Skript zur Vorlesung

Analysis 1

(Wintersemester 2014/15)

Dieses Geheft enthält in kompakter Form die wesentlichen Inhalte, wie sie in der Vorlesung ,,Analysis I" vorgestellt werden.

Es ist zum Gebrauch neben der Vorlesung gedacht und erhebt nicht den Anspruch, ,,in sich selbst verständlich" oder vollständig zu sein.

S. Hilger

1 Vorbemerkung

Bezüglich der Rigorosität bei der Grundlegung des mathematischen Denkgebäudes gibt es zwei extreme Standpunkte:

- Streng–mathematisch. Auf der Grundlage von Axiomen (= nicht weiter hinterfragbaren Grundsätzen) werden Sätze mit Hilfe der Gesetze der Logik deduziert (= herabgeleitet).
- Es wird einfach an intuitive, graphische, alltags- und anwendungsbezogene Vorstellungen (wie sie beispielsweise auch in der Schule präsentiert werden), angeknüpft.

Beide Standpunkte sind für einen universitären Einstieg unangemessen. Wir wollen versuchen, einen vernünftigen Mittelweg zu gehen, eine möglichst gute Synthese der obigen Sichtweisen herzustellen.

Den Inhalt der Vorlesung ,,Analysis I" könnte man durch ein einziges Symbol kennzeichnen:

$$\mathbb{R}$$

Wir werden diesen Zahlenbereich der reellen Zahlen genau kennenlernen. Tragende Säulen dabei sind die

- Verknüpfungen (Grundrechenarten),
- die Ordnungsrelationen (,,kleiner",...)
- die topologische Struktur (Fassung des ,,Infinitesimalen", Grenzwertbegriff), dabei
- die Vollständigkeit.

Gleich zu Beginn könnten wir einfach konstatieren:

> Es gibt genau einen vollständig angeordneten Körper. Dieser wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Damit ist das Problem der Grundlegung der Analysis verschoben: Anstelle des unbekannten $\mathbb{R}$ sind Sie mit den unbekannten Begriffen

> vollständig — angeordnet — Körper

konfrontiert.

Tatsächlich geht es zunächst (in den Kapiteln 1 – 3) darum, dass Sie diese und viele andere Grundbegriffe kennenlernen. Damit deren Darlegung nicht zu trocken und abstrakt wird, wollen wir Beispiele anführen. Nur zu diesem Zweck, nur in den Kapiteln 1 – 3 wollen wir an die Schulmathematik anknüpfen. Die Beispiele kommen aus den folgenden Bereichen:

- Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$:
  - Grundrechenarten,
  - Anordnung,
  - Existenz und Eindeutigkeit der Dezimaldarstellung,
  - Teilbarkeitslehre, ggT, kgV
  - Primzahlen: Existenz und Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung.

  Rechnen, Anordnung, Zahldarstellung.
- Rationale (Bruch–) Zahlen $\mathbb{Q}$, Teilmenge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.
  - Grundrechenarten,
  - Anordnung,
  - Dezimaldarstellung.
- Elementare Geometrie in der Zeichenebene.

Ein mathematischer Text gliedert sich im wesentlichen in Definitionen, Axiome, Sätze, auch Präpositionen, Lemmata, Korollare, Hilfssätze,..., Beweise, Beispiele und zusätzliche Erläuterungen und Bemerkungen.

Hier kann man ebenfalls kompakt und rigoros oder sehr locker umgehen. Auch hier versuchen wir, den richtigen Mittelweg zu finden.

Zunächst erfolgen viele Definitionen. Sie werden durch Kursivdruck des zu definierenden Objekts kenntlich gemacht.

2 Aussagen, Mengen, Relationen und Abbildungen

Wir können uns hier nicht ausführlich mit den feinen und tiefen mathematischen Einsichten in zwei der grundlegenden Teilgebiete abgeben, die Aussagenlogik und Mengenlehre. Nichtsdestoweniger müssen wir einige elementare Begriffe und Fakten bereitstellen.

2.1 Aussagen

2.1.1 Naive Beschreibung

> Eine *Aussage* ist ein sprachliches Gebilde, das — innerhalb eines vereinbarten Kontexts — eindeutig als *wahr* (w) oder *falsch* (f) erkannt werden kann.

Ist eine Aussage wahr, so sagt man auch sie *gilt*.

2.1.2 Nicht–Beispiele

- Bleib hier! (Grammatik)
- Wie geht es Dir? (Grammatik)
- Die Resteverwertung ist bunt. (Sinngehalt)
- ,,Rot" ist eine schöne Farbe. (Wertung, Subjektivität)
- Harald ist rothaarig. (Kontext)
- $x \geq 0$ (Kontext)
- ,,Der Satz, den Sie gerade lesen (hören), ist falsch".
- Der älteste Mann der Welt ist tot. (Schlagzeile im Eichstätter Kurier)

2.1.3 Beispiele

,,Gute" Beispiele erhält man im allgemeinen dadurch, dass man als Kontext einfache klare Sachverhalte wählt (Quiz-Show) oder — eben — die ,,Mathematik".

Ist beispielsweise $X = \{1, 2, 3\}$, so kann man von den folgenden Aussagen sofort sagen, ob sie wahr oder falsch sind.

- $1 \in X$. (w)
- $3 \notin X$. (f)
- $5 \in X$. (f)
- 5 ist ungerade. (w)

Andere Beispiele:

- Für $n \geq 3$ hat die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ keine ganzzahlige nichttriviale Lösung. (trivial heißt ,,für jeden sofort zu sehen" oft ist es die Null–Lösung). Seit 1992 ist die Wahrheit dieser Aussage bewiesen.
- Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge. (Bis heute nicht entschieden)

2.2 Logische Operationen

Aussagen können zu neuen verknüpft werden, deren Wahrheitswert sich aus denen der vorgegebenen nach bestimmten Regeln, den ,,formalen Gesetzen der Logik", ergibt.

Mathematisch gesehen ist es umgekehrt: Die auf der linken Seite der folgenden Tabelle aufgelisteten Operationen werden durch die Zuordnung der Wahrheitswerte, wie sie der rechten Seite zu entnehmen sind, definiert.

Name:	Sprechweise:	Symbol:				
Eine Aussage vorgegeben:		$\mathcal{A}$	w		f	
Negation	NICHT $\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$	f		w	
Zwei Aussagen vorgegeben:		$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	(w,w)	(w,f)	(f,w)	(f,f)
Konjunktion	$\mathcal{A}$ UND (ZUGLEICH) $\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	w	f	f	f
Disjunktion	$\mathcal{A}$ ODER $\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	w	w	w	f
Disjunktion (ausschl.)	ENTWEDER $\mathcal{A}$ ODER $\mathcal{B}$		f	w	w	f
Implikation	$\mathcal{A}$ IMPLIZIERT $\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	w	f	w	w
Bijunktion	$\mathcal{A}$ ÄQUIVALENT $\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$	w	f	f	w

2.2.1 Die Negation Auf sprachlicher Ebene wird die Negation einer Aussage meist durch das Wörtchen NICHT beschrieben. Auch die Vorsilben UN, IN bzw. IR oder die wechselweise Ersetzung von EIN durch KEIN sind üblich. Manchmal gibt es auch Begriffspaare, die gegenteilig zueinander sind.

Die Negation kehrt den Wahrheitswert einer Aussage um.

Beispiele:

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
Jedes LGS lässt sich durch Zeilen-Äquivalenzumformungen in Dreiecksform überführen.	Nicht jedes LGS lässt sich durch Zeilen-Äquivalenzumformungen in Dreiecksform überführen.
Es gibt endlich viele Primzahlzwillinge.	Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge.
$\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl.	$\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.
Die quadratische Matrix A ist regulär.	Die quadratische Matrix A ist singulär.

2.2.2 Die Konjunktion Auf sprachlicher Ebene wird die Konjunktion zweier Aussagen meist durch das zwischengestellte Wörtchen UND, manchmal UND ZUGLEICH beschrieben. Auf symbolischer Ebene bedeutet auch oft das zwischengestellte Komma ein UND. Der sprachliche Hinweis auf UND wird oft ganz weggelassen.

Beispiele:

- Die Symmetrieachse halbiert senkrecht die Verbindungsstrecke von Punkt und Bildpunkt.
- In einem achsensymmetrischen sind zwei Seiten gleich lang UND zwei Winkel gleich groß.

Die Aussage $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}$ ist falsch für alle Aussagen $\mathcal{A}$.

2.2.3 Die Disjunktion Sprachlich wird die Disjunktion durch das zwischengestellte ODER ausgedrückt.

Im mathematischen Kontext beinhaltet die Gültigkeit einer durch ODER hergestellten Verknüpfung zweier Aussagen immer auch die Gültigkeit beider Teilaussagen. Im Alltagssprachgebrauch ist dies nicht genau geklärt, oft wird das ODER ausschließend aufgefasst. Beispiele:

- Zwei Geraden sind parallel ODER sie schneiden sich.
  (wahr im $\mathbb{R}^2$, falsch im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Kann beides wahr sein?)
- ,,Geld ODER Leben" sagte der Raubmörder noch vorher.
- Der Mathematiklehrer sagt zur Klasse: Ihr dürft bei der heute gestellten Hausaufgabe die Aufgabe 3 ODER die Aufgabe 5 weglassen.

Die Aussage $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$ ist wahr für alle Aussagen $\mathcal{A}$. Das Zusammenspiel dieser Aussage mit der oben angegebenen dualen Aussage kommt in dem klassischen philosophischen Grundsatz ,,Tertium non datur" zum Ausdruck.

2.2.4 Die ausschließende Disjunktion Sprachlich wird die ausschließende Disjunktion durch die Paarung eines vorangestellten ENTWEDER und eines zwischengestellten ODER ausgedrückt.

Beispiele:

- Für zwei verschiedene natürliche Zahlen m, n gilt ENTWEDER $m < n$ ODER $n < m$.
  (wahr)
- Für zwei verschiedene natürliche Zahlen m, n gilt ENTWEDER $m|n$ ODER $n|m$. (falsch)
- Die Lateinlehrerin sagt zur Klasse: Ihr dürft bei der heute gestellten Hausaufgabe ENTWEDER die Aufgabe 3 ODER die Aufgabe 5 weglassen.

2.2.5 Die Implikation Anstelle von „$\mathcal{A}$ IMPLIZIERT $\mathcal{B}$" spricht man auch:

- Aus $\mathcal{A}$ folgt $\mathcal{B}$.
- Wenn $\mathcal{A}$, dann $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{B}$, wenn $\mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ ist hinreichend für $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{B}$ ist notwendig für $\mathcal{A}$.
- (Engl.) If $\mathcal{A}$, then $\mathcal{B}$.

Beispiele

- WENN heute Montag ist, DANN beginnt der Werktagsname von morgen mit D.
  (An jedem Wochentag wahr.)
- WENN Du im Abitur 3,5 schaffst, bekommst Du ein Auto.
  (Diese Aussage ist nur dann falsch, wenn das Versprechen nicht eingelöst wird. Sie ist insbesondere wahr, wenn „trotz Scheiterns" ein Auto geschenkt wird.)
- WENN $3 + 4 = 8$, DANN $5 = 0$. (wahr. Diese Aussage kann auch arithmetisch bewiesen werden: Zieht man auf beiden Seiten der ersten Gleichung 7 ab, so stellt sich heraus: $0 = 1$. Beide Seiten dieser Gleichung werden dann mit 5 multipliziert. Solche Spitzfindigkeiten werden nicht Ihr mathematischer Alltag sein.)
- WENN eine natürliche Zahl mit gerader Stellenzahl (im 10er System) eine Spiegelzahl ist, DANN ist sie ohne Rest durch 11 teilbar.

2.2.6 Die Bijunktion Anstelle von „$\mathcal{A}$ ÄQUIVALENT $\mathcal{B}$" sagt man auch:

- $\mathcal{A}$ ist hinreichend und notwendig für $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{A}$ genau dann, wenn $\mathcal{B}$.
- (Engl.) $\mathcal{A}$, if and only if $\mathcal{B}$, in Kurzform oft mit dem Kunstwort: $\mathcal{A}$, iff $\mathcal{B}$.

Beispiele

- Ein Kreis mit $[AB]$ als Durchmesser geht genau dann durch C, wenn der Innenwinkel bei C das Maß $90°$ hat (Satz von Thales über ein Dreieck ΔABC).
- Eine natürliche Zahl ist genau dann eine Quadratzahl, wenn die Zahl ihrer Teiler ungerade ist.
- Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Ein Vergleich der Wahrheitswerte zeigt, dass

$$(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \quad \Leftrightarrow \quad \Big((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})\Big).$$

Das bedeutet, dass der Beweis einer Äquivalenz durch Beweis der beiden Implikationen $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ bewerkstelligt werden kann.

2.2.7 Aussagenalgebra Die Gesetze der Operationen $\neg, \wedge, \vee$ und der aus ihnen abgeleiteten Operationen wie $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ innerhalb eines Systems von Aussagen lassen sich in einem ,,Axiomensystem" zusammenfassen, das die Struktur eines ,,BOOLE'schen Verbandes" trägt. Alle ,,Rechenregeln" für Aussagen lassen sich aus diesem Axiomen herleiten. Wir werden einige Boole'sche Rechenregeln in den Übungen behandeln. Hier nur ein Beispiel:

$$\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \qquad (\wedge\text{–Distributivgesetz})$$

Zur Veranschaulichung ein Beispiel:

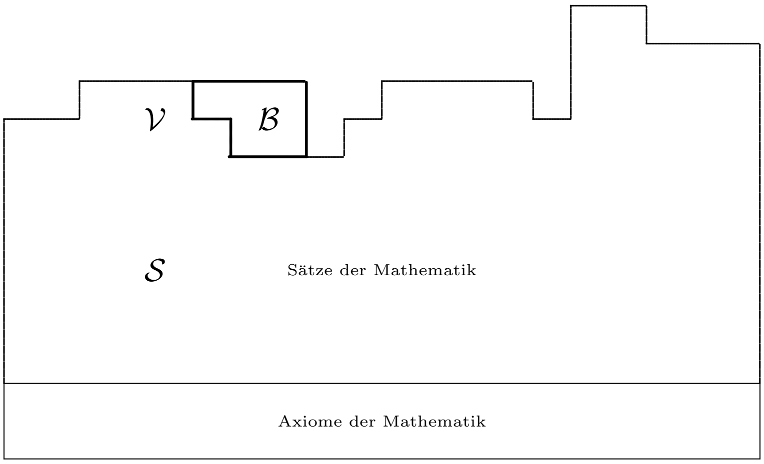
$\mathcal{A}$: Ich kaufe Papier
$\mathcal{B}$: Ich kaufe einen Bleistift
$\mathcal{C}$: Ich kaufe einen Kugelschreiber

Beweis durch Wahrheitswerttabelle: Für alle acht Kombinationen der Wahrheitswerte von $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ wird nachgeprüft, dass die Wahrheitswerte von $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$ und $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$ übereinstimmen.

$\mathcal{A}$	w	w	w	w	f	f	f	f
$\mathcal{B}$	w	w	f	f	w	w	f	f
$\mathcal{C}$	w	f	w	f	w	f	w	f
$\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$	w	w	w	f	f	f	f	f
$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$	w	w	w	f	f	f	f	f

2.3 Mathematik als Aussagennetz im Kontext der Mengenlehre

2.3.1 Axiome Sehr stark vereinfacht kann das Programm der wissenschaftlichen Mathematik so in einem Diagramm dargestellt werden:



Ausgangspunkt ist eine Sammlung von einigen grundlegenden Aussagen im Kontext der Mengenlehre, die nicht auf andere Aussagen zurückgeführt werden können. Man nennt diese grundlegenden Aussagen die *Axiome*. Sie werden als wahr gesetzt.

Ausgehend davon werden weitere wahre Aussagen abgeleitet, die in diesem Zusammenhang dann *Sätze* (oder Theoreme, Korollare, Folgerungen, Präpositionen, Hilfssätze, Lemmata,. . .) heißen.

Die zeitlose Aktivität eines Mathematikers oder einer Mathematikerin besteht darin, das System der Sätze zu erlernen, sich darin zu bewegen und — vor allem — neue Sätze zu erschließen und zu beweisen. Dieses Programm unterliegt einerseits einem historischen Ablauf und andererseits der individuellen Entwicklung.

2.3.2 Mathematische Sätze bestehen letztlich aus Aussagen der Form

$$\underset{\text{Voraussetzung}}{\mathcal{V}} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\text{Behauptung.}}{\mathcal{B}}$$

Die *Voraussetzung* $\mathcal{V}$ wird dabei dem System der bereits abgeleiteten Sätze entnommen. die *Behauptung* $\mathcal{B}$ ist die aktuell zu beweisende neue Aussage.

Bei Formulierungen von Sätzen ist es meist so, dass die Voraussetzung $\mathcal{V}$ nur die aktuell wesentliche Information enthält. Viele weitere Anteile der Voraussetzung beinhalten unausgesprochen bisher behandelte Axiome oder Sätze oder den gerade aktuellen Kontext des Satzes.

Beispiel eines Satzes:

> Zwei Geraden sind parallel oder sie schneiden sich.

Der unausgesprochene Kontext besteht in der ,,Geometrie der Zeichenebene”, die die Begriffsbildungen ,,Gerade, parallel, sich schneiden” bereitstellt. Ein guter Beweis erfordert weiter die Klärung, welche Sätze und Axiome aus der ebenen Geometrie als Voraussetzung vorgegeben sind.

2.3.3 Beweisen Der Beweis eines mathematischen Satzes besteht also darin, die Implikation $\mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{B}$ als wahr zu erweisen. Dies geschieht dadurch, dass man die Voraussetzung $\mathcal{V}$ als wahr betrachtet und dann in kleinen ,,allgemein nachvollziehbaren" Schritten die Behauptung $\mathcal{B}$ herleitet. Was dabei ,,allgemein nachvollziehbar" heißt, entzieht sich einer genaueren mathematischen Definition, die mathematische Praxis weltweit zeigt aber, dass darüber i.a. Übereinkunft erzielt werden kann.

2.3.4 Widerspruchsbeweis

Mithilfe einer Wahrheitswerttabelle überlegen wir zunächst, dass für zwei gegebene Aussagen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{B}$ die vier Aussagen

$$\mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{B} \qquad \neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{V} \qquad \neg\mathcal{V} \vee \mathcal{B} \qquad \neg(\mathcal{V} \wedge \neg\mathcal{B})$$

äquivalent sind. Das geschieht dadurch, dass für alle vier Kombinationen der Wahrheitswerte von $\mathcal{V}, \mathcal{B}$ getestet wird, ob die Wahrheitswerte der vier Aussagen übereinstimmen:

$\mathcal{V}$	w	w	f	f
$\mathcal{B}$	w	f	w	f
$\neg\mathcal{V}$	f	f	w	w
$\neg\mathcal{B}$	f	w	f	w
$\mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{B}$	w	f	w	w
$\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{V}$	w	f	w	w
$\neg(\mathcal{V} \wedge \neg\mathcal{B})$	w	f	w	w
$\neg\mathcal{V} \vee \mathcal{B}$	w	f	w	w

Das bedeutet, dass man den Beweis der Implikation $\mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{B}$ durch den Beweis jeder der anderen äquivalenten Aussagen aus den letzten drei Zeilen ersetzen kann.

Sprachlich lassen sich die drei Spielarten so beschreiben:

$\boxed{\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{V}}$ Man nimmt an, dass die Behauptung $\mathcal{B}$ falsch ist und schließt daraus (unter strenger Anwendung der Logik), dass die Voraussetzung $\mathcal{V}$ falsch ist. Man spricht hier vom *Beweisen durch Annahme der gegenteiligen Behauptung.*

$\boxed{\neg(\mathcal{V} \wedge \neg\mathcal{B})}$ Nehme die Aussage $\mathcal{V}$ und die Aussage $\neg\mathcal{B}$ als wahr an und leite daraus irgendeine falsche Aussage $\mathcal{F}$ (einen Widerspruch) her. Man hat also $\mathcal{V} \wedge \neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{F}$ bewiesen. Die Wahrheitswertzuordnung durch $\Rightarrow$ zeigt dann, dass $\mathcal{V} \wedge \neg\mathcal{B}$ falsch ist und somit $\neg(\mathcal{V} \wedge \neg\mathcal{B})$ wahr. Diese Methode heißt *Beweisen durch Herstellen eines Widerspruchs*, kurz *Widerspruchsbeweis.*

$\boxed{\neg\mathcal{V} \vee \mathcal{B}}$ Man beweist (unabhängig vom Wahrheitswert für $\mathcal{V}$), dass die Behauptung $\mathcal{B}$ stimmt oder die Voraussetzung $\mathcal{V}$ falsch ist.

Ein Widerspruchsbeweis wird typischerweise verwendet als Beweis dafür, dass etwas **nicht** existiert. Beispiele dafür sind die folgenden beiden ,,Sätzchen", deren Beweise fast schon für Schüler/innen erreichbar sind:

2.3.5 Satz Ist s eine rationale Zahl, so ist $s^2 \neq 2$.

Um dies zu beweisen, isolieren wir Voraussetzung und Behauptung aus diesem Satz:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{V} & : & s \text{ ist eine rationale Zahl.} \\ \mathcal{B} & : & \text{Es ist } s^2 \neq 2. \end{array}$$

Wir nehmen $\mathcal{V}$ und das Gegenteil von $\mathcal{B}$ als wahr an.

Ohne **B**eschränkung **d**er **A**llgemeinheit (O.B.d.A) können wir annehmen, dass s positiv ist.

Aufgrund von $\mathcal{V}$ hat s die Form $s = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Der Bruch kann gekürzt werden, so dass $s = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, teilerfremd.

Aufgrund von $\neg\mathcal{B}$ gilt dann weiter

$$\begin{array}{ll} & s^2 = 2 \\ \Longrightarrow & \dfrac{p^2}{q^2} = 2 \\ \Longrightarrow & p^2 = 2q^2 \\ \Longrightarrow & 2 \text{ ist Primteiler von } p. \\ \Longrightarrow & 4 \text{ teilt } p^2 \\ \Longrightarrow & 2 \text{ teilt } q^2 \quad \text{(Dieser Schluss gründet sich auch auf } p^2 = 2q^2 \text{ drei Zeilen weiter oben.)} \\ \Longrightarrow & 2 \text{ ist Primteiler von } q. \end{array}$$

Wir haben bewiesen, dass 2 sowohl ein Teiler von p als auch ein Teiler von q ist. Das stellt einen WIDERSPRUCH dazu dar, dass p und q teilerfremd sind.

2.3.6 Sätzchen Es gibt unendlich viele Primzahlen (Euklid).

Voraussetzung und Behauptung können hier wie folgt dargestellt werden:

$\mathcal{V}$: ,,Teilbarkeitslehre" inkl. Satz über die eindeutige Primfaktorzerlegung

$\mathcal{B}$: Es gibt unendlich viele Primzahlen

Wir nehmen $\mathcal{V}$ und das Gegenteil von $\mathcal{B}$ als wahr an.

Aufgrund von $\neg\mathcal{B}$ können wir das Produkt aller Primzahlen hinschreiben:

$$m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \ldots \cdot p_{\max}.$$

$m + 1$ ist keine Primzahl, besitzt also aufgrund des Satzes von der Primzahlzerlegung einen Primteiler p.

Da die Primzahl p ein Teiler von m und von $m + 1$ ist, teilt sie auch die Differenz $= 1$. WIDERSPRUCH.

2.4 Mengen

2.4.1 Cantor'sche Auffassung über Mengen, Naive Mengenlehre

> Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche die Elemente von M genannt werden, zu einem Ganzen.
> [Gesammelte Abhandlungen, ed E. Zermelo, Berlin 1932]
>
> **Georg Cantor** (1845 – 1918, Begründer der Mengenlehre)

2.4.2 Elemente von Mengen

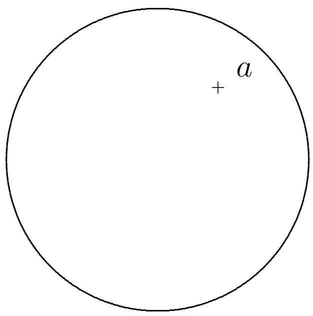
Zentral wichtig, letztlich aber undefiniert, ist die Beobachtung, dass zwischen zwei mathematischen Objekten a und M die Beziehung

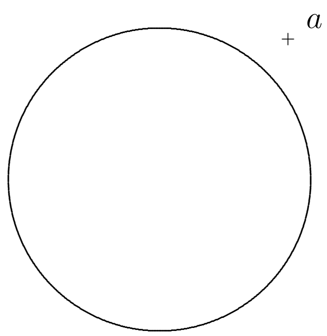
a ist Element der Menge M, symbolisch: $a \in M$

bestehen kann.

Innerhalb der Mathematik, wie wir sie kennenlernen werden, ist es für zwei Objekte i.a. prinzipiell klar entscheidbar, ob

$a \in M$ oder $a \notin M$.





2.4.3 Schreibweise Eine Menge wird — zunächst — durch Aufzählung aller ihrer Elemente beschrieben. Beispiele

$$M = \Big\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\Big\} = \Big\{0,1,2,\ldots,9\Big\},$$

oder

$$M = \Big\{x,y,z,g,e,b,a\Big\}.$$

Beachte dabei:

- In der wissenschaftlichen Mathematik werden zur Trennung Kommata gesetzt, in der Schule Strichpunkte.
- Eine bestimmte Reihenfolge ist mathematisch ohne Belang, manchmal ist sie zweckmäßig. Bei Vorliegen einer ,,bekannten, selbstverständlichen" Reihenfolge kann man eine längere Liste durch Punkte abkürzen.

- Mehrfachnennungen sind möglich:

$$\Big\{1,4,12,20\Big\} = \Big\{12,4,20,1\Big\} = \Big\{1,12,4,20,1,12,20\Big\}.$$

- Auch Mengen können Elemente sein.

$$M = \Big\{1,2,3,\{1,2\}\Big\}, \qquad \text{Beachte dabei } 2 \neq \{2\}.$$

- Mit Hilfe von Punkten kann man auch bestimmte unendliche Mengen kennzeichnen:

$$\Big\{1,3,5,\ldots\Big\}, \qquad \Big\{2,3,5,7,11,\ldots\Big\}, \qquad \Big\{\ldots,-4,-2,0,+2,+4,\ldots\Big\}$$

2.4.4 Die leere Menge

Die Menge, die kein Element enthält, wird *leere Menge* genannt.

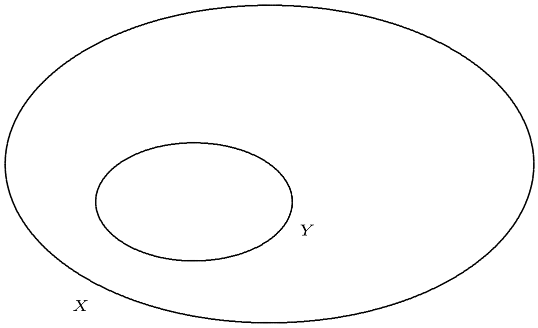
Als Symbol wird weltweit das $\varnothing$ oder $\emptyset$ verwendet. In der Schule ist das bildsprachliche $\{\ \}$ üblich.

2.5 Operieren mit Mengen

2.5.1 Gleichheit Zwei Mengen sind (per definitionem, Cantor) gleich, wenn sie in ihren Elementen übereinstimmen:

$$X = Y \iff (a \in X \iff a \in Y).$$

2.5.2 Teilmenge Es seien zwei Mengen X, Y gegeben.



Venn-Diagramm

- Y heißt *Teilmenge* von X,

  $$Y \subseteq X,$$

  wenn gilt: Aus $x \in Y$ folgt $x \in X$.

- Y heißt *echte Teilmenge* von X, wenn zusätzlich $Y \neq X$ gilt. Symbolisch kann dies mit $Y \subsetneqq X$ zum Ausdruck gebracht werden.

- Die Verwendung von $Y \subset X$ als Zeichen für eine der obigen Beziehungen ist wegen der Missverständlichkeit nicht so günstig.

Folgerungen:

1. Für jede Menge X gilt:

   $$\emptyset \subseteq X.$$

2. Für zwei Mengen X und Y sind die beiden Aussagen

   $$X = Y, \qquad (X \subseteq Y) \text{ und } (Y \subseteq X)$$

äquivalent. Der Beweis der Gleichheit zweier Mengen geschieht oft durch den Nachweis dieser wechselweisen Teilmengenbeziehung.

2.5.3 Aussagen definieren Teilmengen Es sei X eine Menge. Für jedes $x \in X$ sei eine Aussage $\mathcal{A}(x)$ vorgegeben[1]. Dann kann die Teilmenge

$$Y = \{x \in X \mid \mathcal{A}(x) \text{ ist wahr}\} \overset{\text{kürzer}}{=} \{x \in X \mid \mathcal{A}(x)\}$$

gebildet werden. Der senkrechte Strich ist als ,,mit der Eigenschaft, dass" zu lesen.

Beispiel: $\{n \in \mathbb{N} | n \text{ ist eine Quadratzahl}\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$.

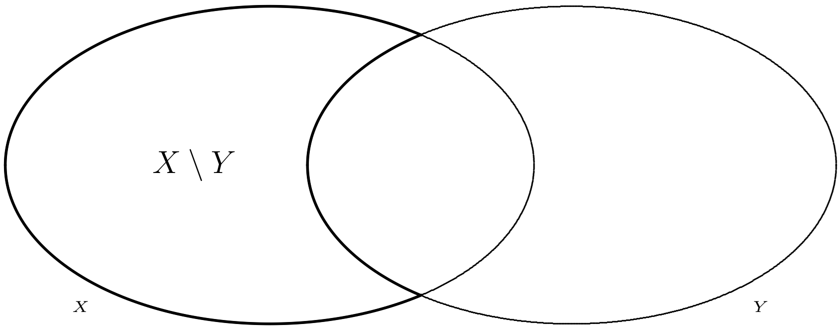
[1]Man nennt dies auch eine Aussageform.

2.5.4 Differenzmenge und Komplement

Für zwei vorgegebene Mengen X, Y heißt

$$X \setminus Y \ := \ \left\{x \in X \,\middle|\, x \notin Y\right\}$$

die *Differenzmenge*. (Der Doppelpunkt steht auf der Seite des zu definierenden Objekts.)



Venn-Diagramm

Beispiel:

$$X \ = \ \{0,1,4,7,9\} \qquad Y \ = \ \{0,2,3,4,5\} \qquad X \setminus Y \ = \ \{1,7,9\}$$

Wir haben dabei nicht vorausgesetzt, dass Y eine Teilmenge von X ist. Falls dies der Fall ist, so heißt die Differenzmenge $X \setminus Y$ auch das *Komplement* oder *Komplementärmenge* von Y in X. Beispiel:

$$X \ = \ \{0,1,4,7,9\} \qquad Y \ = \ \{0,7,9\} \qquad \{1,4\} \text{ ist das Komplement von } Y \text{ in } X$$

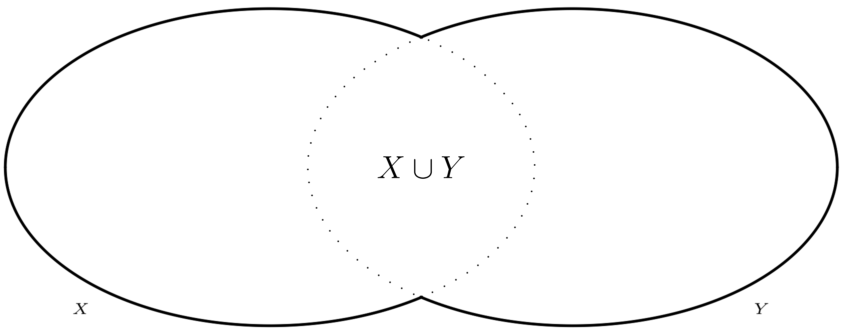
Ist die Obermenge X durch den Kontext fixiert, so schreibt man symbolisch einfach

$$Y^c \ = \ X \setminus Y$$

2.5.5 Vereinigungsmenge Für zwei vorgegebene Mengen X, Y heißt

$$X \cup Y \ := \ \{z | z \in X \text{ ODER } z \in Y\}$$

die *Vereinigung(-smenge)* von X und Y.



Venn-Diagramm

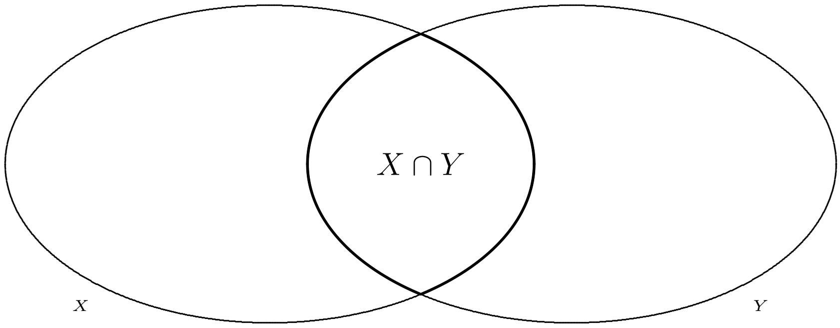
Beispiel:

$$X \ = \ \{0,1,4,7,9\} \qquad Y \ = \ \{0,2,3,4,5\} \qquad X \cup Y \ = \ \{0,1,2,3,4,5,7,9\}$$

2.5.6 Schnittmenge Für zwei vorgegebene Mengen X, Y heißt

$$X \cap Y \ := \ \{z | z \in X \text{ UND } z \in Y\}$$

die *Schnittmenge* oder der *Durchschnitt* von X und Y.



Venn-Diagramm

Beispiel:

$$X \ = \ \{0, 1, 4, 7, 9\} \qquad Y \ = \ \{0, 2, 3, 4, 5\} \qquad X \cap Y \ = \ \{0, 4\}$$

Zwei Mengen X und Y, für die $X \cap Y = \varnothing$ gilt, heißen *disjunkt*.

2.5.7 Potenzmenge Ist eine Menge X gegeben, so heißt die Menge aller Teilmengen von X die *Potenzmenge* von X. Sie wird mit $\mathcal{P}(X)$ bezeichnet. Beispiele:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \ &= \ \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\Big\}, \quad \text{(dann:)} \\ &\{1,3\} \subseteq \{1,2,3\} \qquad \text{äquivalent:} \qquad \{1,3\} \in \mathcal{P}(\{1,2,3\}). \end{aligned}$$

Die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Sie lässt sich nicht in aufzählender Form darstellen.

$$\begin{aligned} &\{1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ &\{2, 34, 93821, 39237\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ &\{\text{gerade Zahlen}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ &\{\text{Primzahlen}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \end{aligned}$$

2.5.8 Mengenalgebra Die Gesetze der Operationen $\setminus, \cap, \cup$ und der aus ihnen abgeleiteten Operationen wie $\subseteq$ innerhalb eines Systems von Mengen lassen sich ebenfalls in einem ,,Axiomensystem" zusammenfassen, das die Struktur eines BOOLE'schen Verbandes trägt.

Ein Beispiel:

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \qquad (\cap\text{–Distributivgesetz})$$

Beweis (Variante 1): Übertragung in eine Wahrheitstabelle. Betrachte ein Element a bzgl. X, Y, Z.

X	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
Y	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
Z	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$X \cap (Y \cup Z)$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

Das bedeutet, dass ein beliebiges Element a genau dann in $X \cap (Y \cup Z)$ enthalten ist, wenn es in $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ enthalten ist.

Beweis (Variante 2): Wir zeigen zunächst, dass $X \cap (Y \cup Z) \subseteq (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$:

$$\begin{aligned}
& \text{Es sei } a \in X \cap (Y \cup Z) \\
\Longrightarrow\ & a \in X \text{ und } (a \in Y \text{ oder } a \in Z) \\
\Longrightarrow\ & (a \in X \text{ und } a \in Y) \text{ oder } (a \in X \text{ und } a \in Z) \\
\Longrightarrow\ & a \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z)
\end{aligned}$$

Dann muss noch die umgekehrte Richtung gezeigt werden:

$$\begin{aligned}
& \text{Es sei } a \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \\
\Longrightarrow\ & (a \in X \text{ und } a \in Y) \text{ oder } (a \in X \text{ und } a \in Z) \\
\Longrightarrow\ & a \in X \text{ und } (a \in Y \text{ oder } a \in Z) \\
\Longrightarrow\ & a \in X \cap (Y \cup Z)
\end{aligned}$$

Beweis (Variante 3): Es sei $a \in X \cup Y \cup Z$. Wir betrachten die drei Aussagen:

$$\mathcal{A} : a \in X, \qquad \mathcal{B} : a \in Y, \qquad \mathcal{C} : a \in Z.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
& a \in X \cap (Y \cup Z) && \Longleftrightarrow && \mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \\
\stackrel{\wedge\text{–DG}}{\Longleftrightarrow}\ & (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) && \Longleftrightarrow && a \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z)
\end{aligned}$$

Die in diesem Beweis zum Ausdruck kommende Entsprechung zwischen Aussagenalgebra und Mengenalgebra kann man innerhalb der ,,Verbandstheorie" genauer untersuchen. Wir können und wollen uns damit hier nicht aufhalten.

2.5.9 Quantoren Es gibt noch ein anderes Wechselspiel zwischen einer gegebenen Menge (*Grundmenge*) M und Aussagen. Man spricht von einer *Aussageform*, wenn die Elemente x der Menge M als Variable innerhalb einer Aussage $\mathcal{A}(x)$ auftreten. Beispiele

- $n \in \mathbb{N}$, n ist eine Quadratzahl.
- $n \in \mathbb{N}$, n besitzt eine eindeutige Primzahlzerlegung.
- $q \in \mathbb{Q}$, q besitzt eine Quadratwurzel.

Je nach dem, welches Element aus der Grundmenge eingesetzt wird, ergibt sich eine wahre oder falsche Aussage.

Aus einer Aussageform lassen sich durch besondere *Quantoren* Aussagen herstellen:

- All–Quantor: ,,FÜR ALLE $x \in M$ gilt $\mathcal{A}(x)$".

  Symbolisch: $\underset{x \in M}{\forall} \ \mathcal{A}(x)$ oder $\forall x \in M \ \ \mathcal{A}(x)$

- Existenz–Quantor: ES GIBT (MINDESTENS) EIN $x \in M$, für das $\mathcal{A}(x)$ gilt.

  Symbolisch: $\underset{x \in M}{\exists} \ \mathcal{A}(x)$ oder $\exists x \in M \ \ \mathcal{A}(x)$

- ES GIBT GENAU EIN $x \in M$, für das $\mathcal{A}(x)$ gilt.

  Symbolisch: $\underset{x \in M}{\exists !} \ \mathcal{A}(x)$ oder $\exists !\, x \in M \ \ \mathcal{A}(x)$

Beachte die Äquivalenz:

$$\neg \left(\underset{x \in M}{\forall} \ \mathcal{A}(x) \right) \quad \Longleftrightarrow \quad \underset{x \in M}{\exists} \ (\neg \mathcal{A}(x))$$

Das bedeutet, eine All–Aussage ist schon dann falsch, wenn sie für irgendein Beispiel (,,Gegenbeispiel") falsch ist.

Beispielsweise ist der Satz

> Alle natürlichen Zahlen der Form $2^p - 1$, wobei p eine Primzahl ist, sind selbst Primzahlen.

falsch. Zum Beweis genügt die Angabe eines Gegenbeispiels: $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$. (Bemerkung: Primzahlen der obigen Form heißen Mersenne'sche Primzahlen, vgl. GIMPS Projekt).

Entsprechend gilt auch die Äquivalenz:

$$\neg \left(\exists_{x \in M} \ \mathcal{A}(x) \right) \quad \Longleftrightarrow \quad \underset{x \in M}{\forall} \ (\neg \mathcal{A}(x))$$

In Worten: Es gibt kein einziges x mit der Eigenschaft ,,$\mathcal{A}(x)$ wahr" genau dann, wenn für alle x die Aussage $\mathcal{A}(x)$ falsch ist.

2.5.10 Mengenalgebra mit unendlich vielen Mengen wird durch Verwendung von Quantoren möglich.

Sind X_i unendlich viele Mengen, die durch einen Index i (aus einer Indexmenge I) gekennzeichnet sind, so definiert man

$$\bigcap_{i \in I} X_i := \{a \mid a \in X_i \text{ für alle } i \in I\}$$
$$\bigcup_{i \in I} X_i := \{a \mid a \in X_i \text{ für (mindestens) ein } i \in I\}$$

Sind zum Beispiel die Mengen X_i reelle Intervalle

$$X_i = [-i, +i] \subseteq \mathbb{R},$$

so ergibt sich

$$\bigcap_{i \in I} X_i = [-1, +1]$$
$$\bigcup_{i \in I} X_i = \mathbb{R}$$

2.6 Relationen

2.6.1 Definition: Geordnetes Paar

Für zwei vorgegebene Mengen X, Y und Elemente $x \in X$, $y \in Y$ heißt

$$(x, y) := \Big\{\{x, y\}, \{x\}\Big\}$$

das durch x und y gebildete *(geordnete) Paar* oder 2–*Tupel*. x und y heißen in diesem Zusammenhang die *erste* bzw. *zweite Koordinate* des Paares.

2.6.2 Satz: Gleichheit von Paaren

Sind X, Y zwei Mengen mit $x_1, x_2 \in X$ und $y_1, y_2 \in Y$ so gilt:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2 \text{ und } y_1 = y_2.$$

Dieser Satz wäre mit Mengen anstelle geordneter Paare falsch.

Ist der Satz 2.6.2 akzeptiert, so kann die zugrundeliegende ,,umständliche" Definition 2.6.1 wieder in den Hintergrund treten.

2.6.3 Beweis Die eine Richtung $\Leftarrow$ ist trivial. Die andere Richtung $\Rightarrow$ muss bewiesen werden.

$$\begin{aligned}
& (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \\
\Longrightarrow \quad & \Big\{\{x_1, y_1\}, \{x_1\}\Big\} = \Big\{\{x_2, y_2\}, \{x_2\}\Big\} \\
\Longrightarrow \quad & (\{x_1\} = \{x_2\} \text{ und } \{x_1, y_1\} = \{x_2, y_2\}) \quad \text{oder} \\
& (\{x_1\} = \{x_2, y_2\} \text{ und } \{x_2\} = \{x_1, y_1\}).
\end{aligned}$$

Wir betrachten diese zwei Fälle:
1. Fall:

$$\begin{aligned}
& \{x_1\} = \{x_2\} \text{ und } \{x_1, y_1\} = \{x_2, y_2\} \\
\Longrightarrow \quad & x_1 = x_2 \text{ und } y_1 \in \{x_2, y_2\} \text{ und } y_2 \in \{x_1, y_1\} \\
\Longrightarrow \quad & x_1 = x_2 \text{ und } (y_1 = x_2 = x_1 \text{ oder } y_1 = y_2) \text{ und } (y_2 = x_1 = x_2 \text{ oder } y_2 = y_1) \\
\Longrightarrow \quad & x_1 = x_2 \text{ und } y_1 = y_2.
\end{aligned}$$

2. Fall:

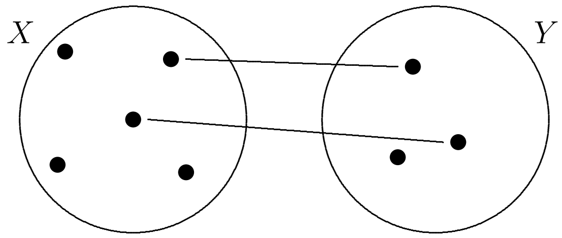
$$\begin{aligned}
& \{x_1\} = \{x_2, y_2\} \text{ und } \{x_2\} = \{x_1, y_1\} \\
\Longrightarrow \quad & x_1 = x_2 = y_2 = y_1.
\end{aligned}$$

2.6.4 Das kartesische Produkt Das *Kartesische Produkt* (René Descartes, fr, 1596 – 1650) der Mengen X und Y ist die Menge der durch die Elemente von X und die Elemente von Y gebildeten geordneten Paare:

$$X \times Y := \Big\{(x, y) \Big| \, x \in X, y \in Y\Big\}.$$

2.6.5 Relationen Eine *Relation R zwischen X und Y* ist eine beliebige Teilmenge von $X \times Y$.

Gut kann man das mit Hilfe eines *Liniendiagramms* oder *Pfeildiagramms* veranschaulichen:



Zwischen einem Element $x \in X$ und einem Element $y \in Y$ wird genau dann eine Linie gezogen oder ein Pfeil angebracht, wenn $(x, y) \in R$.

2.6.6 Spiegelrelation Ist R eine Relation, so heißt

$$R^{-1} := \Big\{ (y, x) \;\Big|\; (x, y) \in R \Big\}$$

die zu R *gespiegelte* Relation oder *Spiegelrelation*.

2.6.7 Eigenschaften einer Relation

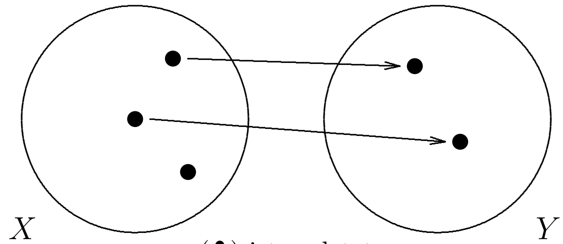
Eine Relation zwischen X und Y heißt

$$\begin{cases} (\clubsuit) \ \textit{links–total}, \\ (\spadesuit) \ \textit{rechts–eindeutig}, \\ (\heartsuit) \ \textit{rechts–total}, \\ (\diamondsuit) \ \textit{links–eindeutig}, \end{cases} \text{ wenn für jedes } \begin{cases} x \in X \text{ mindestens ein } y \in Y \\ x \in X \text{ höchstens ein } y \in Y \\ y \in Y \text{ mindestens ein } x \in X \\ y \in Y \text{ höchstens ein } x \in X \end{cases}$$

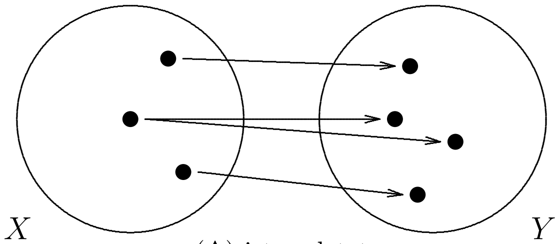
existiert, so dass $(x, y) \in R$.

Im Diagramm veranschaulicht heißt dies:

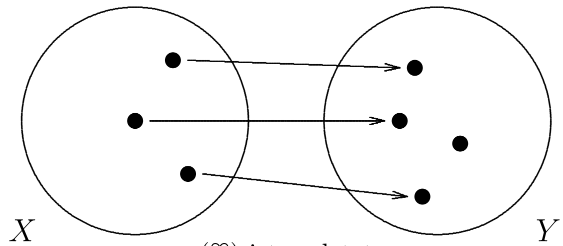
$$\text{In } \begin{cases} x \in X \text{ startet mindestens} \\ x \in X \text{ startet höchstens} \\ y \in Y \text{ endet mindestens} \\ y \in Y \text{ endet höchstens} \end{cases} \text{ ein Pfeil.}$$



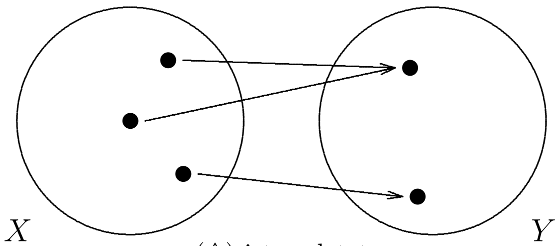
($\clubsuit$) ist verletzt



($\spadesuit$) ist verletzt

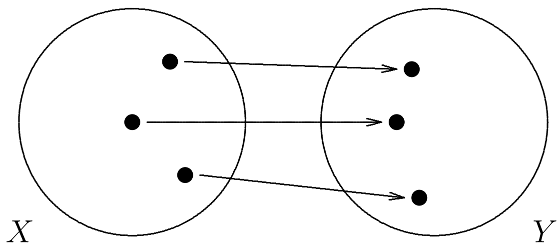


($\heartsuit$) ist verletzt



($\diamondsuit$) ist verletzt

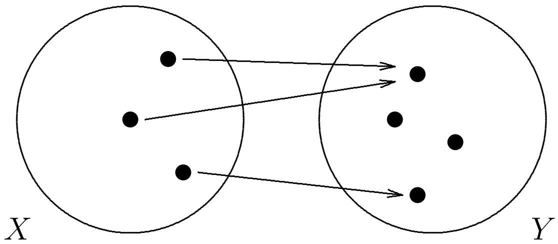
Hier sind alle vier Eigenschaften erfüllt:



2.7 Abbildungen

2.7.1 Definition: Abbildung

Eine Relation zwischen X und Y heißt *Abbildung von X nach Y*, wenn sie links–total (♣) und rechts–eindeutig (♠) ist.



2.7.2 Erläuterungen

- Eine Relation $R \subseteq X \times Y$ ist also genau dann eine Abbildung, wenn es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ gibt, so dass $(x, y) \in R$. Im Venn-Diagramm veranschaulicht heißt das, dass bei **jedem** Element $x \in X$ auf der linken Seite **genau ein** Pfeil startet.
- Die beiden Begriffe ,,Abbildung" und *Funktion* sind synonym. In der Linearen Algebra ist der erste gebräuchlich.
- In diesem Zusammenhang heißt X *Definitionsmenge* und Y *Wertemenge* der Abbildung.
- Abbildungen werden oft mit kleinen Buchstaben bezeichnet. Typisch sind f, g, h.

2.7.3 Veranschaulichende Fassung des Abbildungsbegriffs

Die soeben gegebene Definition des Begriffs ,,Abbildung" ist mathematisch befriedigend, für das praktische Arbeiten aber zu abstrakt, umständlich und zu statisch. Oft ist daher eine andere Beschreibung des Begriffs Abbildung anzutreffen, die nicht in der Mengenlehre verankert ist. Sie unterstreicht den eher dynamischen Charakter dieses Begriffs:

Es seien zwei Mengen X und Y gegeben. Eine Funktion von X nach Y ist eine Vorschrift, die **jedem** $x \in X$ **genau ein** $y \in Y$ zuordnet. Dies wird auch in einer gänzlich veränderten Notation deutlich:

$$f : \begin{cases} X & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

$f(x)$ ist dabei ein irgendwie gearteter mathematisch sinnvoller Ausdruck (Term, Textdefinition, auch per Fallunterscheidung,...), der das ,,genau ein" sicherstellen muss.

2.7.4 Graph einer Abbildung

Geht man von der veranschaulichenden Beschreibung von ,,Abbildung" aus, so wird die zugehörige Relation oft als Graph G_f der Abbildung bezeichnet:

$$G_f := \Big\{(x, y) \in X \times Y \;\Big|\; y = f(x)\Big\}.$$

2.7.5 Zuordnung von Teilmengen Auch Teilmengen $X' \subseteq X$ bzw. $Y' \subseteq Y$ werden durch eine Funktion $f : X \to Y$ zugeordnet:

$$\begin{aligned} f(X') &:= \Big\{ y \in Y \ \Big| \ \text{Es ex. } x \in X' \text{ mit } f(x) = y \Big\} \\ f^{-1}(Y') &:= \Big\{ x \in X \ \Big| \ f(x) \in Y' \Big\} \end{aligned}$$

Die Menge $f(X)$ heißt *Bild(–menge)* der Funktion f. Unterscheide Bild- und Wertemenge!

2.7.6 Identische Abbildung Ist X eine Menge, so heißt die Abbildung (Begründung)

$$\mathrm{id}_X := \Big\{ (x,x) \in X \times X \ \Big| \ x \in X \Big\}$$

die *identische Abbildung* oder *Identität auf* X. Innerhalb der Zuordnungsauffassung schreibt man oft kurz $x \mapsto x$.

2.7.7 Komposition von Abbildungen Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen, so heißt die Abbildung (Begründung)

$$g \circ f := \Big\{ (x,z) \in X \times Z \ \Big| \ \text{Es ex. } y \in Y \text{ mit } f(x) = y \text{ und } g(y) = z \Big\}$$

die *Hintereinanderausführung* oder *Komposition* der Abbildungen f und g. Da f eine Abbildung ist, ist das y in der Definition eindeutig bestimmt.

Innerhalb der Zuordnungsauffassung schreibt man $x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$. Im Pfeil-Diagramm kann dies so veranschaulicht werden:

$$\begin{array}{ccccc} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hspace{10em}}^{g \circ f}} & \\ X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y & \xrightarrow{\quad g \quad} & Z \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Ohne Beweis halten wir fest, dass für die Komposition von Abbildungen das Assoziativgesetz gilt. Sind $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ und $h : Z \to W$ drei Abbildungen, so gilt

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \quad : \quad X \to W$$

2.7.8 Definition und Satz: Injektive Abbildungen

Für eine Abbildung $f : X \to Y$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

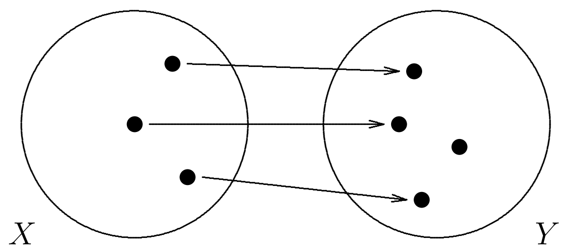
(A) (Def) Die Abbildung heißt *injektiv*.

(B) Als Relation ist f links-eindeutig.

(C) Zu jedem $y \in Y$ gibt es höchstens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.

(D) Im Venn-Diagramm: Bei jedem $y \in Y$ endet höchstens ein Pfeil.

(E) Es existiert eine Abbildung $g : Y \to X$, so dass $g \circ f = \mathrm{id}_X$ (Links-Inverse).



2.7.9 Beweis Die Aussagen (B) – (D) sind nur Umformulierungen des jeweils gleichen Sachverhalts.

Wir beweisen die Implikation $(C) \Longrightarrow (E)$: Fixiere dazu ein $a \in X$ und definiere die Funktion g durch

$$g(y) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \text{ (dann eindeutig) exisitert, so dass } f(x) = y, \\ a, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für alle $x \in X$ gilt dann $g(f(x)) = x$.

Wir beweisen die Implikation $(E) \Longrightarrow (C)$: Es seien $x_1, x_2 \in X$ beliebig mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann gilt aufgrund der Eigenschaft (E):

$$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2.$$

Also ist f injektiv.

2.7.10 Definition und Satz: Surjektive Abbildungen

Für eine Abbildung $f : X \to Y$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

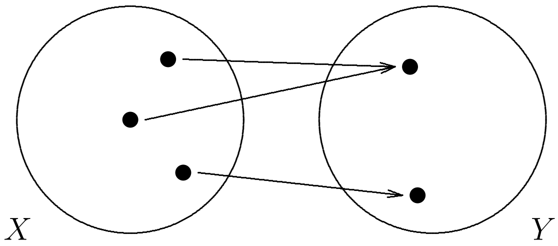
(A) (Def) Die Abbildung heißt *surjektiv*.

(B) Als Relation ist f rechts-total.

(C) Zu jedem $y \in Y$ gibt es mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.

(D) Im Venn-Diagramm: Bei jedem $y \in Y$ endet mindestens ein Pfeil.

(E) Es existiert eine Abbildung $g : Y \to X$, so dass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ (Rechts-Inverse).



2.7.11 Beweis Die Aussagen (B) – (D) sind nur Umformulierungen des jeweils gleichen Sachverhalts.

Wir beweisen die Implikation $(C) \Rightarrow (E)$:

Zu jedem $y \in Y$ wähle ein $x \in X$, so dass $f(x) = y$. Es gibt mindestens ein solches x, da f surjektiv. Definiere g durch $g(y) = x$. Dann gilt für alle $y \in Y$: $f(g(y)) = f(x) = y$.

Wir beweisen die Implikation $(E) \Rightarrow (C)$: Sei $y \in Y$. Dann existiert zu jedem $y \in Y$ ein x, nämlich $x = g(y)$, so dass

$$f(x) = f(g(y)) = y.$$

Also ist f surjektiv.

2.7.12 Definition und Satz: Bijektive Abbildungen

Für eine Abbildung $f : X \to Y$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

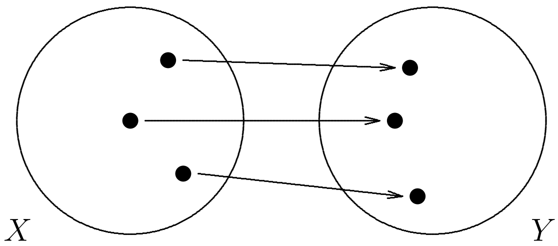
(A) (Def) Die Abbildung heißt *bijektiv* (oder *invertierbar* oder *umkehrbar*).

(B) Als Relation ist f links-eindeutig und rechts-total.

(C) Zu jedem $y \in Y$ gibt es genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.

(D) Im Venn-Diagramm: Bei jedem $y \in Y$ endet genau ein Pfeil.

(E) Es existiert eine Abbildung $g : Y \to X$, so dass $f \circ g = \mathrm{id}_X$ und $g \circ f = \mathrm{id}_Y$.



2.7.13 Beweis Die Aussagen (A) bis (E) fassen nur die entsprechenden Aussagen über injektive bzw. surjektive Abbildungen zusammen.

2.7.14 Definition: Umkehrabbildung Die in (E) angegebene Abbildung ist durch die im Satz angegebenen Eigenschaften eindeutig bestimmt, sie heißt die *Umkehrabbildung* und wird mit dem Symbol f^{-1} angegeben. Als Relation ist f^{-1} die Spiegelrelation zu f.

Zusammengefasst haben wir also die beiden Abbildungen

$$f : \begin{cases} X & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases} \qquad f^{-1} : \begin{cases} Y & \to & X \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) \end{cases}$$

die durch die Eigenschaften

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$$

aufeinander bezogen sind.

2.7.15 Beispiel Abhängig von Definitions- und Wertemenge weist die aus der Schule bekannte Quadratfunktion $x \mapsto x^2$ die folgenden Eigenschaften auf:

	surjektiv	injektiv	bijektiv
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	–	–	–
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$	✓	–	–
$\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$	–	✓	–
$\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$	✓	✓	✓

Im Fall der letzten Zeile sind Funktion und Umkehrfunktion gegeben durch:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases} \qquad f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{cases}$$

2.8 Relationen auf einer Menge

2.8.1 Definition Eine *Relation* ***auf einer*** *Menge* X ist eine Relation zwischen X und X, also eine beliebige Teilmenge von $X \times X$.

Wir listen mögliche Eigenschaften von solchen Relationen auf:

2.8.2 Liste der Eigenschaften Die Relation R auf einer Menge X heißt ...

- *reflexiv*, wenn für alle $x \in X$ gilt:

$$(x, x) \in R.$$

- *transitiv*, wenn für alle $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$ die folgende Implikation gilt:

$$(x, y) \in R \quad \text{und} \quad (y, z) \in R \quad \Longrightarrow \quad (x, z) \in R.$$

- *symmetrisch*, wenn für alle $x, y \in X$ die folgende Äquivalenz gilt:

$$(x, y) \in R \quad \Longleftrightarrow \quad (y, x) \in R.$$

- *antisymmetrisch*, wenn für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ höchstens eine der beiden folgenden Aussagen wahr ist:

$$(x, y) \in R, \qquad (y, x) \in R.$$

- *trichotom*, wenn für alle $x, y \in X$ genau eine der drei folgenden Aussagen wahr ist:

$$(x, y) \in R, \qquad x = y, \qquad (y, x) \in R.$$

- *total*, wenn für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ mindestens eine der beiden folgenden Aussagen wahr ist:

$$(x, y) \in R, \qquad (y, x) \in R.$$

- *eine Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.
- *eine Halbordnung*, wenn sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.
- *lineare* (oder *totale*) *Ordnung*, wenn sie eine Halbordnung und total ist.

Ist R eine Halbordnung, so benutzt man die viel suggestiveren Schreibweisen

$$\begin{array}{rcccc} (x, y) \in R & \Longleftrightarrow & x \preceq y & \Longleftrightarrow & y \succeq x \\ (x, y) \in R \text{ und } x \neq y & \Longleftrightarrow & x \prec y & \Longleftrightarrow & y \succ x. \end{array}$$

Je nach Konkretisierung treten ähnliche andere Zeichen $(\leq, \subseteq, \sqsubseteq, \trianglelefteq, \ldots)$ auf. Die Ausschließung der Gleichheit, wie sie in der zweiten Zeile angegeben ist, wird durch Wörter wie ,,echt”, ,,streng” oder ,,strikt” umschrieben.

2.8.3 Beispiele

$$R_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \,\middle|\, x \leq y\right\}$$

$$R_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \,\middle|\, x < y\right\}$$

$$R_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,\middle|\, x|y\right\} \quad \text{Teiler von}$$

$$R_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,\middle|\, x = y \bmod k\right\} \quad k \in \mathbb{N} \text{ fixiert. } x \text{ und } y \text{ haben bei der Division durch } k \text{ den gleichen Rest.}$$

$$R_5 = \left\{(X,Y) \in \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \,\middle|\, X \subseteq Y\right\} \quad M \text{ ist beliebige Menge}$$

$$R_6 = \left\{(x,y) \in X \times X \,\middle|\, x \text{ parallel zu } y\right\} \quad X = \{\text{Geraden in der Zeichenebene}\}$$

$$R_7 = \left\{(x,y) \in H \times H \,\middle|\, x \text{ ist nicht jünger als } y\right\} \quad H = \{\text{Gäste auf einer Hochzeit}\}$$

$$R_8 = \left\{(x,y) \in H \times H \,\middle|\, x = y \text{ oder } x \text{ ist mit } y \text{ verheiratet}\right\}$$

$$R_9 = \left\{(x,y) \in H \times H \,\middle|\, x = y \text{ oder } x \text{ ist ein Ahne von } y\right\}$$

$$R_{10} = \left\{(x,y) \in H \times H \,\middle|\, x \text{ ist ,,Elter'' von } y\right\}$$

$$R_{11} = \left\{(x,y) \in H \times H \,\middle|\, x \text{ und } y \text{ haben Vater und Mutter gemeinsam}\right\}$$

$$R_{12} = \left\{(x,y) \in H \times H \,\middle|\, x \text{ und } y \text{ haben Vater oder Mutter gemeinsam}\right\}$$

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}	R_{11}	R_{12}
re	$\surd$		$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$		$\surd$	$\surd$
tr	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$		$\surd$	
sy				$\surd$		$\surd$		$\surd$			$\surd$	$\surd$
as	$\surd$	$\surd$	$\surd$		$\surd$		$\surd$		$\surd$	$\surd$		
tc	$\surd$											
to	$\surd$	$\surd$					$\surd$					
ÄR				$\surd$		$\surd$		$\surd$			$\surd$	
HO	$\surd$		$\surd$		$\surd$		$\surd$		$\surd$			
LO	$\surd$						$\surd$					

2.9 Peano-Axiome und vollständige Induktion

2.9.1 Peano-Axiome Die Peano–Axiome legen die Eigenschaften der natürlichen Zahlen — ebenfalls in der Sprache und in dem System der Mengenlehre — beschreibend fest. Die Frage der Existenz einer solchen Menge bleibt dabei hier unbeantwortet. Tatsächlich lassen sich die Peano-Axiome aus tiefer liegenden Axiomen der Mengenlehre herleiten.

Eine Menge $\mathbb{N}$ heißt *Menge der natürlichen Zahlen*, wenn eine Abbildung $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (Nachfolger–Abbildung) existiert mit folgenden Eigenschaften:

P1 Es existiert genau eine Zahl in $\mathbb{N}$, die nicht im Bild von ν enthalten ist.

P2 Die Abbildung ν ist injektiv.

P3 Gilt für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$

$$1 \in A \text{ und } \Big(x \in A \Rightarrow \nu(x) \in A \Big),$$

so gilt $A = \mathbb{N}$.

Die eigentliche Bedeutung der Peano-Axiome offenbart sich in dem folgenden

2.9.2 Satz: Beweis-Prinzip der vollständigen Induktion

Es sei $\mathcal{A}(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage. Dann gilt das folgende *Prinzip der vollständigen Induktion*:

WENN $\mathcal{A}(1)$ wahr ist

UND für alle $n \in \mathbb{N}$ die Implikation $\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$ gilt,

DANN ist $\mathcal{A}(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Aussage $\mathcal{A}(1)$ in der ersten Zeile heißt in diesem Zusammenhang auch *Induktionsanfang*. Die Aussage $\mathcal{A}(n)$ in der zweiten Zeile heißt *Induktionsvoraussetzung* oder *Induktionsannahme*. Die Implikation in der zweiten Zeile wird als *Induktionsschritt* oder *Induktionsschluss* bezeichnet.

Entscheidend an diesem Prinzip ist die Tatsache, dass unendlich viele Aussagen durch zwei Aussagen „mathematisch dingfest" gemacht sind.

2.9.3 Beweis Wende einfach die Peano–Eigenschaft P3 auf die Teilmenge

$$A = \{ n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{A}(n) \text{ ist wahr } \}$$

an.

2.9.4 Beispiel: Summe ungerader Zahlen Wir zeigen mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) \;=\; n^2 \qquad\qquad \mathcal{A}(n)$$

Induktionsanfang: Die Aussage ist wahr für $n = 1$, da

$$2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$$

Wir nehmen jetzt an, dass die Aussage für ein (fixiertes) $n \in \mathbb{N}$ wahr ist und wollen daraus folgern, dass sie auch für $n + 1$ wahr ist. Das geht so:

$$\begin{aligned} & & & 1 + 3 + 5 + \ldots + (2(n+1) - 1) \\ & \text{(Abspaltung des letzten Summanden)} & = \; & 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) \\ & \text{(Induktionsvoraussetzung)} & = \; & n^2 + (2n + 1) \\ & \text{(Binomische Plus-Formel)} & = \; & (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Das ist genau die Aussage $\mathcal{A}(n + 1)$.

Weitere hunderte Beispiele folgen — in Ihrer Mathematik-Ausbildung.

2.9.5 Rekursive Definition

Mathematische Objekte M_n können für $n \in \mathbb{N}$ dadurch definiert werden, dass

1. das Objekt M_1 definiert wird und
2. für jedes $n \in \mathbb{N}$ angegeben wird, wie das Objekt M_{n+1} bei bekanntem M_n definiert ist.

Eine ,,Begründung" besteht darin, dass man das Axiom P3 auf die Teilmenge

$$A' = \{n \in \mathbb{N} | M_n \text{ ist definiert } \}$$

anwendet.

2.9.6 Bemerkung Die beiden Prinzipien können — entsprechend modifiziert — auch bei Zugrundelegung anderer Teilmengen von $\mathbb{Z}$ angewandt werden. Beispiele:

$$\begin{array}{l} \mathbb{N}_0 \\ \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq N\} \text{ für ein fest gewähltes } N \in Z \\ \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq N\} \text{ für ein fest gewähltes } N \in Z \\ 2\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade } \} \end{array}$$

2.9.7 Weiterer Aufbau der Zahlenräume

Das weitere Programm für den Mathematiker besteht nun darin, auf der Grundlage dieser Axiome Rechen- und Ordnungsstrukturen auf $\mathbb{N}$ einzuführen und dann diese Zahlenmenge zu größeren Zahlenmengen sinnvoll zu erweitern. Wir beschreiben dieses Programm hier nur stichpunktartig und vereinbaren, dass es ,,aus der Schule bekannt und vertraut" ist.

1. Natürliche Zahlen

   (a) Addition und Subtraktion auf $\mathbb{N}$. Es stellt sich im Nachhinein heraus, dass die in den Peano-Axiomen beschriebene Nachfolgerfunktion mit der Addition von 1 übereinstimmt: $\nu(n) = n + 1$.

   (b) Multiplikation, Division und Teilbarkeit.

   (c) Darstellung der Zahlen von $\mathbb{N}$ im Dezimalsystem.

   (d) Ordnungsrelation $<$.

   (e) Hinzufügen der Zahl 0 zu der Menge der natürlichen Zahlen:

   $$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

2. Die ganzen Zahlen

   (a) Erweiterung der Menge $\mathbb{N}_0$ zur Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, so dass

   $$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^- \\ \mathbb{Z}^+ &= \mathbb{N} \qquad \text{(positive ganze Zahlen)} \\ \mathbb{Z}^- &= \{-n \,|n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{(negative ganze Zahlen)} \end{aligned}$$

   (b) Die Betragsfunktion

   $$|\cdot| \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0 \\ m \mapsto |m| := \begin{cases} m, & \text{falls } m \text{ nicht-negativ,} \\ -m, & \text{falls } m \text{ negativ.} \end{cases} \end{cases}$$

   (c) Grundrechenarten, Rechenregeln in $\mathbb{Z}$

3. Die rationalen Zahlen

   (a) Erweiterung der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen zu der Menge $\mathbb{Q}$ der *rationalen Zahlen (Bruchzahlen)*

   $$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

   (b) Grundrechenarten, Rechenregeln in $\mathbb{Q}$

4. Erweiterung der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen zu der Menge $\mathbb{R}$ der *reellen Zahlen*. Das geschieht mit Hilfe von Grenzprozessen und ist deshalb Gegenstand der Analysis.

2.10 Beispiele

2.10.1 Definition: n-Tupel Wir definieren rekursiv höhere n–*Tupel*. Es sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Menge X_n und ein Element $x_n \in X_n$ gegeben. Definiere rekursiv

- $(x_1) = x_1$
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = ((x_1, x_2, \ldots, x_n), x_{n+1})$.

2.10.2 Summenschreibweise Es sei für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ eine Zahl a_k gegeben. Dann ist durch

$$S_1 = a_1, \qquad S_{k+1} = a_{k+1} + S_k$$

die zugehörige Summenfolge definiert. Um den Aufwand in der Definition geringer zu halten, schreibt man kürzer und suggestiver:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 \quad \text{oder} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

2.10.3 Gauß'sche Summenformel Wir definieren

$$s_0 = 0, \qquad s_{k+1} = (k+1) + s_k$$

für $k \in \mathbb{N}_0$, das heißt also

$$s_n = n + (n-1) + \ldots + 1 = \sum_{k=0}^{n} k.$$

Wir zeigen durch Induktion:

$$s_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Induktionsanfang: $s_0 = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$
Induktionsschluss: Wir nehmen an, dass die Behauptung für $n \geq 2$ gezeigt ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &\overset{\text{def}}{=} (n+1) + s_n \overset{\text{IndV}}{=} (n+1) + \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \\ &= \frac{2(n+1) + n \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Also gilt die Behauptung auch für $n + 1$.
Nach dem Induktionsprinzip ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}_0$ richtig.

2.10.4 Geometrische Summe Für ein beliebiges $q \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Beweis durch Induktion über n:
Induktionsanfang:

$$\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{1 - q^{0+1}}{1 - q}$$

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Aussage für n gezeigt ist.

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \stackrel{\text{IndV}}{=} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} =$$
$$\frac{1 - q^{n+1} + (1-q)q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}.$$

2.10.5 Beispiel Wir beweisen durch Induktion, dass die Summe der ersten n Quadratzahlen gegeben ist durch

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Induktionsanfang:

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)}{6}.$$

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Aussage für n gezeigt ist. Dann folgt:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \stackrel{\text{IndV}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$
$$(n+1) \cdot \frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6} = (n+1) \cdot \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} =$$
$$(n+1) \cdot \frac{(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Die gesamte Gleichungskette zeigt auf, dass die Aussage für $n+1$ gezeigt ist.

2.10.6 Definition: Potenzfunktion Für festes $n \in \mathbb{Z}$ und $a \neq 0$ ist die Potenzfunktion

$$\uparrow \begin{cases} \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ a & \mapsto & a^n \end{cases} \qquad \text{durch } a^0 = 1, \qquad a^{n+1} = a \cdot a^n, \qquad a^{n-1} = \frac{1}{a} \cdot a^n$$

rekursiv definiert. Man kann diese Definition auch suggestiver schreiben als

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad a^n = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{|n| \text{ Faktoren}}}, \quad n \in -\mathbb{N},$$

Es gilt dann für $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

2.10.7 Produktschreibweise Es sei für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ eine Zahl a_k gegeben. Dann ist durch

$$P_1 = a_1, \qquad P_{k+1} = a_{k+1} \cdot P_k$$

die zugehörige Produktfolge rekursiv definiert.
Ähnlich wie bei Summen kann man mittels rekursiver Definition auch Produkte definieren:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k.$$

2.10.8 Fakultäts-Funktion

$$\begin{cases} \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n! \end{cases} \qquad \text{durch } 0! = 1, \qquad (n+1)! = (n+1) \cdot n! \text{ für alle } n \geq 1.$$

Suggestiver:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = \prod_{k=1}^{n} k.$$

2.10.9 Definition: Binomialkoeffizienten Wir definieren für zwei Zahlen $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{Z}$, den *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{falls } 0 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{falls } k > n \text{ oder } k < 0. \end{cases}$$

2.10.10 Satz: Eigenschaften der Binomialkoeffizienten Wir notieren gleich zwei wichtige Eigenschaften: Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} && \text{(Symmetrie bzgl. } k = \tfrac{n}{2}) \\ \binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} && \text{(Pascal–Beziehung)} \end{aligned}$$

2.10.11 Beweis Da für $k \notin \{0, \ldots, n\}$ die erste Beziehungen trivial ist, braucht sie nur noch für den anderen Fall $0 \leq k \leq n$ überprüft zu werden:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \binom{n}{n-k}.$$

Für $1 \leq k \leq n-1$ rechnen wir die zweite Beziehung so nach:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ &= n! \cdot \frac{(n-k+1)+k}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

Die Fälle $k = 0$ und $k = n$ sind leicht zu testen:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} + \binom{n}{-1} &= 1 + 0 = 1 = \binom{n+1}{0}. \\ \binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} &= 1 + n = \binom{n+1}{n}. \end{aligned}$$

In den anderen Fälle $k < 0$ oder $k > n$ sind alle in der Beziehung auftretenden Ausdrücke gleich 0.

2.10.12 Bemerkung: Pascalsches Dreieck Man kann die Binomialkoeffizienten im sogenannten Pascal'schen Dreieck anordnen. Die zweite Beziehung des Satzes besagt, dass sich ein Binomialkoeffizient als Summe der beiden über ihm stehenden ergibt.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\ & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \end{array}$$

2.11 Mächtigkeit von Mengen

2.11.1 Definitionen: Mächtigkeit

- Zwei Mengen X, Y heißen *gleichmächtig*, wenn eine bijektive Abbildung $X \to Y$ existiert.
- Es sei $n \in \mathbb{N}$. Besteht zwischen einer Menge X und der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ eine bijektive Abbildung, so sagt man: Die Menge X ...
  - hat die *Mächtigkeit* n oder
  - die *Anzahl* der Elemente ist n oder
  - ist eine n–Menge.

  Es sind verschiedene Symbole dafür im Gebrauch: $\#(X) = \mathrm{card}(X) = |X| = n$.
- Die leere Menge hat die *Mächtigkeit* 0.
- Eine Menge der Mächtigkeit n, $n \in \mathbb{N}_0$, heißt *endlich*.
- Eine Menge, die nicht endlich ist, heißt *unendlich*.
- Besteht zwischen einer Menge X und der Menge $\mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, so sagt man, dass die Menge X *abzählbar unendlich* ist.
- Eine Menge heißt *höchstens abzählbar*, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist.
- Eine Menge, die nicht abzählbar ist, heißt *überabzählbar*.

2.11.2 Satz: Arithmetik mit endlichen Mengen Wenn X und Y endlich sind, gelten die elementaren Beziehungen

$$\begin{aligned}
|X \cup Y| &= |X| + |Y|, &&\text{falls } X \cap Y = \varnothing \\
|X \setminus Y| &= |X| - |Y|, &&\text{falls } Y \subseteq X, \\
|X \cup Y| + |X \cap Y| &= |X| + |Y| \\
|X \times Y| &= |X| \cdot |Y|
\end{aligned}$$

2.11.3 Beweis Zum Beweis der ersten Beziehung müssen wir genau die Definition einer endlichen Mächtigkeit als Bijektion zu einem endlichen Anfangsintervall der natürlichen Zahlen heranziehen. Im Fall $|X| = n$, $|Y| = m$ bestehen die bijektive Abbildungen

$$\begin{aligned}
X &\leftrightarrow \{1, \ldots, n\}, \\
Y &\leftrightarrow \{1, \ldots, m\} \leftrightarrow \{n+1, \ldots, n+m\},
\end{aligned}$$

die sich zu einer bijektiven Abbildung

$$X \cup Y \leftrightarrow \{1, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m\}$$

zusammensetzen lassen. Die zweite Beziehung ist eine ,,Umdeutung" der ersten:

$$|X \setminus Y| + |Y| \;=\; |(X \setminus Y) \cup Y| \;=\; |X|.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} |X \cup Y| &= |(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \cup (X \cap Y)| \\ &= (|X| - |X \cap Y|) + (|Y| - |X \cap Y|) + |X \cap Y| \\ &= |X| + |Y| - |X \cap Y| \end{aligned}$$

Zum Beweis der letzten Beziehung nehmen wir an, dass

$$X = \{x_1, \ldots, x_n\}, \qquad |Y| = m.$$

Dann können wir wie folgt eine disjunkte Vereinigung aufschreiben:

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\} = \{(x_1, y) | y \in Y\} \cup \ldots \cup \{(x_n, y) | y \in Y\}$$

Deshalb

$$|X \times Y| = \underbrace{m + \ldots + m}_{n \text{ Summanden}} = n \cdot m.$$

2.11.4 Satz: Mächtigkeit der Potenzmenge

Es sei X eine Menge mit n Elementen, $n \in \mathbb{N}_0$.

(i) Es sei $0 \le k \le n$. Die Anzahl der k–Teilmengen von X ist gleich $\binom{n}{k}$.

$$\left| \left\{ Y \in \mathcal{P}(X) \middle| |Y| = k \right\} \right| = \binom{n}{k}.$$

(ii) Die Anzahl aller Teilmengen von X ist gleich 2^n:

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^n.$$

2.11.5 Beweis durch Induktion über n.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist die Behauptung klar: Eine 0–elementige Menge X (es ist dann die leere Menge) besitzt genau eine 0–Teilmenge Y, nämlich sich selbst:

$$Y = X = \varnothing$$

und es ist ja: $1 = \binom{0}{0}$.

Induktionsschluss: Es sei X eine Menge mit $n + 1$ Elementen. Wir dürfen die Aussage des Satzes für n als bewiesen voraussetzen. Wir wählen ein Element z aus X und schreiben X als

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, z\}.$$

Wie viele k–Teilmengen besitzt X?
1. Fall: Für $k = n + 1$ ist die Frage leicht zu beantworten: $1 = \binom{n+1}{n+1}$.
2. Fall: Es sei also $0 \le k \le n$. Wit zählen getrennt die k–Teilmengen Y von X, ...

- die z enthalten: Diese haben genau die Form

$$Y = X' \cup \{z\},$$

wobei X' eine $(k-1)$–Teilmenge von X ist. Davon gibt es gemäß Induktionsvoraussetzung $\binom{n}{k-1}$ Stück.

- und die, die z nicht enthalten: Das sind genau die k–Teilmengen von $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Nach Induktionsvoraussetzung sind dies $\binom{n}{k}$ Stück.

Die Anzahl aller k–Teilmengen von X ist also gemäß der Pascal–Beziehung, vgl. Satz 2.10.10

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \quad = \quad \binom{n+1}{k}.$$

Die Aussage (ii) ist Gegenstand von Übungen, vgl. Übung 3/3(iii). Sie folgt aber auch direkt aus dem noch zu beweisenden Binomischen Lehrsatz 3.3.6 mit $a = b = 1$.

2.11.6 Satz: Teilmengen und Vereinigungen von höchstens abzählbaren Mengen

(i) Ist Y Teilmenge einer abzählbaren Menge Y, so ist Y höchstens abzählbar.

(ii) Sind X und Y abzählbar unendlich, so ist auch $X \cup Y$ abzählbar unendlich.

2.11.7 Beweis

(i) Es sei $\beta : X \to \mathbb{N}$ eine Abzählung für X.

Wähle rekursiv wie folgt Elemente aus Y aus:

$$\begin{array}{lcl} y_1 & := & \beta^{-1}(\min \beta(Y)) \\ y_2 & := & \beta^{-1}(\min \beta(Y \setminus \{y_1\})) \\ & \vdots & \\ y_k & := & \beta^{-1}(\min \beta(Y \setminus \{y_1, \ldots, y_{k-1}\})) \\ & \vdots & \end{array}$$

Das heißt, es werden nacheinander die Elemente mit der kleinsten, zweitkleinsten, …, k-kleinsten β-Nummer aus Y herausgesucht. Siehe dazu auch die Eigenschaft in Präposition 4.3.2 (iii).

Ist Y nicht endlich, so wird dadurch eine injektive Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{N} & \to & Y \\ k & \mapsto & y_k \end{cases}$$

definiert. Sie ist auch surjektiv, da zu jedem beliebigen $y \in Y$ die Menge $\{1, \ldots, \beta(y) - 1\}$ endlich ist — und deshalb y als ein y_k mit $k \leq \beta(y) - 1$ erreicht wird.

(ii) O.B.d.A nehmen wir an, dass X und Y abzählbar unendlich und disjunkt sind. Dann lassen sich zwei bijektive Abbildungen $\beta_X : X \to \mathbb{N}$ und $\beta_Y : Y \to \mathbb{N}$ zu einer bijektiven Abbildung

$$\beta : \begin{cases} X \cup Y & \to \quad \mathbb{N} \\ z & \mapsto \quad \begin{cases} 2 \cdot \beta_X(z), & \text{falls } z \in X \\ 2 \cdot \beta_Y(z) + 1, & \text{falls } z \in Y \end{cases} \end{cases}$$

zusammensetzen.

2.11.8 Satz Die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar.

2.11.9 Beweis Cantors erstes Diagonalargument.

Der Beweis beruht auf einer „Diagonalabzählung" des kartesischen Produkts. Die Abbildung

$$\tau : \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to \quad \mathbb{N} \\ (m,n) & \mapsto \quad \frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1)+m \end{cases}$$

kann durch das folgende Diagramm veranschaulicht werden:

$$\begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & \cdots \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & \cdots \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & \cdots \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & \cdots \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \quad \mapsto \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 4 & 7 & 11 & \cdots \\ 3 & 5 & 8 & 12 & 17 & \cdots \\ 6 & 9 & 13 & 18 & 24 & \cdots \\ 10 & 14 & 19 & 25 & 32 & \cdots \\ 15 & 20 & 26 & 33 & 41 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Sie ist bijektiv.

2.11.10 Folgerung Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich.

2.11.11 Beweis Wir können die Umkehrabbildung τ^{-1} schreiben in der Form

$$\tau^{-1} : \begin{cases} \mathbb{N} & \to \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ n & \mapsto \quad (\tau_1^{-1}(n), \tau_2^{-1}(n)). \end{cases}$$

Die Abbildung

$$\varrho : \begin{cases} \mathbb{N} & \to \quad \mathbb{Q}^+ \\ n & \mapsto \quad \frac{\tau_1^{-1}(n)}{\tau_2^{-1}(n)} \end{cases}$$

ist surjektiv. Schränkt man sie auf eine geeignete Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein, so wird sie bijektiv.

Damit besteht eine bijektive Abbildung zwischen einer unendlichen Teilmenge M von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}^+$. Nach Satz 2.11.6 (i) ist M — und damit $\mathbb{Q}^+$ — abzählbar.

Wegen $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$ ist nach Satz 2.11.6 (ii) auch $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich.

3 Angeordnete Körper

3.1 Linear geordnete Mengen

3.1.1 Definition: Linear geordnete Mengen Ist auf einer Menge X eine lineare Ordnungsrelation $(\leq)$ gegeben, so heißt sie einfach *linear geordnete Menge* oder *total geordnete Menge*.

3.1.2 Beispiele

- Jede Teilmenge von $\mathbb{Q}$ ist linear geordnet bzgl. $\leq$.
- Die Menge der Potenzen

  $$\{1, n, n^2, n^3, \ldots\}$$

  einer festen Zahl $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ist bzgl. der Teilerrelation linear geordnet.
- Die alphabetische Ordnung auf einer Menge von „Wörtern" ist eine lineare Ordnung.
- Am Ende der Saison wird in einer Liga für zwei Vereine x, y die Relation

  $$x \prec y \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Verein } x \text{ hat gegen Verein } y \text{ verloren}$$

  festgelegt. Ist das eine lineare Ordnung?

3.1.3 Definition: Intervalle

Eine Teilmenge I mit $|I| \geq 2$ einer linear geordneten Menge X heißt *Intervall* in X, wenn für $x_1, x_2, x_3 \in X$ gilt

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \quad \text{und} \quad x_1, x_3 \in I \quad \Longrightarrow \quad x_2 \in I.$$

Wir definieren Schreibweisen für bestimmte Intervalle $(a \in X)$

$$\begin{aligned}
]-\infty, +\infty[\quad &:= \quad X \\
]-\infty, a[\quad &:= \quad \Big\{x \in X \;\Big|\; x < a\Big\} \qquad (\textit{rechts-offen}) \\
]-\infty, a] \quad &:= \quad \Big\{x \in X \;\Big|\; x \leq a\Big\} \qquad (\textit{rechts-abgeschlossen}) \\
]a, +\infty[\quad &:= \quad \Big\{x \in X \;\Big|\; x > a\Big\} \qquad (\textit{links-offen}) \\
[a, +\infty[\quad &:= \quad \Big\{x \in X \;\Big|\; x \geq a\Big\} \qquad (\textit{links-abgeschlossen}).
\end{aligned}$$

Weitere Schreibweisen ergeben sich durch Schneiden zweier Intervalle dieser Typen: Mit $a, b \in X$ sei

$$\begin{aligned}
]a, b[\quad &:= \quad]-\infty, b[\;\cap\;]a, +\infty[\quad = \quad \Big\{x \in X \;\Big|\; x > a \text{ und } x < b\Big\} \\
]a, b] \quad &:= \quad]-\infty, b] \;\cap\;]a, +\infty[\quad = \quad \Big\{x \in X \;\Big|\; x > a \text{ und } x \leq b\Big\} \\
[a, b[\quad &:= \quad]-\infty, b[\;\cap\; [a, +\infty[\quad = \quad \Big\{x \in X \;\Big|\; x \geq a \text{ und } x < b\Big\} \\
[a, b] \quad &:= \quad]-\infty, b] \;\cap\; [a, +\infty[\quad = \quad \Big\{x \in X \;\Big|\; x \geq a \text{ und } x \leq b\Big\}
\end{aligned}$$

3.1.4 Vorsicht Wir werden sehen, dass das Intervall in $\mathbb{Q}$

$$I = \left\{ x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, x^2 < 2 \right\}$$

in keiner der obigen neun Formen geschrieben werden kann. Die Idee $I =]-\sqrt{2}, +\sqrt{2}[$ ist nicht statthaft, da eine Zahl $\sqrt{2}$ innerhalb von $\mathbb{Q}$ nicht definiert werden kann.

3.1.5 Definition: Schranken Zur Beschreibung und genaueren Erfassung dieses Phänomens dienen die folgenden Begriffe. Es sei Y eine Teilmenge der linear geordneten Menge X.

- Ein Element $a \in X$, heißt *obere Schranke von Y (in X)*, wenn für alle $y \in Y$ gilt:

  $$y \leq a.$$

  Die Teilmenge Y heißt in diesem Fall *nach oben beschränkt*.

- Eine obere Schranke a von Y heißt *kleinste obere Schranke* oder *Supremum von Y*, wenn es keine obere Schranke von Y gibt, die echt kleiner als a ist. Man schreibt dann

  $$a = \sup Y.$$

- Ein Supremum a von Y heißt *Maximum von Y*, wenn $a \in Y$. Man schreibt dann

  $$a = \max Y.$$

- Ein Element $a \in X$, heißt *untere Schranke* von Y (in X), wenn für alle $y \in Y$ gilt:

  $$y \geq a.$$

  Die Teilmenge Y heißt in diesem Fall *nach unten beschränkt*.

- Eine untere Schranke a von Y heißt *größte untere Schranke* oder *Infimum von Y*, wenn es keine obere Schranke gibt, die echt größer als a ist. Man schreibt dann

  $$a = \inf Y.$$

- Ein Infimum a von Y heißt *Minimum von Y*, wenn $a \in Y$. Man schreibt dann

  $$a = \min Y.$$

- Die Teilmenge Y heißt *beschränkt*, wenn sie nach unten und nach oben beschränkt ist.

Beachte die Implikationen für eine Teilmenge $Y \subseteq X$:

$$\begin{array}{lclcl} a \text{ ist Maximum} & \Longrightarrow & a \text{ ist Supremum} & \Longrightarrow & a \text{ ist obere Schranke,} \\ a \text{ ist Minimum} & \Longrightarrow & a \text{ ist Infimum} & \Longrightarrow & a \text{ ist untere Schranke.} \end{array}$$

Das Beispiel des Intervalls $[0, 5[$ von $\mathbb{Q}$ zeigt, dass ein Supremum nicht ein Maximum zu sein braucht.

3.1.6 Definition: Monotone Abbildungen

Es seien X und Y zwei linear geordnete Mengen.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt ...

monoton steigend,	falls	$f(x) \leq f(\widetilde{x})$	für alle $x, \widetilde{x} \in X$ mit $x < \widetilde{x}$.
streng monoton steigend,	falls	$f(x) < f(\widetilde{x})$	für alle $x, \widetilde{x} \in X$ mit $x < \widetilde{x}$.
monoton fallend,	falls	$f(x) \geq f(\widetilde{x})$	für alle $x, \widetilde{x} \in X$ mit $x < \widetilde{x}$.
streng monoton fallend,	falls	$f(x) > f(\widetilde{x})$	für alle $x, \widetilde{x} \in X$ mit $x < \widetilde{x}$.

Die Abbildung heißt *(streng) monoton*, wenn sie (streng) monoton steigend oder (streng) fallend ist.

3.1.7 Satz: Monotonie und Injektivität

Es seien X und Y linear geordnet und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(i) Ist f streng monoton, so ist f injektiv.

(ii) Ist f streng monoton und surjektiv, so ist f bijektiv.

In diesem Fall hat die Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to X$ das gleiche Monotonieverhalten wie f.

3.1.8 Beweis Wir können O.B.d.A. annehmen, dass X mehr als einen Punkt enthält. Aufgrund von

$$x \neq y \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x < y \\ \text{oder} \\ y < x \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < f(y) \\ \text{oder} \\ f(y) < f(x) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq f(y).$$

folgt aus der Monotonie die Injektivität. Damit ist (i) gezeigt.

Die erste Teilaussage in (ii) folgt sofort aus (i). Um die zweite Teilaussage zu zeigen, nehmen wir O.B.d.A. an, dass f streng monoton steigend ist.

Wäre dann f^{-1} nicht streng monoton steigend, so existieren $y, \widetilde{y} \in Y$ mit

$$y < \widetilde{y} \quad \text{und} \quad f^{-1}(y) \geq f^{-1}(\widetilde{y}).$$

Da f streng monoton steigend ist, folgt daraus

$$y = f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(\widetilde{y})) = \widetilde{y},$$

was einen Widerspruch darstellt.

3.2 Vollständig linear geordnete Mengen

3.2.1 Satz Es sei X eine linear geordnete Menge. Eine Teilmenge Y von X besitzt höchstens ein Supremum und höchstens ein Infimum.

3.2.2 Beweis Angenommen, zu einer Teilmenge Y gibt es zwei verschiedene Suprema a_1 und a_2. Aufgrund der Totalität gilt $a_1 < a_2$ oder $a_2 < a_1$. Also existiert zu einer dieser beiden oberen Schranken eine kleinere andere obere Schranke, diese kann dann kein Supremum sein.

3.2.3 Definition und Satz: Vollständigkeit

Für eine linear geordnete Menge X sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(A) (Def) X heißt *(bedingt) vollständig*.

(B) Jede nicht–leere nach oben beschränkte Teilmenge Y besitzt ein Supremum.

(C) Jede nicht–leere nach unten beschränkte Teilmenge Y besitzt ein Infimum.

(D) Jedes Intervall in X kann in einer der in Abschnitt 3.1.3 angegebenen neun Formen geschrieben werden.

3.2.4 Beweis Wir beweisen nur die Implikation (B) $\Rightarrow$ (C) und veranschaulichen uns dabei die Situation anhand der Skizze weiter unten.

Es sei also Y eine nicht–leere nach unten beschränkte Teilmenge von X. Es sei dann Z die Menge aller unteren Schranken von Y

$$Z := \Big\{ z \in X \;\Big|\; z \leq y \text{ für alle } y \in Y \Big\}.$$

Z ist

- nicht leer, da ja eine untere Schranke von Y existiert, und
- nach oben beschränkt, da Y nicht leer ist.

Daher existiert gemäß Voraussetzung (B) das Supremum von Z:

$$s := \sup Z.$$

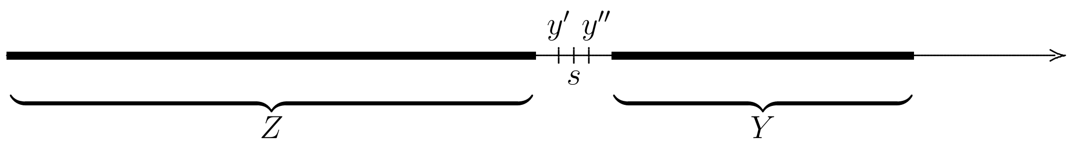
(1) Wir zeigen: s ist eine untere Schranke von Y. Wir nehmen an, dass das nicht stimmt.

- Dann gibt es ein $y' \in Y$ mit $y' < s$.
- Da s Supremum von Z ist, gibt es ein $z \in Z$ mit $y' < z \leq s$. Anderenfalls wäre y' eine obere Schranke von Z, die kleiner als s ist.
- Also ist $y' < z$, wobei $y' \in Y$ und z eine untere Schranke von Y ist. Widerspruch

(2) Wir zeigen: Es gibt keine größere untere Schranke von Y als s. Wir nehmen wieder an, dass das nicht stimmt.

- Es gibt also eine untere Schranke von Y mit $s < y''$.
- Also ist $y'' \in Z$ und $y'' > s = \sup Z$. Widerspruch

Die beiden Aussagen (1) und (2) zusammengenommen bedeuten aber: $s = \inf Y$.



Die Äquivalenz von (D) zu den anderen Aussagen ist Inhalt einer Übungsaufgabe.

3.3 Körper

Denken Sie bitte bei den folgenden Gesetzen an die aus der Schule bekannte Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

3.3.1 Definition Eine Menge $\mathbb{K}$, auf der zwei Verknüpfungen

$$+\begin{cases} \mathbb{K}\times\mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ (a,b) & \mapsto & a+b \end{cases} \qquad \text{(Addition)}$$

und

$$\cdot\begin{cases} \mathbb{K}\times\mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ (a,b) & \mapsto & a\cdot b \end{cases} \qquad \text{(Multiplikation)}$$

definiert sind, heißt *(kommutativer) Körper* $(\mathbb{K},+,\cdot)$, wenn die folgenden Eigenschaften (Schule: Rechengesetze) erfüllt sind:

AG/A Assoziativgesetz der Addition: Für alle $a,b,c\in\mathbb{K}$ gilt:

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

Damit wird die Schreibweise $a+b+c \ := \ (a+b)+c$ sinnvoll.

KG/A Kommutativgesetz der Addition: Für alle $a,b\in\mathbb{K}$ gilt:

$$a+b = b+a.$$

NE/A Neutrales Element der Addition: Es gibt genau ein Element $0\in\mathbb{K}$, so dass für alle $a\in\mathbb{K}$ gilt:

$$a+0 = a.$$

IE/A Additiv inverse Elemente: Zu jedem $a\in\mathbb{K}$ gibt es genau ein Element $b\in\mathbb{K}$, so dass gilt:

$$a+b = 0.$$

AG/M Assoziativgesetz der Multiplikation: Für alle $a,b,c\in\mathbb{K}$ gilt:

$$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c).$$

Damit wird die Schreibweise $a\cdot b\cdot c \ := \ (a\cdot b)\cdot c$ sinnvoll.

KG/M Kommutativgesetz der Multiplikation: Für alle $a,b\in\mathbb{K}$ gilt:

$$a\cdot b = b\cdot a.$$

NE/M Neutrales Element der Multiplikation: Es gibt genau ein Element $1\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$, so dass für alle $a\in\mathbb{K}$ gilt:

$$a\cdot 1 = 1\cdot a = a.$$

IE/M Multiplikativ inverse Elemente: Zu jedem $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ gibt es genau ein Element $b \in \mathbb{K}$, so dass gilt:

$$a \cdot b = 1.$$

DG Distributivgesetz: Für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \; = \; a \cdot b + a \cdot c.$$

Die Unterlassung der Klammersetzung im letzten Term wird durch die Punkt–vor–Strich–Konvention gerechtfertigt: Punktrechnung bindet stärker als Strichrechnung.

3.3.2 Bemerkungen

1. In NE/A würde es genügen, zu fordern, dass **mindestens** ein Element n existiert, so dass für alle $a \in \mathbb{K}$ gilt: $a + n = a$. Gäbe es nämlich zwei Elemente $n, \widetilde{n}$ mit dieser Eigenschaft, so kann man schließen:

$$n \; = \; n + \widetilde{n} \; = \; \widetilde{n} + n = \widetilde{n}.$$

   Das eindeutig bestimmte Element heißt auch *das Nullelement*.

2. Auch in IE/A würde es genügen zu fordern, dass für jedes $a \in \mathbb{K}$ **mindestens** ein Element b existiert, so dass gilt: $a + b = 0$. Gäbe es nämlich zu einem Element $a \in \mathbb{K}$ zwei additiv inverse b und $\widetilde{b}$, so könnte man schließen:

$$b = b + 0 \; = \; b + (a + \widetilde{b}) \; = \; (b + a) + \widetilde{b} \; = \; (a + b) + \widetilde{b} \; = \; 0 + \widetilde{b} \; = \; \widetilde{b}.$$

   Da das additive inverse eines Elements a eindeutig bestimmt ist, kann man es durch ein Symbol direkt angeben. Weltweit schreibt man: $-a$.

3. Weiter schreibt man abkürzend für je zwei Elemente aus $\mathbb{K}$:

$$a - b \; := \; a + (-b).$$

   Damit ist eine weitere Verknüpfung, die wir *Subtraktion* nennen, bereits in den Körpereigenschaften mitenthalten.

4. Auch in NE/M ist das neutrale Element eindeutig (Self-Check), es heißt *Einselement.*

5. Das eindeutig bestimmte multiplikativ inverse eines Elements $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ wird mit a^{-1} bezeichnet. (Self-Check)

6. Weiter führt man die Schreibweise

$$a : b \; := \; a \cdot b^{-1}$$

   ein. Diese in den Körpereigenschaften bereits enthaltende Verknüpfung heißt *Division.*

7. Der Malpunkt der Multiplikation wird oft weggelassen. Man schreibt abkürzend:

$$ab \;:=\; a \cdot b.$$

8. Es wird die Konvention ,,Punkt vor Strich" benutzt. Das Distributivgesetz kann dann so geschrieben werden:

$$a(b+c) \;=\; ab + ac.$$

9. Wegen des häufigen Auftretens verwendet man die Abkürzung $\quad \mathbb{K}^\times \;:=\; \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

10. Ungewöhnlich — aber praktisch — ist die Idee, die Menge $\mathbb{K}$ und die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ symbolisch zusammenzufassen: $(\mathbb{K}, +, \cdot)$.

11. Eine Menge G, auf der nur eine Verknüpfung $*$ definiert ist, die den Gesetzen AG/$*$, NE/$*$, IE/$*$ genügt, heißt *Gruppe*, symbolisch $(G, *)$. Ist zusätzlich KG/$*$ erfüllt, so spricht man von einer *kommutativen* oder *Abel'schen* Gruppe.

    Es sind also $(\mathbb{K}, +)$ und $(\mathbb{K}^\times, \cdot)$ Abel'sche Gruppen.

3.3.3 Beispiel Wir definieren auf der Menge $\{g, u\}$ die Verknüpfungen

$+$	g	u
g	g	u
u	u	g

$\cdot$	g	u
g	g	g
u	g	u

Den Beweis, dass dies ein Körper ist, werden wir hier nicht durchführen. Man müsste dazu die obigen Rechengesetze für alle möglichen Belegungen der Variablen a, b, c mit den Zahlen g und u nachprüfen. Durch geeignete Argumentation mit (bereits bewiesenen) Rechengesetzen kann man dabei viele ,,Fälle einsparen". Das Null–Element ist $0 = g$. Das Eins–Element ist $1 = u$.

3.3.4 Satz Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

(i) Es ist $-0 \;=\; 0$.

(ii) Für beliebiges $a \in \mathbb{K}$ gilt

$$-(-a) \;=\; a.$$

(iii) Für beliebiges $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ gilt

$$(a^{-1})^{-1} \;=\; a.$$

(iv) Für beliebige $a, b \in \mathbb{K}$ gilt

$$-(a+b) \;=\; (-a) + (-b).$$

(v) Für beliebige $a, b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ gilt

$$(ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}.$$

(vi) Zu vorgegebenem $a, b \in \mathbb{K}$ gibt es genau ein $c \in \mathbb{K}$, so dass

$$a + c = b.$$

Anders formuliert: Die Gleichung $a + x = b$ besitzt genau eine Lösung.

(vii) Zu vorgegebenem $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{K}$ gibt es genau ein $c \in \mathbb{K}$, so dass

$$a \cdot c = b.$$

Anders formuliert: Die Gleichung $a \cdot x = b$ besitzt genau eine Lösung.

(viii) Für beliebiges $a \in \mathbb{K}$ gilt

$$a \cdot 0 = 0.$$

(ix) (Nullteilerfreiheit) Für beliebige $a, b \in \mathbb{K}$ gilt

$$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \text{ oder } b = 0.$$

(x) Beachte, dass die Folgerung

$$a + a + \ldots + a = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 0$$

in einem beliebigen Körper **nicht** gilt.

3.3.5 Beweis

(i) Es ist $0 + 0 = 0$. Also ist 0 additiv invers zu 0.

(vi) Setze $c := b + (-a)$. Dann gilt:

$$a + c = a + (b + (-a)) = a + (-a) + b = b.$$

Angenommen es gibt zwei Elemente $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ mit der geforderten Eigenschaft. Dann gilt

$$c_1 = 0 + c_1 = (-a) + a + c_1 = (-a) + b = (-a) + a + c_2 = 0 + c_2 = c_2.$$

(vii) Für die Multiplikation geht der Beweis analog.

(viii)

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0.$$

Damit hat die Gleichung

$$a \cdot 0 + x = a \cdot 0$$

die Lösungen $a \cdot 0$ und 0. Nach (vii) müssen diese beiden Lösungen übereinstimmen.

(ix) Die Richtung $\Longleftarrow$ ist trivial. Sei also $ab = 0$, wir nehmen an, dass $a \neq 0$. Dann folgt mit (viii):

$$b = 1 \cdot b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0.$$

(x) In dem Körper mit zwei Elementen (siehe oben) gilt

$$u + u = g \quad \text{und} \quad u \neq g.$$

Die restlichen Aussagen (ii) – (vi) werden evtl. Gegenstand der Übungen sein.

3.3.6 Satz: Binomischer Lehrsatz Es seien $a, b \in \mathbb{K}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Schreiben Sie sich diese Formel für einige kleine n explizit auf.

3.3.7 Beweis Wir führen den Beweis mit Induktion über n. Der Induktionsanfang $n = 0$ geht so:

$$(a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} a^0 b^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k.$$

Jetzt kommt sehr ausführlich der Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) \\
\text{(Induktionsvoraussetzung)} \quad &= \Big[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\Big] \cdot (a+b) \\
\text{(Distributivgesetz/Ausmultiplizieren)} \quad &= \Big[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\Big] \cdot a + \Big[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\Big] \cdot b \\
&= \Big[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k\Big] + \Big[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}\Big] \\
\text{(Indexverschiebung)} \quad &= \Big[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k\Big] + \Big[\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^k\Big] \\
\text{(Addition von } \tbinom{n}{n+1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1} = 0\text{)} \quad &= \Big[\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k\Big] + \Big[\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^k\Big] \\
\text{(Addition von } \tbinom{n}{-1} a^{n-(0-1)} b^{0} = 0\text{)} \quad &= \Big[\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k\Big] + \Big[\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^k\Big] \\
\text{(Distributivgesetz/Ausklammern)} \quad &= \sum_{k=0}^{n+1} \Big[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\Big] a^{n+1-k} b^k \\
\text{(Pascal-Beziehung)} \quad &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.
\end{aligned}$$

Den Trick mit der *Indexverschiebung* sollte ausführlicher erklärt werden: Generell kann man den Summations–Index bei der Σ–Darstellung einer Summe verändern, beispielsweise so:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1}.$$

Der ,,Summations–Bereich" und der Index im ,,Summationsterm" werden also ,,gegensinnig" verändert. Ähnliches trifft für Produkte zu.

3.4 Angeordnete Körper

3.4.1 Definition Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt *angeordneter Körper*, wenn auf ihm eine lineare Ordnung $\leq$ erklärt ist, die sich mit den Körpergesetzen ,,verträgt". Das heißt genauer, es sollen die folgenden Eigenschaften erfüllt sein:

R/A Für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt die Implikation

$$a \leq b \quad \Longrightarrow \quad a + c \leq b + c.$$

R/M Für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt die Implikation

$$a \leq b \text{ und } c \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad a \cdot c \leq b \cdot c.$$

Durch die folgende Tabelle werden einige Bezeichnungen und Symbole eingeführt:

	Elemente	Teilmenge
$a > 0$	positiv	$\mathbb{K}^+$
$a \geq 0$	nicht–negativ	$\mathbb{K}_0^+$
$a < 0$	negativ	$\mathbb{K}^-$
$a \leq 0$	nicht–positiv	$\mathbb{K}_0^-$
$a \neq 0$	nicht-Null	$\mathbb{K}^\times$

3.4.2 Satz Sind a, b, c, d Elemente eines angeordneten Körpers $\mathbb{K}$, so gilt:

(i) $a \leq b \iff -b \leq -a$

(ii) $0 \leq a \iff -a \leq 0$

(iii) $a > 0 \iff a^{-1}$ existiert mit $a^{-1} > 0$
$a < 0 \iff a^{-1}$ existiert mit $a^{-1} < 0$

(iv) $1 < a \iff a^{-1}$ existiert mit $0 < a^{-1} < 1$

(v) $a \leq b$ und $c \leq 0 \implies bc \leq ac.$

(vi) $a \leq b$ und $c \leq d \implies a + c \leq b + d.$

(vii) $0 \leq a \leq b$ und $0 \leq c \leq d \implies ac \leq bd.$

(viii) $a^2 \geq 0,$ insbesondere $1 > 0.$

3.4.3 Beweis in den Übungen

4 Der Körper der reellen Zahlen

4.1 $\boxed{\mathbb{R}}$ Axiomatische Festlegung

4.1.1 Axiom

Es existiert (genau) ein vollständig angeordneter Körper.

Wir bezeichnen diesen Körper mit $\mathbb{R}$ und nennen die Elemente dieses Körpers die *reellen Zahlen*.

Das bedeutet, dass auf der Menge $\mathbb{R}$ die folgenden Strukturen und Eigenschaften gegeben sind:

- Körper–Axiome: Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division,
- lineare Ordnung,
- Verträglichkeit der linearen Ordnung mit Addition und Multiplikation,
- Vollständigkeit: Jede nicht–leere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum.

Alle bis jetzt in diesem Kapitel über Vollständigkeit und angeordnete Körper getroffenen Begriffe und Sätze sind also für $\mathbb{R}$ gültig.

4.1.2 Bemerkungen

Eine erste Beobachtung ist nun, dass der mehrfach angesprochene Mangel von $\mathbb{Q}$, nämlich die Nicht–Existenz bestimmter Quadratwurzeln, in $\mathbb{R}$ behoben ist.

Eigentlich müsste man genauer sagen, dass $\mathbb{R}$ bzgl. der linearen Ordnung vollständig ist, kurz: ordnungs-vollständig, ist. Tatsächlich gibt es andere Vollständigkeitsbegriffe, beispielsweise den des vollständig metrischen Raumes. Da diese Verschiedenheiten im folgenden keine Rolle spielen, im Falle von $\mathbb{R}$ sogar verschwinden, bleiben wir bei der Sprechweise

4.1.3 Satz Zu jedem $a \in \mathbb{R}_0^+$ gibt es genau ein $s \in \mathbb{R}_0^+$, so dass $s^2 = a$. Dieses s wird mit $\sqrt{a}$ bezeichnet.

4.1.4 Beweis

(1) Es sei $Y := \{y \in \mathbb{R} \,|\, y^2 < a\}$.

Y besitzt die Zahl $a+1$ als (eine) obere Schranke in $\mathbb{R}$. Anderenfalls gäbe es ein $y \in Y$ mit $y > a+1$ und dann wäre $y^2 > (a+1)^2 > a+1 > a$.

Y ist nicht leer, da $0 \in Y$. Deshalb besitzt Y ein Supremum s.

(2) Wir nehmen $s^2 \neq a$ an. Wir definieren die Zahl

$$\varepsilon := \frac{s^2 - a}{2s+1}$$

und studieren den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}\frac{(s-\varepsilon)^2-a}{s^2-a} &= \frac{s^2-a-2s\varepsilon+\varepsilon^2}{s^2-a} = 1+\frac{\varepsilon(\varepsilon-2s)}{s^2-a} = 1+\frac{\varepsilon-2s}{2s+1} \\ &= \frac{1+\varepsilon}{2s+1} = \frac{2s+1+s^2-a}{(2s+1)^2} = \frac{(s+1)^2-a}{(2s+1)^2}\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist eine Zahl echt zwischen 0 und 1, da

- $(s+1)^2 > a$. Anderenfalls wäre $(s+\frac{1}{2})^2 < (s+1)^2 \leq a$, somit $s+\frac{1}{2} \in Y$ und s könnte keine obere Schranke von Y sein.
- $\dfrac{(s+1)^2-a}{(2s+1)^2} < \left(\dfrac{s+1}{2s+1}\right)^2 < 1.$

Die gesamte Ungleichung

$$0 < \frac{(s-\varepsilon)^2-a}{s^2-a} < 1$$

bedeutet, dass $(s-\varepsilon)^2$ echt zwischen a und s^2 liegt. Dabei sind zwei Konstellationen möglich:

- Ist $a < (s-\varepsilon)^2 < s^2$, so ist $y < s-\varepsilon$ für alle $y \in Y$, also $s-\varepsilon$ eine Schranke von Y, die kleiner als s ist.
- Ist $s^2 < (s-\varepsilon)^2 < a$, so ist $s-\varepsilon$ eine Zahl in Y, die größer als s ist.

Beides ist ein WIDERSPRUCH dazu, dass s Supremum ist.

4.1.5 Bemerkungen

1. Der obige Beweis kann dahingehend verallgemeinert werden, dass auch höhere Wurzeln nicht–negativer reeller Zahlen erfasst werden. Wir werden ihre Existenz später — mit anderen Mitteln — absichern.
2. Quadratwurzeln in einem Körper können auch mit anderen Mitteln als mit Hilfe von Suprema ,,erschaffen” werden. Beispielsweise können sogenannte ,,algebraische Erweiterungskörper” konstruiert werden, die dann Nullstellen von Polynomen enthalten, deren Koeffizienten aus dem vorgegebenen Körper kommen.
3. Wir werden sehen, dass die Supremumseigenschaft viel stärker als diese in sich interessante algebraische Methode ist, da sie die Existenz vieler anderer ,,wichtiger” Zahlen, eben nicht nur die von Wurzeln, gewährleistet.

4.2 $\boxed{\mathbb{N}}$ Natürliche Zahlen

4.2.1 Vorbemerkung Die Überlegungen in den Abschnitten 4.2 – 4.4 dieses Kapitels über die Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sind in jedem beliebigen angeordneten Körper durchführbar, nicht nur in $\mathbb{R}$.

4.2.2 Satz und Definition

In $\mathbb{R}$ gibt es eine Teilmenge $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Es ist $1 \in \mathbb{N}$.

(2) Die Abbildung

$$\nu : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{cases}$$

ist wohldefiniert und eine Nachfolger–Abbildung im Sinne der Peano–Axiome 2.9.1.

4.2.3 Beweis Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ heißt *induktiv geordnet*, falls die beiden Aussagen

$$1 \in M \qquad \text{und} \qquad (a \in M \ \Rightarrow \ a+1 \in M)$$

gelten. Wir definieren $\mathbb{N}$ als Schnittmenge aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{N} \ := \ \Big\{ a \in \mathbb{R} \ \Big| \ a \in M \ \text{ für alle induktiv geordneten Teilmengen } M \subseteq \mathbb{R} \ \Big\}.$$

Wir müssen jetzt zeigen, dass die Peano–Axiome 2.9.1 erfüllt sind.

(P1) Die Zahl 1 ist in jeder induktiven Teilmenge M enthalten, also ist sie auch in der Schnittmenge $\mathbb{N}$ aller dieser Mengen enthalten.

(P2) Die Menge $M^* = \{a \in \mathbb{R} | a \geq 1\}$ ist induktiv. Also gilt

$$0 \notin M^* \quad \Longrightarrow \quad 0 \notin \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad 1 \notin \nu(\mathbb{N}).$$

(P3) Genügt eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ den in (P3) aufgeführten Eigenschaften, so ist A induktiv. Da aber $\mathbb{N}$ in jeder induktiven Teilmenge M enthalten ist, gilt auch

$$\mathbb{N} \subseteq A.$$

Insgesamt gilt dann $A = \mathbb{N}$.

4.3 $\boxed{\mathbb{Z}}$ Ganze Zahlen

Eine weitere besondere Teilmenge in $\mathbb{R}$ ist die der ganzen Zahlen:

4.3.1 Definition: Ganze Zahlen Die Menge

$$\mathbb{Z} := \{a \in \mathbb{R} | a \in \mathbb{N} \text{ oder } -a \in \mathbb{N} \text{ oder } a = 0\}$$

heißt die Menge der *ganzen Zahlen.*

Wir tragen drei Beobachtungen zusammen:

4.3.2 Präposition

(i) Es ist $\min \mathbb{N} = 1$.

(ii) Es sei $z \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es keine Zahl $w \in \mathbb{Z}$, so dass

$$z < w < z + 1.$$

(iii) Jede nicht–leere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ besitzt ein Minimum.
Jede nicht–leere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ besitzt ein Maximum.

4.3.3 Beweis Zu (i): Wir zeigen per Induktion, dass $1 \leq n$ für alle natürlichen Zahlen n. Der Induktionsanfang ist klar: $1 \leq 1$. Der Induktionsschluss ist dann:

$$1 \leq n \text{ und } 0 \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 + 0 \leq n + 1.$$

Zu (ii): Würde es eine solche Zahl $w \in \mathbb{Z}$ geben, so würde dies bedeuten, dass

$$0 < w - z < 1.$$

Da $w - z \in \mathbb{N}$, wäre dies ein Widerspruch zu (i).

Zu (iii): Es sei Y eine nicht–leere Teilmenge von $\mathbb{Z}$ mit einer unteren Schranke $a \in \mathbb{Z}$, $a \leq y$ für alle $y \in Y$.

Wir nehmen an, dass Y kein Minimum besitzt. (*)

Per Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$ folgern wir aus $(*)$, dass

$$\{a, a + 1, \ldots, a + n\} \subseteq \mathbb{Z} \setminus Y \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \qquad (**)$$

Induktionsanfang: Wäre die untere Schranke $a \in Y$, so wäre $a = \min Y$ (Widerspruch zu $(*)$). Es ist also $a \in \mathbb{Z} \setminus Y$.

Die Induktionsvoraussetzung besagt, dass $\{a, \ldots, a + n\} \subseteq \mathbb{Z} \setminus Y$.
Wäre $a + n + 1 \in Y$, so wäre diese Zahl ein Minimum von Y, da es zwischen $a + n$ und $a + n + 1$ gemäß (ii) keine ganze Zahl gibt. (Widerspruch zu $(*)$). Also gilt: $a + n + 1 \in \mathbb{Z} \setminus Y$.

Die Aussage $(**)$ bedeutet, dass Y leer ist. Wir hatten aber Y als nicht–leer vorausgesetzt, so dass wir die Annahme $(*)$ verwerfen müssen.

Die zweite Aussage kann man analog zeigen.

4.4 $\boxed{\mathbb{Q}}$ Rationale Zahlen

4.4.1 Definition Die bereits aus den ersten beiden Kapiteln bekannte ,,Beispielmenge" $\mathbb{Q}$ kann jetzt ,,grundgelegt" werden.

$$\mathbb{Q} := \{a \in \mathbb{R} | \text{ Es existieren } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \ a = p \cdot q^{-1}\}$$

heißt die *Menge der rationalen Zahlen.* Da die Multiplikation im Körper kommutativ ist, ist die Bruchschreibweise

$$a = p \cdot q^{-1} = \frac{p}{q}$$

sinnvoll und üblich. Aus den Gesetzen des angeordneten Körpers folgen die Rechengesetze der gewöhnliche Bruchrechnung: Kürzen, Erweitern, lineare Ordnung, Grundrechenarten, gemischte Zahlen, Doppelbrüche.

4.4.2 Satz Das Ergebnis einer Addition oder Multiplikation zweier rationaler Zahlen ist wieder eine rationale Zahl. Mit anderen Worten: $\mathbb{Q}$ ist ein ,,Teilkörper" von $\mathbb{R}$, ein angeordneter Körper (in sich).

4.4.3 Beweis Zum Beweis muss man zeigen, dass die Summe bzw. das Produkt zweier rationaler Zahlen $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ wieder als Bruch $\frac{u}{v}$ geschrieben werden kann. Man überzeugt sich aber mit Hilfe der Körper–Rechen–Gesetze davon, dass

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs} \qquad \text{und} \qquad \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s}.$$

Da $\mathbb{Q}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, sind auch die Axiome R/A und R/M über die Verträglichkeit von Ordnung und Addition bzw. Multiplikation erfüllt.

4.4.4 Irrationale Zahlen Die beschränkte Teilmenge

$$\left\{x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; x^2 < 2\right\} \subseteq \mathbb{R}$$

hat in $\mathbb{R}$ ein Supremum s, Satz 4.1.3 zeigt, dass dann $s^2 = a$. Dieses Supremum kann aufgrund von Satz 2.3.5 keine rationale Zahl sein.

Der Körper $\mathbb{R}$ ist also echt größer als $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$. Die Zahlen in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißen *irrational.*

4.5 Beziehungen zwischen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$

4.5.1 Satz

(i) Die Menge $\mathbb{N}$ ist **nicht** nach oben beschränkt (in $\mathbb{R}$).

(ii) (Archimedische Ordnung)
Zu zwei beliebigen Zahlen $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$ gibt es eine natürliche Zahl n, so dass

$$a < n \cdot b.$$

(iii) Zu jeder positiven Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(iv) Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $z \in \mathbb{Z}$, so dass

$$z \leq a < z + 1.$$

Diese Zahl z wird dann auch mit $\lfloor a \rfloor$ („floor") oder mit $[a]$ (Gauß–Klammer) bezeichnet.

4.5.2 Beweis Zu (i) Wenn $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt wäre, so besäße $\mathbb{N}$ ein Supremum $s \in \mathbb{R}$. Dies würde dann bedeuten, dass

$$n \leq s \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da zu jedem n auch die Zahl $n + 1$ in $\mathbb{N}$ enthalten ist, würde auch gelten, dass

$$n + 1 \leq s \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Eine Äquivalenzumformung führt auf die Aussage:

$$n \leq s - 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Das heißt dann aber, dass $s-1$ eine obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist, die kleiner als das Supremum s ist. WIDERSPRUCH.
Zu (ii): Die gegenteilige Aussage würde bedeuten, dass

$$a \geq n \cdot b \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Das aber hieße, dass $\mathbb{N}$ durch die reelle Zahl $\frac{a}{b}$ nach oben beschränkt wäre.
Zu (iii): Gemäß (ii) existiert zu $1, \varepsilon$ eine natürliche Zahl n, so dass

$$1 < n \cdot \varepsilon.$$

Multipliziere die Ungleichung mit $\frac{1}{n}$.
Zu (iv): Da a gemäß (i) nicht eine obere Schranke von $\mathbb{N}$ sein kann, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a < n$. Die Menge

$$\{w \in \mathbb{Z} | a < w\}$$

ist also nicht–leer und nach unten beschränkt, besitzt deshalb aufgrund von Proposition 8 (iii) ein Minimum $z \in \mathbb{Z}$. Es folgt: $z - 1 \leq a < z$.

4.5.3 Satz: Bernoulli-Ungleichung Es sei $a \in [-1, \infty[$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}_0$

$$(1+a)^n \geq 1 + an.$$

4.5.4 Beweis Der Induktionsanfang $n = 0$ ist trivial. Zum Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} &= (1+a)^n \cdot \underbrace{(1+a)}_{\geq 0} \overset{\text{IndV}}{\geq} (1+an)(1+a) \\ &= 1 + a + an + \underbrace{a^2 n}_{\geq 0} \geq 1 + a(n+1).\end{aligned}$$

4.5.5 Satz: Wachstum und Abklingen von Potenzen

(i) Es sei $a > 1$. Zu jedem $b \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$a^n > b.$$

(Die Potenzen werden beliebig groß).

(ii) Es sei $0 < a < 1$. Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$a^n < \varepsilon.$$

(Die Potenzen werden beliebig klein).

4.5.6 Beweis Zu (i): Nach dem Archimedes–Satz 4.5.1(ii) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n \cdot (a-1) > b - 1$. Dann folgt mit der Bernoulli–Ungleichung:

$$a^n = [1 + (a-1)]^n \geq 1 + (a-1)n > b.$$

Zu (ii) Nach Teil (i) gibt es zu $\frac{1}{a} > 1$ und $\frac{1}{b} \in \mathbb{R}^+$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n > \frac{1}{b}.$$

Invertierung dieser Ungleichung liefert das Ergebnis.

4.5.7 Satz: Dichtheit von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(i) Zu je zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es ein $c \in \mathbb{Q}$, so dass

$$a < c < b.$$

(Man sagt auch, die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$).

(ii) Zu je zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es ein $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so dass

$$a < c < b.$$

(Die irrationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$).

4.5.8 Beweis (i) Nach dem Archimedes–Satz 4.5.1 (iii) gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{1}{m} < \frac{b-a}{2}$$

und dann nach Teil (iv) ein $z \in \mathbb{Z}$ mit

$$z \le m \cdot \frac{a+b}{2} < z + 1.$$

Aus der ersten Ungleichung folgt: $\frac{ma}{2} < \frac{mb}{2} - 1$ und dann

$$ma = \frac{ma}{2} + \frac{ma}{2} < \frac{ma}{2} + \frac{mb}{2} - 1 = m\frac{a+b}{2} - 1 < z \le m\frac{a+b}{2} < mb.$$

Mit $c := \frac{z}{m}$ folgt daraus durch Division durch m

$$a < c < b.$$

(ii) Nach Aussage (i) gibt es zunächst ein $d \in \mathbb{Q}$ zwischen a und b und dann noch ein $e \in \mathbb{Q}$ zwischen d und b. Es gilt insgesamt:

$$a < d < e < b.$$

Wegen $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ ist die Zahl

$$c := d + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (e - d) = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})\, d + \frac{\sqrt{2}}{2}\, e$$

zwischen d und e, also auch zwischen a und b. Wäre c rational, so wäre auch

$$\sqrt{2} = 2 \cdot \frac{c-d}{e-d}$$

rational. Widerspruch.

4.6 $\boxed{\mathbb{C}}$ Komplexe Zahlen

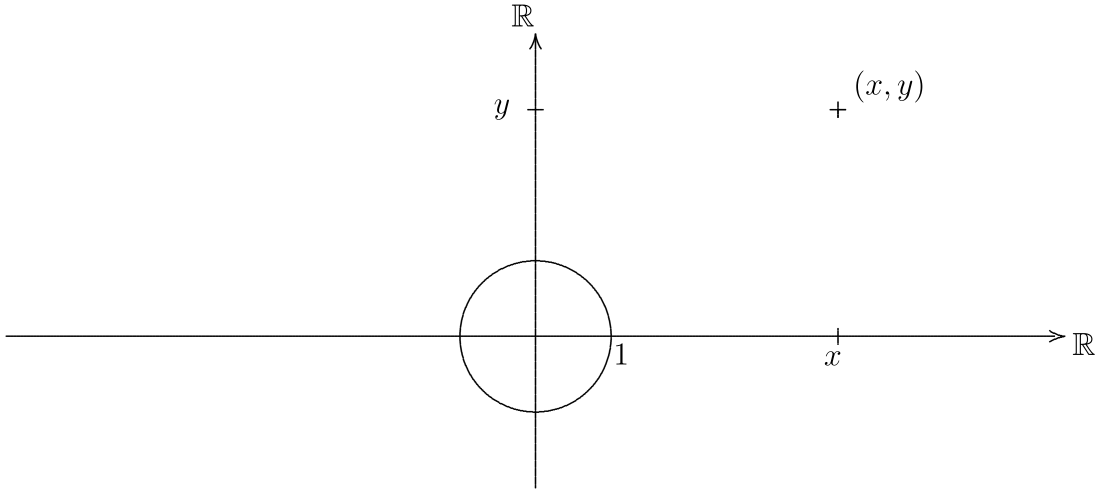
4.6.1 Der Körper der komplexen Zahlen Wir betrachten die Menge der reellen Zahlenpaare

$$\mathbb{C} \ := \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ := \ \Big\{ (x,y) \ \Big| \ x, y \in \mathbb{R} \Big\}.$$

In dem nun zu entwickelnden Kontext heißen die Zahlenpaare *komplexe Zahlen*. Im allgemeinen verwendet man die Buchstaben

$$z = (x,y) \qquad \text{oder} \qquad w = (u,v).$$

Wir stellen uns diese Menge als eine Ebene vor.



Bei Zugrundelegung dieser Auffassung heißt die Ebene auch *Gauß'sche Zahlenebene* oder *komplexe Zahlenebene*.

Wir stellen uns die Aufgabe, in dieser Menge der Zahlenpaare die „Grundrechenarten" so einzuführen, dass die Körperaxiome erfüllt sind. Ein erster Versuch könnte darin bestehen, die Verknüpfungen komponentenweise durchzuführen:

$$\begin{aligned} (x,y) + (u,v) \quad &:= \quad (x+u, y+v) \\ (x,y) \cdot (u,v) \quad &:= \quad (xu, yv) \end{aligned}$$

Tatsächlich ist dann $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$ eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element $(0,0)$. Leider ist aber $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}, \cdot)$ keine Gruppe, da Elemente der Form $(a,0)$ oder $(0,b)$ keine Inversen besitzen. Anderes Argument: Es gilt auch

$$(a,0) \cdot (0,b) = (0,0).$$

Wir wissen aber, dass Körper keine Nullteiler besitzen. SACKGASSE!

Es gibt aber eine Lösung unserer Aufgabe. Wir definieren auf der Menge $\mathbb{C}$ zwei Verknüpfungen wie folgt:

$$\begin{aligned} (x,y) + (u,v) \quad &:= \quad (x+u, y+v) \\ (x,y) \cdot (u,v) \quad &:= \quad (xu - yv, xv + yu) \end{aligned}$$

Es werden die gleichen Verknüpfungssymbole wie in $\mathbb{R}$ benutzt. Dies wird, wie wir sehen werden, nicht irgendwelche Probleme bereiten.

Wir probieren diese Verknüpfungen an verschiedenen Beispielen aus.

- Die Addition ist einfach die aus der Schule bekannte Addition von Vektoren in der Zeichenebene.

- Wir betrachten die Verknüpfung für Zahlenpaare, deren zweite Koordinate 0 ist.

$$(x,0)+(u,0)=(x+u,0), \qquad (x,0)\cdot(u,0)=(x\cdot u,0).$$

  Das bedeutet, dass mit diesen Zahlen genauso gerechnet wird wie mit den reellen Zahlen. Auf diese Weise kann die Menge der reellen Zahlen als Teilmenge der komplexen Zahlen aufgefasst werden. Man sagt auch, dass die Zahlen $(a,0)$ reell sind.

- Aus der Schule ist Ihnen bekannt, dass Vektoren auch vervielfacht werden können (Skalar–Multiplikation). Wir multiplizieren eine komplexe Zahl mit einer reellen Zahl:

$$(x,0)\cdot(u,v)=(xu,xv).$$

  Dies ist tatsächlich die Vektorvervielfachung.

- Spezialfall: Das Quadrat von $(0,1)$.

$$(0,1)^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0).$$

  Wir haben also eine Wurzel von $-1\in\mathbb{R}$ gefunden.

- Dies ist Anlass für eine eingängigere Schreibweise: Wir kürzen ab (definieren):

$$\begin{array}{rcll} x & := & (x,0) & \text{für alle } x\in\mathbb{R} \\ i & := & (0,1) & \quad (\textit{Imaginäre Einheit}) \end{array}$$

  Dann kann eine beliebige komplexe Zahl z ein–eindeutig geschrieben werden als:

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)\cdot(y,0)=x+iy$$

  mit $x,y\in\mathbb{R}$. Die reelle Zahl x heißt *Realteil* und y *Imaginärteil* der komplexen Zahl $z=(x,y)$. Man schreibt:

$$x=\operatorname{Re}z \qquad \text{und} \qquad y=\operatorname{Im}z$$

  Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen geht dann wie folgt:

$$(x+iy)\cdot(u+iv)\stackrel{\mathrm{DG}}{=}xu+xiv+iyu+iyiv=(xu-yv)+i(xv+yu).$$

  Dabei haben wir die Gültigkeit des Distributivgesetzes vorweggenommen. Man sieht, dass diese Multiplikation in Übereinstimmung mit der Definition am Anfang ist.

- Polarkoordinaten: Später!

4.6.2 Satz $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper. Es gibt keine lineare Ordnung auf $\mathbb{C}$, die mit den Körpergesetzen verträglich ist.

4.6.3 Beweis

- Kommutativgesetze, Assoziativgesetze und Distributivgesetze müssen einfach nachgerechnet werden. Wir führen dies nur an den zwei interessantesten Fällen vor:

$$\begin{aligned}
& [(x,y)(u,v)](s,t) \\
= \; & [(xu - yv, yu + xv)](s,t) \\
= \; & ((xu - yv)s - (yu + xv)t, (xu - yv)t + (yu + xv)s) \\
& (x,y)[(u,v)(s,t)] \\
= \; & (x,y)((us - vt), (vs + ut)) \\
= \; & (x(us - vt) - y(vs + ut), x(vs + ut) + y(us - vt)) \\
& (x,y) \cdot [(u,v) + (p,q)] = (x,y) \cdot (u + p, v + q) \\
= \; & (x(u + p) - y(v + q), y(u + p) + x(v + q)) \\
= \; & (xu + xp - yv - yq, yu + yp + xv + xq) \\
& (x,y) \cdot (u,v) + (x,y) \cdot (p,q) \\
= \; & (xu - yv, yu + xv, xp - yq, xq + yp) \\
= \; & (xu + xp - yv - yq, yu + yp + xv + xq)
\end{aligned}$$

  Nach weiteren Umformungen mit Hilfe der Kommutativgesetze in $\mathbb{R}$ stimmen die Ausdrücke in der dritten/sechsten bzw. neunten/zwölften Zeile jeweils überein.

- Das neutrale Element bzgl. der Addition ist $0 = (0,0)$. Das additive inverse zu einer Zahl $z = (x,y)$ ist $-z = (-x,-y)$.

- Das neutrale Element bzgl. der Multiplikation ist $1 = (1,0)$. Das zu einem Element $z = x + iy$ multiplikativ inverse ist gegeben durch $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$. In der Tat gilt

$$\begin{aligned}
& (x + iy) \cdot \Big(\frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}\Big) = \\
& \Big(\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}\Big) + i\Big(\frac{xy}{x^2 + y^2} - \frac{yx}{x^2 + y^2}\Big) = 1.
\end{aligned}$$

  (Wie bei rationalen oder reellen Zahlen wird bei der Division zweier komplexer Zahlen die Bruchschreibweise verwendet.)

- Würde auf $\mathbb{C}$ eine lineare Ordnung existieren, die sich mit den Körpergesetzen verträgt, so könnte man mit Sätzchen 3.4.2 schließen:

$$-1 = (0,1)^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad +1 \leq 0.$$

  Widerspruch.

4.6.4 Konjugation Wir definieren eine bijektive Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \mapsto & \overline{z} = x - iy \end{cases}$$

und nennen $x - iy$ die *zu $x + iy$ konjugiert komplexe Zahl*. Geometrisch ist das eine Spiegelung an der reellen Achse. Es ist dann

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}, \qquad z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$$

4.6.5 Satz Die Konjugiert–komplex–Abbildung ist ein involutiver Körper–Automorphismus, das heißt für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}, \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \qquad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}},\ w \neq 0.$

(Ganz allgemein heißt eine Abbildung $f : X \to X$ mit $f \circ f = \mathrm{id}_X$ Involution.)

4.6.6 Absolutbetrag Wir definieren weiter den *(Absolut–)Betrag* einer komplexen (dann auch reellen) Zahl durch

$$|\cdot| \begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ z = x + iy & \mapsto & |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

und notieren zwei Beziehungen zwischen Absolutbetrag und Konjugiert–Komplex–Abbildung:

- $z \cdot \overline{z} = |z|^2.$
- $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\overline{z} \cdot z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}, \qquad \text{für } z \neq 0$

Weitere Eigenschaften werden in einem Satz hervorgehoben:

4.6.7 Satz: Eigenschaften des Betrags

(Positiv–Definitheit) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $|z| \geq 0$ und

$$|z| = 0 \quad \iff \quad z = 0.$$

(Multiplikativität) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

(Dreiecksungleichung) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

4.6.8 Beweis Die erste Aussage ist trivial. Zur zweiten und dritten:

$$\begin{aligned} |z \cdot w| &= \sqrt{z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w}} = |z| \cdot |w| \\ |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w + |w|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2 \end{aligned}$$

Aus dieser Ungleichung muss noch die Wurzel gezogen werden.

Die Dreiecksungleichung ist äquivalent zu einer allgemeineren Version, die in den Übungen zu beweisen ist. Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\Big| |z| - |w| \Big| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|.$$

Dabei bedeutet das Zeichen $\pm$, dass man $+$ oder $-$ einsetzen kann.

4.6.9 Bemerkung Ein Körper $\mathbb{K}$, auf dem eine Funktion $\mathbb{K} \to \mathbb{R}$ mit den in Satz 4.6.7 beschriebenen Eigenschaften definiert ist, heißt ein *bewerteter Körper*. Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist ein nicht-angeordneter bewerteter Körper.

5 Folgen in $\boxed{\mathbb{R}}$ und $\boxed{\mathbb{C}}$

5.1 Metrische Räume

5.1.1 Definition Es sei M eine Menge. Eine Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}_0^+$ heißt *Metrik* oder *Abstandsfunktion* auf M, wenn die folgenden drei Eigenschaften für $x, y, z \in M$ erfüllt sind:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d(y,x) \\ d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \\ d(x,y) &= 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y. \end{aligned}$$

M heißt dann kurz *metrischer Raum.*

5.1.2 Beispiele

1. Definiere auf $\mathbb{C}$ die Abstandsfunktion

   $$d(z,w) := |z - w|.$$

   Satz 4.6.7 zeigt, dass $\mathbb{C}$ so zu einem metrischen Raum wird.

2. Jede Teilmenge X von $\mathbb{C}$ ist ein metrischer Raum, wenn man die entsprechend eingeschränkte Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ betrachtet.

3. Insbesondere wird $\mathbb{R}$ durch die Abstandsfunktion

   $$d(x,y) := |x - y|.$$

   mit dem einfachen Absolutbetrag zu einem metrischen Raum.

4. Definiere auf $\mathbb{R}^d$ (Zeichenebene, 3–dimensionaler Anschauungsraum,...) der d–fachen Zahlentupel eine Metrik durch

   $$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + \ldots (x_d - y_d)^2}$$

   und beweise (in der linearen Algebra oder später in der Analysis), dass das eine Metrik ist.

5.1.3 Bemerkung Beachte, dass im Zusammenhang mit dem Begriff ,,metrischer Raum" nicht von Körperstrukturen, linearen Ordnungen usw. die Rede ist. Wir werden in diesem Kapitel eine Theorie der Folgenkonvergenz in metrischen Räumen aufbauen, dabei aber nur an $\mathbb{C}$ und — hauptsächlich — an $\mathbb{R}$ denken. Dies kommt auch dadurch zum Ausdruck, dass wir anstelle der allgemeine Symbolik $d(x,y)$ für die Abstandsfunktion die Schreibweise $|x - y|$ benutzen werden, um so nicht zu weit von der vertrauten Vorstellung eines Abstandsbegriffs entfernt zu sein. Nichtsdestoweniger sind alle Begriffe und Sätze der folgenden Abschnitte auf beliebige metrische Räume anwendbar. Es sei also im folgenden

$$M = \mathbb{R}, \mathbb{C} \quad \text{oder irgendein anderer metrischer Raum.}$$

5.1.4 Definition: Beschränkte Teilmengen

(1) Eine Teilmenge X eines metrischen Raums M heißt *beschränkt*, wenn es ein $c \in X$ und eine Zahl $M > 0$ gibt, so dass

$$d(x,c) \quad \leq \quad M \quad \text{für alle } x \in X.$$

Ist eine Teilmenge X beschränkt, so kann der Punkt c in der obigen Definition durch jeden anderen beliebigen Punkt $\widetilde{c}$ ersetzt werden. Es ist dann nämlich für alle $x \in X$

$$d(x,\widetilde{c}) \quad \leq \quad d(x,c) + d(c,\widetilde{c}) \quad \leq \quad M + d(c,\widetilde{c}) =: \widetilde{M}.$$

Die Definition der Beschränktheit ist also für $\widetilde{c}$ und $\widetilde{M}$ erfüllt.

(2) Eine Abbildung $f : Y \to X$, wobei X ein metrischer Raum ist, heißt *beschränkt*, wenn die Bildmenge

$$f(Y) \quad = \quad \Big\{ x \in X | \text{ es existiert } y \in Y \text{ mit } f(y) = x \Big\}$$

als Teilmenge des metrischen Raums X beschränkt ist.

5.2 Folgen: Definition und Beispiele

5.2.1 Definition Unter einer *Folge in M* versteht man eine Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{N} & \to \quad M \\ n & \mapsto \quad a_n = a(n) \end{cases}$$

Die Zahlen a_n heißen *Folgenglieder*. Die Zahl n heißt in diesem Fall *Index*, sie wird im allgemeinen tiefgestellt notiert. Die *Indexmenge* kann auch ein anderes einseitig unendliches Intervall von $\mathbb{Z}$ sein. Andere Schreibweisen für Folgen sind:

$$(a_n) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \qquad \text{oder} \qquad (a_1, a_2, \ldots)$$

Vereinbarung: Im folgenden stehen die Buchstaben n, m, k, N für natürliche Zahlen.

Ist $M = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so spricht man auch von einer *reellen* bzw. *komplexen Folge*.

5.2.2 Beispiele

1. Für ein $a \in M$ heißt die konstante Abbildung $a(n) = a$ die *konstante Folge*.

2. Es sei $M = \mathbb{R}$ und $a_n = \frac{1}{n}$. Die ersten Folgenglieder sind dann

   $$(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots)$$

3. Es seien $B, C \in \mathbb{R}$ zwei fest vorgegebene Zahlen. Dann ist durch

   $$a_n \; := \; \begin{cases} \frac{n+B}{n+C}, & \text{falls } n \neq -C, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   eine Folge definiert.

4. Eine Folge der Form $a_n = q^n$ für festes $q \in \mathbb{R}$ heißt *geometrische Folge*:

$$\begin{aligned} q &= \tfrac{1}{2} && (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{16}, \ldots) \\ q &= 3 && (1, 3, 9, 27, 81, 243, \ldots) \\ q &= -1 && (+1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, -1, \ldots) \\ q &= -2 && (1, -2, +4, -8, +16, -32, \ldots). \end{aligned}$$

5. Für $a_n = n^2$ ergibt sich die Folge der Quadratzahlen

$$(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots)$$

6. Man kann Folgen rekursiv definieren. Beispiel, mit einer festen Zahl $\gamma \in [0, 4]$

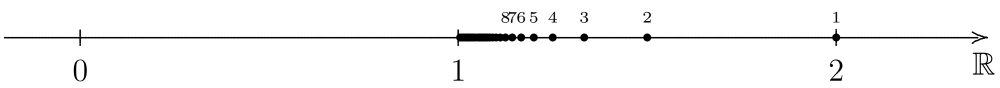
$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_{n+1} = \gamma \cdot a_n \cdot (1 - a_n).$$

Übung: Berechnen Sie mit Hilfe von TR oder PC (Tabellenkalkulation) sehr viele Folgenglieder!

5.2.3 Veranschaulichung mittels Bild der reellen Folge (a_n) mit $a_n = \frac{n+1}{n}$.

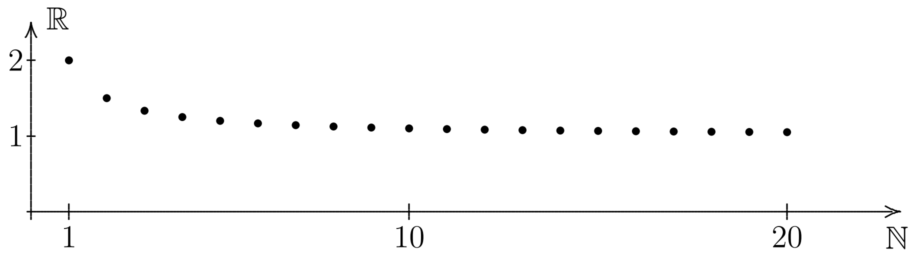
Die Bildelemente werden auf der Bildmenge, hier der Zahlengerade, markiert.

Bei Bedarf werden die Urbilder, d.h. die Indices, dazugeschrieben.



5.2.4 Veranschaulichung mittels Graph der reellen Folge (a_n) mit $a_n = \frac{n+1}{n}$.

Die Punkte (n, a_n) des Graphen der Folge werden markiert.



5.3 Konvergenz von Folgen, Grenzwerte

5.3.1 Definition Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M.

- Es sei a eine reelle Zahl. Die Folge heißt *konvergent gegen (den Grenzwert)* $a \in M$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt:

  $$|a_n - a| < \varepsilon.$$

  Ganz grob: ,,Die Folgenglieder rücken immer näher an a heran".

- Die Folge heißt *divergent*, wenn sie nicht konvergent ist.

5.3.2 Satz: Grenzwert eindeutig Eine Folge kann höchstens einen Grenzwert haben.

Deshalb gibt es für eine Folge (a_n) mit Grenzwert a die Schreibweise

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$

5.3.3 Beweis Angenommen, die Folge (a_n) hat zwei Grenzwerte a und $\widetilde{a}$. Dann gibt es zu (jedem $\varepsilon > 0$, also auch zu) $\varepsilon = \frac{|a-\widetilde{a}|}{2}$ zwei Zahlen N und $\widetilde{N}$, so dass

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N \\ |a_n - \widetilde{a}| &< \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq \widetilde{N}. \end{aligned}$$

Ist jetzt $n \geq N$ und $n \geq \widetilde{N}$, so gilt

$$|a - \widetilde{a}| \leq |a - a_n| + |a_n - \widetilde{a}| < \varepsilon + \varepsilon = |a - \widetilde{a}|.$$

Das ist aber ein Widerspruch.

Es ist günstig, andere Sichtweisen der Konvergenz anzuschauen. Als Vorbereitung dient die folgende

5.3.4 Definition Es sei $a \in M$ und $\varepsilon > 0$. Die Menge

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in M \,\big|\, |x - a| < \varepsilon\}$$

heißt *(offene) ε–Umgebung* von a.

5.3.5 Satz: Andere Sichtweisen der Konvergenz

Die folgenden Aussagen über eine Folge (a_n) und a in M sind äquivalent:

(A) Die Folge ist konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$.

(B) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass die Folgenglieder ,,ab N" in der ε–Umgebung von a liegen.

(C) In jeder ε–Umgebung von a liegen fast alle Folgenglieder. Dabei heißt

fast alle = alle mit Ausnahme von endlich vielen.

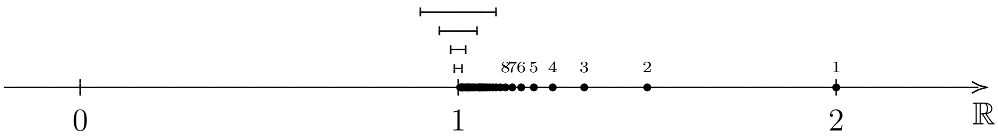
(D) (Formalisierung mittels Quantoren)

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n>N} \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

(E) (Streng oder nicht-streng: Unerheblich)

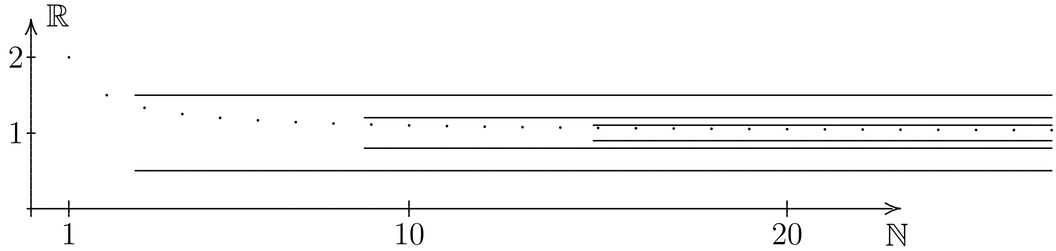
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n - a| \leq \varepsilon$.

5.3.6 Veranschaulichung mittels Bild



In jedem noch so kleinen Intervall um $a = 1$ müssen sich ,,schließlich" — ab einem N — alle Folgenwerte a_n versammeln.

5.3.7 Veranschaulichung mittels Graph



In jedem noch so dünnen ,,Schlauch" parallel um die Gerade $y = a$ müssen sich ,,schließlich" — ab einem N — alle Folgenpunkte (n, a_n) versammeln.

5.3.8 Satz: Nicht-Konvergenz Es sei $(a_n) \subseteq M$ eine Folge und $a \in M$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(A) Die Folge (a_n) ist nicht konvergent gegen a.

(B) (Formalisierung mittels Quantoren)

$$\exists_{\varepsilon>0}\ \forall_{N\in\mathbb{N}}\ \exists_{n>N} \quad |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

(C) Es gibt (mindestens) ein $\varepsilon > 0$, so dass es zu jeder natürlichen Zahl N eine größere natürliche Zahl n gibt, bei der die Betragsdifferenz zu groß ist:

$$|a_n - a| \geq \varepsilon.$$

5.3.9 Beispiele Wir studieren den Konvergenz–Begriff an einigen Beispielen.

1. Die konstante Folge (a) konvergiert gegen a, da in jeder ε–Umgebung von a fast alle (sogar alle) Folgenglieder liegen.

2. Wir beweisen, dass die Folge $(\frac{1}{n})$ gegen 0 konvergiert, d.h. eine *Nullfolge* ist. Dazu müssen wir zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein N (es darf von ε abhängen) finden, so dass

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Also sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir können aufgrund von Satz 4.5.1 ein N finden so, dass

$$\frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Dann gilt für alle $n \geq N$:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Also sind alle Folgenglieder ab N in der ε–Umgebung von 0.

3. Wir betrachten die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{n+5}{n-3}$ und zeigen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Es ist klar, dass man für die Berechnung von Grenzwerten endlich viele Folgenglieder (am Anfang der Folge zum Beispiel) außer Betracht lassen kann. Hier ist es günstig, die Folgenglieder erst ab $n = 4$ zu betrachten.

Es sei also eine positive Zahl ε vorgegeben. Wir formen die ,,Ziel"–Ungleichung äquivalent um:

$$\begin{aligned} |a_n - 1| &< \varepsilon \\ \left|\frac{n+5}{n-3} - 1\right| &< \varepsilon \\ |(n+5) - (n-3)| &< \varepsilon \cdot |n-3| \\ 8 &< \varepsilon \cdot (n-3) \\ \frac{8}{\varepsilon} &< n-3 \end{aligned}$$

Da $\mathbb{N}$ nach oben unbeschränkt ist (Satz 4.5.1 (i)), gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{8}{\varepsilon} < m.$$

Für alle $n \geq N := m + 3$ gilt dann

$$\frac{8}{\varepsilon} < m \leq n - 3$$

und damit

$$|a_n - 1| < \varepsilon.$$

Übung: Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta n+B}{\gamma n+C}$ mit fixierten Zahlen $\beta, \gamma, B, C \in \mathbb{R}$.

Hinweise: Wir werden später sehen, dass man diesen Grenzwert wesentlich schneller berechnen kann.

4. Es sei $q \in \mathbb{C}^\times$. Wir wollen wissen, ob die geometrische Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und unterscheiden dabei verschiedene Fälle:

   A: $|q| < 1$: Wir zeigen, dass

   $$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

   Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Gemäß Satz 4.5.5 (ii) (Abklingen von Potenzen) existiert zu $|q|, \varepsilon$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

   $$|q|^N < \varepsilon.$$

   Dann gilt für alle $n \geq N$

   $$|q^n - 0| = |q^n| = |q^N| \cdot |q|^{n-N} \leq |q^N| < \varepsilon.$$

   B: $|q| > 1$: Nach Satz 4.5.5 (i) existiert zu jedem $b \in \mathbb{R}^+$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

   $$|a_n| = |q^n| = |q|^n > b.$$

   Das bedeutet, dass die Folge unbeschränkt ist. Daraus folgt, wie wir gleich zeigen werden, dass sie nicht konvergieren kann.

   C: $q = 1$: Dann ist die Folge die Konstant–1–Folge. Sie konvergiert gegen 1.

   D: $q = -1$: Die Folgenglieder sind gegeben durch

   $$a_n = (-1)^n = \begin{cases} +1, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -1, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

   Wir nehmen an, dass die Folge gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert.

   1. Fall: $a \geq 0$ Dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ und jeder natürlichen Zahl N eine (ungerade) natürliche Zahl n mit

   $$|a_n - a| = |-1 - a| = |1 + a| \geq 1 = \varepsilon.$$

Es liegt also keine Konvergenz gegen a vor.

2. Fall: $a \leq 0$ Dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ und jeder natürlichen Zahl N eine (gerade) natürliche Zahl n mit

$$|a_n - a| = |1 - a| = |1 + (-a)| \geq 1 = \varepsilon.$$

Es liegt also auch keine Konvergenz gegen a vor.

E: Man kann beweisen, dass die Folge für jedes $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| = 1$ und $q \neq 1$ nicht konvergiert.

5.4 Cauchy–Folgen und beschränkte Folgen

5.4.1 Definition

1. Eine Folge in M heißt *Cauchy–Folge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Ganz grob: ,,Die Folgenglieder rücken immer näher aneinander".

2. Eine Folge (a_n) in M heißt *beschränkt*, wenn die Menge der Folgenglieder

$$\{a_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq M$$

beschränkt ist.

Veranschaulichung für $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$: Eine Folge ist genau dann beschränkt, wenn sie in einem Kreis um 0 enthalten ist.

5.4.2 Satz Für eine Folge (a_n) in M gelten die folgenden Implikationen:

$$\text{konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \text{Cauchy–Folge} \quad \Longrightarrow \quad \text{beschränkt.}$$

5.4.3 Beweis Es sei die Folge (a_n) konvergent mit Grenzwert a und ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Dann gilt für alle Zahlen $n, m \geq N$ aufgrund der Dreiecksungleichung

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Es bleibt noch die zweite Implikation zu zeigen: Ist (a_n) eine Cauchy–Folge, so gibt es zu (jedem $\varepsilon > 0$, also auch zu) $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq N$

$$|a_n - a_m| < 1$$

Es sei $c \in M$ irgendein beliebiges Element. Dann gilt aber für alle $n \geq N$:

$$|a_n - c| = |a_n - a_N + a_N - c| \leq |a_n - a_N| + |a_N - c| < 1 + |a_N - c|.$$

Setzen wir jetzt

$$A \quad := \quad \max\Big\{|a_1 - c|, |a_2 - c|, \ldots, |a_{N-1} - c|, 1 + |a_N - c|\Big\}$$

so gilt:

$$0 \leq |a_n - c| \leq A \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also ist die Folge beschränkt.

5.5 $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind vollständige metrische Räume

Wir widmen uns in diesem und dem nächsten Abschnitte der Frage, ob und unter welchen Bedingungen bzw. Modifikationen die beiden Implikationen des letzten Satzes umgekehrt werden können.

5.5.1 Definition: Vollständiger metrischer Raum Ist ein metrischer Raum M so beschaffen, dass auch die generelle Implikation

$$\text{Cauchy–Folge} \quad \Longrightarrow \quad \text{konvergente Folge}$$

gilt, so heißt er ein *vollständiger metrischer Raum.*

5.5.2 Satz: Konvergenz monotoner Folgen Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ gilt:

(i) Ist eine reelle Folge monoton steigend und nach oben beschränkt, so konvergiert sie gegen das Supremum:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) Ist eine reelle Folge monoton fallend und nach unten beschränkt, so konvergiert sie gegen das Infimum:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}.$$

5.5.3 Beweis Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $s = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

$$s - a_N < \varepsilon.$$

Anderenfalls wäre für alle $n \in \mathbb{N}$

$$s - a_n \geq \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad a_n \leq s - \varepsilon,$$

es wäre also $s - \varepsilon$ eine kleinere obere Schranke. Da die Folge a_n monoton steigend ist, gilt für alle $n \geq N$

$$|a_n - s| = |s - a_n| = s - a_n \leq s - a_N < \varepsilon.$$

5.5.4 Satz

Jede **reelle** Cauchy–Folge konvergiert.

Also ist $\mathbb{R}$ ein vollständiger metrischer Raum.

5.5.5 Beweis (i) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die reelle Cauchy–Folge. Wir definieren eine andere Folge b_n durch

$$b_n := \inf \mathcal{A}_n = \inf\{a_k | k \geq n\}.$$

Das Infimum existiert, da (a_n) eine beschränkte Folge ist. Anschaulich heißt das, dass das Anfangsstück der gegebenen Folge bis zum Index $n-1$ abgeschnitten wird, dann das Infimum der Menge aus den restlichen Folgengliedern genommen wird.

Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend, sie erfüllt $b_n \leq B$, wenn B die obere Schranke der Cauchy–Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Gemäß dem vorherigen Satz 5.5.2 (i) hat $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert:

$$a = \lim_{n\to\infty} b_n = \sup\{b_n | n \in \mathbb{N}\}.$$

Wir zeigen, dass a auch Grenzwert der ursprünglich gegebenen Cauchy–Folge (a_n) ist. Dazu sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu $\frac{\varepsilon}{3}$ gibt es ein N_1, so dass

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } n, m \geq N_1. \qquad (*)$$

Es gibt dann weiter $N_2 \geq N_1$, so dass

$$|b_{N_2} - a| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (**)$$

Da b_{N_2} das Infimum der Folge (a_n) ab N_2 ist, gibt es zu $\frac{\varepsilon}{3}$ ein $N_3 \geq N_2$, so dass

$$|a_{N_3} - b_{N_2}| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (***)$$

Dann folgt für $n \geq N_3 \geq N_2 \geq N_1$:

$$|a_n - b_{N_2}| = |a_n - a_{N_3} + a_{N_3} - b_{N_2}| \leq \underbrace{|a_n - a_{N_3}|}_{<\frac{\varepsilon}{3} \quad (*)} + \underbrace{|a_{N_3} - b_{N_2}|}_{<\frac{\varepsilon}{3} \quad (***)} < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Zusammen mit $(**)$ folgt dann für $n \geq N_3$:

$$|a_n - a| = |a_n - b_{N_2} + b_{N_2} - a| \leq |a_n - b_{N_2}| + |b_{N_2} - a| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

5.5.6 Bemerkung Für jedes $n \in \mathbb{N}$ liegt zwischen $\sqrt{2} - 2^{-n}$ und $\sqrt{2}$ nach Satz 4.5.7 (i) eine rationale Zahl a_n. Die Folge (a_n) rationaler Zahlen konvergiert in $\mathbb{R}$ gegen $\sqrt{2}$. Damit ist (a_n) eine Cauchy–Folge in $\mathbb{R}$, damit auch in $\mathbb{Q}$, sie konvergiert aber nicht in $\mathbb{Q}$. Deshalb gilt der

5.5.7 Satz

In $\mathbb{Q}$ gibt es Cauchy-Folgen, die nicht konvergieren.

$\mathbb{Q}$ ist kein vollständig metrischer Raum.

5.5.8 Satz: Komplexe Folgen

(i) Die komplexe Folge (a_n) konvergiert genau dann gegen ein $a \in \mathbb{C}$, wenn

$$\lim_{n\to\infty}(\operatorname{Re} a_n) = \operatorname{Re} a \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}(\operatorname{Im} a_n) = \operatorname{Im} a.$$

(ii) Die komplexe Folge (a_n) ist genau dann eine Cauchy–Folge, wenn

$$(\operatorname{Re} a_n) \quad \text{und} \quad (\operatorname{Im} a_n)$$

(reelle) Cauchy–Folgen sind.

(iii) Die komplexe Folge (a_n) ist genau dann beschränkt, wenn die (reellen) Folgen

$$(\operatorname{Re} a_n) \quad \text{und} \quad (\operatorname{Im} a_n)$$

beschränkt sind.

5.5.9 Beweis Wir zeigen nur die erste Aussage. Es gelte also $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$. Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert ein N, so dass für $n \geq N$

$$|a_n - a| \leq \varepsilon.$$

Daraus folgt aber

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} a_n - \operatorname{Re} a_m| &= |\operatorname{Re}(a_n - a_m)| \leq |a_n - a_m| < \varepsilon \\ |\operatorname{Im} a_n - \operatorname{Im} a_m| &= |\operatorname{Im}(a_n - a_m)| \leq |a_n - a_m| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also sind die beiden Folgen konvergent.

Umgekehrt mögen die Real- und Imaginärteilfolgen gegen den Realteil bzw. Imaginärteil einer komplexen Zahl a konvergieren. Für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$

$$|\operatorname{Re} a_n - \operatorname{Re} a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \qquad \text{und} \qquad |\operatorname{Im} a_n - \operatorname{Im} a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

Es folgt dann für $n \geq N$

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \sqrt{(\operatorname{Re}(a_n - a))^2 + (\operatorname{Im}(a_n - a))^2} \\ &= \sqrt{|\operatorname{Re} a_n - \operatorname{Re} a|^2 + |\operatorname{Im} a_n - \operatorname{Im} a|^2} \\ &< \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Die anderen Aussagen kann man analog beweisen.

5.5.10 Satz

Jede **komplexe** Cauchy–Folge konvergiert.

Also ist $\mathbb{C}$ ein vollständiger metrischer Raum.

5.6 Der Satz von Bolzano–Weierstraß

5.6.1 Definition Es sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M gegeben. Ist $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge von natürlichen Zahlen, so heißt die Folge

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$$

eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Illustration: $\begin{array}{ccccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} & \to & M \\ k & \mapsto & n_k & \mapsto & a_{n_k} \end{array}$

5.6.2 Satz von Bolzano–Weierstraß

Eine beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine Cauchy–Teilfolge.

5.6.3 Beweis Dem Beweis liegt die Idee einer Teilfolgenauswahl mittels „fortgesetzter Intervallhalbierung" (= Spezialfall einer *Intervallschachtelung*) zugrunde. Wir definieren rekursiv eine Folge

$$(I_k, n_k)_{k\in\mathbb{N}},$$

mit $I_k = [c_k, d_k] \subseteq \mathbb{R}$ und $n_k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$

- $I_{k+1} \subseteq I_k$
- $d_k - c_k = 2^{-k+1} \cdot (d_1 - c_1)$ (Die Länge der Intervalle halbiert sich jeweils)
- $a_n \in I_k$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.
- $a_{n_k} \in I_k$

Das erste Glied der Folge wird definiert durch

$$I_1 := [c_1, d_1], \qquad n_1 = 1,$$

wobei c_1 und d_1 eine untere bzw. obere Schranke der Folge (a_n) ist.

Sind das Intervall $I_k = [c_k, d_k]$ und die natürliche Zahl n_k definiert, so sieht der Rekursionsschritt wie folgt aus:

- Teile das Intervall I_k in zwei Hälften

  $$[c_k, \frac{c_k + d_k}{2}] \qquad \text{und} \qquad [\frac{c_k + d_k}{2}, d_k]$$

  und setze I_{k+1} als eines dieser beiden Teilintervalle fest, das von der gegebenen Folge (a_n) unendlich oft getroffen wird:

  $$a_n \subseteq I_{k+1} \qquad \text{für unendlich viele } n \in \mathbb{N}.$$

- Wähle als n_{k+1} eine natürliche Zahl mit $n_{k+1} > n_k$, so dass das Folgenglied $a_{n_{k+1}}$ in dem Intervall I_{k+1} enthalten ist.

Wir müssen jetzt noch zeigen, dass die so definierte Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge ist. Dazu sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es gemäß Satz 4.5.1 (iii) ein $K \in \mathbb{N}$, so dass

$$(\tfrac{1}{2})^K < \tfrac{\varepsilon}{2(d_1 - c_1)}.$$

Da für $k \geq K$ alle Folgenglieder a_{n_k} in I_K enthalten sind, gilt für $k, \ell \geq K$

$$|a_{n_k} - a_{n_\ell}| \leq d_K - c_K = 2^{-K+1} \cdot (d_1 - c_1) < \varepsilon.$$

5.7 Sätze über Grenzwerte

Im nächsten Satz wollen wir die Strukturen eines angeordneten Körpers im Hinblick auf Grenzwertberechnungen untersuchen:

5.7.1 Satz Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit Grenzwerten a bzw. b.

Beachte, dass es sich auch um konstante Folgen handeln kann.

(i) Die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b.$$

(ii) Die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$$

(iii) Sind α, β reelle Zahlen, so konvergiert auch die Folge $(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dabei gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b.$$

(iv) Ist $b \neq 0$, so gibt es einen Index $N_0 \in \mathbb{N}$, ab dem die Folge $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq N_0}$ wohldefiniert ist (d.h. $b_n \neq 0$). Es gilt weiter:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}.$$

(v) Gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt:

$$a \leq b.$$

Das heißt: In einer nicht–strengen Ungleichung darf zum Grenzwert übergegangen werden.

(vi) Die Folgerung

$$a_n < b_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad a < b$$

ist im allgemeinen falsch.

5.7.2 Beweis Zu (i): Es sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da (a_n) und (b_n) konvergieren, gibt es zu (jedem $\varepsilon > 0$, also auch zu) $\frac{\varepsilon}{2}$ Zahlen N_1 und N_2, so dass

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq N_1 \\ |b_n - b| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq N_2. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle n mit $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Zu (ii): Der Satz 5.4.2 besagt, dass es eine Zahl A gibt, so dass

$$|a_n| \leq A \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Setzen wir $C := \max\{A, |b|\}$ so folgt:

$$|a_n| \leq C \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \qquad |b| \leq C.$$

Wir können o.B.d.A annehmen, dass $C > 0$ ist.

Es sei jetzt $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu (jedem $\varepsilon > 0$, also auch zu) $\frac{\varepsilon}{2C}$ gibt es Zahlen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2C} \quad \text{für alle } n \geq N_1 \\ |b_n - b| &< \frac{\varepsilon}{2C} \quad \text{für alle } n \geq N_2. \end{aligned}$$

Dann haben wir für $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| \\ &< C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2C} \cdot C = \varepsilon. \end{aligned}$$

Zu (iii): Dies kann man leicht auf die beiden Situationen (i) und (ii) zurückführen.

Zu (iv): Wir zeigen nur, dass $(\frac{1}{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}.$$

Der allgemeine Fall folgt dann leicht mit $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ und Teil (ii) des Satzes.

Wegen $b \neq 0$ gibt es zu (jedem $\varepsilon > 0$, also auch zu) $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2} \text{ für alle } n \geq N_0.$$

Aus dieser Ungleichung kann man schon herauslesen, dass $b_n \neq 0$ sein muss. Wir wollen das aber auch algebraisch prüfen: Für diese n erhalten wir weiter mit der modifizierten Dreiecksungleichung:

$$|b_n| = |b - (b - b_n)| \geq |b| - |b_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0,$$

es folgt weiter

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}.$$

Es sei jetzt ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu (jedem $\varepsilon > 0$, also auch zu) $\frac{\varepsilon \cdot b^2}{2}$ gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon \cdot b^2}{2} \text{ für alle } n \geq N_1.$$

Dann gilt für $n \geq N \ := \ \max\{N_0, N_1\}$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{1}{|b_n| \cdot |b|} \cdot |b - b_n| < \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot b^2}{2} = \varepsilon.$$

Zu (v): Die Folge der Differenzen $(b_n - a_n)$ konvergiert nach Teil (iii). Es sei

$$c \ := \ \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b.$$

Damit ist der Beweis darauf reduziert, zu zeigen, dass die nicht–positive Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine nicht–positive Zahl $c \leq 0$ konvergiert.

Wäre $c > 0$, so gäbe es zu (jedem $\varepsilon > 0$, also auch zu) $\frac{c}{2}$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|c_n - c| < \frac{c}{2} \text{ für alle } n \geq N.$$

Daraus folgt aber

$$c_n \in \left]c - \frac{c}{2}, c + \frac{c}{2}\right[,$$

insbesondere $c_n > \frac{c}{2} > 0$. Das steht im WIDERSPRUCH zur Voraussetzung.

Zu (vi): Als Beispiel nehmen wir die durch

$$a_n = -\frac{1}{n} \quad \text{und} \quad b_n = +\frac{1}{n}.$$

definierten Folgen. Dann gilt $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

5.8 Uneigentliche Konvergenz reeller Folgen

5.8.1 Definition Man sagt, eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert uneigentlich gegen* $+\infty$ *(bzw.* $-\infty$*)*, wenn es zu jedem $M > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$a_n > M \qquad \text{bzw.} \qquad a_n < -M \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Anders formuliert: Die Folge wächst *über alle Schranken* bzw. fällt ,,unter alle Schranken". Man sagt auch, die Folge *divergiert bestimmt* gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$).
Schreibweise:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Es ist klar:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (-a_n) = -\infty.$$

5.8.2 Beispiele

- Die Folgen $a_n = n$, $b_n = n^2$, $c_n = 2^n$ divergieren gegen $+\infty$.
- Die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $q > 1$ konvergiert uneigentlich gegen $+\infty$.
- Die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $q \leq -1$ konvergiert weder uneigentlich gegen $+\infty$ noch gegen $-\infty$.

5.8.3 Satz Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit positiven Gliedern gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

5.8.4 Beweis Es sei $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$a_n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{für allen} \geq N.$$

Dazu äquivalent ist

$$\frac{1}{a_n} < \varepsilon \quad \text{für allen} \geq N.$$

Die umgekehrte Richtung geht analog.
Beispiel: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} = +\infty, \qquad \text{da} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0.$$

5.9 Beispiele für die Grenzwertberechnung

5.9.1 Beispiel 1 $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$

Wir versuchen zunächst den geradlinigen („straightforward") Weg

- Experimente mit dem Taschenrechner legen die Vermutung nahe, dass der Grenzwert $\frac{1}{2}$ ist.
- Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Die „Zielungleichung" lautet dann
$$\left|\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$
Wir müssen zeigen, dass sie für genügend große n erfüllt ist.
- Die Zielungleichung ist äquivalent zu den beiden „betragsfreien" Ungleichungen
$$\begin{aligned} \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} - \frac{1}{2} &< \varepsilon \qquad \text{UND} \\ -\left[\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} - \frac{1}{2}\right] &< \varepsilon \end{aligned}$$
Wir spielen mit diesen Ungleichungen herum. Das heißt, wir formen sie äquivalent um, in der Hoffnung, bei einer leichter durchschaubaren Ungleichung anzukommen. Bei Auftreten von Wurzeln empfiehlt es sich grundsätzlich, sie durch Quadrieren möglichst zu beseitigen oder zu vermindern.

  Die erste der beiden Ungleichungen ist äquivalent zu:
$$\begin{aligned} & \sqrt{n+\sqrt{n}} < \sqrt{n} + \frac{1}{2} + \varepsilon \\ \iff \quad & n + \sqrt{n} < n + 2\sqrt{n}(\frac{1}{2}+\varepsilon) + (\frac{1}{2}+\varepsilon)^2 \\ \iff \quad & 0 < 2\varepsilon\sqrt{n} + (\frac{1}{2}+\varepsilon)^2 \end{aligned}$$
Diese Ungleichung ist für alle $n \in \mathbb{N}$, nicht nur für genügend große, erfüllt. Die zweite Ungleichung ist äquivalent zu:
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} - \varepsilon + \sqrt{n} < \sqrt{n+\sqrt{n}} \\ \iff \quad & (\frac{1}{2}-\varepsilon)^2 + 2(\frac{1}{2}-\varepsilon)\sqrt{n} + n < n + \sqrt{n} \\ \iff \quad & \frac{(\frac{1}{2}-\varepsilon)^2}{2\varepsilon} < \sqrt{n}. \end{aligned}$$
(Bei der oberen Äquivalenz muss man eigentlich etwas aufpassen. Für ε „genügend klein" oder n „genügend groß" ist sie aber gewährleistet.) Das bedeutet, diese Ungleichung lässt sich für große n erfüllen.

Mit einem Trick kommt man viel schneller ans Ziel:
$$\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{n+\sqrt{n}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1} \to \frac{1}{2}.$$

5.9.2 Beispiel 2 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Die Folge der Intervalle

$$[c_n, d_n] \qquad \text{mit } c_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad d_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

bildet eine Intervallschachtelung, d.h. es gilt für alle $n \geq 2$:

$$c_{n-1} \leq c_n, \qquad d_n \leq d_{n-1}, \qquad c_n \leq d_n, \qquad \lim_{n\to\infty}(d_n - c_n) = 0.$$

Aufgrund von Satz 5.5.2 konvergieren die beiden Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert. Es wird sich später herausstellen, dass es sich gerade um die *Euler'sche Zahl* e handelt.

5.9.3 Beweis Für $n \geq 2$ gelten nacheinander die vier ,,Eigenschaften" von Intervallschachtelungen.

$$\left(1 + \tfrac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)^{n-1} = \frac{1-n\frac{1}{n^2}}{(1-\frac{1}{n})^n} \overset{(*)}{<} \frac{(1-\frac{1}{n^2})^n}{(1-\frac{1}{n})^n} = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n$$

$$\begin{aligned}\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n+1} &= \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \overset{(*)}{<} \left(1 + \tfrac{1}{n^2}\right)^n \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \\ &< \left(1 + \tfrac{1}{n^2-1}\right)^n \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n = \left(\tfrac{n^2}{n^2-1} \cdot \tfrac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \left(\tfrac{n}{n-1}\right)^n = \left(1 + \tfrac{1}{n-1}\right)^n.\end{aligned}$$

$$\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\begin{aligned}\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n &= \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \cdot \tfrac{1}{n} < \underbrace{\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n+1}}_{\text{monoton fallend}} \cdot \tfrac{1}{n} \leq \\ & \left(1 + \tfrac{1}{1}\right)^{1+1} \cdot \tfrac{1}{n} = \tfrac{4}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

Bei $(*)$ haben wir jeweils die Bernoulli-Ungleichung aus Satz 4.5.3 angewandt.

5.9.4 Beispiel 3: Das Wallis-Produkt $a_n = \prod_{k=1}^n \frac{4k^2-1}{4k^2}$

Wir haben hier die Produktschreibweise aus Abschnitt 2.10.7 verwendet, es liegt also die rekursive Definition

$$a_0 := 1 \qquad a_n := \frac{4n^2-1}{4n^2} \cdot x_{n-1}$$

zugrunde. Leichter erkennbar kann man schreiben:

$$a_n = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}_{=x_1} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}}_{=x_2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6}}_{=x_3} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{8}}_{=x_4} \cdots \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)(2n)}}_{=x_n}$$

Die Folge ist positiv und wegen $\frac{4n^2-1}{4n^2} < 1$ streng monoton fallend. Deshalb konvergiert sie in $\mathbb{R}$ gegen eine Zahl in $[0,1]$.

Die Aussage, dass sie gegen die Zahl $\frac{2}{\pi}$ konvergiert, können wir hier nicht beweisen. Es fehlen uns die Techniken dafür; insbesondere haben wir π ja noch gar nicht definiert.

5.9.5 Beispiel 4: Exponentielles Abklingen unterdrückt Potenzwachstum

Es seien $\ell \in \mathbb{N}_0$ und $q \in [0,1]$ fest. Betrachte die Folge it positiven Gliedern

$$a_n \;:=\; n^\ell \cdot q^n.$$

Die Hilfsfolge (b_n) mit

$$b_n \;=\; \frac{a_{n+1}}{a_n} \;=\; \frac{(n+1)^\ell q^{n+1}}{n^\ell q^n} \;=\; (1+\frac{1}{n})^\ell \cdot q.$$

ist monoton fallend, sie konvergiert gegen q.
Ist $c \in \,]q,1[$ beliebig, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$b_N \le c \quad \text{für alle} \quad n \ge N.$$

Es folgt dann

$$\begin{aligned} 0 \le a_n \;&=\; \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N \\ &=\; b_{n-1} \cdot b_{n-2} \cdots b_N \cdot a_N \\ &\le\; c^{n-N} \cdot a_N \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} c^{n-N} = 0$ gilt mit dem Quetsch-Lemma (ÜB6 A2)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

5.9.6 Beispiel 5 Es sei $p(x) = a_\ell\, x^\ell + \ldots + a_1\, x + a_0$ ein reelles Polynom vom Grad $\ell \ge 1$. Es gilt dann für die durch $p_n \;:=\; p(n)$ definierte Folge

$$\lim_{n\to\infty} p_n \;=\; \begin{cases} +\infty, & \text{falls } a_\ell > 0, \\ -\infty, & \text{falls } a_\ell < 0. \end{cases}$$

5.9.7 Beweis Wir betrachten nur den oberen Fall $a_\ell > 0$. Der untere Fall $a_\ell < 0$ kann mit Hilfe der Ersetzung $p \mapsto -p$ auf den oberen zurückgeführt werden.

Wir schreiben die Folgenglieder als Produkte

$$p_n \;=\; n^\ell \cdot \underbrace{[a_\ell + \frac{a_{\ell-1}}{n} + \ldots + \frac{a_1}{n^{\ell-1}} + \frac{a_0}{n^\ell}]}_{=:q_n}.$$

Ist nun ein beliebiges $M > 0$ vorgegeben, so gibt es wegen $\lim_{n\to\infty} q_n = a_\ell$ ein N_1 mit $q_n \ge \frac{a_\ell}{2}$ für alle $n \ge N_1$ und dann ein $N \ge N_1$ mit $n^\ell \ge M \cdot \frac{2}{a_\ell}$ für $n \ge N$.

Insgesamt gilt dann für $n \ge N$

$$p_n \;=\; n^\ell \cdot q_n \;\ge\; M \cdot \frac{2}{a_\ell} \cdot \frac{a_\ell}{2} \;=\; M.$$

Also überschreitet die Folge (p_n) jede Grenze $M > 0$ und es ist $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$.

5.10 Erfahrungen bei der Grenzwertberechnung

5.10.1 Konvergiert die Folge?

- Monotonie — Beschränktheit?
- Cauchy-Folge?
- Intervallschachtelung?
- Vermutung über den Grenzwert — Quantoren-Definition?
- Sagt die Folge der Quotienten oder die der Differenzen etwas aus?
- Später: Teleskopreihe?
- Später: Integral-Vergleichskriterium?

5.10.2 Folgenglieder explizit: Berechnung des Grenzwerts

- Geeignete algebraische Umformung der Folgenglieder?
- Quetsch-Lemma?
- Rückführung auf Grenzwerte bekannter Folgen?
- L'Hospital: Später!

5.10.3 Folgenglieder rekursiv: Berechnung des Grenzwerts

- Lassen sich die Folgenglieder explizit angeben?
- Lasse in der Rekursionsgleichung $n \to \infty$ gehen.

5.10.4 Häufiger Fehler: Teilweises Einsetzen von Grenzwerten Es sei

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(\ell)}) & \mapsto & f(\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(\ell)}) \end{cases}$$

eine Funktion mit ℓ Variablen. Sind dann weiter ℓ Folgen

$$(\alpha_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}} \qquad \ldots \qquad (\alpha_n^{(\ell)})_{n\in\mathbb{N}}$$

gegeben, so kann man daraus die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n \quad := \quad f(\alpha_n^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(\ell)})$$

bilden.

Kennt man nun einen oder einige Grenzwerte der Folgen $(\alpha_n^{(i)})$, so ist man versucht, diese gleich in die Funktion f einzusetzen und dadurch die Berechnung des Grenzwerts der Folge (a_n) zu vereinfachen. Das geht oft schief!

5.10.5 Beispiel Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beliebige andere Folge, so schließt jemand

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) \;=\; \lim_{n\to\infty}(0 \cdot b_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} 0 \;=\; 0.$$

oder

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \;=\; 0 \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \;=\; 0.$$

Schon das einfache Beispiel $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = n$ zeigt, dass das nicht stimmt.

Wo liegt jeweils der Fehler in den obigen Schlussweisen?

5.10.6 Beispiel Vergleiche auch das Beispiel aus Abschnitt 5.9.2.

Ist $f(\alpha, \beta) = (1 + \alpha)^\beta$ und $\alpha_n = \frac{1}{n}$ sowie $\beta_n = n$, so schließt jemand

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{\leftrightsquigarrow}{=} \lim_{n\to\infty}(1+0)^n \;=\; \lim_{n\to\infty} 1^n \;=\; 1.$$

Das ist aber falsch, wie wir gesehen haben.

6 Reihen

6.1 Einführung

Die Theorie der Reihen kann, da die Summenbildung ins Spiel kommt, nicht im Rahmen allgemeiner metrischer Räume entwickelt werden. Sie findet — zunächst — nur in den beiden Mengen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ statt.

Ein genaueres Hinsehen — vom höheren Standpunkt aus — würde zeigen, dass man anstelle von Zahlen auch Vektoren aus $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ oder noch allgemeiner aus sogenannten Banachräumen betrachten könnte.

6.1.1 Definition: Partialsummenfolge und Differenzenfolge

Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zahlen, so kann man daraus die *Partialsummenfolge* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilden mittels

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Diesen Prozess kann man umkehren: Ist umgekehrt eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben, so kann man die ursprüngliche „Folge" $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ „rückermitteln" durch Bildung der Differenzen

$$a_k = s_k - s_{k-1} \qquad \text{(Setze noch: } s_0 = 0\text{)}.$$

6.1.2 Teleskopsumme Führt man die beiden Prozesse nacheinander aus, so erhält man die — an sich triviale — Gleichung

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) = (s_n - s_{n-1}) + (s_{n-1} - s_{n-2}) + \ldots + (s_1 - s_0).$$

Da diese Umformung gelegentlich einen trickreichen Zugang zur Lösung eines Problems liefert, hat sie einen eigenen Namen: Die *Teleskopsumme*.

6.1.3 Definition: Reihe

Eigentlich könnte man aufgrund der oben angegebenen inversen Operationen meinen, dass der Übergang von einer Folge zu einer Partialsummenfolge nur eine harmlose Spielerei ist. Tatsächlich eröffnet aber die Sichtweise der Partialsummen völlig neue Einsichten, so das man von einer eigenen Theorie sprechen könnte. Auch ein besonderer Name und besondere Schreibweisen sind gerechtfertigt:

Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt die durch die Summandenfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definierte *(unendliche) Reihe*.
Man schreibt anstelle der Partialsummenfolge

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \text{suggestiver:} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Manchmal findet man auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

6.1.4 Definition: Konvergenz einer Reihe Konvergiert die Partialsummenfolge, so wird der Grenzwert als *Reihenwert*, meist ebenfalls kurz mit *Reihe* bezeichnet:

$$\lim_{n\to\infty} s_n \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \; = \; \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Der Doppelgebrauch des Wortes Reihe für Folge und ihren Grenzwert ist ein bisschen unglücklich, aber halt so eingeführt.

6.1.5 Beispiel Man kann leicht mit Induktion zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Es folgt, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergiert mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

6.1.6 Beispiel: Geometrische Reihe Für $|q| < 1$ gilt unter Benutzung der Formel (2.10.4)

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{q-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q}{1-q}.$$

Insbesondere ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1.$$

Startet man die geometrische Reihe mit $k = 0$, so ist der Reihenwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} q^k = 1 + \frac{q}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Setzt man $0^0 = 1$, so ist die Formel auch für $q = 0$ gültig.

Wir übersetzen jetzt einige Sätze über Folgen in Sätze über Reihen.

6.1.7 Satz Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen. Dann liegt auch hier Konvergenz vor:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_k + \beta \cdot b_k) = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Anders formuliert: Die konvergenten Reihen bilden einen $\mathbb{R}$–Vektorraum V. Der Reihenwert ist eine lineare Abbildung $V \to \mathbb{R}$.
Dies ergibt sich daraus, dass man Satz 5.7.1 (iii) auf die Partialsummenfolge anwendet.

6.2 Konvergenzkriterien für Reihen

6.2.1 Satz: Cauchy–Konvergenz–Kriterium für Reihen Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass „jede endliche Restsumme ab N"

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m \text{ mit } n \geq m \geq N.$$

6.2.2 Beweis Die angegebene Bedingung drückt einfach aus, dass die zugehörige Partialsummenfolge eine Cauchy-Folge ist:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| = |a_m + \ldots + a_n| = |s_n - s_{m-1}|.$$

Überlege selbst, dass das Auftreten des Index $m-1$ anstelle von m keine Rolle spielt.

6.2.3 Satz Eine reelle Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{mit } a_k \geq 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

konvergiert genau dann, wenn die zugehörige Partialsummenfolge beschränkt ist, d.h. wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt, so dass:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq M \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

6.2.4 Beweis Aufgrund von Satz 5.4.2 impliziert die Konvergenz die Beschränktheit. Umgekehrt kann man aus der Beschränktheit mit Satz 5.5.2 die Konvergenz folgern, da die Partialsummenfolge monoton steigend ist.

6.2.5 Satz: Summandenfolgen sind Nullfolgen

(i) Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, so bilden die Summanden eine Nullfolge

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Als Kurzformel geschrieben:

$$\text{Reihen–Konvegenz} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Summanden–Null–Folge.}$$

(ii) Die umgekehrte Schlussfolgerung in (i) ist im allgemeinen falsch.

6.2.6 Beweis (i) Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Die Konvergenz impliziert ,,Cauchy" und die Cauchy–Eigenschaft bedeutet, dass es zu diesem ε ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq m \geq N.$$

Insbesondere gilt für alle $n = m \geq N$:

$$|a_n - 0| = |a_n| = \left| \sum_{k=n}^{n} a_k \right| < \varepsilon.$$

Also ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}})$ eine Nullfolge.

(ii) Das klassische Gegenbeispiel ist die *harmonische Reihe*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Die Summanden bilden eine Null–Folge. Wir zeigen, dass die Reihe nicht das Cauchy–Konvergenz–Kriterium aus Satz 6.2.1 erfüllt. Würde sie es erfüllen, so würde zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein N existieren, so dass

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k} < \frac{1}{2} \qquad \text{für alle } n \geq m \geq N.$$

Es gilt aber für jedes $N \in \mathbb{N}$, wenn man $m = N + 1$ und $n = 2N$ setzt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} &= \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \ldots + \frac{1}{2N} \qquad (N \text{ Summanden}) \\ &\geq \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \ldots + \frac{1}{2N} \qquad (N \text{ Summanden}) \\ &= \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Unter zusätzlichen Voraussetzungen kann die Implikation aus dem letzten Satz gewendet werden:

6.2.7 Satz: Leibniz–Kriterium für alternierende Reihen

Wir betrachten eine Reihe der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \pm \ldots ,$$

wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Es ist $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, d.h. die Summanden $(-1)^k a_k$ haben alternierendes Vorzeichen.
- Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.
- Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

(i) Dann konvergiert die Reihe.

(ii) Der Reihenwert kann durch die Partialsummen mit ungeradem bzw. geradem Index wie folgt abgeschätzt werden:

$$s_{2n-1} \;\leq\; s_{2n+1} \;\leq\; \ldots \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k \;\leq\; \ldots \;\leq\; s_{2n+2} \;\leq\; s_{2n}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ (beliebig)}.$$

Insbesondere gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k - s_n \right| \;\leq\; a_{n+1}.$$

(iii) Ist die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sogar streng monoton fallend, so sind alle Ungleichungen in (ii) streng. Es gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$0 \;<\; \left| \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k - s_n \right| \;<\; a_{n+1}.$$

6.2.8 Beweis Wir sondern die Partialsummen–Teilfolgen für gerade und ungerade Indices aus:

$$c_n \;:=\; s_{2n-1}, \qquad d_n \;:=\; s_{2n}.$$

Ausgeschrieben ist das:

c_1	d_1	c_2	d_2	c_3	d_3	c_4	d_4	c_5	d_5	c_6	d_6	$\ldots$
s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	$\ldots$

Die beiden Folgen (c_n) und (d_n) haben die folgenden Eigenschaften einer Intervallschachtelungsfolge $([c_n, d_n])_{n\in\mathbb{N}}$:

$$c_n \leq d_n, \qquad c_n \leq c_{n+1}, \qquad d_{n+1} \leq d_n, \qquad \lim_{n\to\infty}(d_n - c_n) = 0,$$

nachgerechnet:

$$\begin{aligned}
d_n - c_n &= s_{2n} - s_{2n-1} = (-1)^{2n} a_{2n} = a_{2n} \geq 0 \\
c_{n+1} - c_n &= s_{2n+1} - s_{2n-1} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n} a_{2n} = a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0 \\
d_{n+1} - d_n &= s_{2n+2} - s_{2n} = (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} \\
&= a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0 \\
\lim_{n\to\infty} (d_n - c_n) &= \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0
\end{aligned}$$

Gemäß Satz 5.5.2 über beschränkte monotone Folgen konvergieren beide Folgen, und das tun sie gegen den gleichen Grenzwert, eben den Reihenwert. Damit sind (ii) und (iii) gezeigt. Die zweite Ungleichung in (ii) gilt wegen

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k - s_n \right| \leq |s_{n+1} - s_n| = a_{n+1}.$$

Für den Fall (iii) ist einfach zu beachten, dass die Folgen (c_n) und (d_n) streng monoton steigend bzw. fallend sind.

6.2.9 Beispiel: Alternierende harmonische Reihe

Beispielsweise konvergiert die *alternierende harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots\ldots$$

Wir werden sehen, dass der Grenzwert $= \ln 2$ ist.

6.2.10 Beispiel Es konvergiert auch die alternierende Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ldots$$

Dass der Wert gleich $\frac{\pi}{4}$ ist, werden wir erst viel später sehen.

6.3 Absolute Konvergenz von Reihen

6.3.1 Definition: Absolute Konvergenz Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe der Absolutbeträge

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

Beobachtungen:

- Die alternierende harmonische Reihe ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.
- Eine Reihe, deren Summanden alle gleiches Vorzeichen haben, ist genau dann absolut konvergent, wenn sie konvergent ist.
- Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ist nach Satz 6.2.3 genau dann konvergent, wenn die Partialsummenfolge beschränkt ist.

6.3.2 Satz Für eine Reihe gilt:

$$\text{Absolute Konvergenz} \quad \Longrightarrow \quad \text{(Gewöhnliche) Konvergenz}$$

In diesem Fall gilt die ,,∞–Ecks–Ungleichung"

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

6.3.3 Beweis Es sei also $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach dem Cauchy–Kriterium 6.2.1 existiert zu diesem ε ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq m \geq N.$$

Daraus folgt mit der (verallgemeinerten) Dreiecksungleichung

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \overset{(*)}{\leq} \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq m \geq N.$$

Darauf wenden wir wieder das Cauchy–Kriterium (in umgekehrter Richtung) an, es liefert die Konvergenz. Lässt man in der Dreiecks–Ungleichung

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

n gegen ∞ gehen, so folgt mit Satz 5.7.1 (v) die im Satz genannte Abschätzung.

6.3.4 Satz: Majoranten–Kriterium, auch Vergleichskriterium

Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ vorgegeben. Gibt es eine konvergente *Majorante*, das ist eine konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, die die vorgegebene Reihe *majorisiert*,

$$|a_k| \leq c_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N},$$

so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

6.3.5 Beweis Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=m}^{n} c_k = \left| \sum_{k=m}^{n} c_k \right| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq m \geq N.$$

Für die gleichen n, m gilt dann aber:

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} c_k < \varepsilon \text{ für alle } n \geq m \geq N.$$

Nach dem Cauchy–Kriterium konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

6.3.6 Beispiel Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergiert absolut, da

$$\frac{1}{k^2} \quad \leq \quad \frac{1}{k(k-1)} \quad \text{für} \quad k \geq 2$$

und die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)k}$$

eine konvergente Majorante darstellt, vgl. Beispiel 6.1.5. Dass der Grenzwert $\frac{\pi^2}{6}$ ist, werden wir erst später herausfinden.

6.3.7 Folgerung: Minoranten–Kriterium Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ vorgegeben. Gibt es eine divergierende *Minorante*, das ist eine divergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ mit

$$0 \leq c_k \leq a_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N},$$

so divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

6.3.8 Beweis Würde die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergieren, so wäre sie eine Majorante für $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$.

Benutzt man als Majorante die geometrische Reihe, so ergeben sich beispielsweise die folgenden zwei Konvergenzkriterien:

6.3.9 Satz: Wurzel–Kriterium Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, falls es ein $q \in [0,1[$ gibt, so dass

$$|a_k| \le q^k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

6.3.10 Bemerkung Der Name des Kriteriums leitet sich daraus ab, dass diese Ungleichung — nach Einführung der ,,Wurzelrechnung" — auch als

$$\sqrt[k]{|a_k|} \le q \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \qquad (*)$$

geschrieben werden kann.

Es ist offensichtlich, dass die Bedingung $(*)$ erst ab irgendeinem festen $K \in \mathbb{N}$ gelten muss. Aus dieser Bemerkung lassen sich noch weitere hinreichende Bedingungen für die absolute Konvergenz formulieren:

$$\begin{aligned}
& \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \\
\Longrightarrow\quad & \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \\
\Longrightarrow\quad & \sqrt[k]{|a_k|} \le q < 1 \text{ für fast alle } k \in \mathbb{N} \\
\Longrightarrow\quad & \text{absolute Konvergenz der Reihe } \sum_{k=1}^{\infty} a_k.
\end{aligned}$$

Den Operator $\limsup$ aus der zweiten Zeile werden wir später noch genauer kennenlernen.

6.3.11 Satz: Quotienten–Kriterium Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Gibt es ein $q \in [0,1[$, so dass

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le q \text{ für alle } k \in \mathbb{N},$$

so konvergiert die Reihe absolut.

6.3.12 Beweis Durch Induktion über k kann man zeigen, dass

$$|a_k| \le |a_1| \cdot q^{k-1} = |a_1| \cdot q^{-1} \cdot q^k.$$

Daher ist die geometrische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_1| \cdot q^{-1} \cdot q^k$$

eine konvergente Majorante.

6.3.13 Bemerkungen

- Auch hier kann man die hinreichende Bedingung noch etwas abschwächen:

$$\begin{aligned}
& \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \\
\Longrightarrow \quad & \limsup_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \\
\Longrightarrow \quad & \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1 \ \text{ für fast alle } k \in \mathbb{N} \\
\Longrightarrow \quad & \text{absolute Konvergenz der Reihe } \sum_{k=1}^{\infty} a_k.
\end{aligned}$$

- Beachte, dass die Bedingung

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \ \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

im allgemeinen **nicht** hinreichend ist für die absolute Konvergenz. So erfüllt beispielsweise die nicht–konvergente harmonische Reihe diese Bedingung:

$$\left| \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} \right| = \frac{k}{k+1} < 1 \ \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

- Die im Satz angegebene Bedingung ist hinreichend, nicht aber notwendig, für absolute Konvergenz. So ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

absolut konvergent, es gilt aber

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \ \longrightarrow \ 1,$$

das heißt, es läßt sich kein $q < 1$ als obere Schranke für die Quotienten finden.

6.4 Überblick über Kriterien zur Reihenkonvergenz

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \text{Exponentialreihe} \arrow[d] \\
 & \text{Wurzel–Kriterium} \arrow[dr] & & \text{Quotienten–Kriterium} \arrow[dl] \\
 & & \text{Geometrische Reihe ist Majorante} \arrow[d] & \\
\begin{array}{c}\text{Nicht–negativ,}\\ \text{Partialsummenfolge}\\ \text{beschränkt}\end{array} \arrow[drr] & & \text{Absolut konvergente Majorante} \arrow[d] & \\
 & & \text{Absolute Konvergenz} \arrow[d] & \\
\text{Leibniz–Bedingung} \arrow[drr] & & \text{Cauchy–Bedingung} \arrow[d, leftrightarrow] & \\
 & & \text{(Gewöhnliche) Konvergenz} \arrow[d] & \\
 & & \text{Summanden–Nullfolge} &
\end{tikzcd}
$$

6.5 Darstellung reeller Zahlen durch Kommazahlen

6.5.1 Definition: Kommazahl

Es sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$ eine fest gewählte natürliche Zahl. Sie heißt in diesem Zusammenhang *Basis der b-adischen Zahldarstellung*.

Wir nennen eine ,,doppelseitige" Folge von Ziffern

$$z : \begin{cases} \mathbb{Z} & \to & \{0, \ldots, b-1\} \\ \text{Stelle } k & \mapsto & \text{Ziffer } z_k \end{cases}$$

einen *b-adischen Bruch* oder kurz eine *Kommazahl (bzgl. der Basis b)*, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Es existiert eine Stelle $K \in \mathbb{N}$, so dass $z_k = 0$ für alle $k \geq K$.
- Es existiert keine Stelle $\widetilde{K}$, so dass $z_k = b-1$ für alle $k \leq \widetilde{K}$.

Wir bezeichnen die Menge aller Kommazahlen bzgl. der Basis b mit $\mathcal{R}_b$.

Der Name kommt daher, dass wir die Folgenglieder nebeneinander — von links nach rechts für fallendes k — schreiben und dabei die Stellen $k = 0$ und $k = -1$ durch ein Komma trennen:

$$z_{K-1}\, z_{K-2}\, \cdots\, z_1\, z_0 \,\mathbf{,}\, z_{-1}\, z_{-2}\, z_{-3}\, \cdots\cdots$$

Die unendlich vielen Nullen auf der linken Seite werden weggelassen, so dass links vor dem Komma eine K-stellige Zahl steht.

Im Fall $b = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$ spricht man von *dekadischen Brüchen* oder *Dezimalbrüchen*.

6.5.2 Definition: Periodische Kommazahl

Eine Kommazahl heißt *periodisch*, wenn es $q \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$z_{K-1}\, z_{K-2}\, \cdots\, z_1\, z_0 \,\mathbf{,}\, \underbrace{z_{-1}\, z_{-2}\, \cdots\, z_{-q}}_{\text{Vorperiode}}\, \underbrace{z_{-(q+1)}\, z_{-(q+2)}\, \cdots\, z_{-(q+p)}}_{\text{Periode}}\, \underbrace{z_{-(q+p+1)}\, z_{-(q+p+2)}\, \cdots\, z_{-(q+2p)}}_{\text{Periode}}\, \cdots$$

$$=: \; z_{K-1}\, z_{K-2}\, \cdots\, z_1\, z_0 \,\mathbf{,}\, z_{-1}\, z_{-2}\, \cdots\, z_{-q}\, \overline{z_{-(q+1)}\, z_{-(q+2)}\, \cdots\, z_{-(q+p)}}$$

und dabei die Ziffern in den Perioden übereinstimmen:

$$z_{-(q+\ell \cdot p+i)} \;=\; z_{-(q+i)} \qquad \text{für alle} \quad \ell \in \mathbb{N} \quad \text{und alle} \quad i = 1, \ldots, p.$$

Wir bezeichnen die Menge der periodischen Kommazahlen mit $\mathcal{R}_b^{\text{per}}$.

6.5.3 Definition: b-adische Entwicklung

Wir ordnen einer gegebenen positiven reellen Zahl r rückwärts-rekursiv zwei doppelseitige Folgen $(z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ und $(r_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ wie folgt zu

Setze $z_k := 0$ und $r_k := r$ für alle $k \geq K := \min\{\ell \in \mathbb{N}_0 | r < b^\ell\}$.

Sind z_{k+1} und r_{k+1} definiert, so setze

$$\begin{aligned} z_k &:= \left\lfloor \frac{r_{k+1}}{b^k} \right\rfloor \qquad \text{(Gauß-Klammer)} \\ r_k &:= r_{k+1} - z_k \cdot b^k \end{aligned}$$

Im Fall $r = 0$ setzen wir $z_k = r_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

6.5.4 Beobachtung: Eigenschaften der b-adischen Entwicklung

Bei der b-adischen Entwicklung gilt

(i) $z_k \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$

(ii) $0 \leq r_k < b^k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$

(iii) Es gibt kein $\widetilde{K} \in \mathbb{Z}$, so dass $z_k = b - 1$ für alle $k \leq \widetilde{K}$.

6.5.5 Beweis

Die Aussagen (i) und (ii) zeigen wir simultan per Induktion für fallendes k: Für $k \geq K$ sind die beiden Aussagen trivial.

Sind die Aussagen für $k + 1$ gezeigt, so folgt

$$0 \leq \frac{r_{k+1}}{b^k} < \frac{b^{k+1}}{b^k} = b$$

und deshalb

$$z_k = \left\lfloor \frac{r_{k+1}}{b^k} \right\rfloor \in \{0, 1, \dots, b-1\}.$$

Weiter ist dann

$$r_k = r_{k+1} - z_k \cdot b^k = \underbrace{\left(\frac{r_{k+1}}{b^k} - \left\lfloor \frac{r_{k+1}}{b^k} \right\rfloor \right)}_{\in[0,1[} \cdot b^k \in [0, b^k[.$$

(iii) Angenommen, es gibt doch ein $\widetilde{K}$ mit $z_k = b - 1$ für alle $k \leq \widetilde{K}$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} r_{\widetilde{K}} &= r_{\widetilde{K}-1} + (b-1)b^{\widetilde{K}-1} \\ &= r_{\widetilde{K}-2} + (b-1)b^{\widetilde{K}-2} + (b-1)b^{\widetilde{K}-1} \\ &\vdots \qquad \text{(per Induktion über } \ell \in \mathbb{N}_0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= r_{\widetilde{K}-\ell} + (b-1)(b^{\widetilde{K}-\ell} + \ldots + b^{\widetilde{K}-1}) \\
&= r_{\widetilde{K}-\ell} + (b-1)b^{\widetilde{K}-1}(1 + \tfrac{1}{b} + \ldots + (\tfrac{1}{b})^{\ell-1}) \\
&= r_{\widetilde{K}-\ell} + (b-1)b^{\widetilde{K}-1}\,\frac{1-(\frac{1}{b})^{\ell}}{1-\frac{1}{b}} \\
&= r_{\widetilde{K}-\ell} + b^{\widetilde{K}}\,(1-(\tfrac{1}{b})^{\ell})
\end{aligned}
$$

Lässt man nun in der gesamten so erhaltenen Gleichung

$$r_{\widetilde{K}} = r_{\widetilde{K}-\ell} + b^{\widetilde{K}}\,(1-(\tfrac{1}{b})^{\ell})$$

$\ell \to \infty$ gehen, so folgt

$$r_{\widetilde{K}} = b^{\widetilde{K}}$$

im Widerspruch zur Aussage (ii).

6.5.6 Satz: Kommazahl-Darstellung für reelle Zahlen

(i) Die durch b-adische Entwicklung definierte Abbildung

$$\eta : \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ & \to \mathcal{R}_b \\ r & \mapsto (z_k)_{k\in\mathbb{Z}} \end{cases}$$

ist wohldefiniert.

(ii) Die durch die Bildung des Reihenwerts gegebene Abbildung

$$\varrho : \begin{cases} \mathcal{R}_b & \to \mathbb{R}_0^+ \\ (z_k)_{k\in\mathbb{Z}} & \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} z_k \cdot b^k \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} z_{-k} \cdot b^{-k}. \end{cases}$$

ist wohldefiniert.

(iii) Die beiden Abbildungen η und ϱ sind invers zueinander.

(iv) Bei der b-adischen Entwicklung von rationalen Zahlen entstehen periodische Kommazahlen

$$\eta(\mathbb{Q}_0^+) \subseteq \mathcal{R}_b^{\text{per}},$$

(v) Umgekehrt ist der Reihenwert einer periodischen Kommazahl rational:

$$\varrho(\mathcal{R}_b^{\text{per}}) \subseteq \mathbb{Q}_0^+.$$

6.5.7 Beweis Die Aussage (i) ist in den Beobachtungen 6.5.4 enthalten.

(ii) Die linke Reihe in der Definition von ϱ enthält wegen $z_k = 0$ für $k \geq K$ nur endlich viele Summanden. Die rechte Seite konvergiert aufgrund des Majorantenkriteriums. Es ist ja

$$z_{-k} \cdot b^{-k} \leq (b-1) b^{-k}$$

und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (b-1)\, b^{-k} = (b-1) \sum_{k=1}^{\infty} b^{-k}$ ist konvergent.

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned} r &= z_{K-1} \cdot b^{K-1} + r_{K-1} \\ &= z_{K-1} \cdot b^{K-1} + z_{K-2} \cdot b^{K-2} + r_{K-2} \\ &= z_{K-1} \cdot b^{K-1} + z_{K-2} \cdot b^{K-2} + z_{K-3} \cdot b^{K-3} + r_{K-3} \\ &\vdots \qquad \text{(per Induktion über } \ell \in \mathbb{N}_0) \\ &\vdots \\ &= z_{K-1} \cdot b^{K-1} + z_{K-2} \cdot b^{K-2} + \ldots + z_0 \cdot b^0 + z_{-1} \cdot b^{-1} + \ldots + z_{-\ell} \cdot b^{-\ell} + r_{-\ell} \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} z_k \cdot b^k \;+\; \sum_{k=1}^{\ell} z_{-k} \cdot b^{-k} + r_{-\ell}. \end{aligned}$$

Wir stellen diese Gleichung um

$$\sum_{k=0}^{K-1} z_k \cdot b^k \;+\; \sum_{k=1}^{\ell} z_{-k} \cdot b^{-k} \;=\; r - r_{-\ell}$$

und lassen ℓ gegen ∞ gehen. Da die rechte Seite konvergiert, tut dies auch die linke

$$\sum_{k=0}^{K-1} z_k \cdot b^k \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} z_{-k} \cdot b^{-k} \;=\; r.$$

Damit ist $\varrho \circ \eta = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_0^+}$ bewiesen.

Entwickelt man umgekehrt den Reihenwert

$$\sum_{k=0}^{K-1} z_k \cdot b^k \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} z_{-k} \cdot b^{-k}$$

wie oben in Abschnitt 6.5.3 angegeben, so werden dabei die Ziffern z_k für $k < K$ reproduziert. Das aber bedeutet $\eta \circ \varrho = \mathrm{id}_{\mathcal{R}_b}$.

(iv) Wir nehmen O.B.d.A. an, dass $r = \frac{m}{n} < 1$ ist. und wenden die b-adische Entwicklung an, erhalten dabei zwei Folgen $(z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ und $(r_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit den in Abschnitt 6.5.4 beschriebenen Eigenschaften.

Wir definieren für alle $k \in -\mathbb{N}_0$

$$m_k \;:=\; \frac{r_k \cdot n}{b^k}$$

und zeigen per Induktion über fallendes k

$$m_k \;\in\; \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Für $k = 0$ ist wegen $r_0 = r < 1$

$$0 \le m_0 \;=\; \frac{r_0 \cdot n}{b^0} \;=\; m < n.$$

Ist die Aussage für $k+1$ gezeigt, so ist zunächst

$$\begin{aligned} m_k &= \frac{r_k \cdot n}{b^k} = \frac{n}{b^k} \cdot (r_{k+1} - z_k \cdot b^k) \\ &= \frac{n}{b^k} \cdot (\frac{m_{k+1} \cdot b^{k+1} n}{n} - z_k \cdot b^k) \\ &= m_{k+1} \cdot b - z_k \cdot n \;\in\; \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Außerdem ist wegen $0 \le r_k < b^k$ noch

$$0 \;\le\; \frac{r_k \cdot n}{b^k} < n.$$

Irgendwann muss es „ein m_k zum ersten Mal ein zweites Mal auftreten", d.h. es muss zwei Zahlen $q \in \mathbb{N}_0$ und $p \in \mathbb{N}$ geben, so dass

$$m_{-q+p} \;=\; m_{-(q)}.$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} z_{-(q+1)} &= \left\lfloor \frac{r_{-q}}{b^{-(q+1)}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m_{-q} \cdot b^{-q}}{n \cdot b^{-(q+1)}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m_{-(q+p)} \cdot b^{-(q+p)}}{n \cdot b^{-(q+p+1)}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r_{-(q+p)}}{b^{-(q+p+1)}} \right\rfloor \\ &= z_{-(q+p+1)} \end{aligned}$$

Wegen der Rekursion läuft ab $k = -(q+p+1)$ alles genauso ab wie bereits ab $k = -(q+1)$. Die Folge (z_k) wird periodisch.

(v) Wir nehmen O.B.d.A. an, dass alle Ziffern links der Periode gleich null sind. Für die verbleibende periodische Kommazahl gilt dann

$$\begin{aligned} & 0,00\ldots 0\,\overline{z_{-(q+1)}\,z_{-(q+2)}\,\cdots\,z_{-(q+p)}} \\ =\;& 0,00\ldots 0\,\underbrace{z_{-(q+1)}\,z_{-(q+2)}\,\cdots\,z_{-(q+p)}}_{\text{Periode}}\,\underbrace{z_{-(q+p+1)}\,z_{-(q+p+2)}\,\cdots\,z_{-(q+2p)}}_{\text{Periode}}\cdots \\ =\;& \frac{z_{-(q+1)}}{10^{q+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \ldots\right) + \\ & \frac{z_{-(q+2)}}{10^{q+2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \ldots\right) + \\ & \quad\vdots \\ & \frac{z_{-(q+p)}}{10^{q+p}} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \ldots\right) \\ =\;& \left(\frac{z_{-(q+1)}}{10^{q+1}} + \frac{z_{-(q+2)}}{10^{q+2}} + \ldots + \frac{z_{-(q+p)}}{10^{q+p}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \ldots\right) \\ =\;& \left(\frac{z_{-(q+1)} \cdot 10^{p-1} + z_{-(q+2)} \cdot 10^{p-2} + \ldots + z_{-(q+p)}}{10^{q+p}}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^p}} \\ =\;& \frac{z_{-(q+1)}\,z_{-(q+2)}\,\cdots\,z_{-(q+p)}}{10^q(10^p - 1)} \;\in \mathbb{Q}_0^+ \end{aligned}$$

6.5.8 Folgerung: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar

(i) Es gibt keine bijektive Abbildung $\zeta : \mathbb{N} \to [0,1[$.

(ii) Es gibt keine bijektive Abbildung $\widetilde{\zeta} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Das heißt $\mathbb{R}$ ist überabzählbar. Vgl. die Definitionen 2.11.1.

6.5.9 Beweis

(i) Cantors zweites Diagonalargument.

Angenommen, es gibt eine bijektive Abbildung $\mathbb{N} \to [0,1[$. Da wir jede Zahl $r = \zeta(n) \in [0,1[$ ein-eindeutig als (b-adische) Kommazahl

$$\zeta(n) \quad = \quad 0, z_{-1}^{(n)} z_{-2}^{(n)} z_{-3}^{(n)} z_{-4}^{(n)} z_{-5}^{(n)} \ldots\ldots$$

schreiben können, können wir die folgende Tabelle von Ziffern aufstellen

$$\begin{array}{llllllll}
0, & z_{-1}^{(1)} & z_{-2}^{(1)} & z_{-3}^{(1)} & z_{-4}^{(1)} & z_{-5}^{(1)} & z_{-6}^{(1)} & z_{-7}^{(1)} \quad \ldots\ldots \\
0, & z_{-1}^{(2)} & z_{-2}^{(2)} & z_{-3}^{(2)} & z_{-4}^{(2)} & z_{-5}^{(2)} & z_{-6}^{(2)} & z_{-7}^{(2)} \quad \ldots\ldots \\
0, & z_{-1}^{(3)} & z_{-2}^{(3)} & z_{-3}^{(3)} & z_{-4}^{(3)} & z_{-5}^{(3)} & z_{-6}^{(3)} & z_{-7}^{(3)} \quad \ldots\ldots \\
0, & z_{-1}^{(4)} & z_{-2}^{(4)} & z_{-3}^{(4)} & z_{-4}^{(4)} & z_{-5}^{(4)} & z_{-6}^{(4)} & z_{-7}^{(4)} \quad \ldots\ldots \\
0, & z_{-1}^{(5)} & z_{-2}^{(5)} & z_{-3}^{(5)} & z_{-4}^{(5)} & z_{-5}^{(5)} & z_{-6}^{(5)} & z_{-7}^{(5)} \quad \ldots\ldots \\
0, & z_{-1}^{(6)} & z_{-2}^{(6)} & z_{-3}^{(6)} & z_{-4}^{(6)} & z_{-5}^{(6)} & z_{-6}^{(6)} & z_{-7}^{(6)} \quad \ldots\ldots \\
0, & z_{-1}^{(7)} & z_{-2}^{(7)} & z_{-3}^{(7)} & z_{-4}^{(7)} & z_{-5}^{(7)} & z_{-6}^{(7)} & z_{-7}^{(7)} \quad \ldots\ldots \\
\vdots \\
\vdots
\end{array}$$

Auf der Grundlage dieser Liste definieren wir dann eine Kommazahl r^* durch

$$0, \quad z_{-1}^{(*)} \quad z_{-2}^{(*)} \quad z_{-3}^{(*)} \quad z_{-4}^{(*)} \quad z_{-5}^{(*)} \quad z_{-6}^{(*)} \quad z_{-7}^{(*)} \quad \ldots\ldots,$$

wobei die Ziffer $z_{-k}^{(*)}$ an der k-ten Nachkommastelle die folgende Bedingung erfüllen muss:

$$z_{-k}^{(*)} \quad \neq \quad z_{-k}^{(k)}.$$

Man überlege sich, dass dabei die unendliche Periode mit Ziffern $b-1$ bei $b \neq 2$ ohne weiteres vermieden werden kann, bei $b = 2$ durch einen kleine Umarbeitung des Diagonalverfahrens bewältigt werden kann.

Diese neue Zahl $r^* \in [0,1[$ kann aufgrund ihrer Definition nicht in der obigen Liste auftreten. Widerspruch

(ii) Gäbe es eine bijektive Abbildung $\widetilde{\zeta} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, so wäre die Abbildung

$$\begin{cases} [0,1[& \to \quad \zeta^{-1}([0,1[) \\ r & \mapsto \quad \zeta^{-1}(r) \end{cases}$$

eine bijektive Abbildung auf die unendliche Teilmenge $\zeta^{-1}([0,1[) \subseteq \mathbb{N}$. Diese ist aber nach Satz 2.11.6 abzählbar. Widerspruch.

6.6 Umordnung von Reihen

Das Körperaxiom KG/A kann leicht für endlich viele Summanden verallgemeinert werden:

Ist $\beta : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ eine bijektive Abbildung (Permutation), so gilt für $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{K}$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{\beta(k)}.$$

Dieses Gesetz kann nicht ohne weiteres auf Reihen (mit unendlich vielen Summanden) übertragen werden, da die Definition des Reihengrenzwertes auf die zugehörige Partialsummenfolge, und damit wesentlich auf die Reihenfolge der Reihenglieder, gegründet ist.

Der folgende Satz stellt noch einmal die grundsätzliche Bedeutung der absoluten Konvergenz für die Theorie der Reihen heraus. Absolut konvergente Reihen können aufgrund dieses Satzes als Verallgemeinerung des Summenbegriffs von endlich vielen Summanden auf unendlich viele Summanden angesehen werden.

6.6.1 Definition: Umordnung von Reihen

Es sei $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, sie heißt in diesem Zusammenhang eine *Umordnung.*

Ist nun eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gegeben, so entsteht durch Umordnung der Summanden mittels β die *umgeordnete Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\beta(k)}.$$

6.6.2 Satz: Umordnung von Reihen, „Kommutativgesetz"

Es sei $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, man nennt sie in diesem Zusammenhang eine *Umordnung.* Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{\beta(k)} \text{ absolut konvergent.}$$

Die beiden Reihenwerte stimmen in diesem Fall überein.

6.6.3 Beweis Es genügt, die Richtung „$\Longrightarrow$" zu zeigen. Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

(1) Es gibt ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\Big|\sum_{k=1}^{N_1} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\Big| = \Big|\sum_{k=N_1+1}^{\infty} a_k\Big| \overset{\text{Satz 6.3.2}}{\leq} \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(2) Definiere N durch

$$N \;:=\; \max\{\beta^{-1}(1),\ldots,\beta^{-1}(N_1)\},$$

was in dem folgenden Diagramm illustriert ist:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & \cdots\cdots & N_1 - 1 & N_1 & & \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \\ \beta^{-1}(1) & \beta^{-1}(2) & \cdots\cdots & \beta^{-1}(N_1-1) & \beta^{-1}(N_1) & \longrightarrow & \text{Maximum } =: N \end{array}$$

Dann gilt $N \geq N_1$ und

$$\{\beta^{-1}(1), \ldots, \beta^{-1}(N_1)\} \subseteq \{1, \ldots, N\},$$

demzufolge für alle $n \geq N$:

$$\{1, \ldots, N_1\} \subseteq \{\beta(1), \ldots, \beta(N)\} \subseteq \{\beta(1), \ldots, \beta(n)\}.$$

(3) Für alle $n \geq N$ gilt dann

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{k=1}^{n} a_{\beta(k)} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\Big| &\leq \Big|\sum_{k=1}^{n} a_{\beta(k)} - \sum_{k=1}^{N_1} a_k\Big| + \Big|\sum_{k=1}^{N_1} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\Big| \\ &= \Big|\sum_{k \in \{1,\ldots,n\}, \beta(k) > N_1} a_{\beta(k)}\Big| + \Big|\sum_{k=1}^{N_1} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\Big| \\ &\leq \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |a_k| + \Big|\sum_{k=1}^{N_1} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\Big| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also konvergiert die Partialsummenfolge der umgeordneten Reihe gegen den Reihenwert der ursprünglichen Reihe.

(4) Der ganze soeben durchgeführte Beweis kann jetzt noch einmal wiederholt werden mit den Reihengliedern $|a_k|$ anstelle der Reihenglieder a_k. Das zeigt die absolute Konvergenz der umgeordneten Reihe.

6.7 Produkte absolut konvergenter Reihen

6.7.1 Erinnerung Gemäß Distributivgesetz gilt für das Produkt zweier Summen:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) \cdot (b_1 + b_2 + \ldots b_n) \quad = \quad \underbrace{a_1 b_1 + a_1 b_2 + \ldots + a_m b_n}_{m \cdot n \text{ Summanden}}$$

Jeder Summand der ersten Reihe wird mit jedem Summanden der zweiten Reihe multipliziert und dann die entstehenden Produkte aufaddiert. Wie kann man das für Reihen verallgemeinern?

6.7.2 Satz: Cauchy–Produkt absolut konvergenter Reihen Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei Reihen. Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \qquad \text{mit den Summanden} \qquad c_k := \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell \, b_{k-\ell}.$$

Sind die beiden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent, so ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut konvergent und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right). \qquad (**)$$

6.8 Umordnung von Reihen

6.8.1 Einstieg: Umordnung endlicher Summen Das Körperaxiom KG/A kann leicht für endlich viele Summanden verallgemeinert werden:

Ist $\beta : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ eine bijektive Abbildung (Permutation), so gilt für $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\beta(k)} \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (*)$$

Dieses Gesetz kann nicht ohne weiteres auf Reihen (mit unendlich vielen Summanden) übertragen werden, da die Definition des Reihengrenzwertes auf die zugehörige Partialsummenfolge, und damit wesentlich auf die Reihenfolge der Reihenglieder, gegründet ist.

Der folgende Satz stellt noch einmal die grundsätzliche Bedeutung der absoluten Konvergenz für die Theorie der Reihen heraus. Absolut konvergente Reihen können aufgrund dieses Satzes als Verallgemeinerung des Summenbegriffs von endlich vielen Summanden auf unendlich viele Summanden angesehen werden.

6.8.2 Definition: Umordnung von Reihen

Es sei $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, sie heißt in diesem Zusammenhang eine *Umordnung.*

Ist nun eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gegeben, so entsteht durch Umordnung der Summanden mittels β die *umgeordnete Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\beta(k)}.$$

6.8.3 Versuch Lässt man in der Gleichung $(*)$ für endliche Summen einfach $n \to \infty$ gehen, so erhält man die Gleichheit der Reihenwerte

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\beta(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Leider ist diese intuitiv-naiv-formale Schlussweise schlicht FALSCH. Man lässt dabei außer Acht, dass dem Reihen-Grenz-Wert eine exakte Definition, nämlich die als Grenzwert der Partialsummenfolge, zugrundeliegt.

Wir werden jetzt erst mal die Aussage FALSCH durch ein Beispiel beweisen, dann den Satz beweisen, dass unter der Bedingung ,,absolut konvergent" die Schlussweise doch richtig ist.

6.8.4 Beispiel: Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe

Wir definieren eine Umordnung $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$\beta(k) := \begin{cases} \frac{k}{3} \cdot 2, & \text{falls } k \in 3\mathbb{N} \\ \frac{k-1}{3} \cdot 4 + 1, & \text{falls } k \in 3\mathbb{N}+1, \\ \frac{k-2}{3} \cdot 4 + 3, & \text{falls } k \in 3\mathbb{N}+2, \end{cases}$$

veranschaulichen diese Abbildung anhand der ersten 25 Werte

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$\beta(k)$	1	3	2	5	7	4	9	11	6	13	15	8	17	19	10	21	23	12	25	27	14	29	31	16	33

und sehen dabei ein, dass β bijektiv ist.

Wir ordnen jetzt die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

mittels β um und berechnen den Reihenwert

$$\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\beta(k)+1}}{\beta(k)} = \\ 1 \qquad + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \qquad + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \qquad + \frac{1}{11} \pm \ldots = \\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} \pm \ldots \\ \quad + \frac{1}{2} \qquad - \frac{1}{4} \qquad + \frac{1}{6} \qquad - \frac{1}{8} \qquad + \frac{1}{10} \qquad \pm \ldots = \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{3}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \end{array}$$

Wir wissen bereits, dass die alternierende harmonische Reihe einen positiven Grenzwert hat, vgl. Abschnitt 6.2.9. Die umgeordnete Reihe hat also einen anderen Grenzwert als die Originalreihe.

6.8.5 Satz: Umordnung von Reihen, „Kommutativgesetz"

Ist $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Umordnung, so gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{\beta(k)} \text{ absolut konvergent.}$$

Die beiden Reihenwerte stimmen in diesem Fall überein.

6.8.6 Beweis Es genügt, die Richtung „$\Longrightarrow$" zu zeigen. Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

(1) Es gibt ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\Big| \sum_{k=1}^{N_1} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Big| = \Big| \sum_{k=N_1+1}^{\infty} a_k \Big| \overset{\text{Satz 6.3.2}}{\leq} \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(2) Definiere N durch

$$N \ := \ \max\{\beta^{-1}(1), \ldots, \beta^{-1}(N_1)\},$$

was in dem folgenden Diagramm illustriert ist:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & \cdots\cdots & N_1 - 1 & N_1 & & \\
\uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \\
\beta^{-1}(1) & \beta^{-1}(2) & \cdots\cdots & \beta^{-1}(N_1 - 1) & \beta^{-1}(N_1) & \longrightarrow & \text{Maximum } =: N
\end{array}$$

Dann gilt $N \geq N_1$ und

$$\{\beta^{-1}(1), \ldots, \beta^{-1}(N_1)\} \subseteq \{1, \ldots, N\},$$

demzufolge für alle $n \geq N$:

$$\{1, \ldots, N_1\} \ \subseteq \ \{\beta(1), \ldots, \beta(N)\} \ \subseteq \ \{\beta(1), \ldots, \beta(n)\}.$$

(3) Für alle $n \geq N$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\Big| \sum_{k=1}^{n} a_{\beta(k)} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Big| \ &\leq \ \Big| \sum_{k=1}^{n} a_{\beta(k)} - \sum_{k=1}^{N_1} a_k \Big| + \Big| \sum_{k=1}^{N_1} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Big| \\
&= \ \Big| \sum_{k \in \{1,\ldots,n\}, \beta(k) > N_1} a_{\beta(k)} \Big| + \Big| \sum_{k=1}^{N_1} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Big| \\
&\leq \ \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |a_k| + \Big| \sum_{k=1}^{N_1} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Big| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also konvergiert die Partialsummenfolge der umgeordneten Reihe gegen den Reihenwert der ursprünglichen Reihe.

(4) Der ganze soeben durchgeführte Beweis kann jetzt noch einmal wiederholt werden mit den Reihengliedern $|a_k|$ anstelle der Reihenglieder a_k. Das zeigt die absolute Konvergenz der umgeordneten Reihe.

6.9 Produkte absolut konvergenter Reihen

6.9.1 Erinnerung Gemäß Distributivgesetz gilt für das Produkt zweier Summen:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) \cdot (b_1 + b_2 + \ldots b_n) \quad = \quad \underbrace{a_1 b_1 + a_1 b_2 + \ldots + a_m b_n}_{m \cdot n \text{ Summanden}}$$

Jeder Summand der ersten Reihe wird mit jedem Summanden der zweiten Reihe multipliziert und dann die entstehenden Produkte aufaddiert. Wie kann man das für Reihen verallgemeinern?

6.9.2 Satz: Cauchy–Produkt absolut konvergenter Reihen

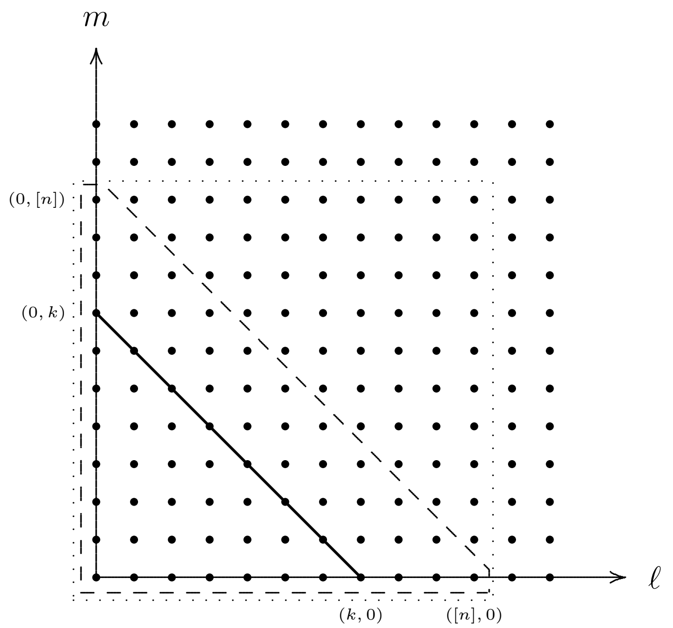
Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei Reihen. Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \qquad \text{mit den Summanden} \qquad c_k := \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell \, b_{k-\ell}.$$

Sind die beiden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent, so ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut konvergent und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right). \qquad (**)$$

6.9.3 Veranschaulichung Wir veranschaulichen zunächst an einem Diagramm, dass in dieser Formel ein ,,Distributivgesetz für unendliche Summen" verwirklicht ist. Das Produkt $a_\ell \cdot b_m$ werde durch einen Punkt mit den Koordinaten $(\ell, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ symbolisiert.



Für gegebene $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Teilmenge von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{S}_k \quad := \quad \{(\ell, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 | \ell + m = k\} \qquad \text{(Sekante bei } k)$$

mit $k+1$ Elementen. Sie ist im Diagramm durch die fett gezeichnete Strecke symbolisiert.

Jetzt kann man sehen, dass in der Zahl c_k gerade alle Produkte erfasst werden, bei denen die zugehörigen Indexpaare auf der k–ten Sekante liegen:

$$c_k = \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell \, b_{k-\ell} = \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{S}_k} a_\ell \, b_m.$$

Das bedeutet dann, dass in der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{(\ell,m)\in\mathcal{S}_k} a_\ell \, b_m \Big)$$

alle Indexpaare $(\ell, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ auftreten in der durch die aufsteigenden Sekanten gegebenen Reihenfolge.

6.9.4 Beweis

(1) Wir definieren weiter für $n \in \mathbb{N}$ zwei Teilmengen von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n &:= \{(\ell, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 | 0 \le \ell \le n \text{ und } 0 \le m \le n\} \\ \mathcal{D}_n &:= \{(\ell, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 | 0 \le \ell + m \le n\} \end{aligned}$$

Es handelt sich um das gepunktete Quadrat bzw. um das gestrichelte Dreieck bis n.

Weiter führen wir die folgende Notation für Partialsummen ein:

$$\begin{aligned} A_n &:= \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad & A_n^+ &:= \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \\ B_n &:= \sum_{k=0}^{n} b_k, \qquad & B_n^+ &:= \sum_{k=0}^{n} |b_k|, \\ C_n &:= \sum_{k=0}^{n} c_k. \end{aligned}$$

(2) Wegen

$$\mathcal{D}_n = \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{S}_n \qquad \text{(disjunkt).}$$

gilt für die Partialsummen C_n

$$C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{S}_k} a_\ell \, b_m = \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{D}_n} a_\ell \, b_m.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} A_n \cdot B_n &= \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{Q}_n} a_\ell \, b_m, \\ A_n^+ \cdot B_n^+ &= \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{Q}_n} |a_\ell| \, |b_m|. \end{aligned}$$

(3) Wegen $\mathcal{Q}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \subseteq \mathcal{D}_n$ gilt $\mathcal{Q}_n \setminus \mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{Q}_n \setminus \mathcal{Q}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ (Gauß-Klammer, vgl. Abschnitt 4.5.1).

Jetzt können wir abschätzen

$$\begin{aligned} |A_nB_n - C_n| &= \Big| \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{Q}_n} a_\ell \cdot b_m - \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{D}_n} a_\ell \cdot b_m \Big| = \Big| \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{Q}_n\setminus\mathcal{D}_n} a_\ell \cdot b_m \Big| \\ &\le \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{Q}_n\setminus\mathcal{D}_n} |a_\ell| \cdot |b_m| \le \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{Q}_n\setminus\mathcal{Q}_{\frac{n}{2}}} |a_\ell| \cdot |b_m| \\ &= \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{Q}_n} |a_\ell| \cdot |b_m| - \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{Q}_{\frac{n}{2}}} |a_\ell| \cdot |b_m| \\ &= A_n^+ \cdot B_n^+ - A^+_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} \cdot B^+_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} \end{aligned}$$

(4) Wir wissen mit Satz 5.7.1 (ii), dass mit (A_n^+) und (B_n^+) auch die Folge $(A_n^+ \cdot B_n^+)$ konvergiert. Das aber bedeutet gemäß Satz 5.5.4, dass

$$|A_nB_n - C_n| \le A_n^+ \cdot B_n^+ - A^+_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} \cdot B^+_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Daraus folgt die Konvergenz:

$$\lim_{n\to\infty} A_n \cdot \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} (A_n \cdot B_n) = \lim_{n\to\infty} C_n.$$

(5) Es bleibt noch, die absolute Konvergenz zu beweisen.

Wendet man die Schritte (1) bis (4) auf die Reihen $\sum_{k=1}^\infty |a_k|$ und $\sum_{k=1}^\infty |b_k|$, so folgt die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^\infty c_k^+ = \Big(\sum_{k=1}^\infty |a_k|\Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^\infty |b_k|\Big)$$

mit den Summanden

$$c_k^+ := \sum_{\ell=0}^k |a_\ell| \cdot |b_{k-\ell}|.$$

Wegen

$$|c_k| = \Big| \sum_{\ell=0}^k a_\ell \cdot b_{k-\ell} \Big| \le \sum_{\ell=0}^k |a_\ell| \cdot |b_{k-\ell}| = c_k^+$$

ist gemäß Majorantenkriterium die Reihe $\sum_{k=1}^\infty |c_k|$ konvergent, d.h. die Reihe $\sum_{k=1}^\infty |c_k|$ ist absolut konvergent.

6.9.5 Folgerung: „Distributivgesetz für Produkte von Reihen" Es sei

$$\sigma : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ k & \mapsto & (\sigma_1(k), \sigma_2(k)) \end{cases}$$

bijektiv, d.h. eine Abzählung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Sind die beiden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent, so ist auch die durch die Vorgabe

> „jedes Glied der ersten Reihe wird mit jedem Glied der zweiten Reihe multipliziert, die entstehenden Produkte werden gemäß der durch die Abzählung σ vorgegebenen Reihenfolge aufaddiert"

entstehende Produktreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)}\, b_{\sigma_2(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

absolut konvergent mit dem angegebenen Grenzwert.

6.9.6 Beweis Es sei

$$\tau : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ j & \mapsto & (\tau_1(j), \tau_2(j)) \end{cases}$$

die Umkehrabbildung der im Beweis von Satz 2.11.8 angegebenen Diagonalabzählung $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Da das Cauchy–Produkt aus dem letzten Satz gerade dieser Diagonalreihenfolge bei der Summation der Produkte folgt, kann es bei $(*)$ umgeschrieben werden als

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell\, b_{k-\ell} \stackrel{(*)}{=} \sum_{j=0}^{\infty} a_{\tau_1(j)}\, b_{\tau_2(j)} \stackrel{(**)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)}\, b_{\sigma_2(k)}.$$

Die letzte Gleichheit $(**)$ gilt aufgrund des Umordnungssatzes bzgl. der bijektiven Abbildung

$$\tau^{-1} \circ \sigma : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ k & \mapsto & j = \tau^{-1}(\sigma(k)). \end{cases}$$

Die Folge

$$j \mapsto a_{\tau_1(j)}\, b_{\tau_2(j)}$$

wird durch diese Umordnung transformiert in die Folge

$$k \mapsto j \mapsto a_{\tau_1(j)}\, b_{\tau_2(j)},$$

die dann geschrieben werden kann als

$$k \mapsto a_{\tau_1(j)}\, b_{\tau_2(j)}\Big|_{j=\tau^{-1}(\sigma(k))} = a_{\sigma_1(k)}\, b_{\sigma_2(k)}.$$

7 Stetigkeit

7.1 Stetigkeit bei Funktionen zwischen metrischen Räumen

In diesem Abschnitt haben wir es wieder mit metrischen Räumen (M, d) zu tun. Sie erinnern sich, dass d eine Abbildung

$$d : M \times M \to \mathbb{R}_0^+$$

ist, die positiv–definit, symmetrisch ist und der Dreiecksungleichung genügt.

Wir wollen die allgemeinere Notation mit dem d–Symbol verwenden, da so die eigentlich starke Abstraktheit des Stetigkeitsbegriffs zum Ausdruck kommt. Für (Teilmengen von) $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sollten Sie aber nichtsdestoweniger an die Konkretisierung

$$d(x, y) = |x - y| \qquad \text{für } x, y \in M$$

denken.

7.1.1 Definition und Satz: Stetigkeit Es seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume, $f : M_1 \to M_2$ eine Funktion und $a \in M_1$. Die drei folgenden Aussagen sind äquivalent:

(A) (Def) Die Abbildung f heißt *stetig an der Stelle* a *(kürzer: in* a*)*.

(B) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M_1 mit

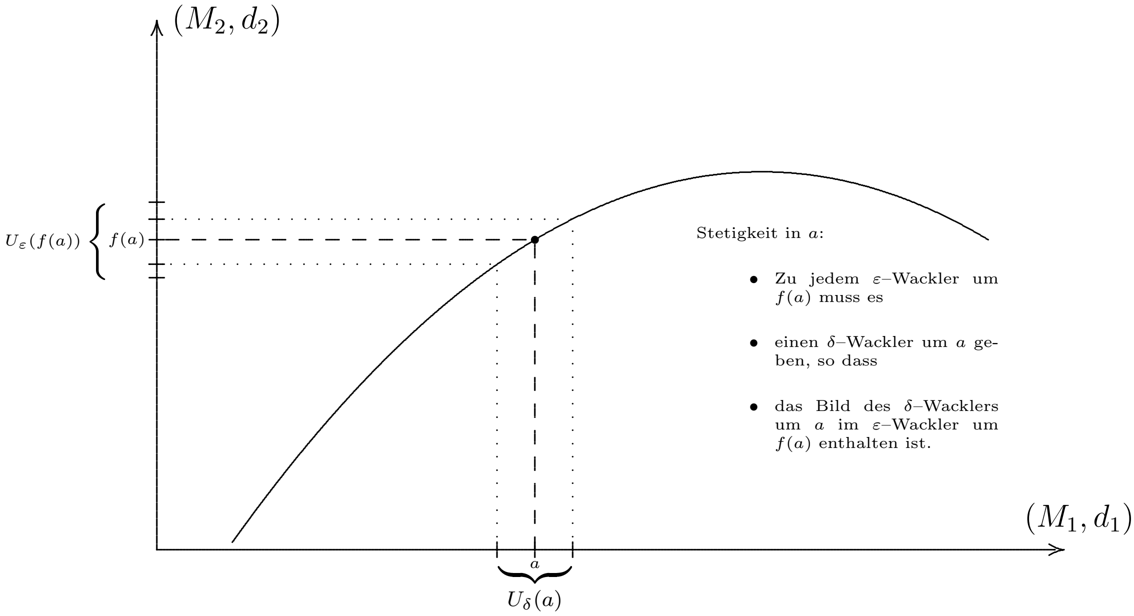
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \text{so folgt} \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

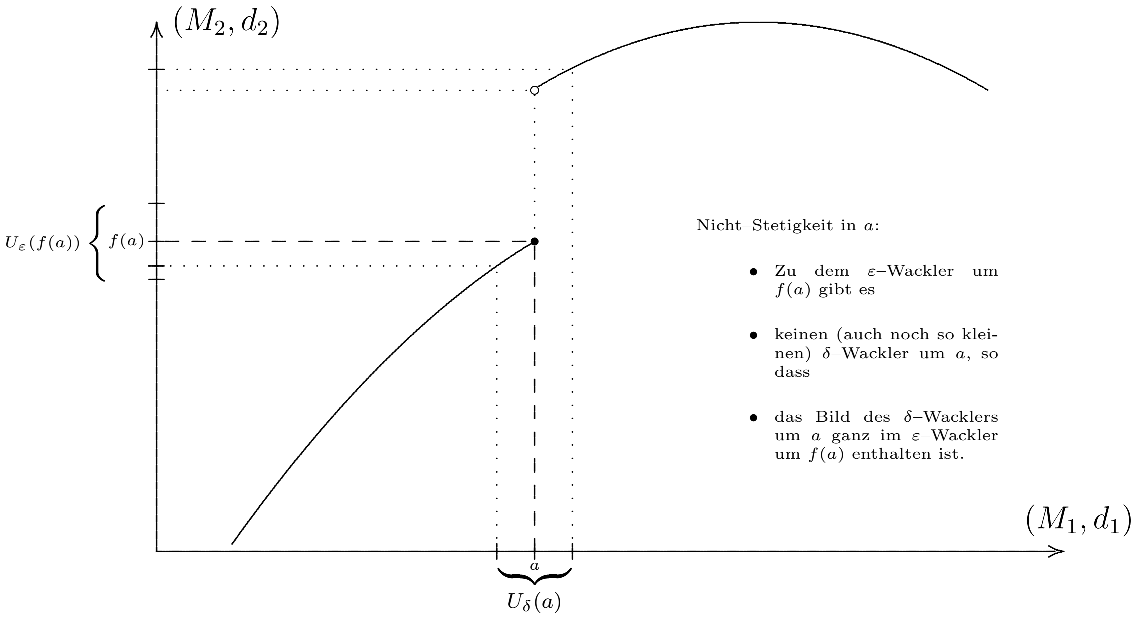
(C) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in M_1 \text{ mit } d_1(x, a) < \delta.$$

Bildhafter ausgedrückt: Zu jedem Funktionswert–ε–Wackler muss man einen Definitionsstellen–δ–Wackler finden, so dass ein Höchstens–δ–Wackeln um a zu einem Höchstens–ε–Wackeln um $f(a)$ führt.

7.1.2 Graphische Veranschaulichung ε–δ–Definition der Stetigkeit:





7.1.3 Beweis Wir zeigen zuerst (B) $\Longrightarrow$ (C).

Für alle Folgen (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gelte also: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Es sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

Wir nehmen an, dass es kein $\delta > 0$ mit der geforderten Eigenschaft gibt. Das bedeutet speziell, dass es für jedes $\delta_n := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, (mindestens) ein $x_n \in M_1$ gibt mit

$$d_1(x_n, a) < \delta_n, \qquad d_2(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon.$$

Für die aus diesen x_n gebildete Folge gilt dann aber:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad \text{und} \qquad (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gar nicht oder nicht gegen } f(a),$$

was ein WIDERSPRUCH zur Voraussetzung ist.

Es bleibt die Umkehrung (C) $\Longrightarrow$ (B) zu zeigen. Dazu sei eine beliebige Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ vorgegeben. Um zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ gilt, sei wieder ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu diesem ε gibt es nach Voraussetzung ein $\delta > 0$, so dass

$$d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon, \quad \text{falls} \quad d_1(x, a) < \delta. \qquad (*)$$

Zu diesem δ gibt es, da die Folge (x_n) gegen a konvergiert, ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$d_1(x_n, a) < \delta \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Für diese $n \geq N$ gilt dann aber auch wegen $(*)$:

$$d_2(f(x_n), f(a)) < \varepsilon.$$

Das aber bedeutet, dass $f(x_n)$ gegen $f(a)$ konvergiert.

7.1.4 Satz Beobachtung: Ist die Abbildung $f : M_1 \to M_2$ stetig in a und die Abbildung $g : M_2 \to M_3$ stetig in $f(a)$, so ist die Abbildung $g \circ f : M_1 \to M_3$ stetig in a.

7.1.5 Beweis Ganz einfach: Ist $\lim x_n = a$, so folgt

$$(g \circ f)(a) = g(f(\lim_{n\to\infty} x_n)) = g(\lim_{n\to\infty} f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)).$$

7.1.6 Definition Eine Abbildung $f : M_1 \to M_2$ zwischen zwei metrischen Räumen heißt *stetig* (schlechthin), wenn sie in jedem $a \in M_1$ stetig ist.

7.1.7 Beispiel Eine konstante Funktion $f : M_1 \to M_2$, $f(x) = a$ für alle $x \in M_1$, ist immer stetig.

7.1.8 Satz

Es seien M, M_1, M_2, M_3 metrische Räume.

(i) Die identische Abbildung id_M ist stetig.

(ii) Sind die Abbildungen $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$ stetig, so ist auch die zusammengesetzte Abbildung $g \circ f : M_1 \to M_3$ stetig.

7.1.9 Bemerkung Diese beiden Eigenschaften besagen, dass die ,,Menge" aller metrischen Räume zusammen mit den stetigen Abbildungen zwischen ihnen eine *Kategorie* bilden. Genaueres über dieses allgemeine Konzept kann man in der Kategorie–Theorie lernen. Sie hat Anwendungen beispielsweise in der algebraischen Topologie.

7.1.10 Satz: Metrischer Teilraum

Es sei (M, d) ein metrischer Raum und M' eine Teilmenge von M.

(i) M' ist unter der Einschränkung der Metrik

$$d' : \begin{cases} M' \times M' & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ (x, y) & \mapsto & d(x, y) \end{cases}$$

selbst wieder ein metrischer Raum.

(ii) Die kanonische injektive Abbildung

$$\iota : \begin{cases} M' & \to & M \\ x & \mapsto & x \end{cases}$$

ist stetig.

(iii) Ist $f : M \to M_1$ irgendeine stetige Abbildung, so ist auch die Einschränkung $f \circ \iota : M' \to M_1$ dieser Abbildung auf M' stetig.

7.1.11 Beweis Für die ersten beiden Aussagen muss man nur die jeweiligen Definitionen genau anschauen. Die dritte folgt aus der zweiten unter Einbeziehung des vorhergehenden Satzes.

7.1.12 Satz Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $b \in M$ fixiert. Die Funktion

$$\begin{cases} M & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto & d(x, b), \end{cases}$$

die den Abstand zu b misst, ist stetig. Dabei ist $\mathbb{R}_0^+$ mit der Standard–Metrik $|x - y|$ versehen.

7.1.13 Beweis Sei $a \in M$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so setzen wir $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle $x \in M$ mit $d(x,a) < \delta$:

$$|d(x,b) - d(a,b)| \overset{(*)}{\leq} d(x,a) < \delta = \varepsilon.$$

Beachte, dass die Ungleichung $(*)$ ganz allgemein für drei Punkte x, a, b in einem metrischen Raum gilt. (Warum? Fallunterscheidung für das Argument des Betrags!)

7.1.14 Satz Die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ sei in a stetig mit $f(a) > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$f(x) > 0 \qquad \text{für } x \in U_\delta(a).$$

Anders — und etwas allgemeiner — ausgedrückt:

Wenn eine reellwertige Funktion in einem Punkt a stetig und ungleich Null ist, dann hat sie in einer kleinen (offenen) Umgebung dieses Punktes das gleiche Vorzeichen.

7.1.15 Beweis Angenommen, es gäbe kein solches $\delta > 0$. Dann gäbe es zu jedem $n \in N$ ein $x_n \in U_{\frac{1}{n}}$, so dass $f(x_n) \leq 0$. Es ist weiter $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, deshalb entsteht der WIDERSPRUCH:

$$f(a) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq 0.$$

7.2 Reell- und komplexwertige Funktionen

7.2.1 Definition: Reell- und komplexwertige Funktionen Es sei M ein metrischer Raum und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine Abbildung $M \to \mathbb{K}$ heißt *reellwertig* bzw. *komplexwertig*. Für einen metrischen Raum sind die Mengen der auf ihm definierten $\mathbb{K}$–wertigen stetigen Funktionen

$$\mathcal{C}(M, \mathbb{K}) \ := \ \{f : M \to \mathbb{K} | f \text{ stetig } \}$$

von erheblicher Bedeutung. Das ist für uns zunächst nicht so maßgeblich.

7.2.2 Verknüpfung von Funktionen Es seien $f, g : M \to \mathbb{K}$ Abbildungen. Dann können auf folgende Weise weitere Funktionen $M \to \mathbb{K}$ gebildet werden:

$$f + g : \begin{cases} M & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{cases}$$

$$f \cdot g : \begin{cases} M & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f(x) \cdot g(x) \end{cases}$$

$$\frac{1}{f} : \begin{cases} \{x \in M | f(x) \neq 0\} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \frac{1}{f(x)} \end{cases}$$

$$|f| : \begin{cases} M & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto & |f(x)| \end{cases}$$

7.2.3 Satz Sind die Funktionen $f, g : M \to \mathbb{K}$ stetig, so sind auch die Funktionen

$$f + g, \qquad f \cdot g, \qquad \frac{1}{f}, \qquad |f|, \qquad \underbrace{\operatorname{Re} f, \qquad \operatorname{Im} f}_{\text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}}$$

mit den oben angegebenen Definitionsmengen stetig.

7.2.4 Beweis Für die algebraischen Kombinationen besteht der Beweis darin, die Aussagen auf die entsprechenden Aussagen über Folgen zurückzuführen und dann Satz 5.7.1 anzuwenden.

Die vierte Funktion ist als Hintereinanderausführung

$$|f| \ = \ |\cdot| \circ f \ = \ d(\cdot, 0) \circ f$$

zweier stetiger Funktionen (vgl. Satz 7.1.12) stetig. Dass die beiden letzten Funktionen stetig sind, folgt mit Satz 5.5.8.

7.3 Beispiele

Es sei $\mathbb{K}$ einer der beiden Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Wir wissen bereits, dass die Abbildungen $\mathrm{id}_{\mathbb{K}}$ und konstante Abbildungen $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ stetig sind. Satz 7.2.3 erlaubt es, darauf aufbauend weitere stetige Abbildungen zu konstruieren.

7.3.1 Definition Eine Funktion $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, die mit Hilfe von $n+1$ Zahlen a_j, $j = 0, \ldots, n$ aus $\mathbb{K}$ in der Form

$$\begin{cases} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \end{cases}$$

geschrieben werden kann, heißt ein *Polynom* über $\mathbb{K}$. Wenn $a_n \neq 0$, so heißt $n \in \mathbb{N}_0$ der *Grad* des Polynoms. Auch die Null–Funktion ist ein Polynom. Es hat per definitionem den Grad $-\infty$.

Eine Funktion, die als Quotient zweier Polynome f, g geschrieben werden kann, heißt *rationale Funktion.* Als Definitionsmenge wählt man dabei

$$D_{f/g} := \{x \in \mathbb{K} | g(x) \neq 0\}.$$

7.3.2 Beispiele

- Das Polynom des ,,Goldenen Schnitts" $x^2 - x - 1$. Die positive Nullstelle $g = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033989\ldots$ erfüllt $\frac{1}{g} = g - 1$. Sie bestimmt das Teilungsverhältnis des goldenen Schnitts und hat noch einige andere interessante geometrische und algebraische Eigenschaften. Recherchieren Sie!
- Eine rationale Funktion mit $D = \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$x \mapsto \frac{4x^3 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}}{8x^6 + 23x^2}.$$

7.3.3 Satz Es ist klar, dass Polynome und rationale Funktionen auf den soeben angegebenen Definitionsmengen stetig sind.

7.3.4 Beispiele nicht-stetiger Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erhalten wir momentan typischerweise durch ,,Falls–Definitionen":

- Die *Signum–Funktion* ist genau in $\{0\}$ nicht stetig.

$$\mathrm{sgn}: \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0. \end{cases} \end{cases}$$

Tatsächlich gibt es für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ kein (auch noch so kleines) $\delta > 0$, so dass $U_\delta(0)$ durch sgn in das Intervall $U_\varepsilon(0) = \,]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}[$ abgebildet wird.

- Die *Dirichlet–Funktion* ist in keinem $a \in \mathbb{R}$ stetig.

$$\chi_{\mathbb{Q}} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \begin{cases} +1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \end{cases}$$

Wird eine Stelle $a \in \mathbb{R}$ fixiert, so kann wieder für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ kein geeignetes $\delta > 0$ gefunden werden, so dass ....

- Die Thomaesche Funktion

$$\begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ (vollständig gekürzt)} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{cases},$$

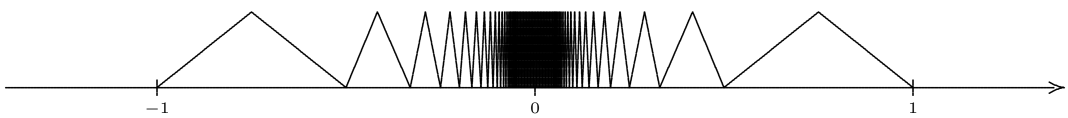
ist genau dann in a stetig, wenn $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (Beweis in den Übungen).

- Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ definieren wir zunächst die stetige *Zelt–Funktion*

$$\Lambda_{[a,b]} : \begin{cases} [a,b] & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \begin{cases} \frac{x-a}{\frac{a+b}{2}-a}, & \text{falls } x \in [a, \frac{a+b}{2}], \\ \frac{x-b}{\frac{a+b}{2}-b}, & \text{falls } x \in [\frac{a+b}{2}, b]. \end{cases} \end{cases}$$

und dann die Funktion

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \begin{cases} \Lambda_{[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}]}(x), & \text{falls } x \in [-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}] \text{ für } n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{falls } x = 0 \text{ oder } |x| \geq 1, \\ \Lambda_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}(x), & \text{falls } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \text{ für } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{cases}$$



Der Graph dieser Funktion besteht aus dreiecksförmigen Teilstücken, die bei Annäherung an $x = 0$ immer enger aneinander anschließen. Die Funktion ist in allen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig. In $a = 0$ ist sie nicht stetig, obwohl da keine Sprungstelle (vertikale Lücke) vorliegt.

7.4 Stetigkeit und Intervalle

7.4.1 Satz: Zwischenwertsatz Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ gilt:

(i) (Nullstellensatz von Bolzano) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$, so existiert eine Nullstelle c von f in $[a,b]$.

(ii) Es sei $\gamma \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < \gamma < f(b)$. Dann existiert eine Stelle c in $[a,b]$ mit $f(c) = \gamma$.

7.4.2 Beweis Wir zeigen zunächst (i).

(1) Aufgrund der Vollständigkeit existiert das Supremum

$$c := \sup \left\{ x \in [a,b] \middle| f(x) < 0 \right\},$$

da die Menge auf der rechten Seite nicht–leer (sie enthält a) und beschränkt (durch b) ist.

(2) Angenommen, es ist $f(c) \neq 0$. Dann existiert nach Satz 7.1.14 ein $\delta > 0$, so dass $f(x)$ für alle $x \in]c - \delta, c + \delta[\ \subseteq \ [a,b]$ das gleiche Vorzeichen hat wie $f(c)$.

(3) Im Fall $f(c) < 0$ wäre dann aber

$$f(x) < 0 \qquad \text{für alle } x \in [a, c + \delta[,$$

also gemäß Definition von c:

$$c \geq c + \delta.$$

(4) Im Fall $f(c) > 0$ wäre

$$f(x) > 0 \text{ für alle } x \in [c - \delta, c]$$

also gemäß Definition von c:

$$c \leq c - \delta.$$

Beides ist ein WIDERSPRUCH.

(5) Um (ii) zu zeigen, wende die Aussage (i) auf die Funktion $g(x) := f(x) - \gamma$ an.

7.4.3 Definition

Ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt *kompakt*, wenn es $a, b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $I = [a,b]$.

Kompaktheit ist eine Eigenschaft, die man auch anderen Teilmengen von $\mathbb{R}$, auch Teilmengen von $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{C}$, Teilmengen von anderen metrischen Räumen oder sogar von topologischen Räumen zuordnen kann. Uns genügt zunächst, dass wir wissen, wann reelle Intervalle kompakt sind.

7.4.4 Satz: Bilder von Intervallen bei stetigen Abbildungen

Es sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung.

Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ gilt:

(i) Das Bild $f(I)$ ist ein Intervall.

(ii) Ist das Intervall I kompakt, so ist auch das Bildintervall $f(I)$ kompakt.

7.4.5 Beweis Die Aussage (i) ist eigentlich eine direkte Folgerung aus dem Zwischenwertsatz. Nichtsdestoweniger überlegen wir etwas genauer:

Es seien $\alpha, \beta \in f(I)$ und $\alpha < \gamma < \beta$. Wir müssen zeigen, dass $\gamma \in f(I)$. Es gibt dann $a, b \in I$ mit $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, O.B.d.A. $a < b$. Die eingeschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig. Nach dem Zwischenwertsatz 7.4.1 (ii) gibt es $c \in [a, b] \subseteq I$ mit $f(c) = \gamma$, also $\gamma \in f(I)$.

Der Beweis von (ii) ist wesentlich auf den Satz 5.6.2 von Bolzano–Weierstraß gegründet.

Fall 1: Falls $f(I)$ nach unten beschränkt ist, setzen wir

$$C \ := \ \inf f(I).$$

Es existiert dann eine Folge (y_n) mit $y_n \in f(I)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = C$.

Fall 2: Falls $f(I)$ nicht nach unten beschränkt ist, gibt es eine Folge (y_n) mit $y_n \in f(I)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$.

In beiden Fällen gibt es zu jedem y_n mindestens ein $x_n \in I$, so dass $y_n = f(x_n)$. Die Folge (x_n) ist in I enthalten, deshalb beschränkt, sie besitzt also gemäß den Sätzen 5.6.2 (Bolzano–Weierstraß) und 5.5.4 eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} =: c.$$

Wegen $a \leq x_{n_k} \leq b$ folgt $a \leq c \leq b$, also $c \in I$. Aus der Stetigkeit von f folgt:

$$f(c) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = C.$$

(Der obige Fall 2 kann also gar nicht auftreten.) Damit ist

$$C = f(c) \in f(I),$$

das heißt das Infimum C von $f(I)$ ist sogar ein Minimum von $f(I)$.

Genauso kann man zeigen, dass

$$D = \max f(I) \in f(I).$$

Es muss nach dem Zwischenwertsatz 7.4.1 (ii) auch jeder Wert zwischen C und D von der Funktion f angenommen werden, also

$$f(I) = [C, D] = [\min f(I), \max f(I)].$$

Die Aussage (ii) des Satzes 7.4.4 zieht noch die folgende bemerkenswerte Eigenschaft nach sich:

7.4.6 Folgerung: Extrema stetiger Funktionen Eine stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten Intervall nimmt ihr Maximum und Minimum an.

7.4.7 Beispiele

(1) Ist I ein beliebiges Intervall, so nimmt die stetige Funktion id_I nur dann Maximum und Minimum an, wenn I kompakt ist.

(2) Die stetige Funktion

$$\begin{cases}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x(x-1)} \end{cases}$$

nimmt nicht ihr Maximum an.

Zum Schluss noch zwei etwas exotisch anmutende Beispiele, die einmal mehr die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ als für die Analysis grundlegende Eigenschaft herausstellen:

(3) Die Abbildung

$$\begin{cases} [0,2] \cap \mathbb{Q} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} -1, & \text{falls } x^2 < 2, \\ +1, & \text{falls } x^2 > 2, \end{cases} \end{cases}$$

ist stetig. Sie widerspricht — vermeintlich — den Aussagen der Sätze 7.4.1 und 7.4.4.

(4) Man kann diese Abbildung noch etwas variieren:

$$\begin{cases} [0,2] \cap \mathbb{Q} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} -1-x, & \text{falls } x^2 < 2, \\ +3-x, & \text{falls } x^2 > 2. \end{cases} \end{cases}$$

Sie ist ebenfalls stetig und nimmt nicht, wie in Folgerung 7.4.6 vermeintlich nahegelegt, ihr Minimum oder Maximum an.

7.5 Stetigkeit und Umkehrfunktion

7.5.1 Satz: Stetigkeit der Umkehrfunktion

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \to J$ eine surjektive stetige Funktion.

(i) Die Funktion f ist genau dann bijektiv, wenn sie streng monoton ist.

(ii) In diesem Fall ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$ ebenfalls stetig.

7.5.2 Bemerkung Die Umkehrabbildung f^{-1} einer stetigen bijektiven Abbildung f zwischen zwei metrischen Räumen ist nicht notwendig stetig. Sie werden dazu einige Beispiele kennenlernen.

7.5.3 Beweis (i) Wir wissen aus Satz 3.1.7, dass die strenge Monotonie die Injektivität impliziert.

Um die umgekehrte Richtung ,,injektiv" $\Rightarrow$,,streng monoton" zu zeigen, wird die Stetigkeit gebraucht.

Angenommen die bijektive Funktion f ist nicht streng monoton. Dann gibt es eine Stelle $y \in I$ und zwei weitere Stellen $x, z \in I$ links und rechts von y, deren Funktionswerte gegenüber dem von y die gleiche Relation aufweisen

$$\exists\, x, y, z \quad \text{mit} \quad x < y < z \quad \text{und} \quad \begin{array}{c} f(x) < f(y) > f(z) \\ \text{oder} \\ f(x) > f(y) < f(z). \end{array}$$

Wir betrachten jetzt nur die obere Zeile und nehmen dafür (O.B.d.A) an, dass

$$f(x) < f(z), \qquad \text{also} \qquad f(x) < f(z) < f(y).$$

Nach dem Zwischenwertsatz 7.4.1 enthält das Intervall $]x, y[$ ein w mit $f(w) = f(z)$. Wegen $w \neq z$ ist dies ein WIDERSPRUCH zur Injektivität von f.

(ii) Für den Beweis dieser Aussage nehmen wir O.B.d.A. an, dass f streng monoton steigend ist. Wir wissen aus Satz 3.1.7, dass f^{-1} ebenfalls streng monoton steigend ist.

Für ein festes $u \in J$ setzen wir $x = f^{-1}(u) \in I$. Aus technischen, nicht so sehr mathematisch–inhaltlichen, Gründen unterscheiden wir drei Fälle:

(i) x ist kein Randpunkt, d.h. ein innerer Punkt, von I,

(r) x ist rechter Randpunkt von I,

(ℓ) x ist linker Randpunkt von I.

Es sei jetzt $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen ein $\widetilde{\varepsilon}$ mit $0 < \widetilde{\varepsilon} < \varepsilon$ so, dass das Intervall

$$I_2 = [x_1, x_2] := \begin{cases} [x - \widetilde{\varepsilon}, x + \widetilde{\varepsilon}], & \text{falls (i)}, \\ [x - \widetilde{\varepsilon}, x], & \text{falls (r)}, \\ [x, x + \widetilde{\varepsilon}], & \text{falls } (\ell), \end{cases} \qquad \text{in } I \text{ enthalten ist.}$$

Das Intervall $[x_1, x_2]$ wird durch f auf das Intervall $[u_1, u_2] := [f(x_1), f(x_2)] \subseteq J$ abgebildet. Wir wählen jetzt

$$\delta := \begin{cases} \min\{u - u_1, u_2 - u\}, & \text{falls (i)}, \\ u - u_1, & \text{falls (r)}, \\ u_2 - u, & \text{falls } (\ell). \end{cases}$$

Dann gilt in jedem Fall $\delta > 0$ und die folgende Implikationskette

$$\begin{aligned} & |v - u| < \delta \text{ und } v \in J \\ \Longrightarrow\ & v \in [u_1, u_2] \\ \Longrightarrow\ & f^{-1}(v) \in [f^{-1}(u_1), f^{-1}(u_2)] = [x_1, x_2] \\ \Longrightarrow\ & f^{-1}(v) \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon] = [f^{-1}(u) - \varepsilon, f^{-1}(u) + \varepsilon] \\ \Longrightarrow\ & |f^{-1}(v) - f^{-1}(u)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir haben also zu $\varepsilon > 0$ das richtige δ gefunden. Damit ist die Stetigkeit der Umkehrfunktion gezeigt.

7.5.4 Beispiel und Definition: Die Wurzel-Funktion Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine feste natürliche Zahl. Nur der Fall $n \geq 2$ ist interessant. Dann ist die Funktion

$$\uparrow^n : \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto & x^n \end{cases}$$

stetig und streng monoton steigend. Satz 7.5.1 sichert nun die Existenz einer stetigen streng monoton steigenden Umkehrfunktion

$$\sqrt[n]{\ } : \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto & \sqrt[n]{x} \end{cases}$$

Sie heißt *n-fach-Wurzelfunktion*.

7.6 Grenzwerte bei Funktionen: Eine nützliche Notation

7.6.1 Definition Es seien M_1, M_2 zwei metrische Räume, $L \subseteq D \subseteq M_1$ Teilmengen von M_1, $f : D \to M_2$ eine Abbildung, $a \in M_1$, $c \in M_2$.

1. Wenn

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c \qquad \text{für alle Folgen } \underbrace{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = a,}_{(*)}$$

dann schreibt man: $\displaystyle\lim_{x\to a,\, x\in L} f(x) = c$ oder kürzer $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = c$.

2. Wenn

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c \qquad \text{für alle Folgen } \underbrace{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L \setminus \{a\} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = a,}_{(**)}$$

dann schreibt man: $\displaystyle\lim_{x\overset{\bullet}{\to} a,\, x\in L} f(x) = c$ oder kürzer $\displaystyle\lim_{x\overset{\bullet}{\to} a} f(x) = c$.

Dabei wird jeweils vorausgesetzt, dass mindestens eine Folge mit der Eigenschaft $(*)$ bzw. $(**)$ existiert. (L steht für Laufbereich, D für Definitionsmenge).

7.6.2 Bemerkungen

- Man sagt jeweils, dass der Grenzwert existiert.
- Im Fall $M_2 = \mathbb{R}$ sind auch die Fälle der uneigentlichen Grenzwerte $c = -\infty$ oder $c = +\infty$ erfasst. Vergleiche Abschnitt 5.8.
- Im Vergleich zu den in der Literatur vorhandenen Definitionen des Funktionsgrenzwerts erscheinen die obigen Definitionen überzogen aufwändig. Dort ist meist eine Unterscheidung der Mengen D (Definitionsmenge) und L („Laufbereich") oder eine Unterscheidung der beiden Notationen für Funktionsgrenzwerte unüblich. Der größere Aufwand hier ermöglicht (m.E.) ein genaueres und freieres Arbeiten.
- Es ist klar, dass sich alle Aussagen über Folgengrenzwerte (vgl. Satz 5.7.1) auf Funktionsgrenzwerte übertragen.

Mit Hilfe dieser Begriffe kann die Definition der Stetigkeit in Satz 7.1.1 (ii) umgeschrieben werden:

7.6.3 Satz Eine Abbildung $f : M_1 \to M_2$ zwischen zwei metrischen Räumen ist genau dann stetig in $a \in M_1$, wenn

- $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ existiert oder
- $\displaystyle\lim_{x\overset{\bullet}{\to} a} f(x)$ existiert und mit $f(a)$ übereinstimmt.

7.6.4 Definition Für den Fall, dass $L \subseteq D \subseteq M_1 = \mathbb{R}$ ist, definiert man noch weitere speziellere Funktionsgrenzwerte wie folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \nearrow a} f(x) &:= \lim_{x \to a,\, x \in D \,\cap\,]-\infty, a[} f(x) && \text{(linksseitiger Grenzwert)} \\ \lim_{x \searrow a} f(x) &:= \lim_{x \to a,\, x \in D \,\cap\,]a, +\infty[} f(x) && \text{(rechtsseitiger Grenzwert)} \end{aligned}$$

Auch die Fälle $a = +\infty$ bzw. $a = -\infty$ ließen sich noch zwanglos in die Definition einbeziehen.

7.6.5 Beispiele

- Die Signumfunktion besitzt in 0 einen linksseitigen Grenzwert:

  $$\lim_{x \nearrow 0} \operatorname{sgn}(x) = -1,$$

  da für jede Folge (x_n) mit $x_n < 0$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ gilt: $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(x_n) = -1$. Entsprechend besitzt sie einen rechtsseitigen Grenzwert

  $$\lim_{x \searrow 0} \operatorname{sgn}(x) = +1.$$

  Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} \operatorname{sgn}(x)$ existiert nicht, da unterschiedliche zulässige Folgen unterschiedliche oder keine Grenzwerte haben.

- Die Funktion

  $$\operatorname{sgn}^2 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \operatorname{sgn}(x)^2 = \begin{cases} +1, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases} \end{cases}$$

  hat in 0 den Grenzwert

  $$\lim_{x \overset{\bullet}{\to} a} \operatorname{sgn}^2(x) = +1.$$

  Der Grenzwert $\lim_{x\to a} \operatorname{sgn}^2(x)$ existiert aber nicht, da es zulässige Folgen (x_n) gibt mit $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}^2(x_n) = 0 \neq 1$, beispielsweise die Konstant–Null–Folge.

7.6.6 Satz Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und M ein metrischer Raum, $f : D \to M$ eine Funktion und $a \in L = D$ Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(A) Die Funktion f ist an der Stelle a stetig.

(B) Der Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x)$ existiert.

(C) Der Grenzwert $\lim_{x \overset{\bullet}{\to} a} f(x)$ existiert und es gilt:

$$\lim_{x \overset{\bullet}{\to} a} f(x) = f(a).$$

(D) Der links- und der rechtsseitige Grenzwert existieren und es gilt:

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) = f(a).$$

8 Elementare Funktionen

8.1 Die komplexe Exponentialfunktion

8.1.1 Definition Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine feste Zahl. Wir zeigen gleich, dass die *Exponentialreihe*

$$\exp z \quad := \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \ldots$$

(mit $0^0 := 1$) absolut konvergiert. Entsprechend heißt die Funktion

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \exp z \end{cases}$$

(komplexe) *Exponentialfunktion*.

Für jedes einzelne feste $z \in \mathbb{C}$ und $k \geq 2|z|$ gilt

$$\left| \frac{\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{z^k}{k!}} \right| = \left| \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{z^k} \right| = \frac{|z|}{k+1} \leq \frac{k}{2(k+1)} \leq \frac{1}{2},$$

also konvergiert die Reihe absolut aufgrund des Quotientenkriteriums.

8.1.2 Satz: Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion

Für zwei beliebige Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\exp z \cdot \exp w = \exp(z + w).$$

Daraus folgt gleich für alle $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{\exp z} = \exp(-z) \qquad \exp n = (\exp(1))^n.$$

8.1.3 Beweis Wir wenden den Satz über das Cauchy–Produkt (CP) auf die Exponentialfunktion an. Es gilt zunächst

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{\ell=0}^{k} \frac{z^\ell}{\ell!} \cdot \frac{w^{k-\ell}}{(k-\ell)!} = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{k!} \cdot \binom{k}{\ell} z^\ell \cdot w^{k-\ell} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} z^\ell \cdot w^{k-\ell} \overset{\text{BLS}}{=} \frac{(z+w)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir den Binomischen Lehrsatz 3.3.6 angewandt. Er ist für Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ (anstelle $a, b \in \mathbb{R}$) genauso gültig, wie eine Durchsicht des Beweises zeigt.

Es ist dann also

$$\exp z \cdot \exp w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \overset{\text{CP}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{k} \frac{z^\ell}{\ell!} \cdot \frac{w^{k-\ell}}{(k-\ell)!}}_{c_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^k}{k!} = \exp(z+w).$$

8.1.4 Satz: Stetigkeit der Exponentialfunktion

(i) Es ist $\lim\limits_{z \overset{\bullet}{\to} 0} \dfrac{\exp z - 1}{z} = 1.$

(ii) Die Exponentialfunktion ist stetig (auf ganz $\mathbb{C}$).

8.1.5 Beweis Es ist für $0 < |z| < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\exp z - 1}{z} - 1 \right| &= \left| \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - 1}{z} - 1 \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^k}{(k+1)!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |z|^k = \frac{|z|}{1-|z|} \leq 2|z|.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung (i).

Weiter ist für ein beliebiges festes $a \in \mathbb{C}$ und dann $z \overset{\bullet}{\to} a$

$$|\exp z - \exp a| = |\exp a| \cdot \underbrace{\left| \frac{\exp(z-a) - 1}{z-a} \right|}_{\to 1} \cdot \underbrace{|z-a|}_{\to 0} \overset{z \to a}{\longrightarrow} 0,$$

also exp stetig in a.

8.2 Die reelle Exponentialfunktion

Schränkt man die Definitionsmenge der Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ ein, so nimmt sie auch nur reelle Werte an. Genauer gilt:

8.2.1 Satz: Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion

Die auf $\mathbb{R}$ eingeschränkte Exponentialfunktion

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \exp x \end{cases}$$

ist streng monoton steigend und bijektiv.

8.2.2 Beweis

(1) Für $x > 0$ ist

$$\exp x = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq 1 + x > 1$$

und dann für $x > y > 0$:

$$\frac{\exp x}{\exp y} = \exp(x - y) > 1.$$

Also ist exp auf $\mathbb{R}^+$ positiv und streng monoton steigend.

(2) Wegen $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$ ist dann exp sogar auf $\mathbb{R}$ positiv und streng monoton steigend.

(3) Weiter folgt mit Satz 4.5.5 (i)

$$\lim_{n\to\infty} \exp n = \lim_{n\to\infty} (\underbrace{\exp 1}_{>1})^n = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \exp(-n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\exp n} = 0.$$

Da das Bild des Intervalls $\mathbb{R}$ unter der stetigen Funktion exp aufgrund von Satz 7.4.4 (i) ein Intervall sein muss, folgt $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$.

8.3 Die Logarithmus–Funktion

8.3.1 Definition: Natürlicher Logarithmus Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass die reelle Exponentialfunktion

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \exp x \end{cases}$$

mit der auf $\mathbb{R}^+$ eingeschränkten Wertemenge streng monoton steigend, bijektiv und stetig ist.

Gemäß der Sätze 3.1.7 und 7.5.1 gibt es eine Umkehrfunktion mit den gleichen Eigenschaften, die wir den *natürlichen Logarithmus* nennen:

$$\ln = \log : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \ln u. \end{cases}$$

International üblich ist die Bezeichnung log, wir benutzen die in der Schule übliche Bezeichnung ln.

Es gilt für alle $u, v \in \mathbb{R}^+$:

$$\ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v, \qquad \ln(\frac{1}{u}) = -\ln u, \qquad \ln 1 = 0.$$

8.3.2 Beweis Zu u, v existieren $x, y \in \mathbb{R}$, so dass

$$\exp x = u, \qquad \exp y = v.$$

Es folgt dann

$$\ln(u \cdot v) = \ln(\exp x \cdot \exp y) = \ln(\exp(x + y)) = x + y = \ln u + \ln v.$$

Die anderen Gleichungen ergeben sich daraus ganz einfach.

8.4 Die Euler'sche Zahl

8.4.1 Definition: Eulersche Zahl Wir definieren zum Schluss noch die *Euler'sche Zahl*

$$e \ := \ \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Wir werden später sehen, dass diese Euler'sche Zahl mit der in Abschnitt 5.9.2 eingeführten übereinstimmt.

8.4.2 Satz: Eulersche Zahl irrational Die Euler'sche Zahl e ist irrational.

8.4.3 Beweis Nimmt man an, dass $e = \frac{n}{m}$ rational, damit auch $\frac{1}{e} = \frac{m}{n}$ rational ist, so folgt mit Satz 6.2.7 (iii) über die Leibnizreihe so ein WIDERSPRUCH:

$$\Big| \underbrace{\frac{1}{e} \cdot n!}_{\in \mathbb{Z}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \cdot n!}{k!}}_{\in \mathbb{Z}} \Big| \ = \ n! \cdot \underbrace{\left| e^{-1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right|}_{\substack{\in \,]0, \frac{1}{(n+1)!}[\\ \text{(Satz 6.2.7 (iii))}}} \in \,]0,1[.$$

8.4.4 Bemerkung: e ist transzendent

Eine reelle (oder komplexe) Zahl r heißt *algebraisch*, wenn es ein Polynom p mit ganzzahligen Koeffizienten gibt, so dass $p(r) = 0$. Anderenfalls heißt r transzendent.

Beispielsweise sind Wurzeln $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$ von rationalen Zahlen als Nullstellen von $qx^n - p$ algebraisch.

Man kann beweisen, dass e transzendent ist. (Charles Hermite, 1873).

8.5 Verallgemeinerte Exponential und Logarithmusfunktion

8.5.1 Satz und Definition: Allgemeine Exponential- und Logarithmus-Funktion

Es sei $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Wir definieren die *Exponential- und Logarithmusfunktion zur Basis* a durch

$$a^{\uparrow} = \exp_a : \quad \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & a^x \ := \ \exp_a(x) \ := \ \exp(x \cdot \ln a) \end{cases}$$

$$\log_a : \quad \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \log_a(u) \ := \ \frac{\ln u}{\ln a} \end{cases}$$

und notieren gleich einige wesentliche Eigenschaften:

(i) Die beiden Funktionen sind invers zueinander.

(ii) Beide Funktionen sind stetig.

(iii) Beide Funktionen sind streng monoton steigend, falls $a > 1$, und streng monoton fallend, falls $a < 1$.

(iv) Es gelten die Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned} \exp_a x \cdot \exp_a y &= \exp_a(x+y) \qquad && x, y \in \mathbb{R} \\ \log_a(u \cdot v) &= \log_a u + \log_a v \qquad && u, v \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

8.5.2 Beweis

Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $\ln(a) \neq 0$ eine Konstante ist, lassen sich alle Eigenschaften direkt aus den entsprechenden Eigenschaften der natürlichen Pendants herleiten.

8.5.3 Bemerkungen

(1) Die Darstellung $\exp_a(x) = a^x$ ist gerechtfertigt, da für $x = n \in \mathbb{N}$ die „alte” Definition von a^n mit der neuen übereinstimmt:

$$a^n \overset{\text{neu}}{:=} \exp(n \cdot \ln a) = [\exp(\ln a)]^n \overset{\text{alt}}{=:} a^n.$$

(2) Auch für $a = 1$ lässt sich stimmig die Exponentialfunktion durch $a^x = 1$ definieren. Sie ist aber nicht bijektiv, so dass ein Logarithmus zur Basis 1 nicht existiert.

(3) Setzt man $a = e$, so folgt eine andere Schreibweise für die natürliche Exponentialfunktion: $\exp(x) = e^x$.

8.6 Verallgemeinerte Potenz- und Wurzelfunktion

8.6.1 Satz und Definition: Verallgemeinerte Potenz- und Wurzelfunktion

Es sei $b \in \mathbb{R}^\times$. Wir definieren die *Potenzfunktion zum Exponent b und die b-fach-Wurzelfunktion* durch

$$(\cdot)^b : \quad \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \quad \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto \quad x^b := \exp_x(b) := \exp(b \cdot \ln x) \end{cases}$$

$$\sqrt[b]{\cdot} : \quad \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \quad \mathbb{R}^+ \\ u & \mapsto \quad \sqrt[b]{u} := \exp(\frac{1}{b} \cdot \ln u) \end{cases}$$

und notieren einige wesentliche Eigenschaften:

(i) Die beiden Funktionen sind invers zueinander.

(ii) Beide Funktionen sind stetig.

(iii) Beide Funktionen sind streng monoton steigend, falls $b > 0$, und streng monoton fallend, falls $b < 0$.

(iv) Es gelten die Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned} x^b \cdot y^b &= (x \cdot y)^b, & x, y \in \mathbb{R}^+ \\ \sqrt[b]{u} \cdot \sqrt[b]{v} &= \sqrt[b]{u \cdot v}, & u, v \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

8.6.2 Bemerkungen

(1) Wir haben die Potenzfunktion und die Wurzelfunktion bereits in für alle $b \in \mathbb{N}$ definiert. Siehe beispielsweise Abschnitt 7.5.4. Nun sind sie für beliebige $b \in \mathbb{R}^\times$ definiert.

(2) Für $b = 0$ haben wir früher schon die Potenzfunktion durch $x^b = 1$ definiert. Sie ist aber nicht bijektiv, so dass eine 0-fach-Wurzelfunktion nicht existiert.

8.7 Die hyperbolischen Funktionen und ihre Umkehrfunktionen

8.7.1 Definition und Satz: Hyperbolischen Funktionen

Betrachte die sechs Funktionen

Cosinus hyperbolicus
$$\cosh : \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ & \to & [1,\infty[\\ x & \mapsto & \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{2\ell}}{(2\ell)!} \end{cases}$$

Areacosinus hyperbolicus
$$\operatorname{arcosh} : \begin{cases} [1,\infty[& \to & \mathbb{R}_0^+ \\ u & \mapsto & \ln(u+\sqrt{u^2-1}) \end{cases}$$

Sinus hyperbolicus
$$\sinh : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{2\ell+1}}{(2\ell+1)} \end{cases}$$

Areasinus hyperbolicus
$$\operatorname{arsinh} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \ln(u+\sqrt{u^2+1}) \end{cases}$$

Tangens hyperbolicus
$$\tanh : \begin{cases} \mathbb{R} & \to &]-1,+1[\\ x & \mapsto & \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \end{cases}$$

Areatangens hyperbolicus
$$\operatorname{artanh} : \begin{cases}]-1,+1[& \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u} \end{cases}$$

(i) Die beiden Funktionen innerhalb einer Zeile sind invers zueinander.

(ii) Die sechs Funktionen sind stetig und streng monoton wachsend.

8.7.2 Bemerkungen

1. Der hyperbolische Kosinus ist eigentlich auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, allerdings nur bei Einschränkung der Definitionsmenge wie oben bijektiv.

2. Man kann den hyperbolischen Kosinus bzw. Sinus auch auf $\mathbb{C}$ definieren. Beim hyperbolischen Tangens muss man aufpassen, da $e^z + e^{-z}$ Nullstellen auf $\mathbb{C}$ hat, wie wir später sehen werden.

8.7.3 Beweis Wir zeigen (i) nur für die dritte Zeile. Für $u \in\,]-1,+1[$ gilt

$$\begin{aligned} \tanh(\operatorname{artanh} u) &= \frac{\exp(\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}) - \exp(-\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u})}{\exp(\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}) + \exp(-\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u})} = \frac{\sqrt{\frac{1+u}{1-u}} - \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}}{\sqrt{\frac{1+u}{1-u}} + \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}} \\ &= \frac{\sqrt{(1+u)^2} - \sqrt{(1-u)^2}}{\sqrt{(1+u)^2} + \sqrt{(1-u)^2}} \overset{|u|<1}{=} \frac{(1+u)-(1-u)}{(1+u)+(1-u)} = u. \end{aligned}$$

Umgekehrt ist für $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{artanh}(\tanh x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}{1-\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}} = \frac{1}{2}\ln\frac{2\,e^x}{2\,e^{-x}} = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}) = x.$$

(ii) zeigen wir schrittweise:

(1) Als Kompositionen stetiger Funktionen sind die drei Funktionen links stetig.

(2) Satz 7.5.1(i) zeigt dann, dass auch die Funktionen rechts stetig sind.

(3) Dass cosh und sinh streng monoton wachsend sind, kann man direkt der Reihendarstellung entnehmen. Für tanh sieht man das aufgrund von $\tanh 0 = 0 < \tanh 1$ ein.

(4) Die Umkehrfunktionen haben dann alle wegen Satz 7.5.1(ii) das gleiche Monotonieverhalten.

8.7.4 Funktionalgleichungen für die hyperbolischen Funktionen

Es gelten einige Funktionalgleichungen, beispielsweise ($x, y \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\
\tanh(x+y) &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \cdot \tanh y}.
\end{aligned}$$

Zahlreiche andere Formeln kann man einer Formelsammlung entnehmen und, da man dazu ein Bedürfnis verspürt, leicht beweisen.

8.8 Trigonometrische Funktionen

8.8.1 Einstieg: Die Exponentialfunktion auf der imaginären Achse

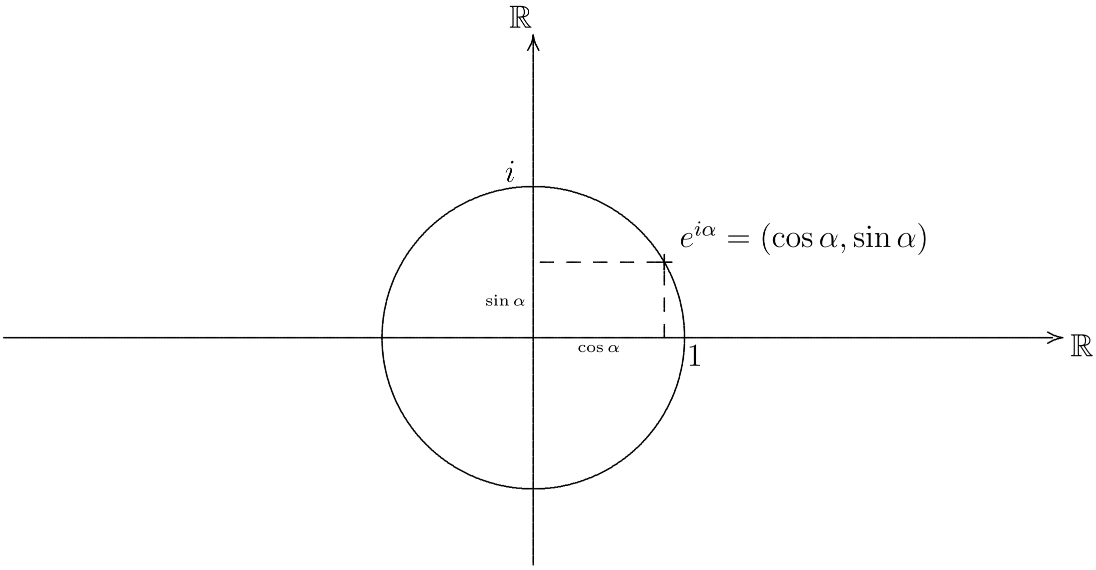
Aufgrund der Stetigkeit der Konjugiert–Komplex–Abbildung gilt

$$e^{\overline{z}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\overline{z}^k}{k!} = \lim_{n\to\infty}\overline{\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}} = \overline{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}} = \overline{e^z}$$

und dann für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$|e^{i\alpha}| = \sqrt{e^{i\alpha}\cdot\overline{e^{i\alpha}}} = \sqrt{e^{i\alpha}\cdot e^{\overline{i\alpha}}} = \sqrt{e^{i\alpha}\cdot e^{-i\alpha}} = \sqrt{e^0} = 1.$$

Das bedeutet also, dass komplexe Zahlen der Form $e^{i\alpha}$ mit einem rein imaginären Exponenten $i\alpha$ auf dem Einheitskreis in der Gauß'schen Ebene liegen.



8.8.2 Wir bestimmen Real- und Imaginärteil von $e^{i\alpha}$ innerhalb der Reihenentwicklung:

$$\begin{aligned}\exp(i\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\alpha)^k}{k!} = \sum_{\substack{k=0\\k \text{ gerade}}}^{\infty} i^k\cdot\frac{\alpha^k}{k!} + \sum_{\substack{k=0\\k \text{ ungerade}}}^{\infty} i^k\cdot\frac{\alpha^k}{k!}\\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{2\ell}\cdot\frac{\alpha^{2\ell}}{(2\ell)!} + \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{2\ell+1}\cdot\frac{\alpha^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!}\\ &= \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^\ell\cdot\frac{\alpha^{2\ell}}{(2\ell)!}}_{\mathrm{Re}(e^{i\alpha})} + i\cdot\underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^\ell\cdot\frac{\alpha^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!}}_{\mathrm{Im}(e^{i\alpha})}\end{aligned}$$

8.8.3 Definition Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir die beiden folgenden *trigonometrischen* Funktionen, die *Kosinus–Funktion* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die *Sinus–Funktion* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\cos\alpha \quad := \quad \mathrm{Re}(e^{i\alpha}) = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} \mp \ldots$$

$$\sin\alpha \quad := \quad \mathrm{Im}(e^{i\alpha}) = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} \mp \ldots$$

Aus der Definition ergibt sich die *Euler-Formel*

$$\cos\alpha + i\sin\alpha \quad = \quad e^{i\alpha}.$$

Ergänzend definieren wir die *Tangens–Funktion*

$$\tan : \begin{cases} \{\alpha \in \mathbb{R} | \cos\alpha \neq 0\} & \to \quad \mathbb{R} \\ \qquad\qquad \alpha & \mapsto \quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \end{cases}$$

Die verschiedenen Eigenschaften der Funktion $\alpha \mapsto e^{i\alpha}$ können jetzt — per Betrachtung von Real- bzw. Imaginärteil und deren Quotienten — in Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen übersetzt werden:

8.8.4 Formeln

$e^{i0} = 1$	$\cos 0 = 1$	$\sin 0 = 0$	$\tan 0 = 0$	
$\overline{e^{i\alpha}} = e^{i(-\alpha)}$	$\cos\alpha = \cos(-\alpha)$	$-\sin\alpha = \sin(-\alpha)$	$-\tan\alpha = \tan(-\alpha)$	(Schief–)Symmetrie
$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$	$\cos(\alpha+\beta) =$ $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$	$\sin(\alpha+\beta) =$ $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$	$\tan(\alpha+\beta) =$ $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$	Additionstheoreme
$\lvert e^{i\alpha}\rvert^2 = 1$	$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$			Trig. Pythagoras
$(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}$	$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$			Euler-deMoivre
$\lim\limits_{\alpha \overset{\bullet}{\to} 0} \frac{e^{i\alpha}-1}{i\alpha} = 1$	$\lim\limits_{\alpha \overset{\bullet}{\to} 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$	$\lim\limits_{\alpha \overset{\bullet}{\to} 0} \frac{\cos\alpha - 1}{\alpha} = 0$	$\lim\limits_{\alpha \overset{\bullet}{\to} 0} \frac{\tan\alpha}{\alpha} = 1$	Grenzwerte
stetig	stetig	stetig	stetig	

8.9 Die Zahl π

Den Einheitskreis innerhalb der komplexen Ebene bezeichnen wir mit

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}^1 = \Big\{ z \in \mathbb{C} \Big| |z| = 1 \Big\}.$$

Man spricht auch von der 1–*dimensionalen Sphäre*.

8.9.1 Präposition: Achtelbogen

(i) sin ist streng monoton wachsend auf dem Intervall $[0,1]$,
cos ist streng monoton fallend auf dem Intervall $[0,1]$.
(Diese Aussagen werden in Satz 8.10.1 erweitert.)

(ii) Es existiert eine reelle Zahl $\quad \pi \in]0,4[\quad$ mit $\quad e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

(iii) Die Abbildung

$$\begin{cases} [0, \frac{\pi}{4}[& \to & \Big\{ z \in \mathbb{S} \Big| 0 \le \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z \Big\} \\ \alpha & \mapsto & e^{i\alpha} \end{cases}$$

auf den „ersten Achtelbogen des Einheitskreises” ist bijektiv.

8.9.2 Beweis

(1) Wir beweisen zunächst die erste Aussage von (i). Für $\ell \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in [0,1]$, ist

$$\left| \frac{\alpha^{\ell+1} - \beta^{\ell+1}}{(\ell+1)!} \right| = \left| \frac{(\alpha-\beta) \cdot \sum_{j=0}^{\ell} \alpha^{\ell-j}\beta^j}{(\ell+1)!} \right| \le \left| \frac{(\alpha-\beta)\cdot(\ell+1)}{(\ell+1)!} \right| = \left| \frac{\alpha-\beta}{\ell!} \right| \le \left| \frac{\alpha-\beta}{2^{\ell-1}} \right|,$$

dann weiter für $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\alpha \neq \beta$

$$\left| \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\alpha - \beta} - 1 \right| \; = \; \left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1} - \beta^{2k+1}}{(2k+1)!(\alpha-\beta)} \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-1}} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{4})^k = \frac{2}{3}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\alpha - \beta} \ge \frac{1}{3}$$

und daraus die Behauptung.

(2) Aufgrund der Abschätzung im Leibniz–Satz 6.2.7(ii) über alternierende Reihen ist weiter für $\alpha \in [0,1]$

$$\alpha - \frac{\alpha^3}{6} \le \sin\alpha$$

und daher

$$\sin 0 = 0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 - \frac{1}{6} \le \sin 1.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es eine Zahl $\pi \in]0,4[$, deshalb $\frac{\pi}{4} \in]0,1[$, so dass $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(3) Es ist weiter

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha,$$

wegen der Stetigkeit des Kosinus und $\cos 0 = +1$ muss dann

$$\cos\alpha = +\sqrt{1-\sin^2\alpha}, \quad \alpha \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

sein. Damit folgt aus der ersten Aussage von (i) die zweite. Außerdem gilt $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(4) Zusammengefasst gilt also

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

(iii) folgt aus den Aussagen über die strengen Monotonien von cos und sin.

8.9.3 Definition: Kreiszahl π Die in der zweiten Aussage der Präposition beschriebene Zahl $\pi \in \mathbb{R}$ heißt die Kreiszahl (früher: die Ludolph'sche Konstante).

8.9.4 Satz: Die Einheitskreis-Abbildung

(i) Die Abbildung $e^{i\cdot} \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{S} \\ \alpha & \mapsto & e^{i\alpha} \end{cases}$ ist stetig und periodisch mit der Periode 2π, d.h.

$$\text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}: \quad e^{i(\alpha+2\pi)} = e^{i\alpha}.$$

Es sei $\sigma \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl. (Meist wird hier $\sigma = -\pi$ oder $\sigma = 0$ gesetzt).

(ii) Die Abbildung $\begin{cases} [\sigma, \sigma+2\pi[& \to & \mathbb{S} \\ \alpha & \mapsto & e^{i\alpha} \end{cases}$ ist stetig und bijektiv.

(iii) Die Umkehrabbildung $\arg_\sigma : \mathbb{S} \to [\sigma, \sigma+2\pi[$ — sie heißt *Argument(-funktion)* — ist nicht stetig in $e^{i\sigma} \in \mathbb{S}$.

(iv) Die beiden Abbildungen werden in Definitions- und Wertemenge wie folgt eingeschränkt:

$$e^{i\cdot} : \begin{cases}]\sigma, \sigma+2\pi[& \to & S_\sigma \\ \alpha & \mapsto & e^{i\alpha} \end{cases} \qquad \text{und}$$

$$\arg_\sigma : \begin{cases} S_\sigma & \to &]\sigma, \sigma+2\pi[\\ z & \mapsto & \arg_\sigma z, \end{cases}$$

wobei $S_\sigma := \{z \in \mathbb{S} | z \neq e^{i\sigma}\}$.

Die beiden Abbildungen sind invers zueinander und stetig.

8.9.5 Beweis Die Aussagen über die Stetigkeit in (i),(ii) ergeben sich aus der Stetigkeit der komplexen Exponentialfunktion, vgl. Satz 8.1.4 (ii).

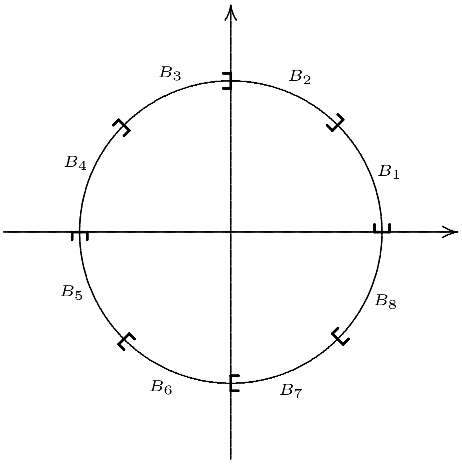
(i) Es ist

$$e^{i(\alpha+2\pi)} = e^{i\alpha}e^{i2\pi} = e^{i\alpha}\left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^4 = e^{i\alpha}i^4 = e^{i\alpha}.$$

Beim Beweis von (ii),(iii),(iv) behandeln wir zunächst den Fall $\sigma = 0$.

(ii) Der Einheitskreis besitzt eine Zerlegung (als disjunkte Vereinigungsmenge) in die folgenden acht Teilbögen:

$$\begin{aligned}
B_1 &:= \left\{ z \in \mathbb{S} \,\middle|\, 0 \le \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z \right\} \\
B_2 &:= \left\{ z \in \mathbb{S} \,\middle|\, 0 < \operatorname{Re} z \le \operatorname{Im} z \right\} \\
B_3 &:= \left\{ z \in \mathbb{S} \,\middle|\, 0 \le -\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z \right\} \\
B_4 &:= \left\{ z \in \mathbb{S} \,\middle|\, 0 < \operatorname{Im} z \le -\operatorname{Re} z \right\} \\
B_5 &:= \left\{ z \in \mathbb{S} \,\middle|\, 0 \le -\operatorname{Im} z < -\operatorname{Re} z \right\} \\
B_6 &:= \left\{ z \in \mathbb{S} \,\middle|\, 0 < \operatorname{Re} z \le -\operatorname{Im} z \right\} \\
B_7 &:= \left\{ z \in \mathbb{S} \,\middle|\, 0 \le \operatorname{Re} z < -\operatorname{Im} z \right\} \\
B_8 &:= \left\{ z \in \mathbb{S} \,\middle|\, 0 < -\operatorname{Im} z \le \operatorname{Re} z \right\}
\end{aligned}$$



Für $\ell \in \{1, \ldots, 8\}$ kann man nachrechnen, dass

$$z \in B_\ell \quad \Longleftrightarrow \quad \tfrac{1+i}{\sqrt{2}} z \in B_{\ell+1}, \qquad (\text{mit } B_9 := B_1),$$

weswegen die acht Abbildungen $\left\{ \begin{array}{rcl} B_\ell & \to & B_{\ell+1} \\ z & \mapsto & \frac{1+i}{\sqrt{2}} z \end{array} \right.$ bijektiv sind.

Für jedes $\ell \in \{1, \ldots, 8\}$ ist die Abbildung in der oberen Zeile des ,,kommutativen Diagramms"

$$\begin{tikzcd}
{[\frac{(\ell-1)\pi}{4}, \frac{\ell\pi}{4}[} \arrow[r, mapsto, "e^{i\cdot}"] \arrow[d, mapsto, "-\frac{(\ell-1)\pi}{4}"'] & B_\ell \\
{[0, \frac{\pi}{4}[} \arrow[r, mapsto, "e^{i\cdot}"] & B_1 \arrow[u, mapsto, "\cdot\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{\ell-1}"']
\end{tikzcd}$$

bijektiv, da sie aus den drei bijektiven Abbildungen unterhalb (vgl. auch Präpositoin 8.9.1) zusammengesetzt ist. Dann ist auch die Abbildung

$$e^{i\cdot}: \quad [0, 2\pi[= \bigcup_{\ell=1}^{8} [\tfrac{(\ell-1)\pi}{4}, \tfrac{\ell\pi}{4}[\qquad \longrightarrow \qquad \mathbb{S} = \bigcup_{\ell=1}^{8} B_\ell$$

bijektiv.

(iii) Für eine Folge (z_n) in B_8 mit $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$ gilt:

$$\arg_0(z_n) \geq \frac{7}{8} \cdot 2\pi, \qquad \text{aber} \qquad \arg_0(\lim_{n\to\infty} z_n) = \arg_0(1) = 0.$$

Also ist $\arg_0$ nicht stetig in 1.

(iv) Den Beweis der Stetigkeit von $\arg_0$ verschieben wir in den übernächsten Abschnitt 8.11.

Es bleibt noch der Fall eines beliebigen $\sigma \in \mathbb{R}$ zu betrachten. Dieser kann aber mit Hilfe des kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
]\sigma, \sigma + 2\pi[\arrow[r, mapsto, "e^{i\cdot}"] \arrow[d, mapsto, "-\sigma"'] & S_\sigma \\
]0, 2\pi[\arrow[r, mapsto, "e^{i\cdot}"] & S_0 \arrow[u, mapsto, "\cdot e^{i\sigma}"']
\end{tikzcd}$$

auf den Fall $\sigma = 0$ (in der unteren Zeile) zurückgeführt werden.

Jetzt kann man eine mehr oder weniger umfangreiche Formelsammlung für die trigonometrischen Funktionen erarbeiten.

8.9.6 Formeln Vorzeichenverteilung:

$\alpha \in$	$]0, \frac{\pi}{2}[$	$]\frac{\pi}{2}, \pi[$	$]\pi, \frac{3\pi}{2}[$	$]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$
$\cos\alpha$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\sin\alpha$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\tan\alpha$	$+$	$-$	$+$	$-$

Werte bei den vierten und achten Einheitswurzeln

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
$e^{i\alpha}$	1	i	-1	$-i$	1	$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$	$\frac{1-i}{\sqrt{2}}$
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\tan\alpha$	0	$-$	0	$-$	0	1	-1	1	-1

Werte bei den zwölften Einheitswurzeln

α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$e^{i\alpha}$	$\frac{\sqrt{3}+i}{2}$	$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$	$\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$	$\frac{\sqrt{3}-i}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Periodizität und „Schief–Periodizität"

$e^{i(\alpha+2\pi)} = e^{i\alpha}$	$e^{i(\alpha+\pi)} = -e^{i\alpha}$	$e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} = ie^{i\alpha}$
$\cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha$	$\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$	$\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$
$\sin(\alpha+2\pi) = \sin\alpha$	$\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha$	$\sin(\alpha+\frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$
$\to$	$\tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha$	$\tan(\alpha+\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan\alpha}$

8.10 Die Arcus–Funktionen

8.10.1 Satz: Arcus–Funktionen

Die in ihren Definitionsmengen eingeschränkten Funktionen

$$\sin : \begin{cases} [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] & \to & [-1, +1] \\ \alpha & \mapsto & \sin\alpha \end{cases}$$

$$\cos : \begin{cases} [0, +\pi] & \to & [-1, +1] \\ \alpha & \mapsto & \cos\alpha \end{cases}$$

$$\tan : \begin{cases}]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ \alpha & \mapsto & \tan\alpha \end{cases}$$

sind streng monoton wachsend/fallend/wachsend, bijektiv und stetig.

Sie besitzen also — gemäß Satz 7.5.1 — Umkehrfunktionen mit den jeweils gleichen Eigenschaften:

$$\arcsin : \begin{cases} [-1, +1] & \to & [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \\ x & \mapsto & \arcsin x \end{cases}$$

$$\arccos : \begin{cases} [-1, +1] & \to & [0, +\pi] \\ x & \mapsto & \arccos x \end{cases}$$

$$\arctan : \begin{cases} \mathbb{R} & \to &]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\\ x & \mapsto & \arctan x. \end{cases}$$

8.10.2 Beweis Zunächst zu den Aussagen über die strenge Monotonie.

Sinus: Wir schreiben

$$\sin\alpha = \begin{cases} -\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha), & \text{falls } \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}], \\ -\sin(-\alpha), & \text{falls } \alpha \in [-\frac{\pi}{4}, 0], \\ \sin\alpha, & \text{falls } \alpha \in [0, \frac{\pi}{4}], \\ \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha), & \text{falls } \alpha \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

und haben damit die Aussage auf die in Präposition 8.9.1(i) zurückgeführt.

Kosinus: Das gründet sich auf die Funktionalgleichung

$$\cos\alpha = \cos(-\alpha) = \sin(-\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}).$$

Tangens: Auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}[$ sind sowohl die Sinusfunktion als auch die Funktion $\frac{1}{\cos}$ nicht-negativ und streng monoton steigend, also ist auch ihr Produkt, die Tangens–Funktion, auf $[0, \frac{\pi}{2}[$ streng monoton steigend. Wegen der Schiefsymmetrie ($\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$) ist die Tangens–Funktion auf dem Intervall $]-\frac{\pi}{2}, 0]$ ebenfalls streng monoton steigend. Daraus folgt, dass sie auf dem ganzen Intervall $]\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ streng monoton steigend ist.

Die Surjektivität folgt dann jeweils aus den Aussagen

$$\begin{aligned} \sin(-\tfrac{\pi}{2}) &= -1, & \sin(+\tfrac{\pi}{2}) &= +1, \\ \cos 0 &= +1, & \cos\pi &= -1, \\ \lim_{\alpha \searrow -\frac{\pi}{2}} \tan\alpha &= -\infty, & \lim_{\alpha \nearrow +\frac{\pi}{2}} \tan\alpha &= +\infty. \end{aligned}$$

8.11 Die Argument-Funktion

8.11.1 Präposition: Sehnenlänge Die „Sehnenlängen–Funktion"

$$\mathrm{ch} : \begin{cases} [-\pi, +\pi] & \to & [-2, 2] \\ \alpha & \mapsto & \begin{cases} -|e^{i\alpha} - 1| = -\sqrt{2 - 2\cos\alpha}, & \text{falls } \alpha \le 0, \\ +|e^{i\alpha} - 1| = +\sqrt{2 - 2\cos\alpha}, & \text{falls } \alpha \ge 0, \end{cases} \end{cases}$$

ist streng monoton steigend, bijektiv, stetig und schiefsymmetrisch.

8.11.2 Beweis Tatsächlich ist

$$|e^{i\alpha} - 1| = \sqrt{(e^{i\alpha} - 1) \cdot (e^{-i\alpha} - 1)} = \sqrt{2 - 2\cos\alpha}.$$

Die beiden Teilfunktion sind streng monoton steigend und stetig auf ihren Intervallhälften. Da die beiden Teilfunktionen an der gemeinsamen Definitionsstelle 0 übereinstimmen, gilt dies auch für die gesamte Funktion. Die Surjektivität ergibt sich durch Einsetzen der Endpunkte der Intervalle. Die Schiefsymmetrie ist eine Folge der Symmetrie des Kosinus.

8.11.3 Beweis: Satz 8.9.4(iv) Wir können jetzt den Beweis vervollständigen, also zeigen, dass die Abbildung

$$\arg_0 : \begin{cases} S_0 & \to &]0, 2\pi[\\ z & \mapsto & \arg_0 z \end{cases}$$

stetig ist.

Es sei $z = e^{i\alpha} \in \mathbb{S}$ mit $\alpha \in]0, 2\pi[$, also $\arg_0 z = \alpha$.

Zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ sei zunächst $\varepsilon' > 0$ so gewählt, dass

$$]\alpha - \varepsilon', \alpha + \varepsilon'[\ \subseteq \ ]0, 2\pi[, \qquad \text{insbesondere } \varepsilon' < \pi.$$

Setze $\delta := \mathrm{ch}(\varepsilon')$.

Es sei jetzt $w \in S_0$ mit $|w - z| < \delta$.

Wähle ein $\beta \in]\alpha - \pi, \alpha + \pi[$, so dass $w = e^{i\beta}$. Dann gilt:

$$|\,\mathrm{ch}(\beta - \alpha)| = |e^{i(\beta-\alpha)} - 1| \cdot \underbrace{|e^{i\alpha}|}_{=1} = |e^{i\beta} - e^{i\alpha}| = |w - z| < \delta = \mathrm{ch}(\varepsilon'),$$

wegen strenger Monotonie und Schiefsymmetrie der Funktion ch folgt

$$|\beta - \alpha| < \varepsilon', \qquad (*)$$

was äquivalent ist zu

$$\beta \in]\alpha - \varepsilon', \alpha + \varepsilon'[\ \subseteq \ ]0, 2\pi[.$$

Daraus folgt aber $\beta = \arg_0(w)$ und wir können die Ungleichung $(*)$ umschreiben in

$$|\arg_0(w) - \arg_0(z)| < \varepsilon' < \varepsilon,$$

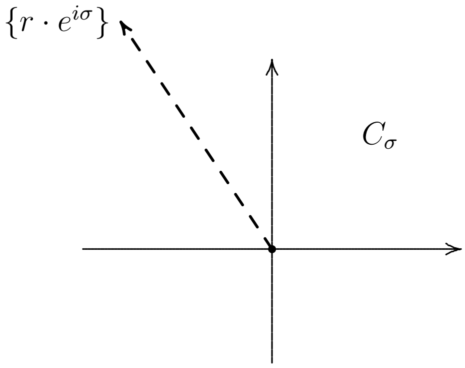
die zu beweisen war.

8.11.4 Geschlitzte komplexe Ebene

Es sei $\sigma \in \mathbb{R}$ wieder eine feste Zahl. Wir betrachten die Menge

$$C_\sigma \;:=\; \mathbb{C} \setminus \{r \cdot e^{i\sigma} | r \geq 0\} \;=\; \mathbb{R}^+ \cdot S_\sigma,$$

das ist die ,,entlang dem Strahl $\{r \cdot e^{i\sigma}\}$ aufgeschnittene komplexe Ebene".



8.11.5 Erweiterung der Argument-Funktion Wir erweitern jetzt die Definitionsmenge S_σ der Argumentfunktion $\arg_\sigma$ aus Satz 8.9.4(iv) auf die geschlitzte komplexe Ebene C_σ wie folgt:

$$\arg_\sigma : \left\{ \begin{array}{rcl} C_\sigma & \to &]\sigma, \sigma + 2\pi[\\ z & \mapsto & \arg_{\sigma,\text{bisher}}(\frac{z}{|z|}) \end{array} \right.$$

Sie gibt — bildlich gesprochen — den *Winkel* (im Bogenmaß) zwischen dem Ursprungsstrahl durch z und der positiven reellen Achse an. Dabei wird der Winkelbereich durch das Intervall $]\sigma, \sigma + 2\pi[$, also durch die Zahl σ vorgegeben.

Man bemerke, dass das Argument zweier komplexer Zahlen übereinstimmt, wenn sie auf dem gleichen Ursprungsstrahl liegen:

$$\arg_\sigma(r \cdot z) \;=\; \arg_\sigma(z), \qquad \text{falls } r > 0.$$

8.11.6 Satz: Argumentfunktion

(i) Für $z \in C_\sigma$ gilt

$$e^{i \arg_\sigma(z)} \;=\; \frac{z}{|z|}.$$

(ii) Für $\alpha \in]\sigma, \sigma + 2\pi[$ gilt

$$\arg_\sigma(e^{i\alpha}) \;=\; \alpha.$$

(iii) Für $z \in C_\sigma$ gilt

$$\tan \arg_\sigma z \;=\; \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}, \qquad \text{falls } \operatorname{Re} z \neq 0,$$

(iv) Es ist

$$\arg_\sigma z \quad = \quad \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} + \ell\pi,$$

wobei die ganze Zahl $\ell \in \mathbb{Z}$ so gewählt werden muss, dass die beiden Bedingungen

$$\arg_\sigma z \quad \in \quad]\sigma, \sigma + 2\pi[$$

und

$$\arg_\sigma z \quad \in \quad \begin{cases}]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[+ 2\mathbb{Z}\pi, & \text{falls } \operatorname{Re} z > 0, \quad \text{(rechter Halbkreisbogen)} \\ ]+\frac{\pi}{2}, +\frac{3}{2}\pi[+ 2\mathbb{Z}\pi, & \text{falls } \operatorname{Re} z < 0, \quad \text{(linker Halbkreisbogen).} \end{cases}$$

erfüllt sind.

8.11.7 Beweis (i) Es ist für $z \in C_\sigma$

$$e^{i \arg_\sigma(z)} \quad = \quad e^{i \arg_{\sigma,\text{bisher}}(\frac{z}{|z|})} \quad = \quad \frac{z}{|z|}.$$

(ii) Es ist für $\alpha \in]\sigma, \sigma + 2\pi[$

$$\arg_\sigma(e^{i\alpha}) \quad = \quad e^{i \arg_{\sigma,\text{bisher}}(\frac{e^{i\alpha}}{|e^{i\alpha}|})} \quad = \quad \alpha.$$

(iii) Es gilt für $z \in C_\sigma$ mit $\operatorname{Re} z \neq 0$

$$\tan \arg_\sigma z \quad = \quad \frac{\sin \arg_\sigma z}{\cos \arg_\sigma z} \quad = \quad \frac{|z| \cdot \sin \arg_\sigma z}{|z| \cdot \cos \arg_\sigma z} \quad = \quad \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}.$$

(iv) Bei der Anwendung von arctan auf beiden Seiten dieser Gleichung muss man vorsichtig sein, da

- der Tangens nur bijektiv ist, wenn die Definitionsmenge eingeschränkt wird, beispielsweise auf $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$. Siehe Satz 8.10.1(iii)
- die Bildmenge von $\arg_\sigma$ das Intervall $]\sigma, \sigma + 2\pi[$ ist.

Diese beiden Probleme werden durch die im Satz formulierten Bedingungen an die Zahl ℓ aufgefangen.

8.11.8 Bemerkung Es lassen sich auch zu (iii) und (iv) analoge Aussagen formulieren für den Fall, dass $\operatorname{Im} z \neq 0$ ist. Es treten dann die beiden zueinander inversen stetigen streng monoton fallenden Funktionen

$$\cot : \begin{cases}]0, \pi[& \to & \mathbb{R} \\ \alpha & \mapsto & \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases} \qquad \operatorname{arccot} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to &]0, \pi[\\ x & \mapsto & \operatorname{arccot} x \end{cases}$$

in Erscheinung.

8.12 Polarkoordinaten

8.12.1 Satz: Polarkoordinaten

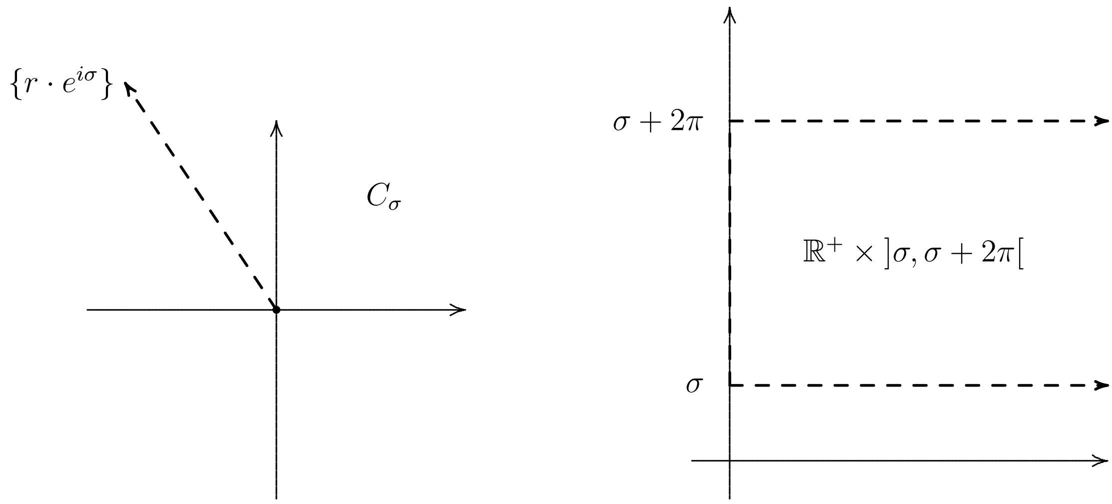
Es sei $\sigma \in \mathbb{R}$ eine fest gewählte Zahl. Die beiden Funktionen

$$\mathrm{poc}_\sigma : \begin{cases} C_\sigma & \to & \mathbb{R}^+ \times \,]\sigma, \sigma + 2\pi[\\ z & \mapsto & (\,|z|, \arg_\sigma z) \end{cases}$$

und

$$\mathrm{poc}_\sigma^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times \,]\sigma, \sigma + 2\pi[& \to & C_\sigma \\ (r, \alpha) & \mapsto & r \cdot e^{i\alpha} = r \cos\alpha + i\, r \sin\alpha. \end{cases}$$

sind zueinander invers und stetig. Sie bilden das *Polarkoordinatensystem* für C_σ.



Die Stetigkeit müssten wir eigentlich noch exakt unter Berücksichtigung der Metrik auf dem Streifen $\mathbb{R}^+ \times \,]\sigma, \sigma + 2\pi[$ begründen. Wesentlich dabei ist, dass die beteiligten ,,Funktions–Bausteine" stetig sind.

8.13 Der Komplexe Logarithmus

8.13.1 Satz: Komplexer Logarithmus

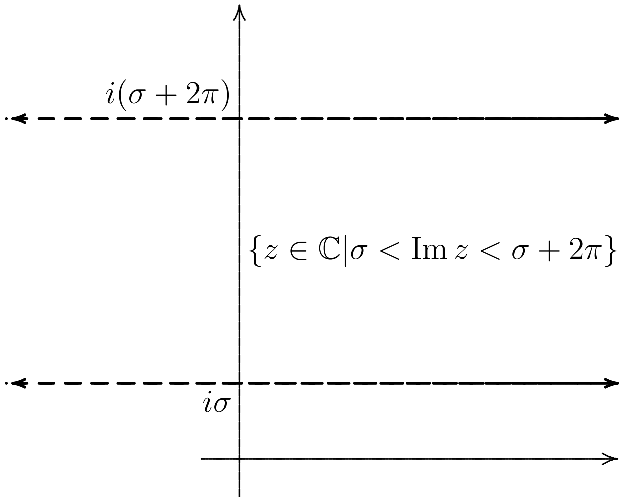
Schränkt man die komplexe Exponentialfunktion in Definitionsmenge und Wertemenge wie folgt ein,

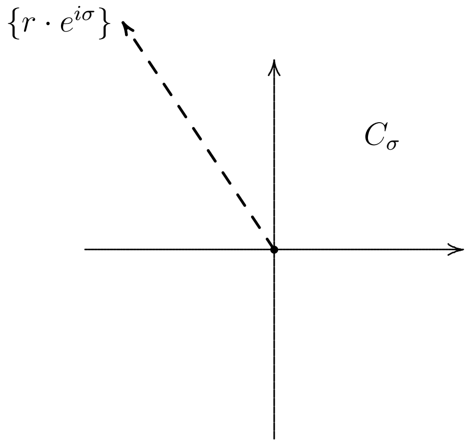
$$\mathrm{Exp}_\sigma : \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} | \sigma < \mathrm{Im}\, z < \sigma + 2\pi\} & \to & C_\sigma \\ z & \mapsto & e^z, \end{cases}$$

so ist sie bijektiv mit dem *komplexen Logarithmus*

$$\mathrm{Log}_\sigma : \begin{cases} C_\sigma & \to & \{z \in \mathbb{C} | \sigma < \mathrm{Im}\, z < \sigma + 2\pi\} \\ w & \mapsto & \ln |w| + i \arg_\sigma w \end{cases}$$

als stetiger Umkehrfunktion.





Damit haben wir eine Umkehrfunktion für die komplexe Exponentialfunktion — aber nur auf C_σ — gefunden. Die Ungleichheit

$$\mathrm{Log}_0((-i)^2) = \mathrm{Log}_0(-1) = i\pi \neq i3\pi = 2 \cdot i\frac{3}{2}\pi = 2 \cdot \mathrm{Log}_0(-i)$$

zeigt, dass die Funktionalgleichung für den Logarithmus nicht ohne weiteres von $\mathbb{R}^+$ auf C_σ erweitert werden kann. Nur mit Hilfe weiterführender mathematischer Theorien, die im Rahmen der Funktionentheorie auf dem Begriff der *Überlagerung* basieren, ist eine solche Erweiterung dann doch wieder möglich.

9 Differenzierbare Funktionen

9.1 Definition

In diesem Kapitel sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und die Zahl $a \in D$ habe die Eigenschaft, dass es mindestens eine Folge $(x_n) \subseteq D \setminus \{a\}$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Man denke dabei immer an Intervalle D.

$\mathbb{K}$ sei einer der beiden Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Das Symbol $\mathbb{K}$ ist dabei nützlich zur Kennzeichnung der Wertemenge der betrachteten Funktionen. Der wesentliche Gehalt der Differentialrechnung offenbart sich schon für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Umgekehrt könnte man für $\mathbb{K}$ noch allgemeinere Mengen, nämlich endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume oder so genannte Banachräume zulassen.

9.1.1 Definition und Satz: Differenzierbarkeit Es sei $f : D \to \mathbb{K}$ eine Funktion, $a \in D$, $A \in \mathbb{K}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(A) Die Funktion heißt *differenzierbar an der Stelle* a (kürzer: in a) mit *Ableitung* A.

(B) Der Grenzwert

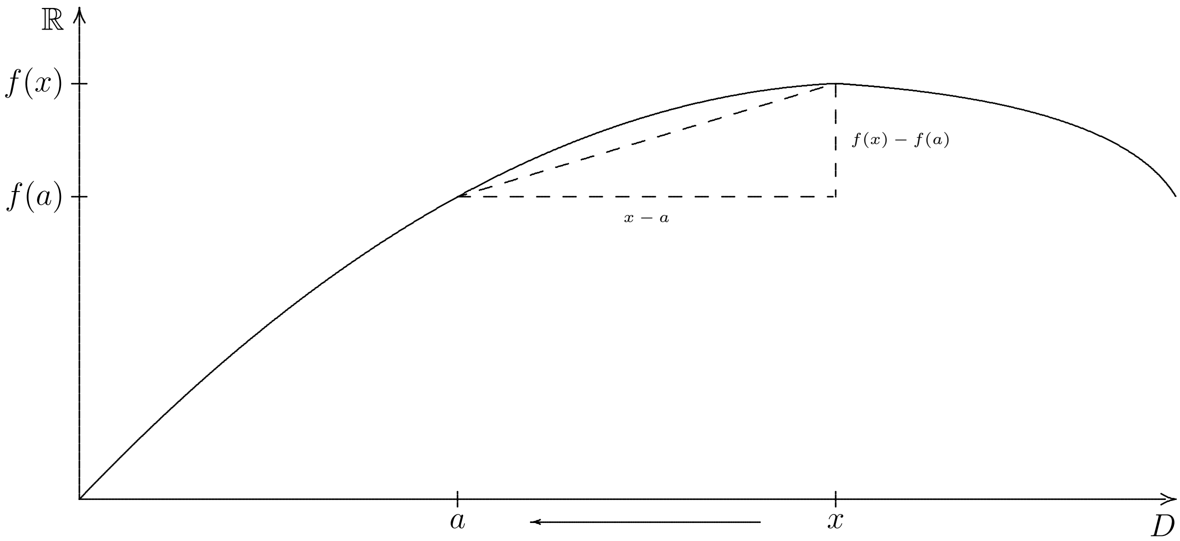
$$A \;:=\; \lim_{x \overset{\bullet}{\to} a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \;=\; \lim_{h \overset{\bullet}{\to} 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(mit Laufbereich $L = D \setminus \{a\}$) existiert.

(C) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(a) - A \cdot (x - a)| \le \varepsilon \cdot |x - a|, \qquad \text{falls} \qquad |x - a| \le \delta.$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ kann die Ableitung geometrisch als die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$ interpretiert werden.



Der *Differenzenquotient*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

gibt dabei die Steigung der Sekante an. Beachte, dass das Symbol Δ keine eigenständige Bedeutung hat. Der Grenzwert des Differenzenquotienten heißt auch *Differentialquotient* oder *Differenzialquotient*.

9.1.2 Beweis Die Äquivalenz von (B) und (C) ergibt sich wie folgt:

Es existiert der Grenzwert

$$A := \lim_{x \overset{\bullet}{\to} a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

$\Longleftrightarrow$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - A \right| < \varepsilon, \qquad \text{falls } 0 < |x - a| < \delta.$$

$\Longleftrightarrow$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - A \right| \le \varepsilon, \qquad \text{falls } 0 < |x - a| \le \delta.$$

$\Longleftrightarrow$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(a) - A \cdot (x - a)| \le \varepsilon \cdot |x - a|, \qquad \text{falls } |x - a| \le \delta.$$

9.1.3 Bemerkung Die Definition (C) mutet zunächst sehr abstrakt und umständlich an. Ihr Vorteil besteht aber darin, dass das ,,Dividieren” vermieden wird. Das ist für die ,,Abschätzerei der Differentialrechnung” von Vorteil, da man dann nicht ständig dem Fall ,,Nenner gleich Null” Beachtung schenken muss. Außerdem birgt sie den Ansatzpunkt für eine Verallgemeinerung der Differentialrechnung auf mehrdimensionale Funktionen.

9.1.4 Definition

1. Die Funktion heißt *differenzierbar auf D*, wenn sie an jeder Stelle $a \in D$ differenzierbar ist. Ist dies der Fall, so kann die Funktion

$$f' = \frac{df}{dx} : \begin{cases} D & \to & \mathbb{K} \\ a & \mapsto & \lim\limits_{x \overset{\bullet}{\to} a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{cases}$$

gebildet werden. Sie heißt *Ableitungsfunktion* oder einfach *Ableitung* der Funktion f.

2. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Existieren die Grenzwerte

$$\lim_{x \nearrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

so spricht man von der *linksseitigen* bzw. *rechtsseitigen Ableitung* in a.

Die Ableitung an einer Stelle a existiert genau dann, wenn

- die beiden einseitigen Ableitungen existieren,
- und diese übereinstimmen.

9.2 Beispiele

1. Ist $f : D \to \mathbb{K}$ eine konstante Funktion, $f(x) = c$ für alle $x \in D$, so gilt

$$f'(a) = \lim_{x \overset{\bullet}{\to} a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \overset{\bullet}{\to} a} \frac{c - c}{x - a} = 0$$

   für jedes $a \in D$. Die Ableitung ist die Konstant–Null-Funktion.

2. Die Identität $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ hat als Ableitung die Konstant–Eins–Funktion. Für beliebiges $a \in D$ gilt nämlich:

$$f'(a) = \lim_{x \overset{\bullet}{\to} a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \overset{\bullet}{\to} a} \frac{x - a}{x - a} = 1.$$

3. Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Die Potenz–Funktion $f : x \mapsto x^n$ hat als Ableitung die Funktion

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}.$$

   Dazu überlegen wir zunächst mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes

$$\begin{aligned} x^n - a^n &= [(x-a) + a]^n - a^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-a)^k \cdot a^{n-k} - a^n \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x-a)^k \cdot a^{n-k} \end{aligned}$$

   und dann

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x-a)^{k-1} \cdot a^{n-k}.$$

   Jetzt kann man die Ableitung ausrechnen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \overset{\bullet}{\to} a} \frac{x^n - a^n}{x - a} &= \lim_{x \overset{\bullet}{\to} a} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x-a)^{k-1} \cdot a^{n-k} \\ &= \lim_{x \overset{\bullet}{\to} a} \binom{n}{1} (x-a)^{1-1} \cdot a^{n-1} = n \cdot a^{n-1}. \end{aligned}$$

4. Die Hyperbel–Funktion und ihre Ableitung sind gegeben durch

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right. \qquad f' : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1}{x^2}. \end{array} \right.$$

   Zur Begründung:

$$\lim_{h \overset{\bullet}{\to} 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \lim_{h \overset{\bullet}{\to} 0} \frac{a - (a+h)}{h(a+h)a} = \lim_{h \overset{\bullet}{\to} 0} \frac{-1}{(a+h)a} = -\frac{1}{a^2}.$$

5. Wir betrachten die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ auf $\mathbb{R}$. Zu jedem $a \neq 0$ gibt es eine ε–Umgebung, so dass die Betragsfunktion mit der Funktion $x \mapsto x$ oder $x \mapsto -x$ übereinstimmt. Deshalb ist sie an diesen Stellen differenzierbar mit

$$f'(a) = \operatorname{sgn}(a).$$

An der Stelle $a = 0$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow a} \frac{|x| - |a|}{x - a} &= \lim_{x \searrow a} \frac{x - a}{x - a} = +1 \\ \lim_{x \nearrow a} \frac{|x| - |a|}{x - a} &= \lim_{x \nearrow a} \frac{(-x) - (-a)}{x - a} = -1. \end{aligned}$$

Es existieren die einseitigen Ableitungen. Sie sind aber verschieden. Die Betragsfunktion ist nicht in $a = 0$ differenzierbar.

6. Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat sich selbst als Ableitungsfunktion. Tatsächlich ist aufgrund Satz 8.1.4(i)

$$\begin{aligned} \lim_{x \overset{\bullet}{\to} a} \frac{\exp x - \exp a}{x - a} &= \lim_{x \overset{\bullet}{\to} a} \frac{\exp(x - a) - 1}{x - a} \cdot \exp a \\ &= \lim_{h \overset{\bullet}{\to} 0} \frac{\exp h - 1}{h} \cdot \exp a = \exp a. \end{aligned}$$

7. Eine komplexwertige Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ ist genau dann in a differenzierbar, wenn die beiden reellwertigen Funktionen $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ in a differenzierbar sind. Es gilt dann:

$$f'(a) = (\operatorname{Re} f)'(a) + i(\operatorname{Im} f)'(a).$$

Zur Begründung braucht man nur die Definition (B) in Satz 9.1.1 zu betrachten. Die Aufspaltung in Real- und Imaginärteil schlägt auf die Grenzwerte durch.

8. Die Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ \alpha & \mapsto & e^{i\alpha} \end{cases}$$

hat als Ableitung

$$f'(\alpha) = \lim_{\varphi \overset{\bullet}{\to} \alpha} \frac{e^{i\varphi} - e^{i\alpha}}{\varphi - \alpha} = \lim_{\varphi \overset{\bullet}{\to} \alpha} \frac{e^{i(\varphi - \alpha)} - 1}{\varphi - \alpha} \cdot e^{i\alpha} = \lim_{h \overset{\bullet}{\to} 0} \frac{e^{ih} - 1}{ih} \cdot ie^{i\alpha} = ie^{i\alpha}.$$

9. Die Zerlegungen von f und f' in Real- und Imaginärteil

$$\begin{aligned} f(\alpha) = e^{i\alpha} &= \cos\alpha + i \sin\alpha \\ f'(\alpha) = ie^{i\alpha} &= i(\cos\alpha + i\sin\alpha) = -\sin\alpha + i\cos\alpha. \end{aligned}$$

liefern dann die Ableitungen der Sinus- und Kosinusfunktion:

$$\sin' \alpha = \cos \alpha, \qquad \cos' \alpha = -\sin \alpha.$$

Diese Ableitungen können auch direkt mit Hilfe der Grenzwerte und Additionstheoreme aus den Formeln 8.8.4 berechnet werden, was wir am Beispiel des Sinus vorführen. Zunächst gilt mit den Additionstheoremen:

$$\frac{\sin(\alpha + h) - \sin \alpha}{h} = \frac{\sin(\alpha + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}) - \sin(\alpha + \frac{h}{2} - \frac{h}{2})}{h} =$$
$$\frac{2\cos(\alpha + \frac{h}{2})\ \sin \frac{h}{2}}{h} = \frac{\cos(\alpha + \frac{h}{2})\ \sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \stackrel{h \stackrel{\bullet}{\to} 0}{\longrightarrow} \cos \alpha,$$

der Grenzübergang $h \stackrel{\bullet}{\to} 0$ erfolgt dabei mit Hilfe von $\lim_{h \stackrel{\bullet}{\to} 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$ und der Stetigkeit des Kosinus.

9.3 Differenzierbarkeit und Stetigkeit

9.3.1 Satz: Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit

Es sei $f : D \to \mathbb{K}$ eine Funktion.

(i) Ist f an der Stelle $a \in D$ differenzierbar, so gibt es ein $\delta > 0$ und eine Konstante $L > 0$, so dass

$$|f(x) - f(a)| \leq L \cdot |x - a|, \qquad \text{falls } |x - a| \leq \delta.$$

Man sagt dazu, dass f *Lipschitz–stetig* in a ist.

(ii) Ist die Funktion f an der Stelle a differenzierbar, so ist sie an dieser Stelle auch stetig.

9.3.2 Beweis (i) Zu der Zahl $\varepsilon = 1$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a)| \leq 1 \cdot |x - a|, \qquad \text{falls } |x - a| \leq \delta.$$

Für diese x gilt dann weiter

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a)| + |f'(a) \cdot (x - a)| \\ &\leq 1 \cdot |x - a| + |f'(a)| \cdot |x - a| = \underbrace{(1 + |f'(a)|)}_{=:L} \cdot |x - a|. \end{aligned}$$

(ii) Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so wählt man $\delta_1 = \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{L+1}\}$ mit δ und L gemäß Teil (i) des Satzes. Dann gilt für alle x mit $|x - a| < \delta_1$

$$|f(x) - f(a)| \leq L \cdot |x - a| \leq \frac{L \cdot \varepsilon}{L + 1} < \varepsilon.$$

9.4 Differentiation und Körpergesetze

9.4.1 Satz Es seien $f, g : D \to \mathbb{K}$ zwei Funktionen, die in $a \in D$ differenzierbar sind.

(i) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ist auch die Linearkombination $\alpha f + \beta g$ differenzierbar in a und es gilt:

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a).$$

(ii) Das Produkt der beiden Funktionen ist differenzierbar in a und es gilt:

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

(iii) Ist $g(x) \neq 0$ für $x \in D$, so ist die Funktion $\frac{f}{g}$ definiert und differenzierbar in a. Dabei gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}.$$

9.4.2 Beweis Die erste Behauptung ergibt sich sofort aus den entsprechenden Regeln für Grenzwerte von Funktionen bzw. Folgen (vgl. Satz 5.7.1).

(ii) Für den Beweis der zweiten Behauptung formen wir den zugehörigen Differenzenquotienten um:

$$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = f(x) \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a} + \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot g(a)$$

Da f und g in a differenzierbar sind und f stetig in a ist, existiert der Grenzwert $\lim_{x \overset{\bullet}{\to} a}$ der rechten Seite. Deswegen existiert auch der Grenzwert der linken Seite, er hat den im Satz angegebenen Wert.

(iii) Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} &= \frac{1}{g(x)g(a)} \cdot \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x-a} \\ &= \frac{1}{g(x)g(a)} \cdot \left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} g(a) - f(a) \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]. \end{aligned}$$

Der Grenzwert $\lim_{x \overset{\bullet}{\to} a}$ der rechten Seite existiert und ist wie im Satz angegeben. Deshalb gilt dies auch für die linke Seite.

9.4.3 Beispiele Tangens hyperbolicus und Tangens haben die Ableitung

$$\begin{aligned} \tanh' x &= \frac{\sinh' x \cosh x - \sinh x \cosh' x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} \\ \tan' \alpha &= \frac{\sin' \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos' \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

9.5 Differentiation und Verknüpfung von Funktionen

9.5.1 Satz: Kettenregel

Es seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen mit $f(D) \subseteq E$.

Ist f in $a \in D$ differenzierbar und g in $b = f(a)$ differenzierbar, so ist auch die Funktion $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in a differenzierbar und es gilt:

$$(g \circ f)'(a) \quad = \quad g'(b) \cdot f'(a).$$

Man spricht auch vom *Nachdifferenzieren* der Funktion g bzgl. des Arguments $f(a)$.

9.5.2 Beweisversuch

Es sei (x_n) eine beliebige Folge in $D \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Die Folge $y_n \ := \ f(x_n)$ konvergiert aufgrund der Stetigkeit von f in a gegen $b = f(a)$.

Wir stellen die Situation nochmal in einem Diagramm zusammen:

$$\begin{array}{ccccc} D & \xrightarrow{\quad f \quad} & E & \xrightarrow{\quad g \quad} & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & f(a) = b & \longmapsto & g(b) \\ x_n & \longmapsto & f(x_n) = y_n & \longmapsto & g(y_n) \end{array}$$

Wäre

$$y_n \neq b \qquad \text{für alle } n \qquad\qquad (*)$$

(beispielsweise wenn f bijektiv), so könnten wir den Differenzenquotienten umschreiben,

$$\frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} \quad = \quad \frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} \cdot \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a},$$

und der Grenzübergang $\lim_{n\to\infty}$ würde sofort die Behauptung liefern.

Leider können wir die Bedingung $(*)$ nicht einfach ignorieren — und müssen den Beweis etwas ausführlicher und sorgfältiger gestalten.

9.5.3 Beweis (Variante I)

Es seien nun die Folgen (x_n) und (y_n) wie in Abschnitt 9.5.2. Für den zu dieser Folge gehörigen Differenzenquotienten gilt

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} \quad &= \quad \begin{cases} \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} \cdot \frac{g(y_n)-g(b)}{y_n-b}, & \text{falls } y_n \neq b \\ 0, & \text{falls } y_n = b \end{cases} \\ &= \quad \begin{cases} \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} \cdot \frac{g(y_n)-g(b)}{y_n-b}, & \text{falls } y_n \neq b \\ \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} \cdot g'(b), & \text{falls } y_n = b. \end{cases} \end{aligned}$$

Wendet man nun auf den Ausdruck der letzen Doppelzeile den Grenzwertoperator $\lim_{n\to\infty}$ an, so erhält man in jedem Fall

$$g'(b) \cdot f'(a).$$

Da diese Überlegung für alle Folgen (x_n) des in 9.5.2 beschriebenen Typs richtig ist, folgt

$$(g \circ f)'(a) \quad = \quad \lim_{x \overset{\bullet}{\to} a} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} \quad = \quad g'(b) \cdot f'(a).$$

9.5.4 Beweis (Variante II)

Wir nutzen jetzt die Alternativdefinition (C) aus Satz 9.1.1, bei der die Schwierigkeiten mit der *Division durch Null* nicht auftreten.

Zunächst zerlegen wir den Ausdruck in der Alternativdefinition geeignet:

$$\begin{aligned} & \Big| g(f(x)) - g(f(a)) - g'(b)f'(a)(x-a) \Big| \\ = \;& \Big| g(y) - g(b) - g'(b)(y-b) + g'(b)(f(x)-f(a)) - g'(b)f'(a)(x-a) \Big| \leq \\ = \;& \Big| g(y) - g(b) - g'(b)(y-b) \Big| + |g'(b)| \Big| f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \Big| \overset{\text{Ziel}}{\leq} \varepsilon |x-a|. \end{aligned}$$

Unser Ziel ist es jetzt, zu einem vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ zu finden, so dass die letzte Ungleichung für $|x-a| \leq \delta$ erfüllt ist. Dafür müssen die Teile des Ausdrucks vor dem Ungleichheitszeichen geeignet abgeschätzt werden.

Dazu gehen wir der Reihe nach so vor:

1. Es existiert (vgl. Satz 9.3.1) ein δ_1 und ein $L > 0$, so dass
$$|y-b| = |f(x) - f(a)| \leq L \cdot |x-a|, \qquad \text{falls } |x-a| \leq \delta_1.$$

2. Es existiert gemäß Definition der Differenzierbarkeit ein $\delta_2 > 0$, so dass
$$\Big| f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \Big| \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot (|g'(b)| + 1)} \cdot |x-a|, \qquad \text{falls } |x-a| \leq \delta_2.$$

3. Es existiert ein $\delta_3 > 0$, so dass
$$\Big| g(y) - g(b) - g'(b)(y-b) \Big| \leq \frac{\varepsilon}{2L} |y-b|, \qquad \text{falls } |y-b| \leq \delta_3.$$

Setzen wir jetzt $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \frac{\delta_3}{L}\}$, so gilt für $x \in D$ mit $|x-a| \leq \delta$ zunächst

$$|y-b| \;=\; |f(x) - f(a)| \;\leq\; L \cdot |x-a| \;\leq\; L \cdot \frac{\delta_3}{L} \;\leq\; \delta_3$$

und dann

$$\underbrace{\underbrace{\Big| g(y) - g(b) - g'(b)(y-b) \Big|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2L}|y-b|}}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}|x-a|} + \underbrace{|g'(b)| \underbrace{\Big| f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \Big|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot (|g'(b)|+1)}|x-a|}}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}|x-a|} \;\leq\; \varepsilon |x-a|.$$

9.5.5 Beispiele

1. Ableitung und ,,Shift" einer Funktion sind vertauschbar: Der *h–Shift* f_h einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $f_h(x) \;:=\; f(x+h)$. Beim Übergang von f nach f_h wird der Graph horizontal um h nach links verschoben. Ist f differenzierbar, so ist auch f_h differenzierbar, es gilt:

$$f_h'(x) = f'(x+h).$$

2. Wird das Argument einer Funktion mit dem Faktor $a \in \mathbb{R}$ gestreckt: $g(x) = f(ax)$, so gilt für die Ableitung:

$$g'(x) = a \cdot f'(ax).$$

3. Die Ableitung der Funktion x^b, $b \in \mathbb{R}$ fest, mit $D = \mathbb{R}^+$, ergibt sich wegen der Definition

$$x^b \;:=\; \exp(b \cdot \ln x)$$

zu

$$\begin{aligned}(x^b)' &= [\exp(b \cdot \ln x)]' = [\exp'(b \cdot \ln x)] \cdot [b \cdot \ln(x)]' = \\ &= \exp(b \cdot \ln x) \cdot \frac{b}{x} = x^b \cdot \frac{b}{x} = b \cdot x^{b-1}.\end{aligned}$$

Dabei haben wir schon benutzt, dass $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$.
Dies werden wir im Abschnitt 9.6.5 beweisen.

9.6 Differentiation und Umkehrfunktion

9.6.1 Satz: Differentiation und Umkehrfunktion Es seien D und E Teilmengen in $\mathbb{R}$ und

$$f : D \to E \qquad g : E \to D$$

zwei zueinander inverse stetige Funktionen. Es seien weiter $a \in D$, $b \in E$ mit $f(a) = b$.

Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent:

(A) f ist in a differenzierbar mit $f'(a) \neq 0$.

(B) g ist in b differenzierbar mit $g'(b) \neq 0$.

Sind diese Aussagen erfüllt, so gilt:

$$g'(b) \cdot f'(a) = 1.$$

9.6.2 Bemerkungen

1. Das Beispiel der beiden Abbildungen $f : x \mapsto x^3$ und $g : u \mapsto \operatorname{sgn} u \cdot \sqrt[3]{|u|}$ zeigt, dass die Zusatzbedingung der nicht–verschwindenden Ableitung unumgänglich ist.

2. Der Satz gilt auch für Endpunkte von Intervallen und links- bzw. rechtsseitiger Ableitung.

9.6.3 Beweis Es muss nur eine Richtung, beispielsweise (A) $\Rightarrow$ (B), gezeigt werden. Es sei (y_n) eine beliebige Folge in $E \setminus \{b\}$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. Mit $x_n := g(y_n)$ gilt aufgrund der Stetigkeit und Bijektivität von g, dass

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad x_n \neq a.$$

Dann ist

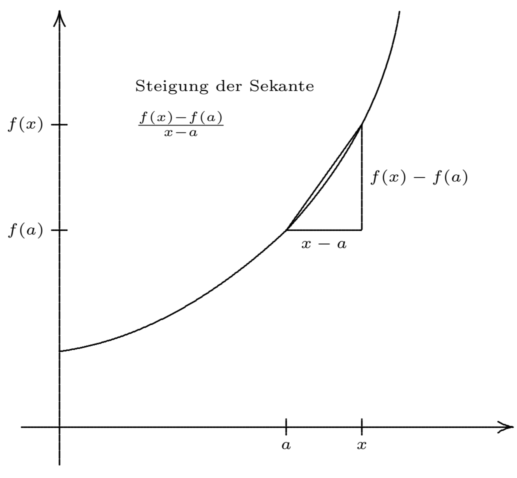
$$\frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}}.$$

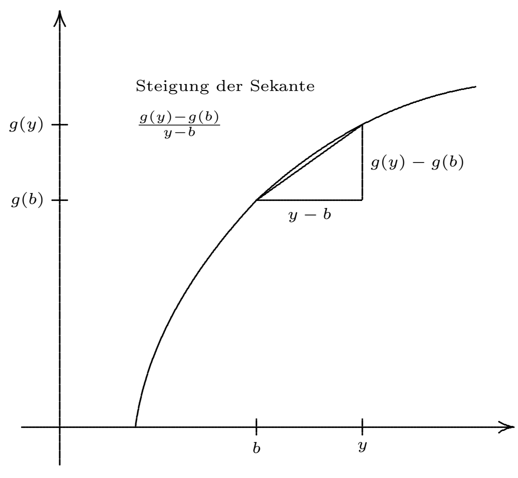
Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}$ auf der rechten Seite existiert aufgrund der Voraussetzungen des Satzes.

Die zusätzliche Behauptung folgt dann sofort mit der Kettenregel:

$$g'(b) \cdot f'(a) = (g \circ f)'(a) = \mathrm{id}'_D(a) = 1.$$

9.6.4 Illustration





9.6.5 Beispiel: Ableitung des natürlichen Logarithmus Da die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, ist auch ihre Umkehrfunktion, der natürliche Logarithmus, auf seiner Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$ differenzierbar. Für ein $b \in \mathbb{R}^+$ und $a = \ln b$ gilt

$$\exp' a \cdot \ln' b = 1$$

und daher

$$\ln' b = \frac{1}{\exp' a} = \frac{1}{\exp a} = \frac{1}{b}.$$

9.6.6 Alternativdefinition der Exponentialfunktion Man kann mit Hilfe von 9.6.5 ableiten, dass für $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{a}{n})^n = e^a.$$

Es ist nämlich (für $a \neq 0$)

$$(1 + \frac{a}{n})^n = \exp\Big[\ln[(1 + \frac{a}{n})^n]\Big] = \exp\Big[n \cdot \ln(1 + \frac{a}{n})\Big] = \exp\Big[\frac{\ln(1 + \frac{a}{n})}{\frac{a}{n}}\, a\Big].$$

Wendet man darauf $\lim_{n\to\infty}$ an, so folgt die Behauptung wegen der Stetigkeit von exp $(*)$ und $\ln'(1) = 1$ $(**)$ so:

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{a}{n})^n = \lim_{n\to\infty} \exp\Big[\frac{\ln(1 + \frac{a}{n})}{\frac{a}{n}}\, a\Big] \overset{(*)}{=} \exp\Big[\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + \frac{a}{n})}{\frac{a}{n}}\, a\Big] \overset{(**)}{=} \exp a = e^a.$$

9.6.7 Beispiel: Ableitung des Arcussinus

Die (eingeschränkte) arcsin–Funktion

$$\arcsin : \begin{cases} \;]-1,+1[& \to &]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[\\ \quad x & \mapsto & \arcsin x \end{cases}$$

ist als Umkehrfunktion der mit nicht–verschwindender Ableitung differenzierbaren Sinusfunktion auch differenzierbar.

Für $b \in\,]-1,+1[$ und $\alpha = \arcsin b$ gilt

$$\arcsin' b \cdot \sin' \alpha = \arcsin' b \cdot \cos\alpha = 1.$$

In $]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$ ist $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1-b^2}$, deshalb

$$\arcsin' b = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}.$$

9.6.8 Beispiel: Ableitung des Arcustangens

Wir betrachten dann noch die Arcus–Tangens–Funktion

$$\arctan : \begin{cases} \mathbb{R} & \to &]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\\ x & \mapsto & \arctan x \end{cases}$$

Ist $b \in \mathbb{R}$ und $\alpha := \arctan b$, so folgt

$$\begin{aligned} 1 &= \arctan' b \cdot \tan' \alpha = \arctan' b \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \\ &= \arctan' b \cdot \big(1 + \tan^2 \alpha\big) = \arctan' b \cdot \big(1 + b^2\big) , \end{aligned}$$

also

$$\arctan' b = \frac{1}{1 + b^2}.$$

9.7 Differentiation und Extrema

9.7.1 Definition Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $a \in D$.

(1) Der Punkt $(a, f(a))$ des Graphen heißt wie in der ersten Spalte angegeben, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass die Bedingung der zweiten Spalte gilt:

lokales Maximum	$f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in D$ mit $\lvert x-a\rvert < \varepsilon$
lokales Minimum	$f(x) \geq f(a)$ für alle $x \in D$ mit $\lvert x-a\rvert < \varepsilon$
strenges lokales Maximum	$f(x) < f(a)$ für alle $x \in D$ mit $0 < \lvert x-a\rvert < \varepsilon$
strenges lokales Minimum	$f(x) > f(a)$ für alle $x \in D$ mit $0 < \lvert x-a\rvert < \varepsilon$

(2) Der Punkt $(a, f(a))$ des Graphen heißt wie in der ersten Spalte angegeben, wenn die Bedingung der zweiten Spalte erfüllt ist:

globales Maximum	$f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in D$
globales Minimum	$f(x) \geq f(a)$ für alle $x \in D$
strenges globales Maximum	$f(x) < f(a)$ für alle $x \in D \setminus \{a\}$
strenges globales Minimum	$f(x) > f(a)$ für alle $x \in D \setminus \{a\}$

(3) Man spricht jeweils von einem *Extremum*, wenn es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

(4) In diesem Zusammenhang heißt a auch *Stelle* des Maximums, Minimums oder Extremums und $f(a)$ der *Wert* des Maximums, Minimums oder Extremums.

9.7.2 Satz

(i) Ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ an der inneren Stelle a differenzierbar und hat sie dort ein lokales Extremum, so gilt $f'(a) = 0$.

(ii) Die Umkehrung gilt nicht, wie das Beispiel $f(x) = x^3$ für $a = 0$ zeigt.

(iii) Beachte, dass bei Vorliegen eines Extremums an einer Randstelle a von D nicht auf $f'(a) = 0$ geschlossen werden kann.

9.7.3 Beweis O.B.d.A. habe f in a ein lokales Minimum. Es gibt dann ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x-a| < \varepsilon$ gilt: $f(x) - f(a) \geq 0$. Es folgt, dass

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0 \text{ für alle } x \in D \cap \,]a-\varepsilon, a[,$$
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0 \text{ für alle } x \in D \cap \,]a, a+\varepsilon[.$$

Da f in a differenzierbar ist und a eine innere Stelle ist, kann man in diesen Ungleichungen zum Grenzwert übergehen, vgl. Satz 5.7.1(v):

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \overset{\bullet}{\to} a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \nearrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0, \\ f'(a) &= \lim_{x \overset{\bullet}{\to} a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \searrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0. \end{aligned}$$

Es muss also $f'(a) = 0$ sein.

(iii) Ein Gegenbeispiel ist $x \mapsto x$ auf $[0,1]$.

9.8 Differentiation und Abschätzung, der Mittelwertsatz

9.8.1 Vereinbarung sds In diesem und dem nächsten Abschnitt werden wir häufig der folgenden Eigenschaft einer Funktion $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ begegnen:

(sds) Die Funktion f ist

- auf dem abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ stetig und
- auf dem offenen Intervall $]c,d[$ differenzierbar.

Die Eigenschaft (sds) bedeutet nicht, dass die Ableitung stetig sein muss. Der Eindruck könnte durch die nächsten Sätze geweckt werden.

Die Eigenschaft (sds) impliziert auch nicht, dass in c oder d die jeweils einseitigen Ableitungen von f existieren, wie die beiden Beispiele

$$\left\{ \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x}, \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{rl} x \cdot \sin(\frac{1}{x}), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

zeigen.

9.8.2 Satz von Rolle Die Funktion $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ genüge (sds).
Gilt $f(c) = f(d)$, so gibt es ein $\xi \in \,]c,d[$ mit $f'(\xi) = 0$.

9.8.3 Beweis O.B.d.A. ist die Funktion nicht konstant. Nach Satz 7.4.6 nimmt die Funktion ihr globales Maximum oder Minimum in $[c,d]$ an. Man überlegt jetzt noch zusätzlich, dass mindestens ein globales (nicht notwendig strenges) Minimum oder Maximum im Inneren dieses Intervalls auftritt. Damit ist ein $\xi \in \,]c,d[$ gefunden. Nach Satz 9.7.2 gilt $f'(\xi) = 0$.

9.8.4 Satz: „Umkehrung" des Satzes von Rolle

Die Funktion $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ genüge (sds).

Ist $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \,]c,d[$, so ist f streng monoton steigend oder streng monoton fallend.

9.8.5 Beweis Wenn f nicht streng monoton wäre, so gäbe es in $[c, d]$ drei Stellen $x_1 < x_2 < x_3$ mit

$$\begin{aligned} &f(x_2) > \max\{f(x_1), f(x_3)\} \qquad \text{oder} \\ &f(x_2) < \min\{f(x_1), f(x_3)\}. \end{aligned}$$

In jedem Fall nimmt die Funktion f in $]c, d[$ ein Maximum oder Minimum an, was eine Nullstelle von f' an dieser Stelle nach sich zieht. Widerspruch.

9.8.6 Satz: Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Die Funktionen $f, g : [c, d] \to \mathbb{R}$ mögen (sds) genügen.
Dann gibt es eine Stelle $\xi \in \,]c, d[$, so dass

$$[f(d) - f(c)] \cdot g'(\xi) \quad = \quad f'(\xi) \cdot [g(d) - g(c)].$$

9.8.7 Beweis Die Funktion $h : [c, d] \to \mathbb{R}$ werde definiert durch

$$h(x) = [f(d) - f(c)] \cdot g(x) - f(x) \cdot [g(d) - g(c)].$$

Sie erfüllt ebenfalls (sds) und dann die Voraussetzung des Satzes von Rolle:

$$h(c) = f(d)g(c) - f(c)g(d) = h(d).$$

Es existiert also eine Stelle $\xi \in \,]c, d[$ mit

$$0 = h'(\xi) = [f(d) - f(c)] \cdot g'(\xi) - f'(\xi) \cdot [g(d) - g(c)].$$

9.8.8 Satz: Eigentlicher Mittelwertsatz

Die Funktion $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ möge (sds) genügen.
Dann gibt es eine Stelle $\xi \in \,]c, d[$, so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}.$$

9.8.9 Beweis Setze im verallgemeinerten Mittelwertsatz $g(x) = x$.

Zeichnung.

9.8.10 Folgerung: Differentiation und Abschätzung

Die Funktion $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ möge (sds) genügen.

(i) (Geometrie–Sichtweise) Die Ableitung f' (Tangentensteigung) sei in $]c,d[$ durch zwei Konstanten M_1, M_2 beschränkt.

$$M_1 \leq f'(x) \leq M_2 \text{ für alle } x \in]c,d[.$$

Dann ist auch die Steigung jeder Sekante des Graphen von f in gleicher Weise beschränkt:

$$M_1 \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq M_2 \qquad \text{für } x,a \in [c,d] \text{ mit } x \neq a.$$

Anders formuliert: Der Graph der Funktion verläuft zwischen den linearen Funktionen mit Steigung M_1 bzw. M_2:

$$f(a) + M_1 \cdot (x-a) \;\leq\; f(x) \;\leq\; f(a) + M_2 \cdot (x-a) \text{ für } x,a \in [c,d] \quad \text{mit} \quad x > a.$$

(ii) Die Aussage (i) ist auch bei Vorliegen nur einer der beiden Abschätzungen — entsprechend — richtig.

(iii) (Abschätzungs–Sichtweise) Die Ableitung f' sei in $]c,d[$ betragsmäßig durch die Konstante M beschränkt.

$$|f'(x)| \;\leq\; M \qquad \text{für alle} \quad x \in]c,d[.$$

Dann gilt:

$$|f(x) - f(a)| \;\leq\; M \cdot |x-a| \qquad \text{für} \quad x,a \in [c,d].$$

9.8.11 Beweis

(i) Wende für fest ausgesuchte x, a den Mittelwertsatz 9.8.8 auf die Funktion mit eingeschränkter Definitionsmenge $f : [x,a] \to \mathbb{R}$ bzw. $f : [a,x] \to \mathbb{R}$ an. Der Mittelwert

$$f'(\xi) \;=\; \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$$

ist durch M_1, M_2 beschränkt.

(iii) Aus der Voraussetzung folgt

$$-M \;\leq\; f'(x) \;\leq\; +M \quad \text{für alle} \quad x \in]c,d[$$

und daraus mit (i) für $x, a \in [c,d]$, $x \neq a$

$$-M \;\leq\; \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq +M$$

Das ist aber gleichbedeutend mit

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \;\leq\; M$$

und weiter mit

$$|f(x) - f(a)| \;\leq\; M\,|x-a|$$

Auch für $a = x$ stimmt diese Aussage.

9.8.12 Folgerung Die Funktion $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ möge (sds) genügen. Gilt

$$f(c) = g(c) \text{ und } f'(x) \leq g'(x) \text{ für alle } x \in]c, d[,$$

so ist

$$f(x) \leq g(x) \qquad \text{für alle } x \in [c, d].$$

9.8.13 Beweis Aus

$$0 \leq g'(x) - f'(x) = (g - f)'(x) \text{ für alle } \ x \in]c, d[$$

folgt mit der Folgerung 9.8.10 ($M_1 = 0$) für $x \in]c, d]$

$$0 \leq \frac{[g(x) - f(x)] - [g(c) - f(c)]}{x - c} = \frac{g(x) - f(x)}{x - c}$$

und daraus wegen $x - c > 0$ dann

$$g(x) - f(x) \geq 0.$$

9.8.14 Folgerung Die Funktion $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ möge (sds) genügen. Gilt

$$f'(x) = 0 \text{ für alle } x \in]c, d[,$$

so ist f auf $[c, d]$ konstant.

Zum Beweis wende man die Folgerung 9.8.10 (ii) mit $M = 0$ an.

9.9 Differentiation und Monotonie

9.9.1 Satz Die Funktion $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ möge (sds) genügen. Es gelten die folgenden Äquivalenzen bzw. Implikationen:

$$f'(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \,]c,d[\quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ ist monoton wachsend in } [c,d]$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in \,]c,d[\quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ ist monoton fallend in } [c,d]$$

$$f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in \,]c,d[\quad \Longrightarrow \quad f \text{ ist streng monoton wachsend in } [c,d]$$

$$f'(x) < 0 \text{ für alle } x \in \,]c,d[\quad \Longrightarrow \quad f \text{ ist streng monoton fallend in } [c,d]$$

Die beiden Funktionen $f(x) = \pm x^3$ zeigen, dass der Links–Implikationspfeil in der dritten bzw. vierten Zeile nicht gesetzt werden kann.

9.9.2 Beweis

(1) Wir zeigen zunächst die Implikation „$\Rightarrow$" der ersten Zeile und nehmen dazu an, dass f nicht monoton wachsend ist. Das heißt, es existieren $x, \widetilde{x} \in [c,d]$ mit $x < \widetilde{x}$ und

$$f(x) > f(\widetilde{x}).$$

Daraus folgt aber für die nach dem Mittelwertsatz 9.8.8 existierende Stelle $\xi \in \,]c,d[$, dass

$$f'(\xi) = \frac{f(\widetilde{x}) - f(x)}{\widetilde{x} - x} < 0,$$

was ein WIDERSPRUCH zur Voraussetzung ist. Die „$\Rightarrow$" Implikationen der anderen Zeilen zeigt man völlig analog.

(2) Es bleibt also noch die Umkehrung „$\Leftarrow$" der ersten Zeile (zweite Zeile analog) zu zeigen:
Ist f monoton wachsend, so gilt für einen beliebigen Differenzenquotienten

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0, \quad x, a \in [c,d], \; x \neq a.$$

Für festes $a \in \,]c,d[$ kann der Grenzübergang $\lim_{x \overset{\bullet}{\to} a}$ durchgeführt werden. Es folgt mit Satz 5.7.1(v):

$$f'(a) \; = \; \lim_{x \overset{\bullet}{\to} a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \; \geq \; 0.$$

Inhaltsverzeichnis