens ein $x \in X$
(♢) links–eindeutig,		$y \in Y$ höchstens ein $x \in X$

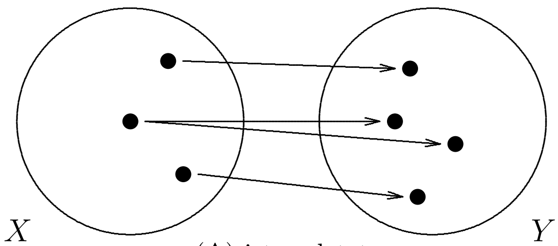
existiert, so dass $(x, y) \in R$.

Im Diagramm veranschaulicht heißt dies:

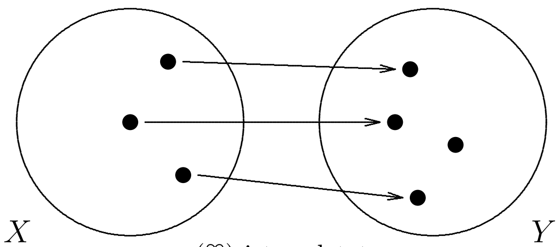
In	$x \in X$ startet mindestens	ein Pfeil.
	$x \in X$ startet höchstens	
	$y \in Y$ endet mindestens	
	$y \in Y$ endet höchstens	



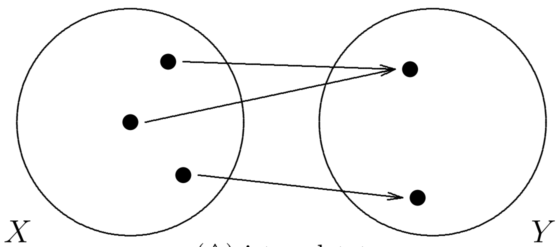
(♣) ist verletzt



(♠) ist verletzt



(♡) ist verletzt



(♢) ist verletzt

Funktionen Eine Relation zwischen X und Y heißt *Funktion* oder *Abbildung von X nach Y*, wenn sie links–total (♣) und rechts–eindeutig (♠) ist. In diesem Zusammenhang heißt X *Definitionsmenge* und Y *Wertemenge* der Funktion.

Funktionen werden oft mit kleinen Buchstaben bezeichnet: $f, g, h, \ldots$

Die soeben gegebene Definition des Begriffs „Funktion" ist mathematisch befriedigend, für das praktische Arbeiten aber zu umständlich und zu statisch. Eine andere Definition, die nicht in der Mengenlehre verankert ist, unterstreicht den eher dynamischen Charakter einer Funktion:

Es seien zwei Mengen X und Y gegeben. Eine Funktion von X nach Y ist eine Vorschrift, die **jedem** $x \in X$ **genau ein** $y \in Y$ zuordnet. Dies wird auch in einer gänzlich veränderten Notation deutlich:

$$f : \begin{cases} X & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

$f(x)$ ist dabei ein irgendwie gearteter mathematisch sinnvoller Ausdruck (Term, Textdefinition, auch per Fallunterscheidung,...).

Im Diagramm veranschaulicht heißt dies, dass in **jedem** $x \in X$ **genau ein** Pfeil startet.

Geht man von dieser Definition aus, so wird die zugehörige Relation oft als Graph G_f der Funktion bezeichnet:

$$G_f := \Big\{(x, y) \in X \times Y \Bigm| y = f(x)\Big\}.$$

Auch Teilmengen $X' \subseteq X$ bzw. $Y' \subseteq Y$ werden durch eine Funktion $f : X \to Y$ zugeordnet:

$$\begin{aligned} f(X') &:= \Big\{y \in Y \Bigm| \text{Es ex. } x \in X' \text{ mit } f(x) = y\Big\} \\ f^{-1}(Y') &:= \Big\{x \in X \Bigm| f(x) \in Y'\Big\} \end{aligned}$$

Die Menge $f(X)$ heißt *Bild(–menge)* der Funktion f. Unterscheide Bild- und Wertemenge!

	injektiv,		links-eindeutig	
Eine Funktion heißt	*surjektiv*,	wenn sie zusätzlich	rechts-total	ist.
	bijektiv,		links-eindeutig und rechts-total	

Ist X eine Menge, so heißt die Funktion (Begründung)

$$\mathrm{id}_X \ := \ \Big\{(x,x) \in X \times X \ \Big| \ x \in X\Big\}$$

die *identische Funktion* oder *Identität auf* X. Innerhalb der Zuordnungsauffassung schreibt man oft kurz $x \mapsto x$. Jedem Element $x \in X$ wird eben dieses selbe Element x zugeordnet.

Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen, so heißt die Funktion (Begründung)

$$g \circ f \ := \ \Big\{(x,z) \in X \times Z \ \Big| \ \text{Es ex. } y \in Y \text{ mit } (x,y) \in f, (y,z) \in g\Big\}$$

die *Hintereinanderausführung* oder *Komposition* der Funktionen f und g. Da f eine Funktion ist, ist das y in der Definition eindeutig bestimmt.

Innerhalb der Zuordnungsauffassung schreibt man $x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$. Achte darauf, dass innerhalb eines ,,Operator–Diagramms”

$$x \ \xrightarrow{\ f\ } \ f(x) \ \xrightarrow{\ g\ } \ g(f(x)).$$

die Rechts–Links–Reihenfolge von f und g vertauscht ist.

Kriterien für Injektivität und Surjektivität

(i) Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann injektiv, wenn eine Funktion $g : Y \to X$ existiert, so dass $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

(ii) Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann surjektiv, wenn eine Funktion $g : Y \to X$ existiert, so dass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Beweis Wir müssen vier Aussagen beweisen:

(i) $\Longrightarrow$

Es sei $x_0 \in X$ fest ausgewählt. Definiere die Funktion g durch

$$g(y) \ := \ \begin{cases} x, & \text{falls } x \text{ (dann eindeutig) exisitert, so dass } f(x) = y, \\ x_0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für alle $x \in X$ gilt dann $g(f(x)) = x$.

(i) $\Longleftarrow$

Es seien $x_1, x_2 \in X$ beliebig mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann gilt:

$$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2,$$

also ist f injektiv.

(ii) $\Longrightarrow$

Zu jedem $y \in Y$ wähle ein $x \in X$, so dass $f(x) = y$. Es gibt mindestens ein solches x, da f surjektiv. Definiere g durch $g(y) = x$. Dann gilt für alle $y \in Y$: $f(g(y)) = f(x) = y$.

(ii) $\Longleftarrow$

Sei $y \in Y$. Dan existiert zu jedem $y \in Y$ ein x, nämlich $x = g(y)$, so dass

$$f(x) = f(g(y)) = y.$$

♦

Satz über die Umkehrfunktion Die drei folgenden Aussagen über eine Funktion $f : X \to Y$ sind äquivalent:

(i) f ist bijektiv.

(ii) Die zu f gehörige Spiegelrelation f^{-1} ist eine Funktion.

(iii) Es existiert eine Funktion $g : Y \to X$ mit

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \qquad \text{und} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y .$$

In diesem Fall gilt $g = f^{-1}$. Diese Funktion heißt *Umkehrfunktion* zu f.

Beweis (i) $\Longrightarrow$ (iii) ist fast klar nach dem vorherigen Satz. Wir müssen für (i) $\Longrightarrow$ (iii) nur noch zeigen: Die nach dem letzten Satz existierenden Funktionen $g_1, g_2 : Y \to X$ mit

$$g_1 \circ f = \mathrm{id}_X \qquad \text{und } f \circ g_2 = \mathrm{id}_Y$$

sind identisch:

$$g_1 = g_1 \circ \mathrm{id}_Y = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = \mathrm{id}_X \circ g_2 = g_2$$

Dabei haben wir benutzt, dass für die Hintereinanderausführung von Funktionen das Assoziativgesetz gilt.

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) ist auch ganz einfach:

$$\begin{aligned} f \text{ bijektiv} \quad &\Longleftrightarrow \quad f \text{ links–eindeutig und rechts–total} \\ &\Longleftrightarrow \quad f^{-1} \text{ rechts–eindeutig und links–total} \\ &\Longleftrightarrow \quad f^{-1} \text{ Funktion} \end{aligned}$$

♦

2 Angeordnete Körper

2.1 Körper

Im folgenden dürfen Sie gerne an die aus der Schule bekannten Zahlenräume $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ denken. Sie werden innerhalb dieser Vorlesung erst später solide eingeführt.

Definition
Eine Menge $\mathbb{K}$, auf der zwei Verknüpfungen

$$+ \begin{cases} \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ (a,b) & \mapsto & a+b \end{cases} \qquad \text{(Addition)}$$

und

$$\cdot \begin{cases} \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ (a,b) & \mapsto & a \cdot b \end{cases} \qquad \text{(Multiplikation)}$$

definiert sind, heißt *(kommutativer) Körper* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, wenn die folgenden Eigenschaften (Schule: Rechengesetze) erfüllt sind:

AG/A Assoziativgesetz der Addition
Für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

Damit wird die Schreibweise $a+b+c \ := \ (a+b)+c$ sinnvoll.

KG/A Kommutativgesetz der Addition
Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ gilt:

$$a+b = b+a.$$

NE/A Neutrales Element der Addition
Es gibt genau ein Element $0 \in \mathbb{K}$, so dass für alle $a \in \mathbb{K}$ gilt:

$$a+0 = a.$$

IE/A Additiv inverse Elemente
Zu jedem $a \in \mathbb{K}$ gibt es genau ein Element $b \in \mathbb{K}$, so dass gilt:

$$a+b = 0.$$

AG/M Assoziativgesetz der Multiplikation
Für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Damit wird die Schreibweise $a \cdot b \cdot c \ := \ (a \cdot b) \cdot c$ sinnvoll.

KG/M Kommutativgesetz der Multiplikation
Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ gilt:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

NE/M Neutrales Element der Multiplikation
Es gibt genau ein Element $1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, so dass für alle $a \in \mathbb{K}$ gilt:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

IE/M Multiplikativ inverse Elemente
Zu jedem $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ gibt es genau ein Element $b \in \mathbb{K}$, so dass gilt:

$$a \cdot b = 1.$$

DG Distributivgesetz
Für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Die Unterlassung der Klammersetzung im letzten Term wird durch die Punkt–vor–Strich–Konvention gerechtfertigt: Punktrechnung bindet stärker als Strichrechnung.

Bemerkungen

0) Die aus der Schule bekannten Mengen der rationalen bzw. reellen Zahlen bilden mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation als Verknüpfung jeweils einen Körper. Wir wollen diese Beispiele aber erst später genauer einführen.

1) In NE/A würde es genügen, zu fordern, dass **mindestens** ein Element n existiert, so dass für alle $a \in \mathbb{K}$ gilt: $a + n = a$.

   Gäbe es nämlich zwei Elemente n_1, n_2 mit dieser Eigenschaft, so kann man schließen:

$$n_1 = n_1 + n_2 = n_2 + n_1 = n_2.$$

   Das eindeutig bestimmte Element heißt auch das *Nullelement*.

2) Entsprechendes gilt für NE/M. Das eindeutig bestimmte neutrale Element der Multiplikation heißt auch das *Einselement*.

3) Auch in IE/A würde es genügen zu fordern, dass für jedes $a \in \mathbb{K}$ **mindestens** ein Element b existiert, so dass gilt: $a + b = 0$.

   Hätte nämlich ein Element $a \in \mathbb{K}$ zwei inverse b_1 und b_2, so könnte man schließen:

$$b_1 = b_1 + 0 = b_1 + (a + b_2) = (b_1 + a) + b_2 = (a + b_1) + b_2 = 0 + b_2 = b_2.$$

   Da das additive inverse eines Elements a eindeutig bestimmt ist, kann man es durch ein Symbol direkt angeben: Wir wählen dafür: $-a$.

4) Weiter schreibt man abkürzend für je zwei Elemente aus $\mathbb{K}$:

$$a - b \;:=\; a + (-b).$$

Damit ist eine weitere Verknüpfung, die wir *Subtraktion* nennen, bereits in den Körpereigenschaften mitenthalten.

5) Entsprechendes gilt für IE/M. Das eindeutig bestimmte multiplikativ inverse eines Elements $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ wird mit a^{-1} bezeichnet. Weiter führt man die Schreibweise

$$a : b \;:=\; a \cdot b^{-1}$$

ein. Diese in den Körpereigenschaften bereits enthaltende Verknüpfung heißt *Division*.

6) Der Malpunkt der Multiplikation wird oft weggelassen. Man schreibt abkürzend:

$$ab \;:=\; a \cdot b.$$

7) Es wird die Konvention ,,Punkt vor Strich" benutzt. Das Distributivgesetz kann dann so geschrieben werden:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Beispiel Wir definieren auf der Menge $\{g, u\}$ die Verknüpfungen

$+$	g	u
g	g	u
u	u	g

$\cdot$	g	u
g	g	g
u	g	u

Den Beweis, dass dies ein Körper ist, werden wir hier nicht durchführen. Man müsste dazu die obigen Rechengesetze für alle möglichen Belegungen der Variablen mit g oder u nachprüfen. Das Null–Element ist $0 = g$. Das Eins–Element ist $1 = u$.

Satz 1 *Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper.*

(i) Es ist $-0 = 0$.

(ii) Für beliebiges $a \in \mathbb{K}$ gilt

$$-(-a) = a.$$

(iii) Für beliebiges $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ gilt

$$(a^{-1})^{-1} = a.$$

(iv) Für beliebige $a, b \in \mathbb{K}$ gilt

$$-(a + b) = (-a) + (-b).$$

(v) Für beliebige $a, b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ *gilt*

$$(ab)^{-1} = (a)^{-1} \cdot (b)^{-1}.$$

(vi) Zu vorgegebenem $a, b \in \mathbb{K}$ *gibt es genau ein* $c \in \mathbb{K}$*, so dass*

$$a + c = b.$$

(vii) Zu vorgegebenem $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{K}$ *gibt es genau ein* $c \in \mathbb{K}$*, so dass*

$$a \cdot c = 0.$$

Anders formuliert: Die Gleichung $a + x = b$ *besitzt genau eine Lösung.*

(viii) Für beliebiges $a \in \mathbb{K}$ *gilt*

$$a \cdot 0 = 0.$$

Anders formuliert: Die Gleichung $a \cdot x = b$ *besitzt genau eine Lösung.*

(ix) (Nullteilerfreiheit) Für beliebige $a, b \in \mathbb{K}$ *gilt*

$$a \cdot b = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = 0 \text{ oder } b = 0.$$

(x) Beachte, dass die Folgerung

$$a + a + \ldots + a = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 0$$

im allgemeinen nicht gilt.

Beweis (i) Es ist $0 + 0 = 0$. Also ist 0 additiv invers zu 0.
(vi) Setze $c := b + (-a)$. Dann gilt:

$$a + c = a + (b + (-a)) = a + (-a) + b = b.$$

Angenommen es gibt zwei Elemente $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ mit der geforderten Eigenschaft. Dann gilt

$$c_1 = 0 + c_1 = (-a) + a + c_1 = (-a) + b = (-a) + a + c_2 = 0 + c_2 = c_2.$$

(vii) Für die Multiplikation geht der Beweis analog.
(viii)

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0.$$

Damit hat die Gleichung

$$a \cdot 0 + x = a \cdot 0$$

die Lösungen $a \cdot 0$ und 0. Nach (vii) müssen diese beiden Lösungen übereinstimmen.
(ix) Die Richtung $\Longleftarrow$ ist trivial. Sei also $ab = 0$, wir nehmen an, dass $a \neq 0$. Dann folgt mit (viii):

$$b = 1 \cdot b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0.$$

(x)
In dem Körper mit zwei Elementen (s.o) gilt

$$u + u = g \quad \text{und} \quad u \neq g.$$

♦

2.2 Exkurs: Lineare Ordnung

Es sei X eine Menge und $R \subseteq X \times X$ eine *Relation auf* X. Im folgenden sind mögliche Eigenschaften einer solchen Relation aufgelistet.

Definition Die Relation R heißt ...

- *reflexiv*, wenn für alle $x \in X$ gilt:

  $$(x, x) \in R.$$

- *transitiv*, wenn für alle $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$ die folgende Implikation gilt:

  $$(x, y) \in R \quad \text{und} \quad (y, z) \in R \qquad \Longrightarrow \qquad (x, z) \in R.$$

- *antisymmetrisch*, wenn für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ höchstens eine der beiden folgenden Aussagen wahr ist:

  $$(x, y) \in R \qquad\qquad (y, x) \in R$$

- *total*, wenn für alle $x, y \in X$ mindestens eine der beiden folgenden Aussagen wahr ist:

  $$(x, y) \in R, \qquad (y, x) \in R$$

- *lineare* (oder *totale*) *Ordnung*, wenn sie reflexiv, transitiv, antisymmetrisch und total ist.

- *trichotom*, wenn für alle $x, y \in X$ genau eine der folgenden drei Aussagen wahr ist:

  $$\begin{array}{c} (x, y) \in R \\ \text{UND} \\ x \neq y \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} (y, x) \in R \\ \text{UND} \\ x \neq y \end{array} \qquad\qquad x = y.$$

Bemerkungen

1. Ist R eine lineare Ordnung, so benutzt man die viel suggestivere Schreibweisen

   $$(x, y) \in R \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq y \qquad \Longleftrightarrow \qquad y \geq x.$$

   und

   $$(x, y) \in R \text{ und } x \neq y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x < y \qquad \Longleftrightarrow \qquad y > x.$$

   Man sagt im zweiten Fall ,,echt kleiner" oder ,,streng kleiner" bzw. ,,echt größer" oder ,,streng größer".

2. Überlege: Eine Relation ist eine lineare Ordnung genau dann, wenn sie reflexiv, transitiv und trichotom ist. Die Trichotomie bedeutet, dass für $x, y \in X$

   $$\text{ENTWEDER} \quad x < y \quad \text{ODER} \quad y < x \quad \text{ODER} \quad x = y$$

2.3 Angeordnete Körper

Definition Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt (an–)geordneter Körper, wenn auf ihm eine lineare Ordnung $\leq$ erklärt ist, die sich mit den Körpergesetzen ,,verträgt". Das heißt genauer, es sollen die folgenden Eigenschaften erfüllt sein:

R/A Für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt die Implikation

$$a \leq b \qquad \Longrightarrow \qquad a + c \leq b + c.$$

R/M Für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt die Implikation

$$a \leq b \text{ und } c \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a \cdot c \leq b \cdot c.$$

Bemerkungen:

1) $$\text{Die Elemente } a \in \mathbb{K} \text{ mit } \begin{cases} a > 0 \\ a \geq 0 \\ a < 0 \\ a \leq 0 \end{cases} \text{heißen } \begin{cases} \textit{positiv,} \\ \textit{nicht–negativ,} \\ \textit{negativ,} \\ \textit{nicht–positiv.} \end{cases}$$

Folgerung 2 *Sind a, b, c, d Elemente eines angeordneten Körpers $\mathbb{K}$, so gilt:*

(i) $a \leq b \quad \Longrightarrow \quad -b \leq -a.$

(ii) $0 \leq a \quad \Longrightarrow \quad -a \leq 0.$

(iii) $a \leq b$ *und* $c \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad bc \leq ac.$

(iv) $a^2 \geq 0,$ *insbesondere* $0 < 1.$

(v) $a > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a$ *ist invertierbar mit* $a^{-1} > 0$

$a < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a$ *ist invertierbar mit* $a^{-1} < 0.$

(vi) $1 < a \quad \Longleftrightarrow \quad a^{-1} < 1.$

(vii) $a \leq b$ *und* $c \leq d \quad \Longrightarrow \quad a + c \leq b + d.$

(viii) $a \leq b$ *und* $0 \leq c \leq d \quad \Longrightarrow \quad ac \leq bd.$

Beweis in den Übungen.

2.3.1 Besondere Teilmengen eines angeordneten Körpers

Satz 3 *In jedem angeordneten Körper $\mathbb{K}$ gibt es eine Teilmenge $N = N_{\mathbb{K}} \subseteq \mathbb{K}$, die die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(P0) Es ist $1 \in N$.

*Es gibt eine Abbildung $\nu : N \to N$ (*Nachfolger–Abbildung*) mit folgenden Eigenschaften:*

(P1) $1 \notin \nu(N)$ (Also ist die Abbildung ν nicht surjektiv).

(P2) Die Abbildung ν ist injektiv, das heißt, für alle $a, b \in N$ mit $a \neq b$ gilt: $\nu(a) \neq \nu(b)$.

(P3) Gilt für eine Teilmenge $A \subseteq N$

$$1 \in A \ \textit{und} \ \Big(a \in A \Longrightarrow \nu(a) \in A\Big),$$

so gilt $A = N$.

Bemerkungen

- Die Eigenschaften $(P0)$ bis $(P3)$ heißen auch die *Peano–Axiome*. Sie erscheinen hier als Eigenschaften einer Teilmenge eines angeordneten Körpers. Man kann umgekehrt auch die Peano–Axiome über eine Menge N an den Anfang stellen und darauf aufbauend geeignete Körper, die diese Menge N enthalten konstruieren.
- Man könnte Elemente in $N_{\mathbb{K}}$ als die natürlichen Zahlen in $\mathbb{K}$ bezeichnen. Es stellt sich dann die Frage, ob es, je nach vorgegebenem angeordneten Körper $\mathbb{K}$, „viele verschiedene Mengen“ von natürlichen Zahlen gibt. Diese Frage ist für die praktische — und auch die reine — Mathematik nicht so wichtig. Entscheidend ist, dass die vielen Kopien $N_{\mathbb{K}}$ alle die gleiche Struktur, eben die durch die Peano–Axiome definierte, aufweisen. Man spricht in der Mathematik von *Isomorphie*. Wir werden bald das Problem dadurch beheben, dass wir die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen als $N_{\mathbb{R}}$ **eines** fest vorgegebenen Körpers $\mathbb{R}$ einführen.

Beweis Eine Teilmenge M von $\mathbb{K}$ heißt *induktiv geordnet*, falls die beiden Aussagen

$$1 \in M \qquad \text{und} \qquad (a \in M \quad \Longrightarrow \quad a+1 \in M)$$

gelten. Wir definieren $N_{\mathbb{K}}$ als Schnittmenge aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{K}$:

$$N_{\mathbb{K}} := \Big\{ a \in \mathbb{K} \ \Big| \ a \in M \ \text{ für alle induktiv geordneten Teilmengen } M \subseteq \mathbb{K} \Big\}$$

und wählen die Abbildung ν als die Plus–Eins–Abbildung

$$\nu \begin{cases} \mathbb{K} & \to \ \mathbb{K} \\ a & \mapsto \ a+1. \end{cases}$$

Wir müssen jetzt zeigen, dass die Peano–Axiome erfüllt sind.

(P1) Die Zahl 1 ist in jeder induktiven Teilmenge M enthalten, also ist sie auch in der Schnittmenge aller dieser Mengen enthalten.

(P2) Die Menge $M^* = \{a \in \mathbb{K} | a \geq 1\}$ ist induktiv. Also gilt

$$0 \notin M^* \quad \Longrightarrow \quad 0 \notin N_{\mathbb{K}} \quad \Longrightarrow \quad 1 \notin \nu(N_{\mathbb{K}}).$$

(P3) Genügt eine Teilmenge $A \subseteq N_{\mathbb{K}}$ den in [P3] aufgeführten Eigenschaften, so ist A induktiv. Da aber $N_{\mathbb{K}}$ in jeder induktiven Teilmenge M enthalten ist, gilt auch

$$N_{\mathbb{K}} \subseteq A.$$

Insgesamt gilt dann $A = N_{\mathbb{K}}$.

♦

Im folgenden setzen wir die folgenden Begriffe und Sätze über natürliche Zahlen aus der Schulmathematik als bekannt voraus:

- Dezimaldarstellung,
- Satz über Existenz und Eindeutigkeit der Dezimaldarstellung von natürlichen Zahlen,
- Teilbarkeitslehre, Primzahlen,
- Satz über Existenz und Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung von natürlichen Zahlen.

Für einen angeordneten Körper kann man weitere besondere Teilmengen definieren:

Definition Die Menge

$$Z_{\mathbb{K}} := \{a \in \mathbb{K} | a \in N_{\mathbb{K}} \text{ oder } -a \in N_{\mathbb{K}} \text{ oder } a = 0\}$$

heißt die ,,Menge der ganzen Zahlen in $\mathbb{K}$”. Die Menge

$$Q_{\mathbb{K}} := \{a \in \mathbb{K} | \text{ Es existieren } p \in Z_{\mathbb{K}}, q \in N_{\mathbb{K}}, \text{ so dass } a = p \cdot q^{-1}\}$$

heißt die ,,Menge der rationalen Zahlen in $\mathbb{K}$”.

Im folgenden setzen wir die folgenden Begriffe und Sätze über rationale Zahlen aus der Schulmathematik als bekannt voraus:

- Rationalen Zahlen können in Bruchschreibweise

  $$a = p \cdot q^{-1} = \frac{p}{q}$$

  dargestellt werden.
- Rechengesetze über die gewöhnliche Bruchrechnung: Kürzen, Erweitern, lineare Ordnung, Grundrechenarten, gemischte Zahlen, Doppelbrüche.
- Satz über die Existenz und Eindeutigkeit der Darstellung von rationalen Zahlen durch periodische (oder endliche) Dezimalbrüche (,,Kommazahlen”).

Satz 4 *Das Ergebnis einer Addition oder Multiplikation zweier rationaler Zahlen ist wieder eine rationale Zahl. Mit anderen Worten: $Q_{\mathbb{K}}$ ist ein ,,Teilkörper” von $\mathbb{K}$, ein angeordneter Körper (in sich).*

Beweis Zum Beweis muss man zeigen, dass die Summe bzw. das Produkt zweier rationaler Zahlen $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ wieder als Bruch $\frac{u}{v}$ geschrieben werden kann. Man überzeugt sich aber mit Hilfe der Körper–Rechen–Gesetze davon, dass

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs} \qquad \text{und} \qquad \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}.$$

♦

Wir sprechen im folgenden einfach von **den** natürlichen, ganzen oder rationalen Zahlen (und meinen die irgendeines geordneten Körpers $\mathbb{K}$).

Bezeichnungen:

$$\mathbb{N}, \qquad \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, \qquad \mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Q}.$$

Wir setzen aus der Schulmathematik weiter voraus: Rechnen mit Potenzen der Form

$$a^n \qquad \text{wobei } a \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N} \text{ oder } a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{Z}.$$

2.4 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Definition Es sei X eine beliebige Menge. Eine *Aussageform* (über X) ist eine Aussage mit einer Variablen, für die beliebige Elemente aus X eingesetzt werden können. Man schreibt symbolisch auch $\mathcal{A}(x)$, wobei $x \in X$.

Beispiele für Aussageformen ($X = \mathbb{N}$).

- $\mathcal{B}(n) : (n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n$.
- $\mathcal{C}(n)$: n ist eine Quadratzahl.
- $\mathcal{D}(n)$: Das Quadrat von n ist negativ.

Es sei $\mathcal{A}(n)$ eine Aussageform über den natürlichen Zahlen. Wir können, dann die Teilmenge von $\mathbb{N}$

$$A' := \{\ n \in \mathbb{N} \,|\, \mathcal{A}(n) \ \text{(ist wahr)}\ \}$$

definieren.

Auf diese Weise wandelt sich das Axiom P3 in das *Beweis–Prinzip der vollständigen Induktion*:

WENN $\mathcal{A}(1)$ wahr ist

UND für alle $n \in \mathbb{N}$ die Implikation $\mathcal{A}(n) \Longrightarrow \mathcal{A}(\nu(n))$ gilt,

DANN ist $\mathcal{A}(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Aussage in der ersten Zeile heißt in diesem Zusammenhang auch *Induktionsanfang*. Die Aussage $\mathcal{A}(n)$ in der zweiten Zeile heißt *Induktionsvoraussetzung* oder *Induktionsannahme*. Die Implikation in der zweiten Zeile wird als *Induktionsschritt* oder *Induktionsschluss* bezeichnet.

Beweis: Man wende das Peano–Eigenschaft P3 auf die Teilmenge

$$A' = \{n \in \mathbb{N} | \mathcal{A}(n) \text{ ist wahr } \}$$

an.

Entscheidend an diesem Prinzip ist die Tatsache, dass unendlich viele Aussagen durch zwei Aussagen ,,mathematisch dingfest" gemacht sind.

Wendet man das Beweisprinzip entsprechend bei einer Definition an, so spricht man von *rekursiver Definition*: Mathematische Objekte M_n können für $n \in \mathbb{N}$ dadurch definiert werden, dass

1. das Objekt M_1 definiert wird und
2. für jedes $n \in \mathbb{N}$ angegeben wird, wie das Objekt M_{n+1} bei bekanntem M_n definiert ist.

- Die Summenschreibweise: Es sei für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ eine Zahl a_k gegeben. Dann ist durch

  $$S_1 = a_1, \qquad S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$$

  die zugehörige Summenfolge definiert. Um den Aufwand in der Definition geringer zu halten, schreibt man kürzer und suggestiver:

  $$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \quad \text{oder} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

- Beispiel: Wir definieren für $k \in \mathbb{N}_0$ die Gauss–Summe:

  $$s_0 = 0, \qquad s_{k+1} = s_k + (k+1),$$

  das heißt also

  $$s_n = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = \sum_{k=0}^{n} k.$$

  Wir zeigen durch Induktion:

  $$s_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Induktionsanfang: $s_0 = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$
Induktionsschluss: Wir nehmen an, dass die Behauptung für $n \geq 2$ gezeigt ist. Dann gilt:

$$s_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} (n+1) + s_n \stackrel{\text{IndV}}{=} (n+1) + \frac{n \cdot (n+1)}{2} =$$
$$= \frac{2(n+1) + n \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}.$$

Also gilt die Behauptung auch für $n+1$.

Nach dem Induktionsprinzip ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}_0$ richtig.

- Beispiel: Wir beweisen durch Induktion, dass die Summe der ersten k Quadratzahlen gegeben ist durch

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Induktionsanfang:

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)}{6}.$$

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Aussage für n gezeigt ist. Dann folgt:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \stackrel{\text{IndV}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$
$$(n+1) \cdot \frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6} = (n+1) \cdot \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} =$$
$$(n+1) \cdot \frac{(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Die gesamte Gleichungskette zeigt auf, dass die Aussage für $n+1$ gezeigt ist.

- Ähnlich wie bei Summen kann man mittels rekursiver Definition auch Produkte definieren:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

- Wir definieren die Fakultäts–Funktion:

$$\begin{cases} \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N}_0 \\ n & \mapsto & n! \end{cases} \qquad \text{durch } 0! = 1, \qquad (n+1)! = (n+1) \cdot n! \text{ für alle } n \geq 0.$$

Suggestiver:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = \prod_{k=1}^{n} k.$$

2.5 Der binomische Lehrsatz

Wir definieren für zwei Zahlen $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{Z}$ den *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 0, & \text{falls } k > n, \\ 1, & \text{falls } k = n, \\ n, & \text{falls } k = n-1, \\ \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{falls } 0 \le k \le n, \\ n, & \text{falls } k = 1, \\ 1, & \text{falls } k = 0, \\ 0, & \text{falls } k < 0. \end{cases}$$

(Die Zeilen 2,3,5,6 sind in Zeile 4 enthalten).
Wir notieren gleich zwei wichtige Eigenschaften: Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \text{(Symmetrie bzgl. } k = \tfrac{n}{2})$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \qquad \text{(Pascal–Beziehung)}$$

Beweis Da für $k \notin \{0, \dots, n\}$ die erste Beziehungen trivial ist, braucht sie nur noch für den anderen Fall $0 \le k \le n$ überprüft zu werden:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \binom{n}{n-k}.$$

Für $1 \le k \le n-1$ rechnen wir die zweite Beziehung so nach:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ &= n! \cdot \frac{(n-k+1)+k}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

Die Fälle $k = 0$ und $k = n$ sind leicht zu testen:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} + \binom{n}{-1} &= 1 + 0 = 1 = \binom{n+1}{0}. \\ \binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} &= 1 + n = \binom{n+1}{n}. \end{aligned}$$

In den anderen Fälle $k < 0$ oder $k > n$ sind alle in der Beziehung auftretenden Ausdrücke gleich 0. ♦

Bemerkung: Man kann die Binomialkoeffizienten im sogenannten Pascal'schen Dreieck anordnen. Die zweite Beziehung des Satzes besagt, dass sich ein Binomialkoeffizient als

Summe der beiden über ihm stehenden ergibt.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & &
\end{array}
$$

Satz 5 (Der binomische Lehrsatz) *Es seien a, b Zahlen in einem angeordneten Körper $\mathbb{K}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Schreiben Sie sich diese Formel für einige kleine n explizit auf.

Beweis Wir führen den Beweis mit Induktion über n. Der Induktionsanfang $n = 0$ geht so:

$$(a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} a^0 b^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k.$$

Jetzt kommt der Induktionsschluss (sehr ausführlich):

$$
\begin{aligned}
& (a+b)^{n+1} \\
= \;& (a+b)^n \cdot (a+b) \overset{\text{IndV}}{=} \Big[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \Big] \cdot (a+b) \\
= \;& \Big[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \Big] \cdot a + \Big[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \Big] \cdot b \\
\overset{\text{DG}}{=} \;& \Big[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k \Big] + \Big[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \Big] \\
& \quad \text{(Indexverschiebung)} \\
= \;& \Big[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k \Big] + \Big[\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^k \Big] \\
& \quad \text{(Addition von } \tbinom{n}{n+1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1} = 0 \text{ bei der ersten Summe und} \\
& \quad \;\text{Addition von } \tbinom{n}{-1} a^{n-(0-1)} b^0 = 0 \text{ bei der zweiten Summe)} \\
= \;& \Big[\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k \Big] + \Big[\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^k \Big] \\
= \;& \sum_{k=0}^{n+1} \Big[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \Big] a^{n+1-k} b^k
\end{aligned}
$$

$$\text{(Pascal–Beziehung)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

Den Trick mit der *Indexverschiebung* sollte ausführlicher erklärt werden: Generell kann man den Summations–Index bei der Σ–Darstellung einer Summe verändern:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1}.$$

Der ,,Summations–Bereich" und der Index im ,,Summationsterm" werden also ,,gegensinnig" verändert. ♦

2.6 Exkurs: Mächtigkeit von Mengen

Definition

- Zwei Mengen X, Y heißen *gleichmächtig*, wenn eine bijektive Abbildung $X \to Y$ existiert.
- Es sei $n \in \mathbb{N}$. Besteht zwischen einer Menge X und der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ eine bijektive Abbildung, so sagt man: Die Menge X ...
  - hat die *Mächtigkeit* n oder
  - die *Anzahl* der Elemente ist n oder
  - ist eine n–Menge.

  Symbolisch: $|X| = n$.
- Die leere Menge hat die *Mächtigkeit* 0.
- Eine Menge der Mächtigkeit n, $n \in \mathbb{N}_0$, heißt *endlich*.
- Eine Menge, die nicht endlich ist, heißt *unendlich*.
- Besteht zwischen einer Menge X und der Menge $\mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, so sagt man, dass die Menge X *abzählbar unendlich* ist.
- Eine Menge heißt *(höchstens) abzählbar*, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist.
- Eine Menge, die nicht abzählbar ist, heißt *überabzählbar*.

Wenn X und Y endlich sind, gelten die folgenden elementaren Zählprinzipien (ohne Beweis):

$$Y \subseteq X \quad \Longrightarrow \quad |X \setminus Y| = |X| - |Y|$$

$$|X \cup Y| + |X \cap Y| = |X| + |Y|$$

$$X \cap Y = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad |X \cup Y| = |X| + |Y|$$

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$$

Satz 6 *Es sei X eine Menge mit n Elementen ($n \in \mathbb{N}_0$).*

(i) Es sei $0 \leq k \leq n$. Die Anzahl der k–Teilmengen von X ist gleich $\binom{n}{k}$.

$$\Big|\{Y \in \mathcal{P}(X) \Big| |Y| = k\}\Big| = \binom{n}{k}.$$

(ii) Die Anzahl aller Teilmengen von X ist gleich 2^n:

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^n.$$

Beweis durch Induktion über $n = |X|$. (Vgl. Übungen). ♦

2.7 Exkurs: Linear geordnete Mengen II

Definition Auf der Menge X sei eine Ordnungsrelation $\leq$ gegeben. Y sei eine Teilmenge von X.

- Ein Element $a \in X$, heißt *obere Schranke von* Y, wenn für alle $y \in Y$ gilt:

  $$y \leq a.$$

  Die Teilmenge Y heißt in diesem Fall *nach oben beschränkt.*

- Eine obere Schranke a von Y heißt *kleinste obere Schranke* oder *Supremum von* Y, wenn es keine obere Schranke von Y gibt, die echt kleiner als a ist. Man schreibt dann

  $$a = \sup Y.$$

- Ein Supremum a von Y heißt *Maximum von* Y, wenn $a \in Y$. Man schreibt dann

  $$a = \max Y.$$

- Ein Element $a \in X$, heißt *untere Schranke* von Y, wenn für alle $y \in Y$ gilt:

  $$y \geq a.$$

  Die Teilmenge Y heißt in diesem Fall *nach unten beschränkt.*

- Eine untere Schranke a von Y heißt *größte untere Schranke* oder *Infimum von* Y, wenn es keine obere Schranke gibt, die echt größer als a ist. Man schreibt dann

  $$a = \inf Y.$$

- Ein Supremum a von Y heißt *Minimum von* Y, wenn $a \in Y$. Man schreibt dann

  $$a = \min Y.$$

Beachte die Implikationen für eine Teilmenge $Y \subseteq X$:

$$\begin{array}{ccccc} a \text{ ist Maximum} & \Longrightarrow & a \text{ ist Supremum} & \Longrightarrow & a \text{ ist obere Schranke,} \\ a \text{ ist Minimum} & \Longrightarrow & a \text{ ist Infimum} & \Longrightarrow & a \text{ ist untere Schranke.} \end{array}$$

Satz 7 *Es sei X eine linear geordnete Menge. Eine Teilmenge Y von X besitzt höchstens ein Supremum und höchstens ein Infimum.*

Beweis Angenommen, zu einer Teilmenge Y gibt es zwei verschiedene Suprema a_1 und a_2. Aufgrund der Totalität gilt $a_1 < a_2$ oder $a_2 < a_1$. Also existiert zu einer dieser beiden oberen Schranken eine kleinere andere obere Schranke, diese kann dann kein Supremum sein. ♦

Wir wenden einige dieser Definitionen für die ganzen Zahlen an:

Präposition 8

(i) *Es ist* $\min \mathbb{N} = 1$.

(ii) *Es sei* $z \in \mathbb{Z}$. *Dann gibt es keine Zahl* $w \in \mathbb{Z}$, *so dass*

$$z < w < z + 1.$$

(iii) *Jede nicht–leere nach unten beschränkte Teilmenge von* $\mathbb{Z}$ *besitzt ein Minimum.* *Jede nicht–leere nach oben beschränkte Teilmenge von* $\mathbb{Z}$ *besitzt ein Maximum.*

Beweis Zu (i): Wir zeigen per Induktion, dass $1 \le n$ für alle natürlichen Zahlen n. Der Induktionsanfang ist klar: $1 \le 1$. Der Induktionsschluss ist dann:

$$1 \le n \text{ und } 0 \le 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 + 0 \le n + 1.$$

Zu (ii): Würde es eine solche Zahl $w \in \mathbb{Z}$ geben, so würde dies bedeuten, dass

$$0 < w - z < 1.$$

Da $w - z \in \mathbb{N}$, wäre dies ein Widerspruch zu (i).

Zu (iii): Es sei Y eine nicht–leere Teilmenge von $\mathbb{Z}$ mit einer unteren Schranke $a \le y$ für alle $y \in Y$.

Wir nehmen an, dass Y kein Minimum besitzt. (*)

Per Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$ folgern wir aus $(*)$, dass

$$\{a, a+1, \ldots, a+n\} \subseteq \mathbb{Z} \setminus Y \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \qquad (**)$$

Induktionsanfang: Wäre $a \in Y$, so wäre $a = \min Y$ (Widerspruch zu $(*)$). Es ist also $a \in \mathbb{Z} \setminus Y$.

Die Induktionsvoraussetzung besagt, dass $\{a, \ldots, a+n\} \subseteq \mathbb{Z} \setminus Y$.

Wäre $a + n + 1 \in Y$, so wäre diese Zahl ein Minimum von Y, da es zwischen $a + n$ und $a+n+1$ gemäß (ii) keine ganze Zahl gibt. (Widerspruch zu $(*)$). Also gilt: $a+n+1 \in \mathbb{Z} \setminus Y$.

Die Aussage $(**)$ bedeutet, dass Y leer ist. Wir hatten aber Y als nicht–leer vorausgesetzt, so dass wir die Annahme $(*)$ verwerfen müssen.

Die zweite Aussage kann man analog zeigen. ♦

Dass sich die Begriffe Maximum, Supremum und obere Schranke tatsächlich unterscheiden, zeigen die folgenden Beispiele von Teilmengen von $\mathbb{Q}$:

Satz 9

(i) Die Teilmenge von $\mathbb{Q}$

$$\{x \in \mathbb{Q} | 0 \leq x < 1\}$$

hat die Zahl 1 *als Supremum, diese Zahl ist aber kein Maximum.*

(ii) Die Teilmenge von $\mathbb{Q}$

$$Y := \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}$$

hat eine obere Schranke, aber kein Supremum (in $\mathbb{Q}$*).*

Beweis Wir zeigen nur die zweite Aussage.

(1) Y besitzt die Zahl 2 als (eine) obere Schranke in $\mathbb{Q}$.

Wenn 2 keine obere Schranke wäre, so gäbe es ein $y \in Y$ mit $y > 2$. Daraus könnten wir aber $y^2 > 4 > 2$, d.h. $y \notin Y$, folgern. Widerspruch.

(2) Wir nehmen an, dass Y ein Supremum in $\mathbb{Q}$ besitzt:

$$s := \sup Y = \sup\{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\} \in \mathbb{Q}.$$

Wegen $1 \in Y$ und (1) folgt dann, dass

$$1 \leq s \leq 2.$$

Daraus können wir für die Zahl $\varepsilon := \frac{2-s^2}{5}$ schließen, dass

$$1 \leq s^2 \leq 4 \qquad \text{und} \qquad -1 < \varepsilon < +1.$$

(3) Die folgende Rechnung erscheint sehr trickreich, mit ein bißchen mathematischer Erfahrung kann man aber leicht auf diesen Trick kommen.

$$\begin{aligned} &\Big(s+\varepsilon\Big)^2 - 2 = s^2 - 2 + \varepsilon \cdot \Big(2s + \varepsilon\Big) = \\ &(s^2-2) \cdot \Big[\underbrace{1 - \underbrace{\frac{1}{5} \cdot \underbrace{(\underbrace{2s}_{\leq 4} + \underbrace{\varepsilon}_{<1})}_{<5}}_{<1}}_{>0}\Big]. \end{aligned}$$

Zusammengefasst heißt dies, dass eine Zahl C existiert mit

$$C > 0 \qquad \text{und} \qquad \Big(s+\varepsilon\Big)^2 - 2 = C \cdot (s^2 - 2).$$

(4a) Wir nehmen jetzt an, dass $\boxed{s^2 > 2}$ ist.

Dann folgt mit (3):

$$\left(s+\varepsilon\right)^2 - 2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(s+\varepsilon\right)^2 \geq 2.$$

Wir zeigen jetzt, dass

$$x \leq s+\varepsilon \text{ für alle } x \in Y. \qquad (*)$$

Gäbe es nämlich ein $x \in Y$, so dass

$$x > s+\varepsilon,$$

so schlössen wir daraus (beachte, dass beide Seiten der Ungleichung nicht–negativ sind):

$$x^2 > (s+\varepsilon)^2 \geq 2, \qquad \text{also } x \notin Y.$$

Die Aussage (*) aber bedeutet, dass $s+\varepsilon$ eine obere Schranke von Y mit $s+\varepsilon < s$. WIDERSPRUCH.

(4b) Wir nehmen jetzt an, dass $\boxed{s^2 < 2}$ ist. Dann folgt mit (3):

$$\left(s+\varepsilon\right)^2 - 2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(s+\varepsilon\right)^2 < 2.$$

Das aber bedeutet, dass $s < s+\varepsilon \in Y$. s kann keine obere Schranke von Y sein. WIDERSPRUCH.

(4c) Zum Schluss nehmen wir an, dass $\boxed{s^2 = 2}$ ist. Da s eine positive rationale Zahl ist, gibt es $p, q \in \mathbb{N}$ mit $s = \frac{p}{q}$. Wir können O.B.d.A annehmen, dass der Bruch gekürzt ist, d.h. dass p und q keine gemeinsamen Teiler haben.

Es folgt: $2 = s^2 = \frac{p^2}{q^2}$ oder, umgeformt:

$$p^2 = 2q^2.$$

Wir listen jetzt in der ersten Spalte einer Tabelle alle möglichen Endziffern von q bzgl. der Dezimaldarstellung auf und ermitteln mögliche Endziffern von p.

q	q^2	$p^2 = 2q^2$	p
0	0	0	0
1 oder 9	1	2	–
2 oder 8	4	8	–
3 oder 7	9	8	–
4 oder 6	6	2	–
5	5	0	0

Das aber bedeutet, dass nur der Fall auftreten kann, dass p die Endziffer 0 hat und q die Endziffer 0 oder 5 hat. Dann kann aber der Bruch $\frac{p}{q}$ mit 5 gekürzt werden. Das ist ein Widerspruch dazu, dass $\frac{p}{q}$ schon so weit wie möglich gekürzt ist. ♦

Satz 10 *(und Definition) Ist $\mathbb{K}$ ein linear geordneter Körper, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) Jede nicht–leere nach oben beschränkte Teilmenge besitzt ein Supremum.

(ii) Jede nicht–leere nach unten beschränkte Teilmenge besitzt ein Infimum.

(iii) (Definition:) $\mathbb{K}$ *heißt* (bedingt) vollständig.

Beweis Wir zeigen die Implikation (i) $\Longrightarrow$ (ii). Es sei also Y eine nicht–leere Teilmenge von $\mathbb{K}$ mit einer unteren Schranke b. Wir ,,spiegeln" diese Teilmenge und erhalten

$$Y' = -Y \ := \ \Big\{ a \in \mathbb{K} \ \Big| \ (-1) \cdot a \in Y \Big\}.$$

Die Menge Y' ist nicht–leer. Wir können folgern:

$$\begin{aligned} & a \geq b \text{ für alle } a \in Y \quad \Longrightarrow \\ & -a \leq -b \text{ für alle } a \in Y \quad \Longrightarrow \\ & a' \leq -b \text{ für alle } a' \in Y', \end{aligned}$$

also ist Y' nicht–leer und nach oben beschränkt. Nach (i) besitzt Y' ein Supremum s. Wir zeigen jetzt das $-s$ ein Infimum von Y ist.
(1) $-s$ ist eine untere Schranke von Y, da

$$\begin{aligned} & a' \leq s \text{ für alle } a' \in Y' \quad \Longrightarrow \\ & -a' \geq -s \text{ für alle } a' \in Y' \quad \Longrightarrow \\ & a \geq -s \text{ für alle } a \in Y. \end{aligned}$$

(2) Es gibt keine größere untere Schranke. Gäbe es nämlich eine:

$$-s < t \leq a \text{ für alle } a \in Y,$$

so wäre

$$s > -t \geq a' \text{ für alle } a \in Y'$$

kein Supremum von Y'. ♦

Bemerkung: Der Satz gilt auch in einer beliebigen linear geordneten Menge X. Der Beweis ist dann aber etwas aufwändiger.

3 Der Körper der reellen Zahlen

3.1 Definition als vollständig angeordneter Körper

Axiom Es existiert (genau) ein vollständig angeordneter Körper.

Definition Wir bezeichnen diesen Körper mit $\mathbb{R}$ und nennen die Elemente dieses Körpers die *reellen Zahlen*.

Das bedeutet, dass auf der Menge $\mathbb{R}$ die folgenden Strukturen und Eigenschaften gegeben sind:

- Körper–Axiome: Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division,
- lineare Ordnung,
- Verträglichkeit der linearen Ordnung mit Addition und Subtraktion,
- Vollständigkeit: Jede nicht–leere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum.

Die am Ende von Abschnitt 2.3 definierten Mengen wollen wir ab jetzt als die durch

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= N_{\mathbb{R}} \\ \mathbb{N}_0 &= \mathbb{N} \cup \{0\}. \\ \mathbb{Z} &= Z_{\mathbb{R}} \\ \mathbb{Q} &= Q_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

definierten Teilmengen von $\mathbb{R}$ auffassen. Diese Zahlen in $\mathbb{R}$ nennen wir einfach **die** natürlichen, ganzen bzw. rationalen Zahlen.

Der Satz 9 hat gezeigt, dass die beschränkte Teilmenge

$$\left\{x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; x^2 < 2\right\} \subseteq \mathbb{R}$$

kein Supremum in $\mathbb{Q}$ hat. Das $\mathbb{R}$–Axiom besagt, dass ein solches Supremum in $\mathbb{R}$ existiert. Der Körper $\mathbb{R}$ ist also echt größer als $\mathbb{Q}$. Die Zahlen in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißen *irrational*.

Wir definieren weiter einige Teilmengen

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &:= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x > 0\right\} \\ \mathbb{R}^- &:= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x < 0\right\} \\ \mathbb{R}_0^+ &:= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq 0\right\} \\ \mathbb{R}_0^- &:= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leq 0\right\} \\ \mathbb{R}^* &:= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \neq 0\right\} \end{aligned}$$

und Notationen für Intervalle ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$):

$$
\begin{aligned}
[a,b] &:= \Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; a \le x \le b\Big\} && \text{(abgeschlossenes Intervall)} \\
[a,b[&:= \Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; a \le x < b\Big\} \\
]a,b] &:= \Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; a \le x \le b\Big\} \\
]a,b[&:= \Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; a < x \le b\Big\} && \text{(offenes Intervall)} \\
[a,\infty[&:= \Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; a \le x \Big\} \\
]a,\infty[&:= \Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; a < x \Big\} \\
]-\infty,b] &:= \Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; x \le b\Big\} \\
]-\infty,b[&:= \Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; x < b\Big\} \\
]-\infty,\infty[&:= \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

3.2 Der Absolut–Betrag

Wir definieren den *(Absolut–)Betrag* (auf $\mathbb{R}$) als Funktion

$$
|\cdot| \begin{cases} \mathbb{R} \;\to\; \mathbb{R}_0^+ \\ x \;\mapsto\; |x| \;:=\; \max\{x, -x\} = \begin{cases} x, & \text{falls } x \ge 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases} \end{cases}
$$

Satz 11 (Eigenschaften des Betrags)

(Positiv–Definitheit) Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $|a| \ge 0$ und

$$|a| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0.$$

(Multiplikativität) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

(Dreiecksungleichung) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$|a + b| \le |a| + |b|$$

Beweis Für die Einsicht in (ii) spielen wir einfach vier Fälle durch:

$$
\begin{aligned}
a \ge 0, b \ge 0 &\quad\Longrightarrow\quad |a \cdot b| = a \cdot b = |a| \cdot |b| \\
a \ge 0, b < 0 &\quad\Longrightarrow\quad |a \cdot b| = -(a \cdot b) = a \cdot (-b) = |a| \cdot |b| \\
a < 0, b \ge 0 &\quad\Longrightarrow\quad |a \cdot b| = -(a \cdot b) = (-a) \cdot b = |a| \cdot |b| \\
a < 0, b < 0 &\quad\Longrightarrow\quad |a \cdot b| = a \cdot b = (-a) \cdot (-b) = |a| \cdot |b|
\end{aligned}
$$

Für (iii) genügt es, zwei Fälle zu betrachten:

$$
\begin{aligned}
a + b \ge 0 &\quad\Longrightarrow\quad |a + b| = a + b \le |a| + |b| \\
a + b < 0 &\quad\Longrightarrow\quad |a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) \le |a| + |b|
\end{aligned}
$$

♦

Folgerung 12 *Die Betragsfunktion hat die folgenden weiteren Eigenschaften:*

(i) Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|-a| = |a|$$

(ii) Für alle $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$ gilt:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

(iii) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\Big||a| - |b|\Big| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

Beweis In den Übungen. ♦

Nebenbemerkung: Ein Körper $\mathbb{K}$, auf dem eine Funktion $\mathbb{K} \to \mathbb{R}$ mit den in Satz 11 Eigenschaften definiert ist, heißt ein *bewerteter Körper*. Da der Beweis der Folgerung so durchgeführt werden kann, dass nur diese Eigenschaften benutzt werden, gilt sie in einem beliebigen bewerteten Körper. (Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist ein nicht angeordneter bewerteter Körper).

3.3 $\mathbb{R}$ ist Archimedisch geordnet

Satz 13 (Archimedes Satz) *Es sei $\mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen.*

*(i) Die Menge $\mathbb{N}$ ist **nicht** nach oben beschränkt.*

(ii) Zu zwei beliebigen Zahlen $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$ gibt es eine natürliche Zahl n, so dass

$$a < n \cdot b.$$

(iii) Zu jeder positiven Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(iv) Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $z \in \mathbb{Z}$, so dass

$$z \leq a < z + 1.$$

Diese Zahl z wird dann auch mit $\lfloor a \rfloor$ („floor”) oder mit $[a]$ (Gauß–Klammer) bezeichnet.

Beweis Zu (i) Wenn $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt wäre, so besäße $\mathbb{N}$ ein Supremum $s \in \mathbb{R}$. Dies würde dann bedeuten, dass

$$n \leq s \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da zu jedem n auch die Zahl $n+1$ in $\mathbb{N}$ enthalten ist, würde auch gelten, dass

$$n+1 \leq s \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Eine Äquivalenzumformung führt auf die Aussage:

$$n \leq s-1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Das heißt dann aber, dass $s-1$ eine obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist, die kleiner als das Supremum s ist. WIDERSPRUCH.
Zu (ii): Die gegenteilige Aussage würde bedeuten, dass

$$a \geq n \cdot b \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Das aber hieße, dass $\mathbb{N}$ durch die reelle Zahl $\frac{a}{b}$ nach oben beschränkt wäre.
Zu (iii): Gemäß (ii) existiert zu $1, \varepsilon$ eine natürliche Zahl, so dass

$$1 < n \cdot \varepsilon.$$

Multipliziere die Ungleichung mit $\frac{1}{n}$.
Zu (iv): Da a gemäß (i) nicht eine obere Schranke von $\mathbb{N}$ sein kann, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a < n$. Die Menge

$$\{w \in \mathbb{Z} | a < w\}$$

ist also nicht–leer und nach unten beschränkt, besitzt deshalb aufgrund von Proposition 8 (iii) ein Minimum $z \in \mathbb{Z}$. Es folgt: $z - 1 \leq a < z$. ♦

Satz 14 (Bernoulli–Ungleichung) *Es sei $a \in [-1, \infty[$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}_0$*

$$(1+a)^n \geq 1 + an.$$

Satz 15 (Wachstum und Abklingen von Potenzen)

(i) Es sei $a > 1$. Zu jedem $b \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$a^n > b.$$

(Die Potenzen werden beliebig groß).

(ii) Es sei $0 < a < 1$. Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$a^n < \varepsilon.$$

(Die Potenzen werden beliebig klein).

Beweis Zu (i): Nach dem Archimedes–Satz (ii) 13 gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n \cdot (a-1) > b-1$. Dann folgt mit der Bernoulli–Ungleichung:

$$a^n = [1 + (a-1)]^n \geq 1 + (a-1)n > b.$$

Zu (ii) Nach Teil (i) gibt es zu $\frac{1}{a} > 1$ und $\frac{1}{b} \in \mathbb{R}^+$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$(\frac{1}{a})^n > \frac{1}{b}.$$

Invertierung dieser Ungleichung liefert das Ergebnis. ♦

Satz 16

(i) Zu je zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es ein $c \in \mathbb{Q}$, so dass

$$a < c < b.$$

(Man sagt auch, die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$).

(ii) Zu je zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es ein $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so dass

$$a < c < b.$$

(Die irrationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$).

Beweis (i) Nach dem Archimedes–Satz 13, Teil (iii) gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{1}{m} < \frac{b-a}{2}$$

und dann nach Teil (iv) ein $z \in \mathbb{Z}$ mit

$$z \leq m\frac{a+b}{2} < z + 1.$$

Aus der ersten Ungleichung folgt: $\frac{ma}{2} < \frac{mb}{2} - 1$ und dann

$$ma = \frac{ma}{2} + \frac{ma}{2} < \frac{ma}{2} + \frac{mb}{2} - 1 = m\frac{a+b}{2} - 1 < z \leq m\frac{a+b}{2} < mb.$$

Mit $c := \frac{z}{m}$ folgt daraus durch Division durch m

$$a < c < b.$$

(ii) Nach Aussage (i) gibt es zunächst ein $d \in \mathbb{Q}$ zwischen a und b und dann noch ein $e \in \mathbb{Q}$ ziwschen d und b. Es gilt insgesamt:

$$a < d < e < b.$$

Es sei s das Supremum

$$s := \sup\{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Wegen $0 < \frac{s}{2} < 1$ ist die Zahl

$$c := d + \frac{s}{2} \cdot (e - d) = (1 - \frac{s}{2})\, d + \frac{s}{2}\, e$$

zwischen d und e, also auch zwischen a und b. Wäre c rational, so wäre auch

$$s = 2 \cdot \frac{c-d}{e-d}$$

rational. ♦

4 Folgen

4.1 Definition und Beispiele

Definition Es sei X eine Menge. Unter einer *Folge in X* versteht man eine Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{N} & \to & X \\ n & \mapsto & a(n) = a_n \end{cases}$$

Die Zahlen a_n heißen *Folgenglieder*. Die Zahl n heißt in diesem Fall *Index*, sie wird im allgemeinen tiefgestellt notiert. Die *Indexmenge* kann auch ein anderes einseitig unendliches Intervall von $\mathbb{Z}$ sein. Andere Schreibweisen für Folgen sind:

$$(a_n) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{oder} \quad (a_1, a_2, \ldots)$$

Ist $X = \mathbb{R}$, so spricht man auch von einer *reellen Folge*.

Beispiele

1. Die konstante Abbildung $a(n) = a$ heißt *konstante Folge*.

2. Für $a_n = \frac{1}{n}$ ergibt sich die Folge der *harmonischen Zahlen*

$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots).$$

3. Es seien $B, C \in \mathbb{R}$ zwei fest vorgegebene Zahlen. Dann ist durch

$$a_n := \begin{cases} \frac{n+B}{n+C}, & \text{falls } n \neq -C, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

eine Folge definiert.

4. Eine Folge der Form $a_n = q^n$ für festes $q \in \mathbb{R}$ heißt geometrische Folge:

$$\begin{array}{rl} q = \frac{1}{2} & (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots), \\ q = 3 & (1, 3, 9, 27, 81, 243, \ldots), \\ q = -1 & (+1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, -1, \ldots), \\ q = -2 & (1, -2, +4, -8, +16, -32, \ldots). \end{array}$$

5. Für $a_n = n^2$ ergibt sich die Folge

$$(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots).$$

6. Man kann Folgen rekursiv definieren. Beispiel:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_{n+1} = \gamma \cdot a_n \cdot (1 - a_n).$$

(Übung: Berechnen Sie mit Hilfe des TR oder PC sehr viele Folgenglieder?)

4.2 Konvergenz von Folgen, Grenzwerte

Definition Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge.

- Die Folge heißt *Cauchy–Folge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$, $m \geq N$ gilt:

  $$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

  Ganz grob: ,,Die Folgenglieder rücken immer näher aneinander".

- Es sei a eine reelle Zahl. Die Folge heißt *konvergent gegen (den Grenzwert) a*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt:

  $$|a_n - a| < \varepsilon.$$

  Ganz grob: ,,Die Folgenglieder rücken immer näher an a heran".

  In diesem Fall schreibt man:

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \longrightarrow a \ \text{für} \ n \longrightarrow \infty.$$

  Wenn der Kontext klar ist, lässt man den Zusatz $n \to \infty$ weg.
  (Wir werden später erst beweisen, dass es höchstens einen Grenzwert geben kann).

- Die Folge heißt *divergent*, wenn sie nicht konvergent ist.

- Die Folge heißt *Nullfolge*, wenn sie gegen 0 konvergiert.

Es ist günstig, andere Sprechweisen anzuschauen: Als Vorbereitung dient die folgende Definition:

- Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Die Menge

  $$U_\varepsilon(a) \ := \ ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[= \{x \in \mathbb{R} \,\big|\, |x - a| < \varepsilon\}$$

  heißt *ε–Umgebung* von a.

Lemma 17 (Andere Sichtweisen der Konvergenz) *Die folgenden Aussagen über eine reelle Folge sind äquivalent:*

- *Die Folge ist konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$.*

- *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass die Folgenglieder ,,ab N" in der ε–Umgebung von a liegen.*

- *In jeder ε–Umgebung von a liegen fast alle Folgenglieder. Dabei heißt*

  fast alle $\quad = \quad$ *alle bis auf endlich viele.*

Wir studieren den Konvergenz–Begriff an einigen Beispielen.

1. Die konstante Folge (a) konvergiert gegen a, da in jeder ε–Umgebung von a fast alle (sogar alle) Folgenglieder liegen.

2. Wir beweisen, dass die harmonische Folge eine Nullfolge ist.

   Dazu müssen wir zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein N (es darf von ε abhängen) finden, so dass

   $$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

   Also sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen N so, dass

   $$\frac{1}{N} < \varepsilon.$$

   Dies ist aufgrund des Archimedes–Satzes möglich. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq N$:

   $$|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

   Also sind alle Folgenglieder ab N in der ε–Umgebung von 0.

3. Wir betrachten die in einem weiteren Beispiel eingeführte Folge (a_n) mit $a_n = \frac{n+B}{n+C}$ mit festen $B, C \in \mathbb{R}$ und zeigen

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

   Es ist klar, dass man für die Berechnung von Grenzwerten endlich viele Folgenglieder (am Anfang der Folge zum Beispiel) außer Betracht lassen kann. Hier können wir das evtl. vorhandene ,,Sonderfall"–Folgenglied ($n = -C$) einfach ignorieren.

   Es sei also eine positive Zahl ε vorgegeben. Wir formen die ,,Ziel"–Ungleichung äquivalent um:

   $$\begin{aligned} |a_n - 1| &< \varepsilon \\ \left|\frac{n+B}{n+C} - 1\right| &< \varepsilon \\ |(n+B) - (n+C)| &< \varepsilon \cdot |n+C| \\ |B - C| &< \varepsilon \cdot |n+C| \end{aligned}$$

   Gemäß Satz von Archimedes gibt es zu den beiden Zahlen $|B - C| \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $m \in \mathbb{N}$, so dass

   $$|B - C| < \varepsilon \cdot m.$$

Es sei N eine natürliche Zahl mit $N > m - C$. Dann gilt für alle $n \geq N$:

$$|B - C| < \varepsilon \cdot m < \varepsilon \cdot (N + C) \leq \varepsilon \cdot (n + C) \leq \varepsilon \cdot |n + C|$$

und damit aufgrund der obigen Äquivalenzen:

$$|a_n - 1| < \varepsilon.$$

Übung: Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta n+B}{\gamma n+C}$ mit $\beta, \gamma, B, C \in \mathbb{R}$.

4. Wir wollen wissen, ob die geometrische Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und unterscheiden dabei vier Fälle:

   1. Fall $q = 1$: Dann ist die Folge die Konstant–1–Folge. Sie konvergiert gegen 1.

   2. Fall $|q| < 1$: Wir zeigen, dass

   $$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

   Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Gemäß Satz 15(ii) (Abklingen von Potenzen) existiert zu $|q|, \varepsilon$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

   $$|q|^N < \varepsilon.$$

   Dann gilt für alle $n \geq N$

   $$|q^n - 0| = |q^n| = |q^N| \cdot |q|^{n-N} \leq |q^N| < \varepsilon.$$

   3. Fall $q = -1$: Die Folgenglieder sind gegeben durch

   $$a_n = (-1)^n = \begin{cases} +1, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -1, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

   Für gerades n und ungerades m gilt also:

   $$|(-1)^n - (-1)^m| = |1 - (-1)| = 2.$$

   Deshalb kann die Folge keine Cauchy–Folge sein. Der nächste Satz zeigt dann, dass die Folge auch nicht konvergieren kann.

   4. Fall $|q| > 1$: Nach Satz 15 (i) existiert zu jedem $b \in \mathbb{R}^+$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

   $$|a_n| = |q^n| = |q|^n > b.$$

   Das bedeutet, dass die Folge unbeschränkt ist. Daraus folgt, wie wir gleich zeigen werden, dass sie nicht konvergieren kann.

Definition

- Eine Teilmenge einer linear geordneten Menge heißt *beschränkt*, wenn sie nach unten und nach oben beschränkt ist.
- Eine reelle Folge (a_n) heißt *beschränkt*, wenn die Menge $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

Satz 18 *Für eine reelle Folge (a_n) gelten die folgenden Implikationen:*

$$\text{konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \text{Cauchy–Folge} \quad \Longrightarrow \quad \text{beschränkt.}$$

Beweis Es sei die Folge (a_n) konvergent mit Grenzwert a und ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Dann gilt für alle Zahlen $n, m \geq N$ (Dreiecksungleichung)

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Es bleibt noch die zweite Implikation zu zeigen: Ist (a_n) eine Cauchy–Folge, so gibt es zu (jedem $\varepsilon > 0$, also auch zu) $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq N$

$$|a_n - a_m| < 1$$

Dann folgt aber für alle $n \geq N$:

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|.$$

Setzen wir jetzt

$$\begin{aligned} A &:= \min\Big\{a_1, a_2, \ldots, a_N, -(1 + |a_N|)\Big\} \\ B &:= \max\Big\{a_1, a_2, \ldots, a_N, +(1 + |a_N|)\Big\} \end{aligned}$$

so gilt:

$$A \leq a_n \leq B \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also ist die Folge beschränkt. ♦

Satz 19 *Eine Folge kann höchstens einen Grenzwert haben.*

Beweis Angenommen, die Folge (a_n) hat zwei Grenzwerte a' und a''. Dann gibt es zu (jedem $\varepsilon > 0$, also auch zu) $\varepsilon = \frac{|a' - a''|}{2}$ zwei Zahlen N' und N'', so dass

$$\begin{aligned} |a_n - a'| &< \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N' \\ |a_n - a''| &< \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N''. \end{aligned}$$

Ist jetzt $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N'$ und $n \geq N''$, so gilt

$$|a' - a''| = |a' - a_n| + |a_n - a''| < \varepsilon + \varepsilon = |a' - a''|.$$

Das ist aber ein Widerspruch. (Übung: An welcher Stelle des Beweises wird die Widerspruchsannahme $a' \neq a''$ gebraucht?) ♦

4.3 Sätze über Grenzwerte

Im nächsten Satz wollen wir die Strukturen eines angeordneten Körpers im Hinblick auf Grenzwertberechnungen untersuchen:

Satz 20 *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit Grenzwerten a bzw. b (Beachte, dass es sich auch um konstante Folgen handeln kann).*

(i) Die Folge $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b.$$

(ii) Die Folge $(a_n\cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b.$$

(iii) Sind α,β reelle Zahlen, so konvergiert auch die Folge $(\alpha\cdot a_n+\beta\cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dabei gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha\cdot a_n+\beta\cdot b_n)=\alpha\cdot a+\beta\cdot b.$$

(iv) Ist $b\neq 0$, so gibt es einen Index $N_0\in\mathbb{N}$, ab dem die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N},n\geq N_0}$ wohldefiniert ist (d.h. $b_n\neq 0$). Es gilt weiter:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{a}{b}.$$

(v) Gilt $a_n\leq b_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$, so folgt:

$$a\leq b.$$

Das heißt: In einer nicht–strengen Ungleichung darf zum Grenzwert übergegangen werden.

(vi) Die Folgerung

$$a_n<b_n \text{ für alle } n\in\mathbb{N} \qquad\Longrightarrow\qquad a<b$$

ist im allgemeinen falsch.

Beweis Zu (i): Es sei ein $\varepsilon>0$ vorgegeben. Da (a_n) und (b_n) konvergieren, gibt es zu (jedem $\varepsilon>0$, also auch zu) $\frac{\varepsilon}{2}$ Zahlen N_1 und N_2, so dass

$$\begin{aligned}|a_n-a| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n\geq N_1\\ |b_n-b| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n\geq N_2.\end{aligned}$$

Dann gilt für alle n mit $n \geq N := \max N_1, N_2$:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Zu (ii): Der Satz 18 besagt, dass es eine Zahl A gibt, so dass

$$|a_n| \leq A \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Setzen wir $C := \max\{A, |b|\}$ so folgt:

$$|a_n| \leq C \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \qquad |b| \leq C.$$

Wir können o.B.d.A annehmen, dass $C > 0$ ist.

Es sei jetzt $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu (jedem $\varepsilon > 0$, also auch zu) $\frac{\varepsilon}{2C}$ gibt es Zahlen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2C} \qquad \text{für alle } n \geq N_1 \\ |b_n - b| &< \frac{\varepsilon}{2C} \qquad \text{für alle } n \geq N_2. \end{aligned}$$

Dann haben wir für $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| \\ &< C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2C} \cdot C = \varepsilon. \end{aligned}$$

Zu (iii): Dies kann man leicht auf die beiden Situationen (i) und (ii) zurückführen.
Zu (iv): Wir zeigen nur, dass $(\frac{1}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}.$$

Der allgemeine Fall folgt dann leicht mit $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ und Teil (ii) des Satzes.

Wegen $b \neq 0$ gibt es zu (jedem $\varepsilon > 0$, also auch zu) $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2} \text{ für alle } n \geq N_0.$$

Aus dieser Ungleichung kann man schon herauslesen, dass $b_n \neq 0$ sein muss. Wir wollen das aber auch algebraisch prüfen: Für diese n erhalten wir weiter mit Folgerung 12 (iii):

$$|b_n| = |b - (b - b_n)| \geq |b| - |b_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0,$$

es folgt weiter

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}.$$

Es sei jetzt ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu (jedem $\varepsilon > 0$, also auch zu) $\frac{\varepsilon \cdot b^2}{2}$ gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon \cdot b^2}{2} \text{ für alle } n \geq N_1.$$

Dann gilt für $n \geq N := \max\{N_0, N_1\}$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{1}{|b_n| \cdot |b|} \cdot |b - b_n| < \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot b^2}{2} = \varepsilon.$$

Zu (v): Die Folge der Differenzen $(b_n - a_n)$ konvergiert nach Teil (iii). Es sei

$$c := \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b.$$

Damit ist der Beweis darauf reduziert, zu zeigen, dass die nicht–positive Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine nicht–positive Zahl $c \leq 0$ konvergiert.

Wäre $c > 0$, so gäbe es zu (jedem $\varepsilon > 0$, also auch zu) $\frac{c}{2}$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|c_n - c| < \frac{c}{2} \text{ für alle } n \geq N.$$

Daraus folgt aber

$$c_n \in \left]c - \frac{c}{2}, c + \frac{c}{2}\right[,$$

insbesondere $c_n > \frac{c}{2} > 0$. Das steht im Widerspruch zur Voraussetzung. ♦

4.4 Folgen–Vollständigkeit

Definition Es sei eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben. Sie heißt

- *monoton steigend*, falls $a_n \leq a_m$ für $n \leq m$,
- *streng monoton steigend*, falls $a_n < a_m$ für $n < m$,
- *monoton fallend*, falls $a_n \geq a_m$ für $n \leq m$,
- *streng monoton fallend*, falls $a_n > a_m$ für $n < m$,
- *monoton*, falls sie monoton steigend oder monoton fallend ist.

Satz 21 *(über monotone Folgen) Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ gilt:*

(i) Ist eine reelle Folge monoton steigend und nach oben beschränkt, so konvergiert sie gegen das Supremum:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) Ist eine reelle Folge monoton fallend und nach unten beschränkt, so konvergiert sie gegen das Infimum:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $s = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

$$s - a_N < \varepsilon.$$

Anderenfalls wäre für alle $n \in \mathbb{N}$

$$s - a_n > \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad a_n < s - \varepsilon,$$

es wäre also $s - \varepsilon$ eine kleinere obere Schranke. Da die Folge a_n monoton wachsend ist, gilt für alle $n \geq N$

$$|a_n - s| = |s - a_n| = s - a_n \leq s - a_N < \varepsilon.$$

♦

Da unsere ,,Folgen–Theorie" in $\mathbb{R}$ (und nicht in $\mathbb{Q}$) stattfindet, ist die erste Implikationen aus Satz 18 umkehrbar:

Satz 22 *Aufgrund der Vollständigkeit von* $\mathbb{R}$ *gilt: Jede reelle Cauchy–Folge konvergiert.*

Beweis Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Cauchy–Folge. Wir definieren eine andere Folge b_n durch

$$b_n := \inf \mathcal{A}_n = \inf\{a_k | k \geq n\}.$$

Das heißt, das Anfangsstück der gegebenen Folge wird bis zum Index $n-1$ abgeschnitten, dann das Infimum der Menge aus den restlichen Folgengliedern hergenommen. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend, sie erfüllt $b_n \leq B$, wenn B die obere Schranke der Cauchy–Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Gemäß dem vorherigen Satz hat $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert:

$$a = \lim_{n\to\infty} b_n = \sup\{b_n | n \in \mathbb{N}\}.$$

Wir zeigen, dass a auch Grenzwert der ursprünglich gegebenen Cauchy–Folge ist. Dazu sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu $\frac{\varepsilon}{3}$ gibt es ein N_1, so dass

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } n, m \geq N_1. \qquad (*)$$

Es gibt dann weiter $N_2 \geq N_1$, so dass

$$|b_{N_2} - a| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (**)$$

Da b_{N_2} das Infimum der Folge (a_n) ab N_2 ist, gibt es zu $\frac{\varepsilon}{3}$ ein $N_3 \geq N_2$, so dass

$$|a_{N_3} - b_{N_2}| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (***)$$

Dann folgt für $n \geq N_3 \geq N_2 \geq N_1$:

$$|a_n - b_{N_2}| = |a_n - a_{N_3} + a_{N_3} - b_{N_2}| \leq \underbrace{|a_n - a_{N_3}|}_{<\frac{\varepsilon}{3} \quad (*)} + \underbrace{|a_{N_3} - b_{N_2}|}_{<\frac{\varepsilon}{3} \quad (***)} < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Zusammen mit $(**)$ folgt dann für $n \geq N_3$:

$$|a_n - a| = |a_n - b_{N_2} + b_{N_2} - a| \leq |a_n - b_{N_2}| + |b_{N_2} - a| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

♦

4.5 Intervallschachtelungen

Definition Eine Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von abgeschlossenen Intervallen

$$I_0 = [c_0, d_0], \quad I_1 = [c_1, d_1], \quad I_2 = [c_2, d_2], \quad \ldots$$

heißt *Intervallschachtelung*, wenn

- $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$,
- $\lim_{n\to\infty}(d_n - c_n) = 0$.

Lemma 23 (Intervallschachtelung)
Es sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung.

(i) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge.

(ii) Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Dieser Grenzwert a ist die einzige reelle Zahl, die in allen Intervallen I_n enthalten ist:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}.$$

(iii) Zusammengefasst: Durch eine Intervallschachtelung ist eindeutig eine reelle Zahl festgelegt.

Beweis (i) Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da die Intervalllängen gegen Null konvergieren, existiert ein $N \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$d_n - c_n < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Es gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq N$

$$a_n \in I_n \subseteq I_N \quad \text{und} \quad a_m \in I_m \subseteq I_N$$

und deshalb

$$|a_n - a_m| \leq d_N - c_N < \varepsilon.$$

(ii) Angenommen, es gibt ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $a \notin I_m$. Dann existiert eine Zahl $b > 0$, so dass

$$|x - a| \geq b \text{ für alle } x \in I_m.$$

Dann gilt für alle Folgenglieder a_n mit $n \geq m$ wegen $a_n \in I_n \subseteq I_m$, dass

$$|a_n - a| \geq b.$$

Dann kann aber a nicht Grenzwert der Folge sein. ♦

Konvergenz von rekursiv definierten Folgen:

$a_0, \qquad a_{n+1} = f(a_n), \qquad f$ eine Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

- Lässt sich ein geschlossener Ausdruck für die Folge finden.
- Kann man einen der Konvergenzsätze 21 – 23 anwenden?
- Falls man weiß, dass die Folge konvergiert, so läßt sich der Grenzwert a dadurch berechnen, dass man auf beiden Seiten der Rekursionsgleichung zum Grenzwert übergeht:

  $$a = f(a).$$

  Dabei muss auch vorausgesetzt werden, dass f stetig (Definition später) ist.

Beispiel: (Staatsexamen H99/T1/A1a) Es sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_1 \ := \ 2, \qquad a_{n+1} = \sqrt{4+a_n}$$

Ist die Folge konvergent? Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(Eigentlich haben wir noch keine Wurzelrechnung, aber ,,machtnix”).
Lösung: Folgt noch.

1. Es sei a Lösung der Gleichung

   $$a = \sqrt{4+a} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

   (Falls die Folge konvergiert, muss dies der Grenzwert sein.)

2. Wir zeigen, dass die Folge in dem Intervall $[2, a]$ enthalten ist.

   $a_n \geq 2$ ist klar. Mit dem Induktionsanfang $a_1 \leq a$ und dem Induktionsschluss

   $$a_n \leq a \quad \Longrightarrow \quad a_{n+1} = \sqrt{4+a_n} \leq \sqrt{4+a} = a$$

   sieht man, dass a obere Schranke ist.

3. Die Folge ist monoton steigend:

   $$a_{n+1}^2 - a_n^2 = 4 + a_n - a_n^2 \geq 0,$$

   da die Funktion $f(x) = 4 + x - x^2$ zwischen den beiden Nullstellen $x_1 < 0$ und $x_2 = a > 0$ positiv ist.

4. Nach dem Satz über die Konvergenz von monotonen Folgen ist die gegebene Folge konvergent.

4.6 Der Satz von Bolzano–Weierstraß

Definition Es sei eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben.

(i) Ist $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge von natürlichen Zahlen, so heißt die Folge

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$$

eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* (manchmal: *Häufungswert*) der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge gibt, die gegen a konvergiert.

Satz 24 (Bolzano–Weierstraß)

(i) Eine beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine Cauchy–Teilfolge.

(ii) Eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

(ii') Eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt einen Häufungspunkt.

Beweis (ii') ist eine Umformulierung von (ii). (ii) folgt aus (i) mit dem vorhergehenden Satz.

Um (i) zu zeigen, definieren wir rekursiv eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass in jedem I_n unendlich viele Folgenglieder liegen.

Als erstes Intervall nehmen wir

$$I_1 := [c_1, d_1],$$

wobei c_1 und d_1 die untere bzw. obere Schranke der Folge ist. In I_1 liegen dann alle Folgenglieder.

Ist das Intervall I_n definiert, so können wir das nächste Intervall $I_{n+1} = [c_{n+1}, d_{n+1}]$ als eine Hälfte von $I_n = [c_n, d_n]$ definieren, in der unendlich viele Folgenglieder liegen. Es gilt dann

$$I_{n+1} \subseteq I_n \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} (d_n - c_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{d_1 - c_1}{2^{n-1}} = 0.$$

Wir definieren dann rekursiv die Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von natürlichen Zahlen, die die „Teilfolge festlegt". Als erstes setzen wir

$$n_1 := 1.$$

Wenn die Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bis zum Index k definiert ist, dann nehmen wir als n_{k+1} den Index n, so dass

- das Folgenglied a_n in dem Intervall I_{k+1} enthalten ist und
- $n > n_k$ ist.

Aufgrund dieser Konstruktion ist $a_{n_k} \in I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Gemäß Satz 23 ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge. ♦

4.7 Uneigentliche Konvergenz

Definition Man sagt, eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert uneigentlich gegen* $+\infty$ *(bzw.* $-\infty$*)*, wenn es zu jedem $M > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$a_n > M \qquad \text{bzw.} \qquad a_n < -M \text{ für alle } n \geq N.$$

Anders formuliert: Die Folge wächst „über alle Schranken" bzw. fällt *unter alle Schranken.* Man sagt auch, die Folge *divergiert bestimmt* gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$).
Schreibweise:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Es ist klar:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(-a_n) = -\infty.$$

Beispiele:

- Die Folgen $a_n = n$, $b_n = n^2$, $c_n = 2^n$ divergieren gegen $+\infty$.
- Die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $q > 1$ konvergiert uneigentlich gegen $+\infty$.
- Die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $q \leq -1$ konvergiert weder uneigentlich gegen $+\infty$ noch gegen $-\infty$.

Satz 25 *Für eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit positiven Gliedern gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Beweis Es sei $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$a_n > \frac{1}{\varepsilon} \text{ für alle } n \geq N.$$

Dazu äquivalent ist

$$\frac{1}{a_n} < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Die umgekehrte Richtung geht analog. ♦
Beispiel: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} = +\infty, \qquad \text{da} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0.$$

5 Reihen

5.1 Einführung

Definition

- Ist eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen, so kann man daraus die *Partialsummenfolge*

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

bilden.

Ist umgekehrt eine Partialsummenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben, so kann man die „Summandenfolge" $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ „rückermitteln" durch

$$a_k = s_k - s_{k-1}.$$

- Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt (die durch die Summandenfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definierte) *(unendliche) Reihe*. Man schreibt anstelle der Partialsummenfolge

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{suggestiver:} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Manchmal findet man auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

- Konvergiert die Partialsummenfolge, so wird der Grenzwert als *Reihenwert*, meist ebenfalls kurz mit *Reihe* bezeichnet:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

(Das ist ein bisschen unglücklich, aber halt so eingeführt.)

Beispiele

- Man kann leicht mit Induktion zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Es folgt, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergiert mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

- Geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$. Für $|q| < 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{q - q^{n+1}}{1-q} = \frac{q}{1-q}.$$

Insbesondere ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1.$$

Startet man die geometrische Reihe mit $k = 0$, so ist der Reihenwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} q^k = 1 + \frac{q}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

(Setzt man $0^0 = 1$, so ist die Formel auch für $q = 0$ gültig.)

Wir übersetzen jetzt einige Sätze über Folgen in Sätze über Reihen.

Satz 26 *Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen. Dann ist auch die Reihe konvergent mit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_k + \beta \cdot b_k) = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Anders formuliert: Die konvergenten Reihen bilden einen $\mathbb{R}$–Vektorraum V. Der Reihenwert ist eine lineare Abbildung $V \to \mathbb{R}$.

Dies ergibt sich daraus, dass man Satz 20 (iii) auf die Partialsummenfolge anwendet.

5.2 Konvergenzkriterien für Reihen

Satz 27 (Cauchy–Konvergenz–Kriterium für Reihen) *Die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon \text{ für alle } n, m \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq m \geq N.$$

Beweis Die angegebene Bedingung drückt einfach aus, dass die zugehörige Partialsummenfolge eine Cauchy–Folge ist:

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| = |a_m + \ldots + a_n| = |s_n - s_{m-1}|.$$

Überlege selbst, dass das Auftreten des Index $m - 1$ anstelle von m keine Rolle spielt. ♦

Satz 28 *Eine Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{mit } a_k \geq 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

konvergiert genau dann, wenn die zugehörige Partialsummenfolge beschränkt ist, d.h. wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt, so dass:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq M.$$

Beweis Aufgrund von Satz 18 impliziert die Konvergenz die Beschränktheit. Umgekehrt kann man aus der Beschränktheit mit Satz 21 die Konvergenz folgern, da die Partialsummenfolge monoton wachsend ist. ♦

Satz 29 (Summandenfolgen sind Nullfolgen)

(i) Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, so bilden die Summanden eine Nullfolge

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 0.$$

Als Kurzformel geschrieben:

$$\text{Reihen–Konvegenz} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Summanden–Null–Folge.}$$

(ii) Die umgekehrte Schlussfolgerung in (i) ist im allgemeinen falsch.

Beweis (i) Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Die Cauchy–Eigenschaft bedeutet, dass es zu diesem ε ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq m \geq N.$$

Insbesondere gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n - 0| = |a_n| = \left| \sum_{k=n}^{n} a_k \right| < \varepsilon.$$

(ii) Das klassische Gegenbeispiel ist die *harmonische Reihe*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Die Summanden bilden eine Null–Folge. Wir zeigen, dass die Reihe nicht das Cauchy–Konvergenz–Kriterium aus Satz 27 erfüllt. Würde sie es erfüllen, so würde zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein N existieren, so dass

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k} < \frac{1}{2} \text{ für alle } n \geq m \geq N.$$

Es gilt aber für $m = N + 1$ und $n = 2N$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} &= \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \ldots + \frac{1}{2N} \qquad (N \text{ Summanden}) \\
&\geq \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \ldots + \frac{1}{2N} \qquad (N \text{ Summanden}) \\
&= \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

♦

Unter zusätzlichen Voraussetzungen kann die Implikation aus dem letzten Satz gewendet werden:

Satz 30 (Leibniz–Kriterium für alternierende Reihen) *Wir betrachten eine Reihe der Form*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \pm \ldots ,$$

wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- *Es ist $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, d.h. die Summanden $(-1)^k a_k$ haben alternierendes Vorzeichen.*
- *Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.*
- *Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.*

Dann konvergiert die Reihe.

Beweis Wir sondern die Partialsummen–Teilfolgen für gerade und ungerade Indices aus:

$$c_n := s_{2n-1}, \qquad d_n := s_{2n}.$$

Ausgeschrieben ist das:

c_1	d_1	c_2	d_2	c_3	d_3	c_4	d_4	c_5	d_5	c_6	d_6	$\ldots$
s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	$\ldots$

Wir zeigen, dass durch $I_n = [c_n, d_n]$ eine Intervallschachtelung gegeben ist. Es gilt nämlich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$c_n \leq d_n, \qquad c_n \leq c_{n+1}, \qquad d_{n+1} \leq d_n, \qquad \lim_{n\to\infty} (d_n - c_n) = 0,$$

was wir wie folgt nachrechnen:

$$\begin{aligned}
d_n - c_n &= s_{2n} - s_{2n-1} = (-1)^{2n} a_{2n} = a_{2n} \geq 0 \\
c_{n+1} - c_n &= s_{2n+1} - s_{2n-1} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n} a_{2n} = a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0 \\
d_{n+1} - d_n &= s_{2n+2} - s_{2n} = (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} \\
&= a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0 \\
\lim_{n\to\infty} (d_n - c_n) &= \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0
\end{aligned}$$

Wegen $s_{2n-1} = c_n \in I_n$ und $s_n = d_n \in I_n$ konvergieren die beiden Partialsummen–Teilfolgen nach Satz 23 gegen den gleichen Grenzwert. Damit konvergiert auch die Gesamtfolge. ♦

Beispielsweise konvergiert die *alternierende harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

5.3 Absolute Konvergenz von Reihen

Definition Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe der Absolutbeträge

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

Beobachtungen:

- Die alternierende harmonische Reihe ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.
- Eine Reihe, deren Summanden alle gleiches Vorzeichen haben, ist genau dann absolut konvergent, wenn sie konvergent ist.
- Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ist nach Satz 28 genau dann konvergent, wenn die Partialsummenfolge beschränkt ist.

Satz 31 *Für eine Reihe gilt:*

$$\textit{Absolute Konvergenz} \quad \Longrightarrow \quad \textit{(Gewöhnliche) Konvergenz}$$

In diesem Fall gilt:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Beweis Es sei also $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach dem Cauchy–Kriterium 27 existiert zu diesem ε ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq m \geq N.$$

Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \overset{(*)}{\leq} \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq m \geq N.$$

Darauf wenden wir wieder das Cauchy–Kriterium (in umgekehrter Richtung) an, es liefert die Konvergenz. Lässt man in der Dreiecks–Ungleichung

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

n gegen ∞ gehen, so folgt mit Satz 20 (v) die im Satz genannte Abschätzung. ♦

Satz 32 (Majoranten–Kriterium, auch Vergleichskriterium) *Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ vorgegeben. Gibt es eine konvergente* Majorante*, das ist eine konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, die die vorgegebene Reihe* majorisiert*,*

$$|a_k| \leq c_k \textit{ für alle } k \in \mathbb{N},$$

so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

Beweis Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=m}^{n} c_k = \left|\sum_{k=m}^{n} c_k\right| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq m \geq N.$$

Für die gleichen n, m gilt dann aber:

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} c_k < \varepsilon \text{ für alle } n \geq m \geq N.$$

Nach dem Cauchy–Kriterium konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. ♦

Beispiel Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergiert absolut, da

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$$

und die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)k}$$

eine konvergente Majorante darstellt (vgl. Beispiel 1 in Abschnitt 5.1).

Folgerung 33 (Minoranten–Kriterium) *Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ vorgegeben. Gibt es eine divergierende* Minorante*, das ist eine divergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ mit*

$$0 \leq c_k \leq a_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N},$$

so divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beweis Würde die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergieren, so wäre sie eine Majorante für $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$. ♦

Benutzt man als Majorante die geometrische Reihe, so ergeben sich beispielsweise die folgenden zwei Konvergenzkriterien:

Satz 34 (Wurzel–Kriterium) *Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, falls es ein $q \in [0, 1[$ gibt, so dass*

$$|a_k| \leq q^k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Der Name des Kriteriums leitet sich daraus ab, dass diese Ungleichung — nach Einführung der „Wurzelrechnung" — auch als

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

geschrieben werden kann.

Satz 35 (Quotienten–Kriterium) *Es sei* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe mit* $a_k \neq 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$. *Gibt es ein* $q \in [0,1[$, *so dass*

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q \textit{ für alle } k \in \mathbb{N},$$

so konvergiert die Reihe absolut.

Beweis Durch Induktion über k kann man zeigen, dass

$$|a_k| \leq |a_1| \cdot q^{k-1} = |a_1| \cdot q \cdot q^k.$$

Daher ist die geometrische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_1| \cdot q \cdot q^k$$

eine konvergente Majorante. ♦

Bemerkungen

- Beachte, dass die Bedingung

  $$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

  im allgemeinen **nicht** hinreichend ist für die absolute Konvergenz. So erfüllt beispielsweise die nicht–konvergente harmonische Reihe diese Bedingung:

  $$\left|\frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}}\right| = \frac{k}{k+1} < 1 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

- Die im Satz angegebene Bedingung ist hinreichend, nicht aber notwendig, für absolute Konvergenz. So ist die Reihe

  $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

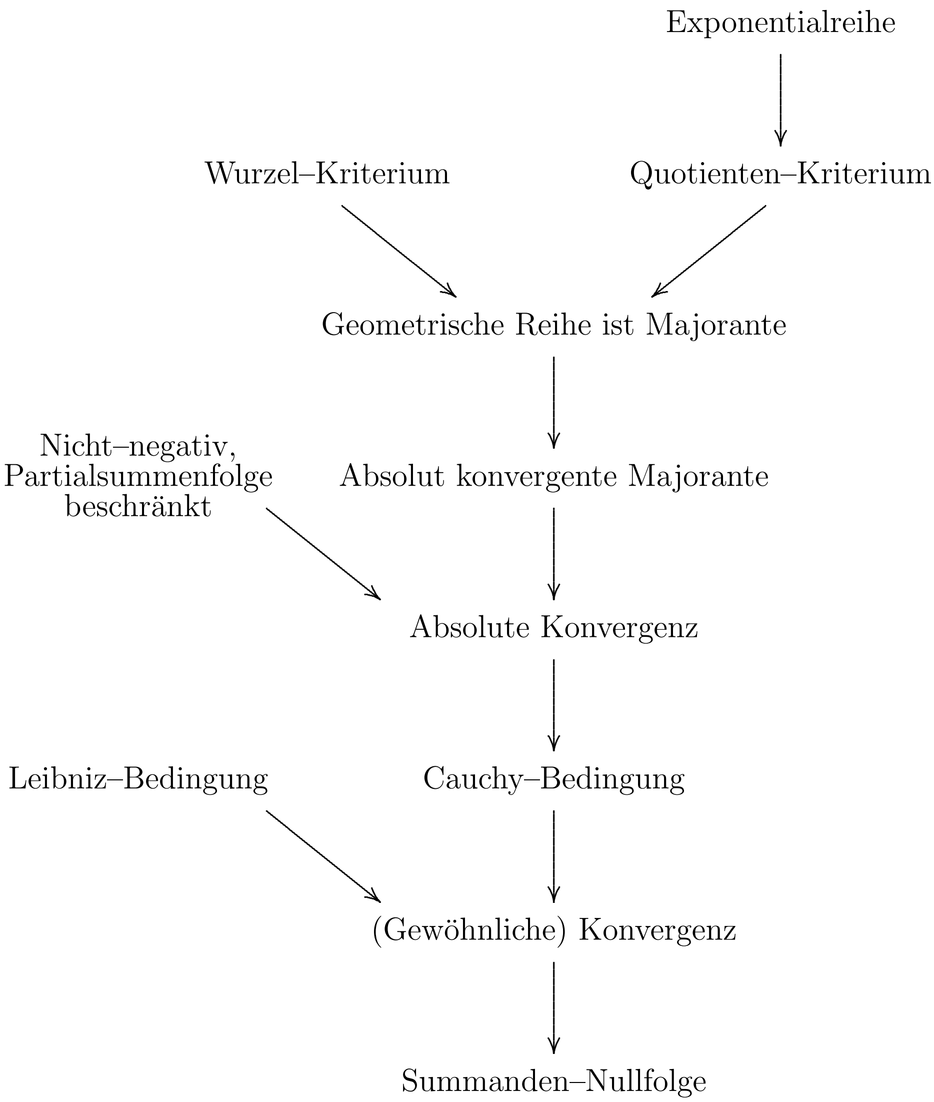
  absolut konvergent, es gilt aber

  $$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \longrightarrow 1,$$

  das heißt, es läßt sich kein $q < 1$ als obere Schranke für die Quotienten finden.

- Da die Änderung der Reihe für endlich viele Summanden das Konvergenzverhalten nicht ändert, würde es genügen, dass die Bedingung des Satzes nur ab einem $N \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

5.4 Überblick über Kriterien zur Reihenkonvergenz



6 Stetigkeit

6.1 Reelle Funktionen

Definition Es sei D eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wir nennen eine Funktion $D \to \mathbb{R}$ mit D als Definitionsmenge abkürzend *reelle* Funktion.

Wenn nichts anderes gesagt ist, wollen wir $D = \mathbb{R}$ annehmen. Oft schreibt man D_f anstelle von D.
Wir stellen einige Beispiele zusammen:

- Die konstante Funktion: Für $c \in \mathbb{R}$ ist sie gegeben durch

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & c \end{cases}$$

- Für $c = 0$ heißt die konstante Funktion *Null–Funktion.*
- Die identische Funktion $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{cases}$$

- Die Betragsfunktion:

$$|\cdot| \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{cases}$$

- Die Gauß–Klammer–Funktion:

$$[\cdot] \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & [x] = \max\{y \in \mathbb{Z} | y \leq x\} \end{cases}$$

- Die Signum–Funktion:

$$\mathrm{sgn} \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0. \end{cases} \end{cases}$$

- Die Dirichlet–Funktion:

$$\chi_{\mathbb{Q}} \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} +1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \end{cases}$$

Funktionen–Basteln: Es seien f, g zwei reelle Funktionen mit $D = D_f = D_g$. Dann können auf folgende Weise weitere Funktionen gebildet werden:

$$f + g \begin{cases} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) + g(x), \end{cases}$$

$$f \cdot g \begin{cases} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \cdot g(x), \end{cases}$$

$$\frac{1}{f} \begin{cases} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{f(x)} \end{cases} \qquad \text{Zusätzliche Voraussetzung: } f(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in D_f,$$

$$g \circ f \begin{cases} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{cases}$$

Zusätzliche Voraussetzung: $f(x) \in D_g$ für alle $x \in D_f$.

Definition Eine Funktion, die durch Anwendung der ersten beiden Operationen sukzessive aus konstanten Funktionen und der Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ gebildet wird, heißt *Polynom*. Es hat die allgemeine Form:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad \text{mit } a_k \in \mathbb{R} \text{ für alle } k,\ a_n \neq 0.$$

Die Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ heißt *Grad* des Polynoms.
Zusätzlicher Sonderfall: Auch die Null–Funktion ist ein Polynom mit dem Grad $-\infty$.

Eine Funktion, die als Quotient zweier Polynome f, g geschrieben werden kann, heißt *rationale Funktion*. Als Definitionsmenge wählt man dabei

$$D_{f/g} := \{x \in \mathbb{R} | g(x) \neq 0\}$$

(oder eine Teilmenge davon).
Beispiel:

- Das Polynom des ,,Goldenen Schnitts" $x^2 - x - 1$.
- Eine rationale Funktion mit $D = \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$x \mapsto \frac{4x^3 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}}{8x^6 + 23x^2}.$$

6.2 Grenzwerte bei Funktionen

Definition

- Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Ein Punkt $b \in \mathbb{R}$ heißt *Berührpunkt* von D, wenn es eine Folge $(a_n) \subseteq D$ gibt, so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = b$.

  Beispielsweise sind Endpunkte von offenen Intervallen oder ,,einpunktige Löcher" in Intervallen Berührpunkte dieser Intervalle.

- Die Menge aller Berührpunkte von D heißt der *Abschluß* von D. Man schreibt dafür $\overline{D}$.

Damit können wir verschiedene Grenzwerte von Funktionen definieren:

Definition Es sei eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit Definitionsmenge D gegeben. a sei ein Berührpunkt von D. c sei eine reelle Zahl oder $+\infty$ oder $-\infty$. Die folgende Tabelle listet Definitionen verschiedener Grenzwerte auf:

Name des Grenzwerts	Zulässige Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (in der Definitionsmenge)	Grenzwert–Aussage (in der Bildmenge)
in a	$\lim_{n\to\infty} x_n = a$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$
linksseitig in a	$\lim_{n\to\infty} x_n = a, x_n < a$	$\lim\limits_{x\nearrow a} f(x) = c$
rechtsseitig in a	$\lim_{n\to\infty} x_n = a, x_n > a$	$\lim\limits_{x\searrow a} f(x) = c$
	$\lim_{n\to\infty} x_n = a, x_n \neq a$	$\lim\limits_{x \overset{\bullet}{\to} a} f(x) = c$
in $+\infty$	$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c$
in $-\infty$	$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$

Man lese die Tabelle wie folgt:

Die Grenzwert–Aussage in der dritten Spalte gilt per definitionem, wenn für alle durch die zugehörige zweite Spalte festgelegten Folgen gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c.$$

In der ersten Spalte sind Namen für die Grenzwerte angegeben.

Im Fall $c = \pm\infty$ spricht man wieder vom *uneigentlichen Grenzwert*.

Beispiele

- Die Signumfunktion besitzt in 0 einen linksseitigen Grenzwert:

  $$\lim_{x\searrow 0} \operatorname{sgn}(x) = -1,$$

  da für jede Folge (x_n) mit $x_n < 0$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ gilt: $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(x_n) = -1$. Entsprechend besitzt sie einen rechtsseitigen Grenzwert

  $$\lim_{x\nearrow 0} \operatorname{sgn}(x) = +1.$$

  Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a, x\neq a} \operatorname{sgn}(x)$ existiert nicht, da unterschiedliche zulässige Folgen unterschiedliche Grenzwerte haben.

- Die Funktion

  $$\operatorname{sgn}^2 \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \operatorname{sgn}(x)^2 = \begin{cases} +1, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases} \end{cases}$$

hat in 0 den Grenzwert

$$\lim_{x \overset{\bullet}{\to} a} \operatorname{sgn}^2(x) = +1.$$

Der Grenzwert $\lim_{x\to a} \operatorname{sgn}^2(x)$ existiert aber nicht, da es zulässige Folgen (x_n) gibt mit $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}^2(x_n) = 0 \neq 1$, beispielsweise die Konstant–Null–Folge.

- Die Konstant–1–Funktion, allgemeiner jede Konstant–c–Funktion, besitzt in jedem $a \in \mathbb{R}$ den Grenzwert:

$$\lim_{x\to a} c = c.$$

- Die Identität $\mathrm{id}_\mathbb{R}$ besitzt in jedem $a \in \mathbb{R}$ den Grenzwert:

$$\lim_{x\to a} \mathrm{id}_\mathbb{R}(x) = a,$$

denn es gilt tatsächlich für jede Folge (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{id}_\mathbb{R}(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

6.3 Definition der Stetigkeit

Definition [und Satz] Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $a \in D$ eine Stelle in der Definitionsmenge. Die erste Aussage gilt per definitionem genau dann, wenn eine (und damit jede) der anderen Aussagen erfüllt ist:

- Die Funktion f ist *an der Stelle a stetig.*
- Der Grenzwert $\lim_{x\to a} f(x)$ existiert.
- Der Grenzwert $\lim_{x\to a} f(x)$ existiert und es gilt:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

- Für jede Folge (x_n) mit $\lim x_n = a$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(a).$$

- Der links- und der rechtsseitige Grenzwert existieren und es gilt:

$$\lim_{x\nearrow a} f(x) = \lim_{x\searrow a} f(x) = f(a).$$

- Der Grenzwert $\lim_{x \overset{\bullet}{\to} a} f(x)$ existiert und ist gleich dem Funktionswert:

$$\lim_{x \overset{\bullet}{\to} a} f(x) = f(a).$$

Eine Funktion f heißt *stetig (in D)*, wenn f an jeder Stelle $a \in D$ stetig ist.

Vor den Beispielen gleich ein Satz:

Satz 36 *Die Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$ seien an der Stelle $a \in D_f \cap D_g$ stetig.*

(i) Die Funktion $f + g$ ist stetig in a.

(ii) Die Funktion $f \cdot g$ ist stetig in a.

(iii) Ist $g(a) \neq 0$, so ist die Funktion

$$\frac{f}{g} \begin{cases} \{x \in D_f \cap D_g | g(x) \neq 0\} & \to \quad \mathbb{R} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x & \mapsto \quad \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{cases}$$

in a stetig.

(iv) Es sei $f(D_f) \subseteq D_g$, so dass die Funktion $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$ definiert ist. Ist

- *f stetig in $b \in D_f$ und*
- *g stetig in $f(b) \in D_g$,*

so ist auch $g \circ f$ stetig in b.

Beweis Der Beweis von (i) – (iii) besteht darin, die Aussagen auf die entsprechenden Aussagen über Folgen zurückzuführen. Für (iv) nutzen wir die Definition über die Folgen: Es sei (x_n) eine Folge in D_f. Dann kann man folgern:

$$\begin{array}{ll} & \text{Es ex. } \lim_{n\to\infty} x_n = b \\ \Longrightarrow & \text{Es ex. } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(b) \\ \Longrightarrow & \text{Es ex. } \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(b)). \end{array}$$

Die letzte Aussage war unser Beweisziel. ♦

Beispiele

- Die Konstant–Funktionen sind stetig.
- Die Identität ist stetig.
- Der obige Satz zeigt, dass Polynome stetig sind.
- Rationale Funktionen sind stetig in ihrer Definitionsmenge.
- Die Signum–Funktion ist stetig in jedem $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.
- Die Betragsfunktion ist stetig.
- Die Dirichlet–Funktion ist an keiner Stelle $a \in \mathbb{R}$ stetig. (Beweis in den Übungen).

Satz 37 (ε–δ–Definition der Stetigkeit) *Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Die Funktion ist genau dann an der Stelle $a \in D$ stetig, wenn folgendes gilt:*

- *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass*

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ für alle } x \in D \text{ mit } |x - a| < \delta.$$

Bildhafter ausgedrückt: Zu jedem Funktionswert–ε–Wackler muss man einen Definitionsstellen–δ–Wackler finden, so dass ein Höchstens–δ–Wackeln um a zu einem Höchstens–ε–Wackeln um $f(a)$ führt.

Beweis Wir zeigen zuerst ,,Folgendefinition" $\Longrightarrow$,,ε–δ–Definition". Es sei also

$$\lim_{x \to a} f(a) = c,$$

was ja bedeutet, dass für alle Folgen (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt: $\lim_n tif(x_n) = c$. Es sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir nehmen an, dass es kein $\delta > 0$ mit der geforderten Eigenschaft gibt. Das bedeutet speziell, dass es für jedes $\delta_n := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, (mindestens) ein x_n gibt mit

$$x_n \in D, \qquad |x_n - a| < \delta_n, \qquad |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Für die aus diesen x_n gebildete Folge gilt dann aber:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a),$$

was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Es bleibt die Umkehrung ,,ε–δ–Definition" $\Longrightarrow$,,Folgendefinition" zu zeigen. f sei also bei $x = a$ stetig im Sinne der ε–δ–Definition. Es sei eine beliebige Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ vorgegeben. Um zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ gilt, sei wieder ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu diesem ε gibt es nach Voraussetzung ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ falls } |x - a| < \delta. \qquad (*)$$

Zu diesem δ gibt es, da die Folge (x_n) gegen a konvergiert, ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_n - a| < \delta \text{ für alle } n \geq N.$$

Für diese $n \geq N$ gilt dann aber auch wegen $(*)$:

$$|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon.$$

Das aber bedeutet, dass $f(x_n)$ gegen $f(a)$ konvergiert. ♦

Man sagt, eine Funktion besitzt in $a \in D$ eine *Sprungstelle*, wenn die beiden einseitigen Grenzwerte existieren und verschieden sind (Manchmal ist der Funktionswert egal, manchmal nicht).

Beispiel Die Funktionen

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases} \end{cases}$$

(Definition des Sinus später) besitzt in 0 keine einseitigen Grenzwerte. Sie ist allen Punkten $a \neq 0$ stetig.

6.4 Eigenschaften stetiger Funktionen

Lemma 38 *Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei in a stetig mit $f(a) > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass*

$$f(x) > 0 \text{ für } x \in \,]a-\delta, a+\delta[\, \cap D.$$

Beweis In den Übungen. ♦

Satz 39 (Zwischenwertsatz) *Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ gilt:*
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$, so existiert eine Nullstelle von f in $[a,b]$.

Beweis Aufgrund der Vollständigkeit existiert das Supremum

$$s := \sup \left\{ x \in [a,b] \,\middle|\, f(x) < 0 \right\},$$

da die Menge auf der rechten Seite nicht–leer (sie enthält a) und beschränkt (durch b) ist. Angenommen, es ist $f(s) \neq 0$. Dann existiert nach dem obigen Lemma ein $\delta > 0$, so dass $f(x)$ für alle $x \in \,]s-\delta, s+\delta[\, \subseteq [a,b]$ das gleiche Vorzeichen hat wie $f(s)$.
Im Fall $f(s) < 0$ wäre dann aber

$$f(x) < 0 \text{ für alle } x \in [a, s+\delta[,$$

also gemäß Definition von s:

$$s \geq s + \delta.$$

Im Fall $f(s) > 0$ wäre

$$f(x) > 0 \text{ für alle } x \in [s-\delta, s]$$

also gemäß Definition von s:

$$s \leq s - \delta.$$

Beides ist ein Widerspruch. ♦

Korollar 40 *Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ gilt:*
Es sei $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < c < f(b)$. Dann existiert eine Stelle x in $[a,b]$ mit $f(x) = c$.

Beweis Wende den Zwischenwertsatz 39 auf die Funktion $g(x) := f(x) - c$ an. ♦

Definition

- Eine Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt *Intervall*, wenn für x, y, z mit $x < y < z$ gilt:

$$x \in I, z \in I \quad \Longrightarrow \quad y \in I.$$

  (Ein Intervall kann einseitig oder beidseitig offen, abgeschlossen, beschränkt oder unbeschränkt sein.)

- Ein Intervall I heißt *kompakt*, wenn es beschränkt und abgeschlossen ist, d.h. wenn es $c, d \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $I = [c, d]$ gilt.

Satz 41 *Aufgrund der Vollständigkeit von* $\mathbb{R}$ *gilt:*

(i) Das Bild eines kompakten Intervalls unter einer stetigen Abbildung ist wieder ein kompaktes Intervall.

(ii) Insbesondere nimmt die stetige Funktion auf einem kompakten Intervall das Maximum und Minimum an.

Beweis Es sei I das kompakte Intervall.

Fall 1: Falls $f(I)$ nach oben beschränkt ist, setzen wir

$$D := \sup f(I) = \sup\{y \in \mathbb{R} | \text{ es ex. } x \in I \text{ mit } y = f(x)\}.$$

Es existiert dann eine Folge (y_n) mit $y_n \in f(I)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim y_n = D$.

Fall 2: Falls $f(I)$ nicht nach oben beschränkt ist, gibt es eine Folge (y_n) mit $y_n \in f(I)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim y_n = \infty$.

In beiden Fällen gibt es zu jedem y_n ein $x_n \in I$, so dass $y_n = f(x_n)$. Die Folge (x_n) ist in I enthalten, deshalb beschränkt, sie besitzt also gemäß Satz 24 (Bolzano–Weierstraß) eine konvergente Teilfolge x_{n_k} mit

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a.$$

Aus der Stetigkeit von f folgt:

$$f(a) = f(\lim_{k \to \infty} x_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} y_{n_k} = D.$$

(Der obige Fall 2 kann also gar nicht auftreten.) Damit ist

$$D = f(a) \in f(I),$$

das heißt das Supremum D von $f(I)$ ist sogar ein Maximum von $f(I)$.

Genauso kann man zeigen, dass

$$C = \min f(I) \in f(I).$$

Es muss nach dem Zwischenwertsatz (Korollar 40) auch jeder Wert zwischen C und D angenommen werden, also

$$f(I) = [C, D] = [\min f(I), \max f(I)].$$

♦

6.5 Stetigkeit und Umkehrfunktion

Definition Es sei eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben. Sie heißt

- *monoton steigend*, falls $f(x) \leq f(y)$ für $x \leq y$,
- *streng monoton steigend*, falls $f(x) < f(y)$ für $x < y$,
- *monoton fallend*, falls $f(x) \geq f(y)$ für $x \leq y$,
- *streng monoton fallend*, falls $f(x) > f(y)$ für $x < y$,
- *monoton*, falls sie monoton steigend oder monoton fallend ist.

Satz 42 *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende (bzw. fallende), stetige Funktion. Dann ist die Bildmenge $J := f(I)$ ebenfalls ein Intervall. Die Funktion $f : I \to J$ ist bijektiv und die zugehörige Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$ ist ebenfalls streng monton wachsend (bzw. fallend) und stetig.*

Beweis Wir können O.B.d.A annehmen, dass I mehr als einen Punkt enthält. Wir betrachten nur den Fall ,,wachsend". Die Funktion f ist injektiv, da

$$\begin{aligned} & x \neq y \quad \Longrightarrow \quad x < y \text{ oder } y < x \quad \Longrightarrow \\ & f(x) < f(y) \text{ oder } f(y) < f(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq f(y) \end{aligned}$$

und, bei Einschränkung der Wertemenge auf das Bild $J = f(I)$, auch bijektiv.

f^{-1} ist ebenfalls streng monoton wachsend. Zu $u, v \in J$ mit $u < v$ gibt es nämlich $x = f^{-1}(u)$ und $y = f^{-1}(v)$. Die Aussage

$$u < v \text{ und } f^{-1}(u) \geq f^{-1}(v)$$

bedeutet dann

$$x \geq y \text{ und } f(x) = u < v = f(y).$$

Das stimmt nicht überein mit der Tatsache, dass f monoton wächst.

Es bleibt zu zeigen, dass f^{-1} in jedem $u \in J$ stetig ist. Wir betrachten also ein solches $u \in J$ und setzen $x = f^{-1}(u) \in I$. Aus technischen, nicht so sehr mathematisch–inhaltlichen, Gründen unterscheiden wir drei Fälle:

(i) x ist kein Randpunkt, d.h. ein innerer Punkt, von I,

(r) x ist rechter Randpunkt von I,

(ℓ) x ist linker Randpunkt von I.

Es sei jetzt $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen ein ε_2 mit $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon$ so, dass das Intervall

$$I_2 = [x_1, x_2] := \begin{cases} [x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2], & \text{falls (i)}, \\ [x - \varepsilon_2, x], & \text{falls (r)}, \\ [x, x + \varepsilon_2], & \text{falls } (\ell), \end{cases} \qquad \text{in } I \text{ enthalten ist.}$$

Das Intervall $[x_1, x_2]$ wird durch f auf das Intervall $[u_1, u_2] := [f(x_1), f(x_2)] \subseteq J$ abgebildet. Wir wählen jetzt

$$\delta := \begin{cases} \min\{u - u_1, u_2 - u\}, & \text{falls (i)}, \\ u - u_1, & \text{falls (r)}, \\ u_2 - u, & \text{falls } (\ell). \end{cases}$$

Dann gilt in jedem Fall $\delta > 0$ und die folgende Implikationskette

$$\begin{aligned} & |v - u| < \delta \text{ und } v \in J \\ \Longrightarrow\ & v \in [u_1, u_2] \\ \Longrightarrow\ & f^{-1}(v) \in [f^{-1}(u_1), f^{-1}(u_2)] = [x_1, x_2] \\ \Longrightarrow\ & f^{-1}(v) \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon] = [f^{-1}(u) - \varepsilon, f^{-1}(u) + \varepsilon] \\ \Longrightarrow\ & |f^{-1}(v) - f^{-1}(u)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir haben also zu $\varepsilon > 0$ das richtige δ gefunden.

♦

7 Elementare Funktionen

7.1 Exkurs: Produkt absolut konvergenter Reihen

Erinnerung: Gemäß Distributivgesetz gilt für das Produkt zweier Summen:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) \cdot (b_1 + b_2 + \ldots b_n) = a_1 b_1 + a_1 b_2 + \ldots + a_m b_n \qquad (m \cdot n \text{ Summanden})$$

Jeder Summand der ersten Reihe wird mit jedem Summand der zweiten Reihe multipliziert und dann die entstehenden Produkte aufaddiert. Wie kann man das für Reihen verallgemeinern?

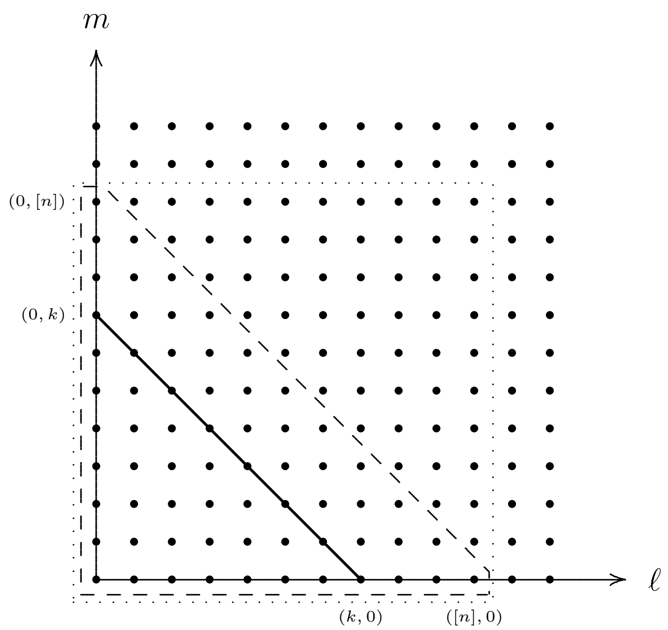
Satz 43 (Cauchy–Produkt absolut konvergenter Reihen) *Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei Reihen. Wir betrachten die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \qquad \text{mit den Summanden } c_k := \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell}.$$

Sind die beiden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent, so ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut konvergent und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k. \qquad (**)$$

Wir veranschaulichen zunächst an einem Diagramm, dass in dieser Formel ein ,,Distributivgesetz für unendliche Summen” verwirklicht ist. Das Produkt $a_\ell \cdot b_m$ werde durch einen Punkt mit den Koordinaten $(\ell, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ symbolisiert.



Für gegebene $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Teilmenge von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{S}_k := \{(\ell, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 | \ell + m = k\} \qquad \text{(Sekante bei } k\text{)}$$

mit $k+1$ Elementen. Sie ist im Diagramm durch die fett gezeichnete Strecke symbolisiert. Jetzt kann man sehen, dass in der Zahl c_k gerade alle Produkte erfasst werden, bei denen die zugehörigen Indexpaare auf der k–ten Sekante liegen:

$$c_k := \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell} = \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{S}_k} a_\ell b_m.$$

Das bedeutet dann, dass in der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{(\ell,m)\in\mathcal{S}_k} a_\ell b_m \Big)$$

alle Indexpaare $(\ell, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ auftreten in der durch die aufsteigenden Sekanten gegebenen Reihenfolge.

Beweis Wir definieren weiter für $n \in \mathbb{R}$ zwei Teilmengen von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n &:= \{(\ell, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 | 0 \le \ell \le n \text{ und } 0 \le m \le n\} \\ \mathcal{D}_n &:= \{(\ell, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 | 0 \le \ell + m \le n\} \end{aligned}$$

Es handelt sich um das gepunktete Quadrat bzw. um das gestrichelte Dreieck bis n. Weiter führen wir die folgende Notation für Partialsummen ein:

$$\begin{aligned} A_n &:= \sum_{k=0}^{n} a_k, & A_n^+ &:= \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \\ B_n &:= \sum_{k=0}^{n} b_k, & B_n^+ &:= \sum_{k=0}^{n} |b_k|, \\ C_n &:= \sum_{k=0}^{n} c_k, & C_n^+ &:= \sum_{k=0}^{n} |c_k|. \end{aligned}$$

Wegen

$$\mathcal{D}_n = \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{S}_n.$$

gilt für die Partialsummen C_n

$$C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{S}_k} a_\ell b_m = \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{D}_n} a_\ell b_m.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} A_n \cdot B_n &= \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{Q}_n} a_\ell \cdot b_m, \\ A_n^+ \cdot B_n^+ &= \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{Q}_n} |a_\ell| \cdot |b_m|, \\ C_n^+ &= \sum_{k=0}^{n} |c_k| = \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{D}_n} |a_\ell b_m|. \end{aligned}$$

Wegen $\mathcal{Q}_{\frac{n}{2}} \subseteq \mathcal{D}_n$ gilt $\mathcal{Q}_n \setminus \mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{Q}_n \setminus \mathcal{Q}_{\frac{n}{2}}$. Jetzt können wir abschätzen

$$\begin{aligned}
|A_nB_n - C_n| &= \Big| \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{Q}_n} a_\ell \cdot b_m - \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{D}_n} a_\ell \cdot b_m \Big| = \Big| \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{Q}_n\setminus\mathcal{D}_n} a_\ell \cdot b_m \Big| \\
&\leq \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{Q}_n\setminus\mathcal{D}_n} |a_\ell| \cdot |b_m| \leq \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{Q}_n\setminus\mathcal{Q}_{\frac{n}{2}}} |a_\ell| \cdot |b_m| \\
&= \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{Q}_n} |a_\ell| \cdot |b_m| - \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{Q}_{\frac{n}{2}}} |a_\ell| \cdot |b_m| \\
&= A_n^+ \cdot B_n^+ - A_{\frac{n}{2}}^+ \cdot B_{\frac{n}{2}}^+
\end{aligned}$$

Wir wissen mit Satz 20 (ii), dass mit (A_n^+) und (B_n^+) auch die Folge $(A_n^+ \cdot B_n^+)$ konvergiert. Das aber bedeutet gemäß Cauchy–Kriterium, dass

$$|A_nB_n - C_n| \leq A_n^+ \cdot B_n^+ - A_{\frac{n}{2}}^+ \cdot B_{\frac{n}{2}}^+ \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Daraus folgt die Behauptung des Satzes:

$$\lim_{n\to\infty} A_n \cdot \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} (A_n \cdot B_n) = \lim_{n\to\infty} C_n.$$

Um zu beweisen, dass $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut konvergiert, muss man nur die obige Abschätzungskette abändern

$$\begin{aligned}
|A_n^+B_n^+ - C_n^+| &= \Big| \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{Q}_n} |a_\ell \cdot b_m| - \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{D}_n} |a_\ell \cdot b_m| \Big| \\
&= \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{Q}_n\setminus\mathcal{D}_n} |a_\ell| \cdot |b_m| \leq \ldots\ldots \\
&\leq A_n^+ \cdot B_n^+ - A_{\frac{n}{2}}^+ \cdot B_{\frac{n}{2}}^+
\end{aligned}$$

und dann genau wie oben weiter folgern. ♦

7.2 Die Exponentialfunktion

Definition Es sei $x \in \mathbb{R}$ ein e feste Zahl. Wir zeigen gleich, dass die *Exponentialreihe*

$$\exp(x) \quad := \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots$$

absolut konvergiert. Entsprechend heißt die Funktion

$$\exp \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \exp(x) \end{cases}$$

Exponentialfunktion. Die Zahl

$$e \;:=\; \exp(1)$$

heißt *Euler'sche Zahl*.

Wir zeigen zunächst mit Hilfe des Quotientenkriteriums, dass die Exponentialreihe für jedes einzelne feste $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert: Es ist für $k \geq 2|x|$:

$$\left| \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}} \right| = \left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{x^k} \right| = \frac{|x|}{k+1} \leq \frac{k}{2(k+1)} \leq \frac{1}{2}.$$

Satz 44 (Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion) *Für zwei beliebige Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y).$$

Beweis Wir wenden den Satz über das Cauchy–Produkt auf die Exponentialfunktion an. Es gilt

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{\ell=0}^{k} \frac{x^\ell}{\ell!} \cdot \frac{y^{k-\ell}}{(k-\ell)!} = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{k!} \cdot \binom{k}{\ell} x^\ell \cdot y^{k-\ell} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x^\ell \cdot y^{k-\ell} \overset{BLS}{=} \frac{(x+y)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir den Binomischen Lehrsatz 5 (BLS) angewandt. ♦

Satz 45 (Eigenschaften der Exponentialfunktion)

(i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(x) \neq 0$. Weiter gilt:

$$\exp(x) \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} 1, \qquad \textit{falls } x \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} 0.$$

(ii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x).$$

(iii) Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$\exp(n) = e^n.$$

(iv) Die Exponentialfunktion ist streng monoton steigend.

Beweis Für $x > 0$ und $n \geq 2$ ist

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!} \geq 1 + x.$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert (mit Satz 20 (v)):

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq 1 + x > 1.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0) = 1,$$

woraus (i) und (ii) insgesamt folgen. (iii) zeigen wir mit Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$ und $n \in -\mathbb{N}_0$. Induktionsanfang: $\exp(0) = 1 = e^0$.

Induktionsschritt $n \mapsto n+1$:

$$\exp(n+1) = \exp(n) \cdot \exp(1) \overset{IV}{=} e^n \cdot e = e^{n+1}.$$

Induktionsschritt $n \mapsto n-1$:

$$\exp(n-1) = \exp(n) \cdot \exp(-1) \overset{IV}{=} e^n \cdot \frac{1}{e} = e^{n-1}.$$

(iv) Für $x > y$ gilt:

$$\frac{\exp(x)}{\exp(y)} = \exp(x) \cdot \frac{1}{\exp(y)} = \exp(x) \cdot \exp(-y) = \exp(x-y) > 1.$$

♦

Zur Vorbereitung des „Stetigkeitsbeweises” wollen wir genauer wissen, wie weit wir vom exakten Wert der Exponentialreihe weg sind, wenn wir bei der Summation nach dem n–ten Schritt aufhören.

Lemma 46 *Es gilt für das Restglied:*

$$\left|R_{n+1}(x)\right| := \left|\exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \le 2 \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)}, \qquad \textit{falls } n \ge 2|x| \qquad (*)$$

Beweis

$$\begin{aligned} |R_{n+1}(x)| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right| \overset{\text{Satz 31}}{\le} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \quad \text{(Index–Verschiebung)} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1+\ell}}{(n+1+\ell)!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{|x|^\ell}{(n+2)(n+3)\cdot\ldots(n+1+\ell)} \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{|x|^\ell}{(n+2)(n+3)\cdot\ldots(n+1+\ell)}. \end{aligned}$$

Für die Summanden der letzten Reihe gilt:

$$\frac{|x|^\ell}{(n+2)(n+3)\cdot\ldots\cdot(n+1+\ell)} \le \frac{n^\ell}{2(n+2)^\ell} \le (\frac{1}{2})^\ell.$$

Das bedeutet, dass die geometrische Reihe eine Majorante ist und es gilt weiter:

$$|R_{n+1}(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^\ell = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 2.$$

♦

Satz 47 (Stetigkeit der Exponentialfunktion)
Die Exponentialfunktion ist stetig (auf ganz $\mathbb{R}$).

Beweis Wir zeigen als erstes, dass die Exponentialfunktion in $a = 1$ stetig ist. Es sei dazu ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Ist $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{N+1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, so gilt die Restgliedabschätzung $(*)$

$$\left| \exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq 2 \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } n \geq N \text{ und alle } x \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}].$$

Weiter ist das Polynom

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

stetig in $x = 0$, weshalb es ein δ mit $0 < \delta < \frac{1}{2}$ gibt, so dass

$$|\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}| = |\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - 1| = |p(x) - p(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle x mit $|x| \leq \delta$. Für diese x gilt dann insgesamt

$$\begin{aligned} &|\exp(x) - \exp(0)| = |\exp(x) - 1| \leq \\ &|\exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}| + |\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - 1| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Funktionalgleichung zeigen ist dann für beliebiges $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to a} \exp(x) = \lim_{x \to a} [\exp(a) \cdot \exp(x-a) \cdot] = \\ &\exp(a) \cdot \lim_{x \to a} \exp(x-a) = \exp(a) \cdot \lim_{y \to 0} \exp(y) = \exp(a). \end{aligned}$$

(Die Substitution $x - a = y$ in der letzten Umformung kann man leicht mit Hilfe der Definition des Funktionsgrenzwerts, d.h. durch Rückführung auf den Folgengrenzwert, gezeigt werden.) ♦

Korollar 48 *Das Bild der Exponentialfunktion ist* $\mathbb{R}^+$.

Beweis Wir müssen für ein beliebiges $b > 0$ ein $x \in \mathbb{R}$ finden, so dass $b = \exp(x)$.

Die Eigenschaft (i) aus Satz 45 zeigt, dass $e > 1$, die Eigenschaft (iii) zeigt dann in Verbindung mit dem Satz 15 (i), dass $\lim_{n\to\infty} \exp(n) = \lim_{n\to\infty} e^n = \infty$.

Fall 1: Ist $b > 1$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\exp(n) > b > 1 = \exp(0)$. Aufgrund des Zwischenwertsatzes muss es ein x zwischen 1 und n geben mit $\exp(x) = b$.

Fall 2: Ist $b < 1$, so gibt es gemäß Fall 1 für $\frac{1}{b} > 1$ ein x mit $\exp(x) = \frac{1}{b}$ und dann ist

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} = b.$$

♦

7.3 Die Logarithmus–Funktion

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass die Exponentialfunktion

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \exp(x) \end{cases}$$

mit dem auf $\mathbb{R}^+$ eingeschränkten Bild streng monoton steigend, bijektiv und stetig ist. Nach Satz 42 gibt es eine stetige streng monoton wachsende bijektive Umkehrfunktion, die wir den *natürlichen Logarithmus* nennen:

$$\ln = \ln \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{cases}$$

Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \qquad \ln(\frac{1}{x}) = -\ln x, \qquad \ln 1 = 0.$$

Beweis Zu x, y existieren $u, v \in \mathbb{R}$, so dass

$$\exp(u) = x, \qquad \exp(v) = y.$$

Es folgt dann

$$\ln(x \cdot y) = \ln(\exp(u) \cdot \exp(v)) = \ln(\exp(u + v)) = u + v = \ln x + \ln y.$$

Die anderen Gleichungen ergeben sich daraus ganz einfach. ♦

7.4 Die allgemeine Potenz– und Wurzel–Funktion

Es sei $a > 0$ eine positive reelle Zahl. Wir definieren die *allgemeine Potenzfunktion zur Basis* a durch

$$\exp_a \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x \cdot \ln a) \end{cases} .$$

Für $a = e$ ergibt sich:

$$\exp_e(x) = \exp(x \cdot \ln e) = \exp(x).$$

Wir notieren gleich einige wesentliche Eigenschaften:

Satz 49 *Eigenschaften der allgemeinen Potenzfunktion Es sei* $a > 0$.

(i) $\exp_a$ *ist stetig auf* $\mathbb{R}$.

(ii) Es gilt für $x, y \in \mathbb{R}$: $\exp_a(x) \cdot \exp_a(y) = \exp_a(x + y)$.

(iii) Es gilt für $n \in \mathbb{Z}$: $\exp_a(n) = a^n$.

Beweis (i) $\exp_a$ ist Hintereinanderausführung der beiden stetigen Funktionen

$$x \mapsto x \cdot \ln a \qquad y \mapsto \exp(y)$$

und deshalb selbst stetig. (ii) Es ist einfach:

$$\exp_a(x) \cdot \exp_a(y) = \exp(x \cdot \ln a) \cdot \exp(y \cdot \ln a) =$$
$$\exp((x+y) \cdot \ln a) = \exp_a(x+y).$$

(iii) Der Beweis durch Induktion ist ganz einfach und ähnlich wie bei Satz 45. ♦
Die Eigenschaften (ii) und (iii) erlauben es, für die allgemeine Potenzfunktion die Schreibweise

$$a^x := \exp_a(x)$$

einzuführen. Dies ist eine echte Verallgemeinerung der bisherigen Definition (vgl. Abschnitt 45), da jetzt $x \in \mathbb{R}$ und nicht nur — wie bisher $x \in \mathbb{Z}$ eingesetzt werden kann. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt weiter

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a,$$

wodurch die Schreibweise:

$$\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}} = \exp_a(\frac{1}{n}) = \exp(\frac{1}{n} \cdot \ln a)$$

sinnvoll ist. Wir haben damit die Existenz beliebiger Wurzeln aus positiven Zahlen bewiesen.

7.5 Fakten über den Körper der komplexen Zahlen

Die Einführung des Körpers der komplexen Zahlen wird in der Vorlesung Lineare Algebra I (GS/HS/RS) mathematisch gründlicher und genauer durchgeführt. Hier werden nur die wesentlichen Fakten aufgelistet.

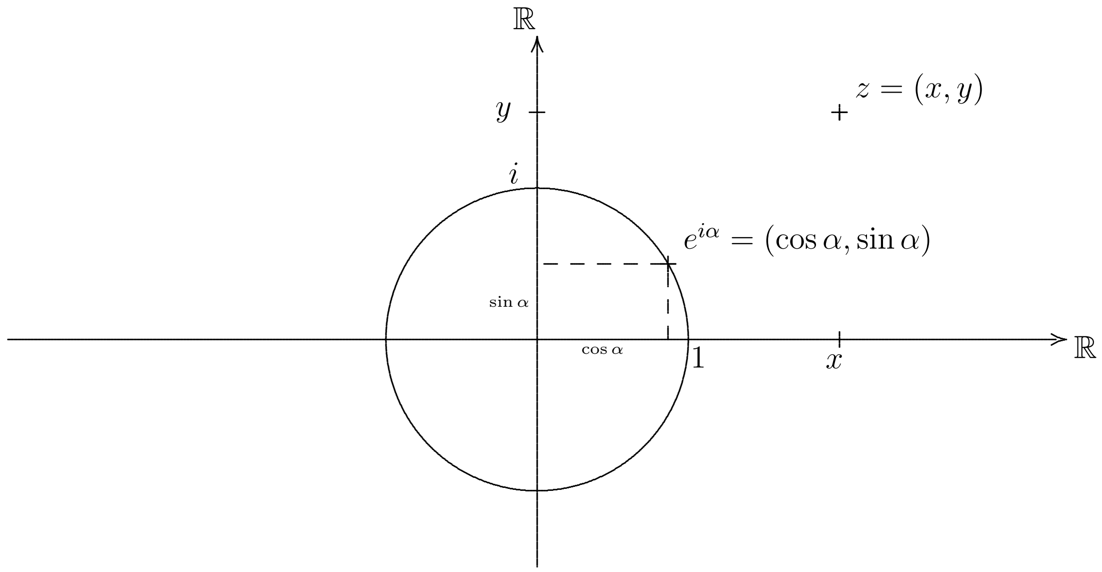
- Sind zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben, so bezeichnet man eine Zahl der Form

  $$z = (x, y) = x + iy$$

  als *komplexe Zahl*.

- Die Menge aller komplexen Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbb{C}$ gekennzeichnet.

- Komplexe Zahlen können als Punkte in der Zeichenebene, diese heißt dann *Gauß'sche Zahlenebene.*



- Die Zahl $i = (0, 1) = 0 + i1$ wird als *imaginäre Einheit* bezeichnet.

- Ist eine komplexe Zahl z der obigen Form gegeben, so nennt man x den Realteil und y den Imaginärteil von z. Symbolisch:

  $$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

- Mit komplexen Zahlen kann man alle vier Grundrechenarten durchführen. Sind $z = x + iy$ und $w = u + iv$ gegeben, so sind Summe, Differenz, Produkt und Quotient

  $$\begin{array}{rcll} (x+iy)+(u+iv) & = & (x+u)+i(y+v) & \text{(komponentenweise)} \\ (x+iy)-(u+iv) & = & (x-u)+i(y-v) & \text{(komponentenweise)} \\ (x+iy)\cdot(u+iv) & = & (xu-yv)+i(xv+yu) & \text{(Nicht komponentenweise!)} \\ (x+iy):(u+iv) & = & \dfrac{xu+yv}{u^2+v^2}+i\dfrac{xv-yu}{u^2+v^2} & \text{(falls } u^2+v^2 \neq 0) \ . \end{array}$$

  Setzt man als Null–Element und Eins–Element fest:

  $$0 = 0 + i0, \qquad 1 = 1 + i0,$$

  so kann man zeigen, dass in der Menge $\mathbb{C}$ alle Körpergesetze erfüllt sind. Mit anderen Worten: Man kann mit diesen Zahlen vernünftig alle Grundrechenarten durchführen.

- Aufgrund der Zuordnung $x \mapsto x + i0$ können reelle Zahlen als spezielle komplexe Zahlen aufgefasst werden. Sie sind unter den komplexen Zahlen durch die Eigenschaft

  $$\operatorname{Im} z = 0$$

  charakterisiert. Für zwei reelle Zahlen stellt sich heraus, dass die obigen Rechengesetze genau mit den bisherigen übereinstimmen.

- Zahlen mit $\operatorname{Re} z = 0$ haben die Form iy mit $y \in \mathbb{R}$. Sie heißen *rein imaginär.*
- Warnung: Auf der Menge $\mathbb{C}$ gibt es keine lineare Ordnung, die mit den Körpergesetzen verträglich ist. (Vgl. Abschnitt 2.3).
- Es stellt sich heraus, dass das Quadrat der imaginären Einheit

  $$(0 + i1)^2 = (0 + i1) \cdot (0 + i1) = -1.$$

  ist. Daraus folgt, dass für $n \in \mathbb{Z}$

  $$i^n = \begin{cases} +i, & \text{falls } n : 4 = k \; R\, 1, \\ -1, & \text{falls } n : 4 = k \; R\, 2, \\ -i, & \text{falls } n : 4 = k \; R\, 3, \\ +1, & \text{falls } n : 4 = k \; R\, 0, \end{cases}$$

  wobei $k \in \mathbb{Z}$.
- Ist $z = x + iy \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl, so heißt

  $$\overline{z} = x - iy$$

  die zu z *konjugiert–komplexe* Zahl.

  Es gilt, wie man leicht nachrechnen kann:

  $$\overline{\overline{z}} = z, \qquad \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

  die Konjugierung ist verträglich mit den Grundrechenarten

  $$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \quad \overline{z : w} = \overline{z} : \overline{w}.$$
- Für eine komplexe Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ heißt die reelle nicht–negative Zahl

  $$|z| \; := \; \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

  der *(Absolut–)Betrag* von z. Der Betrag kann in der Gauß'schen Ebene als Abstand des Punktes z vom Ursprung gedeutet werden.

  Es gilt für $z, w \in \mathbb{C}$:

  $$\begin{aligned} |z + w| \;&\le\; |z| + |w|, \quad \Big| |z| - |w| \Big| \le |z - w|, \\ |z \cdot w| \;&=\; |z| \cdot |w|, \quad |z : w| = |z| : |w| \quad (w \neq 0). \end{aligned}$$
- Wir stellen als Tatsache fest (und können dies hier nicht weiter darlegen), dass die Theorie der Folgen, Reihen und stetigen Funktionen sich auch für komplexe Zahlen aufbauen lässt.

7.6 Die Exponentialfunktion im Komplexen

Ohne Beweis und genaue Einführung behaupten wir: Die Exponentialfunktion im komplexen

$$\exp \begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \end{cases}$$

ist für alle $z \in \mathbb{C}$ wohldefiniert (als absolut konvergente Reihe). Sie stellt eine stetige Funktion dar, es gilt auch hier

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w),$$

weshalb man auch hier schreiben kann:

$$e^z = \exp(z).$$

Weiter ist

$$\overline{e^z} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^k}{k!} = e^{\overline{z}}$$

Für eine rein imaginäre Zahl $i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$|e^{i\alpha}|^2 = e^{i\alpha} \cdot \overline{e^{i\alpha}} = e^{i\alpha} \cdot e^{\overline{i\alpha}} = e^{i\alpha} \cdot e^{-i\alpha} = e^0 = 1.$$

Das bedeutet also, dass komplexe Zahlen der Form $e^{i\alpha}$ mit einer rein imaginären Exponenten $i\alpha$ auf dem Einheitskreis in der Gauß'schen Ebene liegen.

7.7 Trigonometrische Funktionen

Definition Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir die *Cosinus–Funktion* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die *Sinus–Funktion* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} \mp \ldots \\ \sin(\alpha) &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} \mp \ldots \end{aligned}$$

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt die Euler–de Moivre Formel:

$$\begin{aligned} \exp(i\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0, k \text{gerade}}^{\infty} i^k \cdot \frac{y^k}{k!} + \sum_{k=0, k \text{ungerade}}^{\infty} i^k \cdot \frac{y^k}{k!} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{2\ell} \cdot \frac{y^{2\ell}}{(2\ell)!} + \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{2\ell+1} \cdot \frac{y^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} \cdot \frac{y^{2\ell}}{(2\ell)!} + i \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} \cdot \frac{y^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} \\ &= \cos(\alpha) + i \sin(\alpha), \end{aligned}$$

man könnte also die beiden Funktionen alternativ als

$$\cos(\alpha) := \operatorname{Re} e^{i\alpha} = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \qquad \text{und} \qquad \sin(\alpha) := \operatorname{Im} e^{i\alpha} = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

definieren. Daraus ergeben sich erste Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
&\cos(0) = 1 \\
&\sin(0) = 0 \\
&\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \\
&\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \\
&\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1
\end{aligned}$$

Da die Exponentialfunktion $\alpha \mapsto e^{i\alpha}$ stetig ist, sind auch die beiden trigonometrischen Funktionen stetig.

Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion führt auf

Satz 50 (Additionstheoreme für cos **und** sin**)** *Es ist für* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

Beweis Die erste Gleichung folgt leicht aus den Definitionen und der Funktionalgleichung

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \operatorname{Re}(e^{i(\alpha+\beta)}) = \operatorname{Re}(e^{ix} \cdot e^{i\alpha}) \\
&= \operatorname{Re}(e^{ix})\operatorname{Re}(e^{i\alpha}) - \operatorname{Im}(e^{ix})\operatorname{Im}(e^{i\alpha}) \\
&= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,
\end{aligned}$$

die zweite ganz genauso. ♦

Satz 51 (Restgliedabschätzung) *Für die beiden trigonometrischen Funktionen gilt:*

$$\begin{aligned}
&\Big|\cos(\alpha) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!}\Big| \le \frac{|\alpha|^{2n+2}}{(2n+2)!} \\
&\Big|\sin(\alpha) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big| \le \frac{|\alpha|^{2n+3}}{(2n+3)!}
\end{aligned}$$

Beweis

$$\begin{aligned}
&\Big|\cos(\alpha) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!}\Big| = \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!}\Big| \\
= \quad &\Big|\frac{\alpha^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k-(2n+2)}}{(2k)!/(2n+2)!}\Big| \\
= \quad &\Big|\frac{\alpha^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+(n+1)} \frac{\alpha^{2k}}{(2k+2(n+1))!/(2n+2)!}\Big|
\end{aligned}$$

$$= \Big|\frac{\alpha^{2n+2}}{(2n+2)!}\Big| \cdot \Big|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \underbrace{\frac{\alpha^{2k}}{(2n+2+2k)!/(2n+2)!}}_{=:b_k}\Big|$$

$$\stackrel{(*)}{\leq} \Big|\frac{\alpha^{2n+2}}{(2n+2)!}\Big|.$$

Die letzte Reihe erfüllt wegen $|\alpha| \leq 2n+3$ die Bedingungen des Leibniz–Kriteriums

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{\frac{\alpha^{2k+2}}{(2n+2+2k+2)!/(2n+2)!}}{\frac{\alpha^{2k}}{(2n+2+2k)!/(2n+2)!}} = \frac{\alpha^2}{(2n+2+2k+2)(2n+2+2k+1)}$$

$$\leq \frac{\alpha^2}{(2n+4)(2n+3)} < 1$$

und

$$\lim_{k\to\infty} b_k = 0,$$

sie konvergiert also. Da wegen $b_0 = 1$ alle Partialsummen ≤ 1 sind, gilt dies auch für den Reihenwert, so dass die letzte Ungleichung $(*)$ folgt. Der Beweis für den Sinus geht analog. Mit Hilfe der Taylorreihen–Entwicklung (vgl. später) kann man die beiden Ungleichungen für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ zeigen. ♦

Folgerung 52 *Es ist*

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

Beweis Wir wenden die Restgliedabschätzung mit $n = 0$ an und erhalten für $|\alpha| \leq 4$

$$\Big|\frac{\sin\alpha}{\alpha} - 1\Big| = \Big|\frac{\sin\alpha - \alpha}{\alpha}\Big| = \Big|\frac{\sin\alpha - \sum_{k=0}^{0}(-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}}{\alpha}\Big| \leq \frac{|\alpha|^3}{3!|\alpha|} = \frac{|\alpha|^2}{6}.$$

Anwendung von $\lim_{\alpha\to 0}$ liefert die Behauptung. ♦

7.8 Die Zahl π

Satz 53 (und Definition) *Die Sinus–Funktion hat eine kleinste positive Nullstelle. Sie wird mit π bezeichnet.*

Beweis (0) Aufgrund des Additionstheorems für den Sinus gilt:

$$0 = \sin\alpha = \sin(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}) = \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Wenn wir also zeigen können, dass der Cosinus eine kleinste positive Nullstelle α_0 hat, so folgt daraus die Aussage des Satzes.

(1) Aus der Restgliedabschätzung für den Cosinus folgt

$$\cos 2 = [\,\cos 2 - (1 - \frac{2^2}{2})] - 1 \leq \frac{2^4}{4!} - 1 = -\frac{1}{3}.$$

(2) Es ist außerdem $\cos 0 = 1$. Aufgrund des Zwischenwertsatzes existiert eine Nullstelle der stetigen Cosinus–Funktion im Intervall $[0, 2]$. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Nullstellenmenge ein Minimum (und nicht nur ein Infimum) hat. Eigentlich kann das bei stetigen Funktionen sowieso nicht passieren (Beweis). Wir gehen aber einen anderen Weg.
(3) Die Ungleichung im Beweis von Folgerung 52 liefert für $0 < \alpha < 2$

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} \geq 1 - \frac{|\alpha|^2}{6} \geq 1 - \frac{4}{6} = \frac{1}{3}.$$

und damit

$$\sin\alpha > 0 \qquad \text{für } 0 < \alpha < 2.$$

(4) Die Cosinus–Funktion ist im Intervall $[0, 2]$ streng monoton fallend, da für $0 < \alpha < \beta < 2$ gilt:

$$\cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\beta-\alpha}{2} > 0.$$

Deshalb hat die Funktion im Intervall $[0, 2]$ nur eine Nullstelle. ♦
Als Folgerung ergeben sich bestimmte Werte von Cosinus und Sinus:

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$e^{i\alpha}$	1	i	-1	$-i$	1

Zum Beweis ist zunächst

$$\sin^2\frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{2} = 1 \quad \stackrel{(3)}{\Longrightarrow} \quad \sin\frac{\pi}{2} = +1.$$

Dann zerlegt man mit den Additionstheoremen die Argumente in $\frac{\pi}{2}$–Portionen. Als Beispiel:

$$\cos\pi = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \cos^2\frac{\pi}{2} - \sin^2\frac{\pi}{2} = -1.$$

Allgemeiner ergeben sich die folgenden Periodizitätseigenschaften

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + 2\pi) &= \cos\alpha\cos(2\pi) - \sin\alpha\sin(2\pi) = \cos\alpha \\
\sin(\alpha + 2\pi) &= \sin\alpha\cos(2\pi) + \cos\alpha\sin(2\pi) = \sin\alpha \\
\cos(\alpha + \pi) &= \cos\alpha\cos\pi - \sin\alpha\sin\pi = -\cos\alpha \\
\sin(\alpha + \pi) &= \sin\alpha\cos\pi + \cos\alpha\sin\pi = -\sin\alpha \\
\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) &= \cos\alpha\cos(\frac{\pi}{2}) - \sin\alpha\sin(\frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha \\
\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) &= \sin\alpha\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos\alpha\sin(\frac{\pi}{2}) = \cos\alpha
\end{aligned}$$

Außerdem gilt für die Nullstellenmengen von Sinus und Kosinus:

$$\begin{aligned}
\left\{\alpha \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sin\alpha = 0\right\} &= \left\{k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \\
\left\{\alpha \in \mathbb{R} \;\middle|\; \cos\alpha = 0\right\} &= \left\{(k + \frac{1}{2})\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}
\end{aligned}$$

Zur Begründung muss man nur auf die Periodizität verweisen und noch einmal betonen, dass die einzige Nullstelle von Sinus im Intervall $[0, \pi[$ die Null ist.

7.9 Die Tangens–Funktion

Definition Die Funktion

$$\tan \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} & \to \mathbb{R} \\ \alpha & \mapsto \tan(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \end{cases}$$

heißt *Tangens–Funktion*. Die gleiche Funktion

$$\tan \begin{cases}]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[& \to \mathbb{R} \\ \alpha & \mapsto \tan(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \end{cases}$$

mit der eingeschränkten Definitionsmenge $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ nennen wir eingeschränkte Tangens–Funktion.

Satz 54 *Die eingeschränkte Tangens–Funktion ist stetig, streng monoton steigend und surjektiv. Sei besitzt also eine stetige, streng monoton steigende Umkehrfunktion*

$$\arctan \begin{cases} \mathbb{R} & \to &]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\\ x & \mapsto & \arctan(x) \end{cases} .$$

Proof Auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}[$ sind sowohl die Sinusfunktion als auch die Funktion $\frac{1}{\cos\alpha}$ positiv und streng monoton steigend, also ist auch ihr Produkt, die Tangens–Funktion, auf $[0, \frac{\pi}{2}[$ positiv und streng monoton steigend.
Wegen der Schiefsymmetrie (Graph punktsymmetrisch)

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

ist die Tangens–Funktion auf dem Intervall $]-\frac{\pi}{2}, 0]$ negativ und ebenfalls streng monoton steigend. Daraus folgt, dass sie auf dem ganzen Intervall $]\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ streng monoton steigend ist.
Weiter existiert für jedes $M > 0$ ein $\alpha_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$, so dass für $\alpha > \alpha_0$:

$$\sin\alpha > \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\cos\alpha} > 2M \quad \Longrightarrow \quad \tan\alpha > M.$$

Da die Tangens–Funktion streng monoton steigend und schiefsymmetrisch ist, folgt

$$\lim_{\alpha \nearrow +\frac{\pi}{2}} \tan\alpha = +\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{\alpha \searrow -\frac{\pi}{2}} \tan\alpha = -\infty.$$

Mit dem Zwischenwertsatz folgt, dass jede reelle Zahl als Bild angenommen wird. Das ist die Surjektivität. ♦

Überlege die Formeln:

$$\tan^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1.$$