

Skript zur Vorlesung

Analysis 4

(Sommersemester 2009)

Dieses Geheft enthält in kompakter Form die wesentlichen Inhalte, wie sie in der Vorlesung „Analysis 4“ vorgestellt werden.

Es ist zum Gebrauch neben der Vorlesung gedacht und erhebt nicht den Anspruch, „in sich selbst verständlich“ oder vollständig zu sein.

S. Hilger

Inhaltsverzeichnis

27 Ergänzungen zur Lebesgue–Integration	4
27.1 Integrierbare Mengen	4
27.2 Nullmengen im \mathbb{R}^d	6
27.3 Riemann–Integrierbarkeit impliziert Lebesgue–Integrierbarkeit	13
27.4 Parameterabhängige Integration	14
27.5 Die Transformationsformel für integrierbare Funktionen	16
27.6 Satz von Fubini für integrierbare Funktionen	18
28 Kurvenintegral und Hyperflächenintegral	20
28.1 p –Flächen	20
28.2 Das Kurvenintegral im \mathbb{R}^n	21
28.3 Hyperflächen im \mathbb{R}^n	23
28.3.1 Tangentialvektoren und Normalenvektor	23
28.3.2 Das Hyperflächenintegral	25
29 Kugelkoordinaten und Sphärenkoordinaten	28
29.1 Die Kugel–Überlagerungs–Abbildung	28
29.2 Die Kugelkoordinaten–Abbildung	30
29.3 Die Sphärenkoordinaten–Abbildung	33
30 Rotationssymmetrie	35
30.1 Rotationssymmetrische Funktionen	35
30.2 Anwendung: Gauss–Integrale	38
30.3 Anwendung: Die Gamma– Funktion	39
30.4 Anwendung: Die Euler’sche Beta–Funktion	40
31 Ergänzungen zum Satz von Stokes	41
31.1 Korrespondenz zwischen Formen und Funktionen, Vektorfeldern	41
31.2 Integral einer p –Form über einer p –Fläche	42
32 Reparametrisierung von Ketten	44
32.1 Einführung	44
32.2 Orientierte p –Kompakta	45
32.3 Orientierte Würfel	47
32.4 Orientierte Quader	56
32.5 Orientierte Kugeln	58
33 Der Gauß’sche Divergenzsatz und die Green’sche Formel	62
34 Kohomologie — Das Poincare Lemma	65
34.1 Exkurs in die Topologie	65
34.2 Geschlossene und exakte Differentialformen	67
34.3 Das Lemma von Poincaré	69
34.4 Die L^p –Räume	72

35 Skalare Gewöhnliche Differentialgleichungen	76
35.1 Beispiele	76
35.2 Definition	77
35.3 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen	80
35.4 Lineare Differentialgleichungen	86
35.5 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	87
35.6 Exkurs: Nullstellen von Polynomen	89
35.7 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten	91
35.8 Der Transformations-Hauptsatz	93
36 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen	94
36.1 Einführung, „Zusammenflicken“	94
36.2 Der Satz von Picard–Lindelöf	96
36.3 Beispiel eines Differentialgleichungssystems	103

27 Ergänzungen zur Lebesgue–Integration

27.1 Integrierbare Mengen

Definition Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt *integrierbar*, wenn die zugehörige Indikatorfunktion χ_M integrierbar ist. In diesem Fall heißt die Zahl

$$\mu(M) = \text{meas}(M) := \int \chi_M(x) dx \in \mathbb{R}_0^+$$

das *Mass* von M .

Ist $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass $f \cdot \chi_M$ integrierbar ist, so heißt f *integrierbar über M* . Es heißt dann

$$\int_M f(x) dx := \int f(x)\chi_M(x) dx$$

das *Integral der Funktion f über der Teilmenge M* .

Beispiele

- Nullmengen N sind integrierbar mit $\text{vol}(N) = 0$, da dann

$$0 \leq \int^{\downarrow} \chi_N(x) dx \leq \int^{\uparrow} \chi_N(x) dx = 0.$$

- Kompakte Mengen $K \subseteq \mathbb{R}^d$ sind integrierbar, ihr Mass ist gleich dem früher definierten Volumen, da $\chi_K \in \mathcal{C}^{\downarrow}(\mathbb{R}^d)$ und deshalb gemäß Satz ??(iii)

$$\begin{aligned} \text{vol}(K) &= \int^{\downarrow} \chi_K(x) dx = \int^{\downarrow} \chi_K(x) dx = \int^{\uparrow} \chi_K(x) dx \\ &= \int \chi_K(x) dx = \text{meas}(K) \end{aligned}$$

- Offene beschränkte Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^d$ sind integrierbar, da $\chi_M \in \mathcal{C}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d)$ und deshalb gemäß Satz ??(ii)

$$\int^{\downarrow} \chi_M(x) dx = \int^{\uparrow} \chi_M(x) dx \leq \int^{\uparrow} \chi_{\overline{M}}(x) dx < \infty$$

- Ein beschränktes Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ mit linkem Endpunkt a und rechtem Endpunkt b ist integrierbar mit Mass

$$\text{meas } J = b - a.$$

Zur Begründung verweisen wir darauf, dass für jedes $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} b - a - 2\varepsilon &= \int^{\downarrow} \chi_{[a+\varepsilon, b-\varepsilon]}(x) dx \leq \int^{\downarrow} \chi_J(x) dx \\ &\leq \int^{\uparrow} \chi_J(x) dx \leq \int^{\uparrow} \chi_{[a, b]}(x) dx = b - a \end{aligned}$$

und deshalb

$$\int^{\Downarrow} \chi_J(x) dx = \int^{\Uparrow} \chi_J(x) dx = b - a.$$

- Eine integrierbare Menge muss nicht beschränkt sein, wie das Beispiel

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[n, n + \frac{1}{2^n} \right] \subseteq \mathbb{R}$$

zeigt.

Sätzchen 1 *Es seien M, \widetilde{M} integrierbare Mengen. Dann sind auch die Mengen*

$$M \cap \widetilde{M}, \quad M \cup \widetilde{M}, \quad M \setminus \widetilde{M}$$

integrierbar.

Beweis Die zugehörigen Indikatorfunktionen genügen den folgenden Relationen:

$$\chi_{M \cap \widetilde{M}} = \chi_M \cdot \chi_{\widetilde{M}}$$

$$\chi_{M \cup \widetilde{M}} = \chi_M + \chi_{\widetilde{M}} - \chi_{M \cap \widetilde{M}}$$

$$\chi_{M \setminus \widetilde{M}} = \chi_M - \chi_{M \cap \widetilde{M}}$$

Wende dann Satz ??(iv) an. ◆

27.2 Nullmengen im \mathbb{R}^d

Hilfssatz 2 Zu jeder offenen Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^d$ gibt es eine Folge von kompakten Würfeln $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass

- $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$
- $Q_n^\circ \cap Q_{\tilde{n}}^\circ = \emptyset$, falls $n \neq \tilde{n}$.

Beweis (1) Für fixiertes $m \in \mathbb{N}_0$ ist die abzählbare Menge der Punkte

$$G_m = \left\{ \frac{y}{2^m} \mid y \in \mathbb{Z}^d \right\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

ein Gitter der Maschenweite $\frac{1}{2^m}$ im \mathbb{R}^d .

(2) An jedem Gitterpunkt $g \in G_m$ wird ein achsenparalleler kompakter Würfel

$$Q_{g,m} := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid g_k \leq x_k \leq g_k + \frac{1}{2^m}, k = 1, \dots, d \right\}$$

so angeheftet, dass der Gitterpunkt der Eckpunkt mit den minimalen Koordinaten ist. Die Würfel haben Kantenlänge $\frac{1}{2^m}$ und überdecken den Raum \mathbb{R}^d , die inneren Kerne sind paarweise disjunkt.

(3) Es sei dann

$$\mathcal{Q} = \left\{ Q_{g,m} \mid m \in \mathbb{N}, g \in G_m \right\}$$

die abzählbare Menge aller solchen Würfel.

(4) Für zwei verschiedene Würfel $Q, \tilde{Q} \in \mathcal{Q}$ gilt nach Konstruktion genau eine der drei folgenden Aussagen:

$$Q^\circ \cap \tilde{Q}^\circ = \emptyset, \quad Q \subseteq \tilde{Q}, \quad \tilde{Q} \subseteq Q.$$

(5) Wir definieren die (abzählbare) Teilmenge

$$\mathcal{Q}'_X = \left\{ Q \in \mathcal{Q} \mid Q \subseteq X \right\}$$

von Würfeln aus \mathcal{Q} , die ganz in X enthalten sind. Da X offen ist, gibt es zu jedem $x \in X$ einen Würfel $Q \in \mathcal{Q}'_X$ mit $x \in Q$, es gilt also

$$X = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}'_X} Q.$$

(6) Mit Hilfe einer Induktion lassen sich aus der abzählbaren Menge \mathcal{Q}'_X alle Würfel entfernen, die ganz in einem anderen Würfel von \mathcal{Q}' enthalten sind. Die resultierende Menge \mathcal{Q}_X enthält dann aufgrund von (4) nur noch Würfel, die paarweise disjunkte innere Kerne haben. \blacklozenge

Hilfssatz 3 Eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^d$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene integrierbare Menge X_ε gibt mit

$$N \subseteq X_\varepsilon \quad \text{und} \quad \text{meas}(X_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Beweis (0) Die Richtung „ \Leftarrow “ ist trivial.

(1) Aufgrund von $\int^\uparrow 2\chi_N(x) dx = 0$ gibt es eine Funktion $\varphi \in \mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$, so dass

$$2\chi_N \leq \varphi, \quad \int^\uparrow \varphi(x) dx \leq \varepsilon.$$

(2) Da φ unterhalbstetig ist, ist das Urbild

$$X_\varepsilon := \varphi^{-1}(]1, +\infty])$$

des (bzgl. der „Unterhalbstetigkeits-Topologie“) offenen Intervalls $]1, +\infty]$ offen in N .

(3) Für $x \in N$ gilt $2 \leq 2\chi_N(x) \leq \varphi(x)$, deshalb

$$x \in \varphi^{-1}(]2, \infty]) \subseteq \varphi^{-1}(]1, +\infty]) = X_\varepsilon.$$

Das bedeutet $N \subseteq X_\varepsilon$.

(4) Für $x \in X_\varepsilon$ gilt $\varphi(x) > 1$, wegen $\varphi \geq 0$ folgt $\chi_{X_\varepsilon} \leq \varphi$.

(5) Als Indikatorfunktion einer offenen Menge gehört χ_{X_ε} zu $\mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$, die Abschätzung

$$\int^\uparrow \chi_{X_\varepsilon}(x) dx \leq \int^\uparrow \varphi(x) dx \leq \varepsilon$$

liefert in Verbindung mit Sätzchen 50 (AYS03) die Integrierbarkeit (der Indikatorfunktion) von X_ε und dann die Aussage des Hilfssatzes. \blacklozenge

Satz 4 Eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^d$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Würfeln gibt, so dass

$$N \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(Q_n) \leq \varepsilon.$$

Beweis Ist für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die Würfelbedingung erfüllt, so gilt

$$\chi_N \leq \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{Q_n} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{n=1}^k \chi_{Q_n} \right\},$$

dann weiter, mit Bezug auf die Eigenschaften des \uparrow -Integrals (Satz 48, AYS03)

$$\begin{aligned} \int^\uparrow \chi_N(x) dx &\leq \int^\uparrow \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{n=1}^k \chi_{Q_n} \right\}(x) dx = \sup_{k \in \mathbb{N}} \int^\uparrow \sum_{n=1}^k \chi_{Q_n}(x) dx \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^k \int^\uparrow \chi_{Q_n}(x) dx = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^k \text{vol}(Q_n) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass N eine Nullmenge ist.

Ist umgekehrt N eine Nullmenge, so gibt es gemäß Hilfssatz 3 zu jedem $\varepsilon > 0$ erst einmal eine offene Menge X_ε mit $\text{vol}(X_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Gemäß Hilfssatz 2 ist X_ε Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Würfeln Q_n mit paarweise disjunkten offenen Kernen. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(Q_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int \chi_{Q_n}(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int \chi_{Q_n^\circ}(x) dx \\ &= \int \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{Q_n^\circ}(x) dx \leq \int \chi_{X_\varepsilon}(x) dx \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

◆

Satz 5 Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine $C^1(\mathbb{R}^d)$ -Abbildung. Ist $N \subseteq X$ eine Nullmenge, so ist auch das Bild $f(N)$ eine Nullmenge.

Beweis

(1) X lässt sich als abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen K_n , beispielsweise von Kugeln mit rationalen Mittelpunkten und rationalen Radien, darstellen. Wegen

$$f(N) = f\left(N \cap \bigcup_{k \in \mathbb{N}} K_k\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(N \cap K_k)$$

können wir o.B.d.A. annehmen, dass N in einer kompakten Teilmenge $K \subseteq X$ enthalten ist.

(2) Es existiert gemäß Abschätzungssatz 62 (AYS02) eine Konstante $M > 0$, so dass

$$\|f(x) - f(\tilde{x})\| \leq M \cdot \|x - \tilde{x}\| \quad \text{für alle } x, \tilde{x} \in K.$$

(3) Es sei jetzt $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es existiert eine abzählbare Menge $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Würfeln mit

$$N \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(Q_n) \leq \frac{\varepsilon}{M^d \cdot d^{\frac{d}{2}}}.$$

Für $x, \tilde{x} \in N \cap Q_n \subseteq K \cap Q_n \subseteq X \cap Q_n$ gilt dann

$$\|f(x) - f(\tilde{x})\| \leq M \cdot \|x - \tilde{x}\| \leq M \cdot \overbrace{\sqrt{d} \cdot \underbrace{d^{\frac{d}{2}} \text{vol}(Q_n)}_{\text{Kantenlänge}}}}^{\text{Länge der Raumdiagonalen}} =: A_n$$

(4) Dies besagt, dass sich das Bild $f(N \cap Q_n)$ in einer Kugel vom Durchmesser A_n , deshalb auch in einem kompakten Würfel W_n der Kantenlänge A_n einschließen lässt. Es ist

$$\text{vol}(W_n) = A_n^d = M^d \cdot d^{\frac{d}{2}} \cdot \text{vol}(Q_n)$$

und dann

$$\begin{aligned} f(N) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(N \cap Q_n) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n \quad \text{und} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(W_n) &= M^d \cdot d^{\frac{d}{2}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(Q_n) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

◆

Satz 6 Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ eine K_σ -Menge, also darstellbar als abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen. Weiter sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Dann ist der Graph der Funktion

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^d \mid x \in X\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

eine Nullmenge.

Beweis (0) Es genügt, die Aussage für eine kompakte Menge K anstelle von X zu beweisen. Mit K ist auch Γ_f kompakt.

Für festes $(x_1, \dots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$ nimmt die Funktion

$$\chi_{\Gamma_f}(x_1, \dots, x_{d-1}, \cdot) \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \{0, 1\} \\ y & \mapsto \chi_{\Gamma_f}(x_1, \dots, y) \end{cases}$$

den Wert 1 höchstens einmal an, nämlich wenn

$$(x_1, \dots, x_{d-1}) \in X \text{ und } y = f(x_1, \dots, x_{d-1}).$$

Deshalb ist

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{\Gamma_f}(x_1, \dots, x_{d-1}, y) dy = 0.$$

Mit dem Satz von Fubini für \mathcal{C}^\downarrow -Funktionen folgt dann

$$\text{vol}(\Gamma_f) = \int \chi_{\Gamma_f}(x_1, \dots, x_{d-1}, y) dy dx_1 \dots dx_{d-1} = 0.$$

◆

Beispiele

1. $(d - 1)$ -dimensionale Hyperebenen im \mathbb{R}^d sind Nullmengen.
2. Die $(d - 1)$ -dimensionale Sphäre

$$S_{d-1} := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = 1 \right\}$$

ist eine Nullmenge im \mathbb{R}^d , da sie Vereinigung der beiden Graphen Γ_f und Γ_{-f} ist, wobei die Funktion f durch die Käseglockenfunktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^{d-1} \supseteq B_1(0) & \rightarrow \mathbb{R}^d \\ x & \mapsto \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{d-1}^2} \end{cases}$$

gegeben ist.

3. Die Peano-Kurve im \mathbb{R}^2 ist nicht der Graph, sondern die Spur einer stetigen Funktion $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Beispiel Wir konstruieren in mehreren Schritten das Cantor'sche Diskontinuum.

(1) Dazu sei zunächst für $n \in \mathbb{N}$

$$\{0, 1\}^{\{1, \dots, n\}}$$

die Menge der Abbildungen $J : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$. Diese Abbildungen können auch als n -Tupel mit Nullen und Einsen als Einträgen aufgefasst werden.

(2) Wir definieren rekursiv eine monoton fallende Folge von Teilmengen des Einheitsintervalls.

- Für $n = 0$ ist $D_0 := [0, 1]$.
- Für $n = 1, 2, 3$ ist

$$D_1 := \underbrace{\left[0, \frac{1}{3}\right]}_{=: I_0} \cup \underbrace{\left[\frac{2}{3}, 1\right]}_{=: I_1}$$

$$D_2 := \underbrace{\left[0, \frac{1}{9}\right]}_{=: I_{00}} \cup \underbrace{\left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right]}_{=: I_{01}} \cup \underbrace{\left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right]}_{=: I_{10}} \cup \underbrace{\left[\frac{8}{9}, 1\right]}_{=: I_{11}}$$

$$D_3 := \underbrace{\left[0, \frac{1}{27}\right]}_{=: I_{000}} \cup \underbrace{\left[\frac{2}{27}, \frac{3}{27}\right]}_{=: I_{001}} \cup \underbrace{\left[\frac{6}{27}, \frac{7}{27}\right]}_{=: I_{010}} \cup \underbrace{\left[\frac{8}{27}, \frac{9}{27}\right]}_{=: I_{011}} \cup \underbrace{\left[\frac{18}{27}, \frac{19}{27}\right]}_{=: I_{100}} \cup \underbrace{\left[\frac{23}{27}, \frac{24}{27}\right]}_{=: I_{101}} \cup \underbrace{\left[\frac{24}{27}, \frac{25}{27}\right]}_{=: I_{110}} \cup \underbrace{\left[\frac{26}{27}, 1\right]}_{=: I_{111}}$$

- Ist nun D_n als die disjunkte Vereinigung von 2^n kompakten Teilintervallen I_J , $J \in \{0, 1\}^{\{1, \dots, n\}}$, konstruiert, so gewinnen wir D_{n+1} aus D_n dadurch, dass aus jedem Teilintervall $I \subseteq D_n$ genau das mittlere offene Drittel entfernt wird. Formal genauer gilt:

$$\begin{aligned} I_{(J,0)} &:= \left\{x \in I_J \mid \min I_J \leq x \leq \min I_J + \frac{\max I_J - \min I_J}{3}\right\} \\ I_{(J,1)} &:= \left\{x \in I_J \mid \max I_J - \frac{\max I_J - \min I_J}{3} \leq x \leq \max I_J\right\} \\ D_{n+1} &:= \bigcup_{J \in \{0,1\}^{\{1, \dots, n+1\}}} I_J. \end{aligned}$$

(3) Das Cantor'sche Diskontinuum \mathbb{D} ist als der Schnitt aller Teilmengen D_n definiert:

$$\mathbb{D} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n.$$

Wir halten die Eigenschaften von \mathbb{D} in einem Sätzchen fest:

Sätzchen 7 Das Cantor'sche Diskontinuum \mathbb{D} weist folgende Eigenschaften auf:

- (i) \mathbb{D} ist eine kompakte Teilmenge von \mathbb{R} .
- (ii) \mathbb{D} ist eine Nullmenge.
- (iii) \mathbb{D} ist überabzählbar.

Beweis (i) \mathbb{D} ist eine Schnittmenge von abgeschlossenen beschränkten Teilmengen von \mathbb{R} , also selbst beschränkt und abgeschlossen.

(ii) \mathbb{D} ist in jedem D_n enthalten, D_n wiederum ist eine (endliche) Vereinigung von (1-dimensionalen) Quadern mit $\text{vol}(D_n) = (\frac{2}{3})^n$. Diese Zahl kann kleiner als jedes $\varepsilon > 0$ werden.

(iii) Es besteht eine bijektive Abbildung

$$\beta : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{D},$$

die wie folgt definiert ist:

Ist $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ eine (abzählbare) Folge von Nullen und Einsen, so ordnen wir ihr so die absteigende Folge von Intervallen

$$I_{\varphi(1)} \quad I_{\varphi(1), \varphi(2)} \quad \dots \quad I_{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)} \quad \dots$$

mit Längen $(\frac{1}{3})^n$ zu. Diese Intervallschachtelung bestimmt gemäß Satz AYS01 eindeutig eine Zahl x , die in all diesen Intervallen, und damit in \mathbb{D} enthalten ist.

Ist umgekehrt eine Zahl $x \in \mathbb{D}$ gegeben, so ist sie für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ in D_n , dann wiederum in einem eindeutig bestimmten Intervall I_{J_n} mit $J_n \in \{0, 1\}^{\{1, \dots, n\}}$ enthalten. Für $n < m$ beinhaltet J_n die ersten Zahlen in J_m , deshalb ist dadurch eine Folge $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ eindeutig bestimmt.

Man überlege sich anhand dieser Konstruktionen, dass die Zuordnungen $\varphi \mapsto x$ und $x \mapsto \varphi$ bijektiv zueinander sind.

Die Menge $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ist, wie aus der Analysis 1 bekannt ist, überabzählbar. ◆

27.3 Riemann–Integrierbarkeit impliziert Lebesgue–Integrierbarkeit

Satz 8 (i) Es sei $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ eine (beschränkte) Riemann–integrierbare Funktion. Dann ist die Funktion f Lebesgue–integrierbar über $[c, d]$ mit

$$\int_{[c,d]} f(x) dx = \int_c^d f(x) dx.$$

(ii) Es sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- Ist f über jedem kompakten Intervall $[c, d] \subseteq J$ integrierbar und
- existiert das uneigentliche Riemann–Integral $\int_{\inf J}^{\sup J} |f|(x) dx < \infty$,

so ist f über J Lebesgue–integrierbar, es gilt

$$\int_J f(x) dx = \int_{\inf J}^{\sup J} f(x) dx.$$

Zur Erinnerung: Das uneigentliche Riemann–Integral einer Funktion f über einem nicht–notwendig kompakten Intervall J ist definiert als der — dann existente — Grenzwert

$$\int_{\inf J}^{\sup J} f(x) dx := \lim_{c \searrow \inf J} \lim_{d \nearrow \sup J} \int_c^d f(x) dx.$$

Beweis

(i) Gemäß Definition der Riemann–Integrierbarkeit existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\psi \leq f \leq \varphi, \quad \int_c^d (\varphi - \psi)(x) dx \leq \varepsilon.$$

Durch Abänderung an endlich vielen Stellen und Null–Fortsetzung auf \mathbb{R} erhält man Funktionen $\tilde{f}, \tilde{\psi}, \tilde{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{\psi} \in \mathcal{C}^\downarrow(\mathbb{R}), \quad \tilde{\varphi} \in \mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}), \quad \tilde{\psi} \leq \tilde{f} \leq \tilde{\varphi}, \quad \int^\uparrow (\tilde{\varphi} - \tilde{\psi})(x) dx \leq \varepsilon.$$

Daraus folgt, dass \tilde{f} Lebesgue–integrierbar ist. $\tilde{f} \cdot \chi_{[c,d]}$ gehört der gleichen Funktionsklasse wie \tilde{f} an und ist damit ebenfalls Lebesgue–integrierbar. Die Integrale stimmen überein.

(ii) Es sei (K_n) eine monoton wachsende Folge kompakter Intervalle mit $J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist gemäß (i) die Funktion $|f| \cdot \chi_{K_n}$ Lebesgue–integrierbar, die Folge dieser Funktionen ist monoton steigend mit

$$\sup \int (|f| \cdot \chi_{K_n})(x) dx = \int_{\inf J}^{\sup J} |f|(x) dx < +\infty.$$

Mit dem Satz von Levi folgt, dass $|f| \cdot \chi_J$ Lebesgue–integrierbar ist. Insbesondere ist diese Funktion eine Lebesgue–integrierbare Majorante für die Folge $(f \cdot \chi_{K_n})_{n \in \mathbb{N}}$ Lebesgue–integrierbarer Funktionen. Also ist $f \cdot \chi_J = \lim_{n \rightarrow \infty} f \cdot \chi_{K_n}$ Lebesgue–integrierbar. Die Integrale stimmen überein. \blacklozenge

27.4 Parameterabhängige Integration

Satz 9 Es sei M ein metrischer Raum, $a \in M$. Weiter sei $f : \mathbb{R}^d \times M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass für alle $y \in M$ die partielle Abbildung $f(\cdot, y) : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar ist.

(i) (Stetigkeit „unter“ dem Integral)

Es seien zusätzlich die folgenden Bedingungen erfüllt:

– Fast überall (bzgl. $x \in \mathbb{R}^d$) sei die partielle Abbildung $f(x, \cdot) : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ in a stetig.

– Es existiere eine integrierbare Funktion $g : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ mit

$$|f(x, y)| \leq g(x) \text{ für alle } y \in M.$$

Dann ist die Abbildung

$$h : \begin{cases} M & \rightarrow \mathbb{R} \\ y & \mapsto \int f(x, y) dx \end{cases}$$

stetig in a .

(ii) (Differentiation „unter“ dem Integral)

Es seien zusätzlich die folgenden Bedingungen erfüllt:

– M sei ein offenes Intervall von \mathbb{R} .

– Fast überall (bzgl. $x \in \mathbb{R}^d$) sei die partielle Abbildung $f(x, \cdot) : M \rightarrow \mathbb{R}$ (endlich und) in a differenzierbar mit der Ableitung $D_2f(x, a) \in \mathbb{R}$.

– Es existiere eine integrierbare Funktion $g : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$, so dass für alle $y \in M$

$$|D_2f(x, y)| \leq g(x) \text{ fast-überall (bzgl. } x \in \mathbb{R}^d).$$

Dann ist die Abbildung

$$h : \begin{cases} M & \rightarrow \mathbb{R} \\ y & \mapsto \int f(x, y) dx \end{cases}$$

in $a \in M$ differenzierbar mit Ableitung

$$h'(a) = \int D_2f(x, a) dx.$$

Beweis (i) Es sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$. Dann erfüllt die Folge der integrierbaren Funktionen $(f(\cdot, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ die Voraussetzungen des Satzes 57/AYS03 von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz. Es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x, y_n) dx \stackrel{\text{Leb}}{=} \int \lim_{n \rightarrow \infty} f(x, y_n) dx = \int f(x, a) dx = h(a).$$

(ii) Es sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $M \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$. Wir definieren eine Folge (F_n) integrierbarer Funktionen durch

$$F_n : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x, y_n) - f(x, a)}{y_n - a}, \end{cases} \text{ fast überall bzgl. } x \in \mathbb{R}^d.$$

Aufgrund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung gibt es ein ξ_n zwischen y_n und a , so dass

$$|F_n(x)| = \left| \frac{f(x, y_n) - f(x, a)}{y_n - a} \right| = |D_2 f(x, \xi_n)| \leq g(x).$$

Es ist dann aufgrund des Satzes von Lebesgue

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(y_n) - h(a)}{y_n - a} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{f(x, y_n) - f(x, a)}{y_n - a} dx \stackrel{\text{Leb}}{=} \int \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, y_n) - f(x, a)}{y_n - a} \right) dx \\ &= \int D_2 f(x, a) dx. \end{aligned}$$

Da die Folge beliebig war, gilt auch

$$h'(a) = \lim_{y \rightarrow a} \frac{h(y) - f(a)}{y - a} = \int D_2 f(x, a) dx.$$



27.5 Die Transformationsformel für integrierbare Funktionen

Satz 10 (Die Transformationsformel für integrierbare Funktionen)

Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ offen Teilmengen und $\vartheta : X \rightarrow Y$ ein C^1 -Diffeomorphismus.

Die Funktion $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar genau dann, wenn die Funktion

$$(f \circ \vartheta) \cdot |\det \vartheta'| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

integrierbar ist. Es gilt in diesem Fall:

$$\int_X (f \circ \vartheta)(x) \cdot |\det \vartheta'(x)| dx = \int_Y f(y) dy.$$

Beweis (1) Es sei $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Es existiert dann gemäß Satz 51 (AYS03) eine Folge (f_k) von Funktionen aus $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\text{supp } f_k \subseteq Y$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_{L^1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int^{\uparrow} |f - f_k| = 0.$$

Siehe auch Hilfssatz 29 (ii)AYS03.

Da (f_k) dann auch eine Cauchy-Folge ist, liefert der Satz 65 (AYS03), dass es eine Teilfolge $(f_{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ gibt, so dass für eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} f_{k_\ell}(y) = f(y) \quad y \in \mathbb{R}^d \setminus N.$$

(2) Wir definieren die Folge (g_ℓ) von fast-überall definierten Funktionen

$$g_\ell := (f_{k_\ell} \circ \vartheta) \cdot |\det \vartheta'| : (X \setminus \vartheta^{-1}(N)) \rightarrow \mathbb{R}$$

($\vartheta^{-1}(N)$ ist gemäß Satz 5 eine Nullmenge). Da ϑ ein Diffeomorphismus ist, sind die Funktionen g_ℓ in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ enthalten mit $\text{supp } g_\ell \subseteq X$. Die Folge (g_ℓ) konvergiert fast überall punktweise gegen

$$g := (f \circ \vartheta) \cdot |\det \vartheta'|,$$

da ϑ stetig ist.

(3) Es ist weiter für $\ell, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|g_\ell - g_m\|_{L^1} &= \int |g_\ell - g_m|(x) dx \\ &= \int |(f_{k_\ell} \circ \vartheta) \cdot |\det \vartheta'| - (f_{k_m} \circ \vartheta) \cdot |\det \vartheta'||(x) dx \\ &= \int (|f_{k_\ell} - f_{k_m}| \circ \vartheta) \cdot |\det \vartheta'| (x) dx \quad (\text{Transformationsformel für } \mathcal{C}_c) \\ &= \int |f_{k_\ell} - f_{k_m}|(y) dy \\ &= \|f_{k_\ell} - f_{k_m}\|_{L^1} \end{aligned}$$

(4) Es folgt, dass auch (g_ℓ) eine Cauchy-Folge ist, die fast-überall punktweise gegen g konvergiert. Nach Satz 65 (AYS03) ist $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und es gilt

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|g_\ell - g\|_{L^1} = 0.$$

(5) Mit Satz 65 (AYS03) gilt dann weiter

$$\begin{aligned} \int g(x) dx &= \int \lim_{\ell \rightarrow \infty} g_\ell(x) dx = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int g_\ell(x) dx && \text{(Transformationsformel für } \mathcal{C}_c) \\ &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int f_{k_\ell}(y) dy = \int \lim_{\ell \rightarrow \infty} f_{k_\ell}(y) dy = \int f(y) dy. \end{aligned}$$

Die andere Richtung der „Genau-dann-wenn“ Aussage ergibt sich dadurch, dass man die obigen Überlegungen in umgekehrter Richtung — eben für die Transformation ϑ^{-1} — anwendet. \blacklozenge

Das folgende Korollar enthält gegenüber dem Satz kaum mehr Substanz. Sein Rahmen entspricht aber genau den späteren Anwendungen.

Korollar 11 *Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ integrierbare Teilmengen und $\vartheta : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Es seien weiter Teilmengen*

$$\begin{aligned} X &= X_{\text{offen}} \cup X_{\text{Null}} \\ Y &= Y_{\text{offen}} \cup Y_{\text{Null}} \end{aligned}$$

mit den indizierten Eigenschaften gegeben, so dass die Einschränkung

$$\vartheta : X_{\text{offen}} \rightarrow Y_{\text{offen}} \text{ ein wohldefinierter } \mathcal{C}^1\text{-Diffeomorphismus ist.}$$

Ist nun $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, so existiert das Integral auf der linken Seite, es stimmt mit der rechten Seite überein:

$$\int_X f(\vartheta(x)) \cdot |\det \vartheta'(x)| dx = \int_Y f(y) dy.$$

Beweis Sehr ausführlich überlegen wir:

$$\begin{aligned} & f \cdot \chi_Y \text{ integrierbar} \\ \implies & f \cdot \chi_{Y_{\text{offen}}} \text{ integrierbar} \\ \stackrel{\text{S 10}}{\implies} & (f \circ \vartheta) \cdot |\det \vartheta'| \cdot \chi_{X_{\text{offen}}} \text{ integrierbar} \\ \implies & (f \circ \vartheta) \cdot |\det \vartheta'| \cdot \chi_X \text{ integrierbar.} \end{aligned}$$

Mit Satz 10 gilt dann

$$\int_X f(\vartheta(x)) \cdot |\det \vartheta'(x)| dx = \int_Y f(y) dy. \quad \blacklozenge$$

27.6 Satz von Fubini für integrierbare Funktionen

Satz 12 (Satz von Fubini für integrierbare Funktionen) *Es sei $f : \mathbb{R}^{d+p} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine integrierbare Funktion. Dann gibt es eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^p$, so dass folgendes gilt:*

(i) Für $y \in \mathbb{R}^p \setminus N$ ist die partielle Abbildung $f(\cdot, y) : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar.

(ii) Die dann fast-überall auf \mathbb{R}^p definierte Abbildung

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^p \setminus N & \rightarrow \mathbb{R} \\ y & \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dx \end{cases}$$

ist integrierbar.

(iii) Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{d+p}} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^p} \overbrace{\int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dx}^{F(y)} dy.$$

Beweis (1) Wir definieren die beiden Abbildungen $\mathbb{R}^p \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$$F^\downarrow(y) := \int_{\mathbb{R}^d}^\downarrow f(x, y) dx, \quad F^\uparrow(y) := \int_{\mathbb{R}^d}^\uparrow f(x, y) dx.$$

(2) Da f integrierbar ist, gibt es (integrierbare) Funktionen $\psi \in \mathcal{C}^\downarrow(\mathbb{R}^{d+p})$, $\varphi \in \mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^{d+p})$, so dass

$$\begin{aligned} \psi &\leq f \leq \varphi \\ \int_{\mathbb{R}^{d+p}} f(x, y) d(x, y) - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{d+p}} \psi(x, y) d(x, y)}_{\text{endlich}} &\leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{d+p}} \varphi(x, y) d(x, y)}_{\text{endlich}} - \int_{\mathbb{R}^{d+p}} f(x, y) d(x, y) &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

(3) Wir wenden den Satz von Fubini für \mathcal{C}^\uparrow -Funktionen auf φ , den für \mathcal{C}^\downarrow -Funktionen auf ψ an und definieren dabei die Funktionen $\Psi \in \mathcal{C}^\downarrow(\mathbb{R}^p)$, $\Phi \in \mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^p)$ durch

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d+p}}^\uparrow \varphi(x, y) d(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^p}^\uparrow \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d}^\uparrow \varphi(x, y) dx}_{=:\Phi(y)} dy \\ \int_{\mathbb{R}^{d+p}}^\downarrow \psi(x, y) d(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^p}^\downarrow \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d}^\downarrow \psi(x, y) dx}_{=:\Psi(y)} dy \end{aligned}$$

(4) Wegen $\psi \leq f \leq \varphi$ ist

$$\Psi \leq F^\downarrow \leq F^\uparrow \leq \Phi \quad \text{auf } \mathbb{R}^p,$$

außerdem

$$\int_{\mathbb{R}^p}^\uparrow \Phi(y) dy - \int_{\mathbb{R}^p}^\downarrow \Psi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^{d+p}}^\uparrow \varphi(x, y) d(x, y) - \int_{\mathbb{R}^{d+p}}^\downarrow \psi(x, y) d(x, y) \leq \varepsilon.$$

Es folgt, dass F^\Downarrow und F^\Uparrow integrierbar sind mit

$$\int_{\mathbb{R}^p} F^\Downarrow(y) dy = \int_{\mathbb{R}^p} F^\Uparrow(y) dy = \int_{\mathbb{R}^{d+p}} f(x, y) d(x, y)$$

(5) Es ist $F^\Uparrow - F^\Downarrow \geq 0$ und

$$\int_{\mathbb{R}^p} (F^\Uparrow - F^\Downarrow)(y) dy = 0$$

gemäß Satz 63(i)/AYS03 existiert eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^p$ mit

$$F^\Uparrow(y) = F^\Downarrow(y) \text{ für } y \in \mathbb{R}^p \setminus N.$$

(6) Für genau diese $y \in \mathbb{R}^p \setminus N$ ist die Abbildung $f(\cdot, y)$ auf \mathbb{R}^d wegen der Übereinstimmung $F^\Uparrow = F^\Downarrow$ integrierbar. Es ist dann also

$$F(y) = F^\Uparrow(y) = F^\Downarrow(y) \text{ für } y \in \mathbb{R}^p \setminus N.$$

(7) Abschließend ist

$$\int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^p} F(y) dy = \int_{\mathbb{R}^p} F^\Uparrow(y) dy = \int_{\mathbb{R}^{d+p}} f(x, y) d(x, y).$$



28 Kurvenintegral und Hyperflächenintegral

28.1 p -Flächen

Definition Es sei K eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^p mit der Eigenschaft, dass eine offene Menge K_{offen} existiert, so dass

$$\begin{aligned} K &= \overline{K_{\text{offen}}} \\ K_{\text{Null}} &:= K \setminus K_{\text{offen}} \text{ ist eine Nullmenge.} \end{aligned}$$

Weiter sei eine offene Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeben.

(1) Eine Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} K & \rightarrow X \\ u & \mapsto \Phi(u) \end{cases}$$

heißt eine p -Fläche in X mit Parameterbereich K , wenn die Einschränkung $\Phi : K_{\text{offen}} \rightarrow X$ eine \mathcal{C}^1 -Abbildung ist.

(2) $p = 1$: Eine 1-Fläche ist eine Kurve $J \rightarrow X$, die in J_{offen} stetig differenzierbar ist. (In diesem Fall wird das Symbol u für den Flächenparameter durch t ersetzt.)

(3) $p = n - 1$: Eine $(n - 1)$ -Fläche heißt *Hyperfläche*.

Bemerkungen

(1) Die Ableitung

$$\Phi' : K_{\text{offen}} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$$

ist auf K_{offen} eindeutig definiert und stetig. Als Abbildung $K \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$ ist sie fast überall definiert.

(2) Polyeder, Würfel, Quader oder Kugeln im \mathbb{R}^p können auf natürliche Weise als p -Flächen $\Phi = \iota : K \rightarrow \mathbb{R}^p$ aufgefasst werden. ι ist die kanonische injektive Einbettung.

(3) Wir werden wiederholt p -Flächen zu betrachten haben, die die folgende stärkere Eigenschaft aufweisen:

Es existieren eine offene Umgebung U_K von K und eine \mathcal{C}^1 -Fortsetzung $\Phi : U_K \rightarrow \mathbb{R}^n$ von Φ .

In diesem Fall ist die Ableitung auf K

$$\Phi' : K \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$$

eindeutig definiert, stetig, ihre Koordinaten bzw. die Determinante sind integrierbar.

(4) Beachte, dass p -Flächen entartet sein können. Es wäre verfrüht, das Bild einer p -Fläche als p -dimensional zu bezeichnen.

28.2 Das Kurvenintegral im \mathbb{R}^n

Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\gamma : J \rightarrow X$ eine (differenzierbare) Kurve, so definieren wir für jedes $t \in J_{\text{offen}}$ den *Tangentialvektor*

$$T_\gamma(t) := \gamma'(t) \in \mathbb{R}^n.$$

Die durch

$$\gamma(t) + \lambda T_\gamma(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

beschriebene (affine) Gerade heißt naheliegender *Tangente* an J durch $\gamma(t)$.

Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, so nennen wir eine Abbildung $v : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein *Vektorfeld* auf X .

Definition Gegeben sei eine Kurve $\gamma : J \rightarrow X$.

- (1) Es sei $f : \gamma(J) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist der Integrand auf der rechten Seite integrierbar, so ist durch

$$\int_\gamma f := \int_J \|T_\gamma(t)\| \cdot f(\gamma(t)) dt.$$

das *Kurvenintegral* von f längs der Kurve γ definiert.

- (2) Ist $\|T_\gamma\|$ über J integrierbar, so ist die *Kurvenlänge* von $\gamma(J)$ (zum zweiten Mal) definiert als das Kurvenintegral der Konstant–Eins–Funktion:

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_\gamma 1 dt = \int_J \|T_\gamma(t)\| dt.$$

- (3) Es sei v ein Vektorfeld in X . Ist der Integrand rechts integrierbar, so ist durch

$$\text{work}_1(\gamma, v) := \int_J \langle T_\gamma(t), v(\gamma(t)) \rangle dt$$

die *längs γ gegen das Vektorfeld v verrichtete Arbeit* definiert.

Bemerkungen

- Die Abbildung T_γ ist fast überall auf J definiert.
- Diese Definitionen lassen sich ähnlich wie die in (2) wiederholte der Länge durch eine Approximation mittels Polygonzügen plausibel machen. Anders als bei der Länge kommt hier noch zusätzlich der Begriff der Riemann'schen Summe ins Spiel.

Wir führen dies hier nicht genauer aus, verweisen nur auf Erwe 2, S. 92.

- In der Literatur ist mit dem Begriff Kurvenintegral meist der hier bei (3) eingeführte gemeint.

- Ihm liegt die folgende physikalische Interpretation zugrunde: Ein (punktförmiger) Körper bzw. Ladung wird längs einer Kurve γ durch ein Kraftfeld (el. Feld) v bewegt. Das Kurvenintegral wird als „Physikalische Arbeit“ bezeichnet.
- In der Funktionentheorie (Differentialrechnung für komplexe Zahlen) spielt ein weiteres noch einmal anders definiertes Kurvenintegral eine zentrale Rolle.

Die komplexe Zahlenebene \mathbb{C} wird über die Real- bzw. Imaginärteilbildung mit dem \mathbb{R}^2 identifiziert.

Ist $\gamma : J \rightarrow X$ eine Kurve in der offenen Teilmenge $X \subseteq \mathbb{C}$ und $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ eine (geeignete) komplexwertige Funktion auf X , so wird ihr „komplexes“ Kurvenintegral längs der Kurve γ durch die komplexe Zahl

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &:= \int_J \gamma'(t) \cdot f(\gamma(t)) dt \\ &:= \int_J \operatorname{Re}[\gamma'(t) \cdot f(\gamma(t))] dt + i \int_J \operatorname{Im}[\gamma'(t) \cdot f(\gamma(t))] dt \\ &= \int_J \operatorname{Re} f + i \int_J \operatorname{Im} f \end{aligned}$$

definiert.

28.3 Hyperflächen im \mathbb{R}^n

28.3.1 Tangentialvektoren und Normalenvektor

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Auf eine Hyperfläche $\Phi : K \rightarrow X$ bezogen definieren wir die (stetigen) Vektorfelder

$$T_{k,\Phi} : \left\{ \begin{array}{l} K_{\text{offen}} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ u \mapsto \begin{pmatrix} \partial_k \Phi^1(u) \\ \partial_k \Phi^2(u) \\ \vdots \\ \partial_k \Phi^r(u) \\ \vdots \\ \partial_k \Phi^n(u) \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \text{für } k = 1, \dots, n-1,$$

$$N_\Phi : \left\{ \begin{array}{l} K_{\text{offen}} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ u \mapsto \begin{pmatrix} + \det \Phi'^{23\dots n}(u) \\ - \det \Phi'^{13\dots n}(u) \\ \vdots \\ (-1)^{r+1} \det \Phi'^{1\dots \hat{r} \dots n}(u) \\ \vdots \\ (-1)^{n+1} \det \Phi'^{1\dots n-1}(u) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$\Phi'^{1\dots \hat{r} \dots n} = \Phi'^{1\dots \hat{r} \dots n'}$ ist dabei die Jacobi-Matrix von Φ mit gestrichener r -ter Zeile bzw. die quadratische Jacobi-Matrix der Abbildung Φ bei gestrichener r -ter Zeile.

Die ersteren Vektoren heißen naheliegend *Tangentialvektoren*, da die Vektoren

$$\Phi(u) + T_{k,\Phi}(u)$$

geometrisch tangential im Punkt $\Phi(u)$ an der Bildfläche $\Phi(K)$ anliegen. Sie spannen den $(n-1)$ -dimensionalen *Tangentialraum* $T_\Phi(u)$ auf.

Es sei ab jetzt der Raum \mathbb{R}^n mit dem euklidischen Skalarprodukt ausgestattet.

Das folgende Sätzchen legitimiert die Bezeichnung *Normalenvektor* für $N_\Phi(u)$:

Sätzchen 13

Für $u \in K_{\text{offen}}$ gilt:

$$(i) \quad \langle T_{k,\Phi}(u), N_\Phi(u) \rangle = 0, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

$$(ii) \quad \det \begin{pmatrix} N_\Phi(u) & T_{1,\Phi}(u) & \cdots & T_{n,\Phi}(u) \end{pmatrix} = \|N_\Phi(u)\|^2 \geq 0.$$

Beweis

Für $u \in K_{\text{offen}}$ und $k = 1, \dots, n-1$ gilt

$$\langle T_{k,\Phi}(u), N_\Phi(u) \rangle = \det \begin{pmatrix} \partial_k \Phi^1 & \partial_1 \Phi^1 & \cdots & \partial_{n-1} \Phi^1 \\ \partial_k \Phi^2 & \partial_1 \Phi^2 & \cdots & \partial_{n-1} \Phi^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_k \Phi^n & \partial_1 \Phi^n & \cdots & \partial_{n-1} \Phi^n \end{pmatrix} (u) = 0.$$

Die erste Gleichheit resultiert aus der Entwicklung der Determinanten nach der ersten Spalte, die zweite daraus, dass die Matrix zwei gleiche Spaltenvektoren enthält.

Es ist weiter

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} N_\Phi^1 & \partial_1 \Phi^1 & \cdots & \partial_{n-1} \Phi^1 \\ N_\Phi^2 & \partial_1 \Phi^2 & \cdots & \partial_{n-1} \Phi^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ N_\Phi^n & \partial_1 \Phi^n & \cdots & \partial_{n-1} \Phi^n \end{pmatrix} (u) &= \sum_{r=1}^n (-1)^{1+r} N_\Phi^r(u) \cdot \det \Phi'^{1 \dots \widehat{r} \dots n}(u) \\ &= \langle N_\Phi(u), N_\Phi(u) \rangle = \|N_\Phi(u)\|^2. \end{aligned}$$



28.3.2 Das Hyperflächenintegral

Um eine Begriffsbildung plausibel zu machen, nehmen wir jetzt an, dass das Normalenvektorfeld N_Φ auf ganz K definiert ist und nicht verschwindet und dass der „ ε -Zylinder“ über der Fläche Φ , dies ist die Abbildung

$$\Phi_{\text{cyl}} : \begin{cases} [0, \varepsilon] \times K & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} v \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} & \mapsto \Phi(u) + v \cdot \frac{N_\Phi(u)}{\|N_\Phi(u)\|}, \end{cases}$$

injektiv ist. Für die Jacobi-Determinante dieser Abbildung gilt dann

$$\begin{aligned} & \det \Phi'_{\text{cyl}}(v, u) \\ &= \det \left(\begin{array}{cccc} \frac{N_\Phi(u)}{\|N_\Phi(u)\|} & \partial_1[\Phi(u) + v \cdot \frac{N_\Phi(u)}{\|N_\Phi(u)\|}] & \cdots & \partial_{n-1}[\Phi(u) + v \cdot \frac{N_\Phi(u)}{\|N_\Phi(u)\|}] \end{array} \right) \\ &= \det \left(\begin{array}{cccc} \frac{N_\Phi(u)}{\|N_\Phi(u)\|} & \partial_1\Phi(u) & \cdots & \partial_{n-1}\Phi(u) \end{array} \right) + v \cdot g(v, u) \\ &= \|N_\Phi(u)\| + v \cdot g(v, u). \end{aligned}$$

wobei g eine stetige Funktion auf $[0, \varepsilon] \times K$ ist.

Ist jetzt $f : \Phi(K) \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, so kann sie mittels

$$f_{\text{cyl}} := f \circ \text{pr}_u \circ \Phi_{\text{cyl}}^{-1}$$

jeweils entlang der Normalfasern konstant auf den Zylinder $\Phi_{\text{cyl}}([0, \varepsilon] \times K)$ fortgesetzt werden. pr_u ist die kanonische Projektion $[0, \varepsilon] \times K \rightarrow K$, $(v, u) \mapsto u$.

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \int_{\Phi_{\text{cyl}}([0, \varepsilon] \times K)} f_{\text{cyl}}(x) dx &= \int_{\Phi_{\text{cyl}}([0, \varepsilon] \times K)} (f \circ \text{pr}_u \circ \Phi_{\text{cyl}}^{-1})(x) dx \\ &\quad \text{(Transformation durch } \Phi_{\text{cyl}}) \\ &= \int_{[0, \varepsilon] \times K} f(\Phi(u)) \cdot \left(\|N_\Phi(u)\| + v \cdot g(v, u) \right) du dv \\ &= \varepsilon \cdot \int_K f(\Phi(u)) \cdot \|N_\Phi(u)\| du + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Das Verhalten dieser Beziehung beim Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ legt die ersten beiden Teile der folgenden Definition nahe:

Definition Es sei $\Phi : K \rightarrow X$ eine Hyperfläche.

- (1) Es sei $f : \Phi(K) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist der Integrand rechts integrierbar, so ist durch

$$\int_{\Phi} f(x) dx := \int_K \|N_{\Phi}(u)\| \cdot f(\Phi(u)) du.$$

das *Hyperflächenintegral* von f über der Fläche Φ definiert.

- (2) Ist $\|N_{\Phi}\|$ über K integrierbar, so ist der *Hyperflächeninhalt* von $\Phi(K)$ definiert als das Hyperflächenintegral der Konstant–Eins–Funktion:

$$\text{area}_{n-1}(\Phi) := \int_{\Phi} 1 dx = \int_K \|N_{\Phi}(u)\| du.$$

- (3) Es sei $v : \Phi(K) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Ist der Integrand auf der rechten Seite integrierbar, so ist durch

$$\text{flow}_{n-1}(\Phi, v) := \int_K \langle N_{\Phi}(u), v(\Phi(u)) \rangle du$$

der *Fluss des Vektorfelds v durch die Hyperfläche Φ* definiert.

Bemerkungen

(1) Die Abbildung N_{Φ} ist auf K_{offen} definiert und stetig, also ist sie fast überall auf K definiert.

(2) Verwechsle das Hyperflächenintegral nicht mit dem Integral $\int_{\Phi(K)} f(x) dx$ einer integrierbaren Funktion über der **Menge** $\Phi(K)$. $\Phi(K)$ ist als Bild der Nullmenge $\{0\} \times K \subseteq \mathbb{R}^n$ unter der \mathcal{C}^1 -Funktion f_{cyl} (zwischen gleich-dimensionalen Mengen) wieder eine Nullmenge (vgl. Satz 5).

(3) Es drängt sich die Frage auf, ob auch für $(n - \ell)$ -Flächen einer Kodimension $\ell \geq 2$ ein Integrations- und Oberflächenbegriff eingeführt werden kann. Ein Aufgreifen dieser Frage führt zu dem Begriff des metrischen Tensors, der eine fundamentale Rolle in der „Riemann’schen Geometrie“ spielt. Wir wollen ihn hier nicht näher behandeln.

Beispiele

(1) Eine Kurve $\gamma : J \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^2$ ist zugleich eine Hyperfläche.

Für $t \in J_{\text{offen}}$ ist

$$\|T_\gamma(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \gamma'_2(t) \\ -\gamma'_1(t) \end{pmatrix} \right\| = \|N_\gamma(t)\|.$$

Deshalb stimmen die für Kurven bzw. für Hyperflächen definierten Begriffe zur Integration einer Funktion jeweils überein.

(2) Es sei B die Einheitskreisscheibe im \mathbb{R}^2 und

$$\Phi : \begin{cases} B \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u_1, u_2) \mapsto \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

die Käseglockenfläche im \mathbb{R}^3 gegeben.

Die Ableitung auf $B_{\text{offen}} = B^\circ$ ist

$$\Phi'(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-u_1}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}} & \frac{-u_2}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}} \end{pmatrix},$$

deshalb

$$N_\Phi(u) = \begin{pmatrix} \frac{u_1}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}} \\ \frac{u_2}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|N_\Phi(u)\| = \frac{1}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}}.$$

Mit Hilfe von Polarkoordinaten berechnen wir

$$\begin{aligned} \text{area}_2(\Phi) &= \int_B \|N_\Phi(u)\| \, du = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \cdot \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \, d\varphi \, dr \\ &= 2\pi \cdot \left[-\sqrt{1-r^2} \right]_0^1 = 2\pi. \end{aligned}$$

29 Kugelkoordinaten und Sphärenkoordinaten

29.1 Die Kugel–Überlagerungs–Abbildung

Im folgenden sei eine Dimension $p \geq 2$ fixiert. Wir definieren die *Kugel–Überlagerungs–Abbildung* als eine C^∞ –Abbildung

$$\beta : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p \\ \left(\begin{array}{c} \varrho \\ \varphi \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{array} \right) = u \mapsto v = \varrho \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta_1 \cos \theta_2 & \cdots & \cos \theta_{p-3} & \cos \theta_{p-2} \\ \sin \varphi \cos \theta_1 \cos \theta_2 & \cdots & \cos \theta_{p-3} & \cos \theta_{p-2} \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \cdots & \cos \theta_{p-3} & \cos \theta_{p-2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cos \theta_{p-3} & \cos \theta_{p-2} \\ \sin \theta_{p-3} & \cos \theta_{p-2} \\ \sin \theta_{p-2} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Im folgenden erhöht sich die Übersicht, wenn wir jeweils die Argument–Liste $(\varrho, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{p-2})$ bei β oder β' weglassen. Wir halten zwei wichtige Formeln fest in

Sätzchen 14

- (i) $\det \beta' = \varrho^{p-1} \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dots \cos^{p-2} \theta_{p-2}$.
(ii) $(-1)^{s+1} \varrho \cdot \det \beta'_{2 \dots p}^{\widehat{1 \dots s \dots p}} = \det \beta' \cdot \beta^s$ für $s \in \{1, \dots, p\}$.

Die Aussage (ii) ist insofern bemerkenswert, als der Vektor der vorzeichenbehafteten „Erste–Spalte–Entwicklungs“–Unterdeterminanten von β' bis auf ein skalares Vielfaches $\frac{1}{\varrho} \cdot \det \beta'$ mit der Abbildung β übereinstimmt.

Beweis (1) Wir zeigen die beiden Aussagen mittels Induktion über die Dimension p . Der Induktionsanfang $p = 2$ ist einfach. Es ist

$$\beta = \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \beta' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und deshalb

$$\begin{aligned} \det \beta' &= \varrho \\ \varrho \det(\beta')_2^2 &= \varrho^2 \cos \varphi = \det \beta' \cdot \beta^1 \\ -\varrho \det(\beta')_2^1 &= \varrho^2 \sin \varphi = \det \beta' \cdot \beta^2. \end{aligned}$$

(2) Es sei jetzt die Aussage für die Abbildung $\alpha = \beta : \mathbb{R}^{p-1} \rightarrow \mathbb{R}^{p+1}$ bewiesen. Wir wollen sie daraus für $\beta : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ herleiten. Zwischen den Abbildung β und α besteht der Zusammenhang

$$\beta = \begin{pmatrix} \alpha \cdot \cos \theta_{p-2} \\ \varrho \sin \theta_{p-2} \end{pmatrix},$$

deshalb ist

$$\beta' = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha' \cdot \cos \theta_{p-2} & & & \alpha \cdot (-\sin \theta_{p-2}) \\ \hline \sin \theta_{p-2} & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & \varrho \cos \theta_{p-2} \end{array} \right).$$

Da die Abbildung α gleich dem ϱ -fachen des ersten Spaltenvektors α'_I ihrer Ableitung α' ist, ist

$$\beta' = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha' \cdot \cos \theta_{p-2} & & & \alpha'_I \cdot (-\varrho \sin \theta_{p-2}) \\ \hline \sin \theta_{p-2} & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & \varrho \cos \theta_{p-2} \end{array} \right).$$

Es gilt jetzt die Berechnung der Determinanten und $(p-1)$ -Unterdeterminanten von β' auf die der Determinanten bzw. $(p-2)$ -Unterdeterminanten von α' zurückzuführen.

(3) Für die Unterdeterminante links oben gilt:

$$\det(\beta')_{1\dots p-1}^{1\dots p-1} = \cos^{p-1} \theta_{p-2} \cdot \det \alpha'.$$

(4) Für die Unterdeterminante rechts oben schließt man mit Hilfe einer Vertauschung von erster und p -ter Spalte in β'

$$\begin{aligned} \cos \theta_{p-2} \cdot \det(\beta')_{2\dots p}^{1\dots p-1} &= (-\varrho \sin \theta_{p-2}) \cdot (-1)^{p-2} \cdot \det(\beta')_{1\dots p-1}^{1\dots p-1} \\ &= (-1)^{p+1} \cdot (\varrho \sin \theta_{p-2}) \cdot \cos^{p-1} \theta_{p-2} \cdot \det \alpha', \end{aligned}$$

also

$$\det(\beta')_{2\dots p}^{1\dots p-1} = (-1)^{p+1} \cdot (\varrho \sin \theta_{p-2}) \cdot \cos^{p-2} \theta_{p-2} \cdot \det \alpha'.$$

(5) Durch Entwicklung nach der letzten Zeile berechnen wir die Determinante von β'

$$\begin{aligned} \det \beta' &= (-1)^{p+1} \cdot \sin \theta_{p-2} \cdot \det(\beta')_{2\dots p}^{1\dots p-1} + \varrho \cos \theta_{p-2} \cdot \det(\beta')_{1\dots p-1}^{1\dots p-1} \\ &= \varrho \sin^2 \theta_{p-2} \cdot \cos^{p-2} \theta_{p-2} \cdot \det \alpha' + \varrho \cos^p \theta_{p-2} \cdot \det \alpha' \\ &= \varrho \cos^{p-2} \theta_{p-2} \cdot \det \alpha'. \end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt für Aussage (i) gezeigt.

(6) Setzen wir die Aussage (i) bei Schritt (4) ein, so ergibt sich mit

$$\varrho \det(\beta')_{2\dots p}^{1\dots p-1} = (-1)^{p+1} \varrho \sin \theta_{p-2} \cdot \det \beta' = (-1)^{p+1} \cdot \det \beta' \cdot \beta^p$$

die Aussage (ii) für $s = p$.

(7) Es sei Wir berechnen zum Schluss die Unterdeterminante von β' bei fehlender erster Spalte und s -ter Zeile ($s \in \{1, \dots, p-1\}$).

$$\begin{aligned} (-1)^{s+1} \varrho \cdot \det(\beta')_{2\dots p}^{1\dots \widehat{s} \dots p} &= \varrho \cos \theta_{p-2} \cdot \cos^{p-2} \theta_{p-2} \cdot (-1)^{s+1} \varrho \cdot \det(\alpha')_{2\dots p-1}^{1\dots \widehat{s} \dots p-1} \\ &\stackrel{\text{IndV}}{=} \varrho \cos \theta_{p-2} \cdot \cos^{p-2} \theta_{p-2} \cdot \det \alpha' \cdot \alpha^s \\ &= (\varrho \cos^{p-2} \theta_{p-2} \cdot \det \alpha') \cdot \cos \theta_{p-2} \cdot \alpha^s \\ &= \det \beta' \cdot \beta^s. \end{aligned}$$



29.2 Die Kugelkoordinaten–Abbildung

Es sei

$$Q = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]^{p-2}$$

der p -dimensionale kompakte *Quader der Kugelkoordinaten* und

$$B = \left\{ v \in \mathbb{R}^p \mid \|v\| \leq 1 \right\}$$

die p -dimensionale Einheitsvollkugel.

Wir nennen die p -Fläche, das ist die Einschränkung auf Q der Kugelüberlagerungs–Abbildung

$$\beta : \left\{ \begin{array}{l} Q \rightarrow \mathbb{R}^p \\ \left(\begin{array}{c} \varrho \\ \varphi \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{array} \right) \mapsto \beta(\varrho, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{p-2}) \end{array} \right.$$

die *Kugelkoordinaten–Abbildung* und nennen sie ebenfalls β .

Wir zerlegen den Quader und die Kugel gemäß

$$\begin{aligned} Q_{\text{offen}} &:= Q^\circ =]0, 1[\times]0, 2\pi[\times \left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right]^{p-2} \\ Q_{\text{Null}} &:= Q \setminus Q_{\text{offen}} = \left\{ u \in \mathbb{R}^p \mid \varrho \in \{0, 1\} \vee \varphi \in \{0, 2\pi\} \right. \\ &\quad \left. \vee \theta_i \in \left\{ -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right\} \text{ für ein } i = 1, \dots, p-2 \right\}. \\ B_{\text{offen}} &:= B^\circ \setminus \left\{ v \in B \mid v_1 \geq 0, v_2 = 0 \right\} \\ B_{\text{Null}} &:= B \setminus B_{\text{offen}}. \end{aligned}$$

in Teilmengen mit den jeweils im Index angegebenen Eigenschaften. Dabei ist B_{offen} die offene Einheitskugel ohne die in die Kugel eingeschnittene abgeschlossene „Hälfte“ ($v_1 \geq 0$) einer $(p-1)$ -dimensionalen Hyperebene ($v_2 = 0$).

Satz 15

(i) Die Kugelkoordinaten–Abbildung

$$\beta : Q \rightarrow B$$

ist wohldefiniert und surjektiv.

(ii) Die auf den offenen Kern eingeschränkte Abbildung

$$\beta : Q_{\text{offen}} \rightarrow B_{\text{offen}}$$

ist ein Diffeomorphismus mit überall positiver Jacobi–Determinante.

(iii) Die auf den Rand — und bzgl. der Wertemenge — eingeschränkte Abbildung

$$\beta : Q_{\text{Null}} \rightarrow B_{\text{Null}}$$

ist wohldefiniert und surjektiv.

Es wäre vielleicht interessant, eine Teilmenge von Q aufzufinden, die durch β bijektiv auf B abgebildet wird. In Bezug auf die Differentialrechnung ist dies jedoch uninteressant, da die auf B definierte Umkehrabbildung nicht stetig sein kann. In Bezug auf die Integralrechnung ist eine solche Teilmenge ohne Bedeutung, da das Komplement in Q nur eine Nullmenge ist.

Beweis Wir lösen zunächst die Gleichung

$$\beta(u) = v$$

naiv, p.h. ohne genaue Beachtung der Definitionsmenge von β , rekursiv nach $u = (\varrho, \varphi, \theta_2, \dots, \theta_{p-2})$ auf.

$$\begin{aligned} \varrho &= v_1^2 + \dots + v_p^2 \\ \sin \theta_{p-2} &= \frac{v_p}{\varrho} \\ \sin \theta_{p-3} &= \frac{v_{p-1}}{\varrho \cos \theta_{p-2}} \\ &\vdots \\ \sin \theta_1 &= \frac{v_3}{\varrho \cos \theta_{p-2} \cdot \dots \cdot \cos \theta_2} \\ e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi &= \frac{v_1 + iy_2}{\varrho \cos \theta_{p-2} \cdot \dots \cdot \cos \theta_2 \cos \theta_1} \end{aligned}$$

(i) Mit Hilfe (eines Teils) dieser Formeln lässt sich für jedes $v \in B$ ein Urbild $u \in Q$ finden. Es ist also $\beta : Q \rightarrow B$ surjektiv.

(ii) Für $v \in B_{\text{offen}}$ ist

$$0 \neq v_2 = \varrho \sin \varphi \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{p-3} \cos \theta_{p-2},$$

deshalb dann

$$\varrho > 0, \quad \cos \theta_1 > 0, \quad \cos \theta_2 > 0, \quad \dots \quad \cos \theta_{p-2} > 0,$$

so dass die Auflösungsformeln einwandfrei eine C^∞ -Umkehrabbildung β^{-1} auf B_{offen} liefern.

(iii) Ist $u \in Q_{\text{Null}} = \partial Q$, so folgt

$$\begin{aligned} \varrho = 0 &\implies v = 0 \\ \text{oder } \varrho = 1 &\implies v \in S_1(0) \\ \text{oder } \varphi \in \{0, 2\pi\} &\implies v_1 \geq 0 \text{ und } v_2 = 0 \\ \text{oder } \theta_i \in \left\{-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right\} &\implies v_1 = 0 \text{ und } v_2 = 0, \\ &\text{für ein } i \end{aligned}$$

insgesamt also $v \in B_{\text{Null}}$.

Ist umgekehrt $v \in B_{\text{Null}} = S_1(0) \cup \left\{ v \in B_1(0) \mid v_1 \geq 0, v_2 = 0 \right\}$, so folgt

$$\begin{aligned} v \in S_1(0) &\implies \varrho = 1 \\ \text{oder } v_1 \geq 0, v_2 = 0 &\implies \begin{cases} \varrho \cos \varphi \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{p-3} \cos \theta_{p-2} \geq 0 \\ \varrho \sin \varphi \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{p-3} \cos \theta_{p-2} = 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \varrho = 0 \vee \varphi \in \{0, 2\pi\} \vee \\ \theta_i \in \left\{-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right\} \text{ für ein } i = 1, \dots, p-2 \end{cases} \\ &\implies u \in Q_{\text{Null}}. \end{aligned}$$



Formeln 16

(i) Es sei $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann gilt für das Integral

$$\begin{aligned} \int_B f(y) dy &\stackrel{K11}{=} \int_Q \det \beta'(x) \cdot f(\beta(x)) dx \\ &\stackrel{S14}{=} \int_{[0,1]} \int_{[0,2\pi]} \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \dots \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \varrho^{p-1} \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dots \cos^{p-2} \theta_{p-2} \\ &\quad f(\beta(\varrho, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{p-2})) d\theta_{p-2} \dots d\theta_1 d\varphi dr. \end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\text{vol}_d(B) = \prod_{\ell=1}^p \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \cos^\ell \theta d\theta = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{(\frac{d}{2})!}, & \text{falls } d \text{ gerade} \\ \frac{2^{\frac{d+1}{2}} \cdot \pi^{\frac{d-1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot d}, & \text{falls } d \text{ ungerade} \end{array} \right\}$$

Die erste Gleichung von (ii) wurde schon einmal in Abschnitt 22.5 (AYS03) — auf andere Weise — gezeigt.

Beweis Die Beweisschritte für (i) sind im Satz bereits angedeutet.

(ii)

$$\begin{aligned} \text{vol}_d(B) &= \int_B dy \\ &= \int_{[0,1]} \int_{[0,2\pi]} \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \dots \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \varrho^{p-1} \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dots \cos^{p-2} \theta_{p-2} \\ &\quad d\theta_{p-2} \dots d\theta_1 d\varphi dr. \\ &= \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \cos \theta d\theta \cdot \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \cos^2 \theta d\theta \cdot \dots \cdot \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \cos^{p-2} \theta d\theta \cdot \frac{2\pi}{p} \\ &= \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \cos \theta d\theta \cdot \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \cos^2 \theta d\theta \cdot \dots \cdot \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \cos^p \theta d\theta. \end{aligned}$$

Dabei haben wir Gebrauch von der in Abschnitt 22.5 gezeigten Beziehung

$$\frac{2\pi}{p} = \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \cos^{p-1} \theta d\theta \cdot \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \cos^p \theta d\theta$$

gemacht.



29.3 Die Sphärenkoordinaten–Abbildung

Es sei

$$P = Q^{\hat{1}} = [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]^{p-2}$$

der $(p-1)$ -dimensionale kompakte *Quader der Sphärenkoordinaten* und

$$S = \left\{ v \in \mathbb{R}^p \mid \|v\| = 1 \right\},$$

die $(p-1)$ -dimensionale Einheitskugel.

Wir bezeichnen die durch „ $r=1$ “-Satzung aus der Kugelkoordinaten–Abbildung hervorgehende partielle Abbildung

$$\xi : \left\{ \begin{array}{l} P \rightarrow \mathbb{R}^p \\ \left(\begin{array}{c} \varphi \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{array} \right) = \tilde{u} \mapsto \xi(\tilde{u}) = \beta(1, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{p-2}) \end{array} \right.$$

mit *Sphärenkoordinaten–Abbildung*. Sie ist eine quaderparametrisierte $(p-1)$ -Hyperfläche.

Sätzchen 17

(i) *Die Sphärenkoordinaten–Abbildung*

$$\xi : P \rightarrow S$$

ist wohldefiniert und surjektiv.

(ii) *Der Normalenvektor in $\tilde{u} \in P$ ist gegeben durch*

$$N_{\xi}(\tilde{u}) = \det \beta'(1, \tilde{u}) \cdot \xi(\tilde{u}) = \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dots \cos^{p-2} \theta_{p-2} \cdot \xi(\tilde{u}).$$

Beweis Der Beweis von (i) ist in dem entsprechenden Teil des Beweises von Satz 15 (i) miterbracht worden.

(ii) besteht in einem sorgfältigen Einsetzen der zugehörigen Definitionen. Für $s \in \{1, \dots, p\}$ gilt

$$\begin{aligned} N_{\xi}^s(\tilde{u}) &= (-1)^{s+1} \det \xi'^{1 \dots \hat{s} \dots n}(\tilde{u}) \\ &= (-1)^{s+1} \det (\beta')_{2 \dots p}^{1 \dots \hat{s} \dots n}(1, \tilde{u}) \\ &\stackrel{S 14(ii)}{=} \det \beta'(1, \tilde{u}) \cdot \beta^s(1, \tilde{u}) \\ &= \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dots \cos^{p-2} \theta_{p-2} \cdot \xi^s(\tilde{u}). \end{aligned}$$



Formeln 18

(i) Es sei $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass $f \circ \xi$ integrierbar auf P ist. Dann gilt für das Hyperflächenintegral

$$\begin{aligned} \int_{\xi} f(y) dy &= \int_P \|N_{\xi}(\tilde{u})\| \cdot f(\xi(\tilde{u})) d\tilde{u} \\ &= \int_{[0,2\pi]} \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \cdots \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \cdots \cos^{p-2} \theta_{p-2} \\ &\quad f(\xi(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{p-2})) d\theta_{p-2} \cdots d\theta_1 d\varphi. \end{aligned}$$

(ii) Der Hyperflächeninhalt der $(p-1)$ -dimensionalen Einheitssphäre ist gleich dem p -fachen des Volumens der p -Einheitskugel.

$$\text{area}_{p-1}(\xi) = p \cdot \text{vol}_p(B).$$

Für $p = 3$ haben wir dies schon in Beispiel (2) von Abschnitt 28.3.2 hergeleitet.

Beweis Bei (i) ist nichts zu zeigen.

(ii) Wir setzen $f \equiv 1$ in (i). Ein Blick in den Beweis von Formel 16 (ii) zeigt dann

$$\begin{aligned} \text{area}_{p-1}(\xi) &= \int_P \|N_{\xi}(\tilde{u})\| d\tilde{u} \\ &= \int_{[0,2\pi]} \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \cdots \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \cdots \cos^{p-2} \theta_{p-2} \\ &\quad d\theta_{p-2} \cdots d\theta_1 d\varphi \\ &= \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \cos \theta d\theta \cdot \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \cos^2 \theta d\theta \cdots \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \cos^{p-2} \theta d\theta \cdot 2\pi \\ &= p \cdot \text{vol}_p(B). \end{aligned}$$



30 Rotationssymmetrie

30.1 Rotationssymmetrische Funktionen

Definition Es sei der \mathbb{R}^d mit der euklidischen Norm ausgestattet. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ heißt rotationssymmetrisch, wenn eine — und damit jede — der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

- (A) Es ist $f(x) = f(\tilde{x})$, falls $\|x\| = \|\tilde{x}\|$ für alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^d$.
- (B) Es existiert eine Funktion $f_{\text{rad}} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $f(x) = f_{\text{rad}}(\|x\|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.
- (C) Für alle $A \in O(d)$ (Multiplikative Gruppe der orthogonalen Matrizen) gilt: $f = f \circ A$.
- (D) Für alle $A \in SO(d)$ (Multiplikative Gruppe der orthogonalen Matrizen mit Determinante +1) gilt: $f = f \circ A$.

Beweis Der Beweis der Äquivalenzen ist fast trivial.

(A) \implies (B): Setze $f_{\text{rad}}(\varrho) := f(\varrho, 0, \dots, 0)$.

(B) \implies (C): Für eine orthogonale Matrix gilt

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, A^T Ax \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2,$$

also $\|Ax\| = \|x\|$. Mit (B) folgt $f(Ax) = f_{\text{rad}}(\|Ax\|) = f_{\text{rad}}(\|x\|) = f(x)$.

(C) \implies (D) ist trivial.

(D) \implies (A): Zu $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x\| = \|\tilde{x}\|$ gibt es eine Matrix in $SO(d)$, so dass $Ax = \tilde{x}$. Es folgt dann

$$f(x) = f(Ax) = f(\tilde{x}).$$



Im folgenden sei B_d wieder die Einheitsvollkugel im \mathbb{R}^d .

Satz 19 *Es sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine rotationssymmetrische Abbildung.*

(i) *f ist genau dann integrierbar, wenn die Funktion*

$$\begin{cases} \mathbb{R}_0^+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ \varrho & \mapsto f_{\text{rad}}(\varrho) \cdot \varrho^{d-1} \end{cases}$$

über $[0, \infty[$ integrierbar ist. Es ist dann

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{[0, \infty[} f_{\text{rad}}(\varrho) \cdot d \cdot \varrho^{d-1} d\varrho \cdot \text{vol}_d(B_d).$$

(ii) *Für $k \in \{1, \dots, d\}$ ist die Abbildung*

$$\begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x_k^2 \cdot f(x) \end{cases}$$

genau dann integrierbar, wenn die Funktion

$$\begin{cases} \mathbb{R}_0^+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ \varrho & \mapsto f_{\text{rad}}(\varrho) \cdot \varrho^{d+1} \end{cases}$$

über $[0, \infty[$ integrierbar ist. Es ist dann

$$\int_{\mathbb{R}^d} x_k^2 f(x) dx = \int_{[0, \infty[} f_{\text{rad}}(\varrho) \varrho^{d+1} d\varrho \cdot \text{vol}_d(B_d).$$

Beweis Es sei

$$Q = [0, \infty[\times [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]^{p-2}$$

der (in der ersten Koordinate unbeschränkte) Quader der Kugelkoordinaten und

$$\beta : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$$

die auf diesen Quader eingeschränkte Kugelüberlagerungs–Abbildung. Die Überlegungen aus Abschnitt 29.2 sind entsprechend anwendbar.

Für $u = (\varrho, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{d-2}) \in Q$ gilt

$$f(\beta(u)) = f_{\text{rad}}(\|\beta(u)\|) = f_{\text{rad}}(\varrho).$$

(i) Mit den Formeln 16 ist dann

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^d} f(y) dy &= \int_{[0,\infty[} \int_{[0,2\pi]} \int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \cdots \int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} f(\beta(\varrho, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{d-2})) \\
 &\quad \varrho^{d-1} \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dots \cos^{d-2} \theta_{d-2} d\theta_{d-2} \dots d\theta_1 d\varphi d\varrho \\
 &= \int_{[0,\infty[} f_{\text{rad}}(\varrho) \varrho^{d-1} d\varrho \cdot \\
 &\quad \int_{[0,2\pi]} \int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \cdots \int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dots \cos^{d-2} \theta_{d-2} d\theta_{d-2} \dots d\theta_1 d\varphi \\
 &= \int_{[0,\infty[} f_{\text{rad}}(\varrho) \cdot \varrho^{d-1} d\varrho \cdot d \cdot \text{vol}_d(B_d).
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^d} x_k^2 f(x) dx &= \frac{1}{d} \cdot \sum_{\ell=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} x_\ell^2 f(x) dx = \frac{1}{d} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 f(x) dx \\
 &\stackrel{(i)}{=} \frac{1}{d} \cdot \int_{[0,\infty[} \varrho^2 f_{\text{rad}}(\varrho) \cdot d \cdot \varrho^{d-1} d\varrho \cdot \text{vol}_d(B_d) \\
 &= \int_{[0,\infty[} f_{\text{rad}}(\varrho) \cdot \varrho^{d+1} d\varrho \cdot \text{vol}_d(B_d).
 \end{aligned}$$

Die zweite Formel hat eine physikalische Anwendung: Trägheitsmoment (Forster 3, S. 79).
Steiner'scher Satz. ◆

30.2 Anwendung: Gauss-Integrale

Formeln 20 Für $d \in \mathbb{N}$ existiert das „Gauss-Integral“ und hat den Wert:

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|^2} dx = \pi^{\frac{d}{2}} = \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) \cdot \text{vol}_d(B_d).$$

Beweis (1) Für $d = 2$ ist

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|x\|^2} dx = \int_{[0, \infty[} e^{-\varrho^2} 2\varrho d\varrho \cdot \text{vol}_2(B_2) = \left[-e^{-\varrho^2}\right]_0^\infty \cdot \pi = \pi.$$

(2) Für beliebiges d gilt mit dem Satz von Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2 - \dots - x_d^2} dx_1 dx_2 \dots dx_d = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy\right)^d.$$

(3) Aus (2),(1) folgt erst $\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$ und dann mit (2) die linke Gleichheit.

(4) Die Gleichheit auf der rechten Seite werden wir gleich — nach der Definition der Gamma-Funktion — nachschieben. Man kann sich davon überzeugen, dass kein Beweis-Zirkel auftritt. ◆

30.3 Anwendung: Die Gamma-Funktion

Definition Wir definieren die Gamma-Funktion

$$\Gamma : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ z & \mapsto \int_{[0, \infty[} x^{z-1} e^{-x} dx = 2 \int_{[0, \infty[} \varrho^{2z-1} e^{-\varrho^2} dy \end{cases}$$

Die Wahl des Variablensymbols z soll daran erinnern, dass die Gamma-Funktion auf eine geeignete Teilmenge der komplexen Ebene \mathbb{C} fortgesetzt werden kann. Die Gleichheit der beiden Integrale beruht auf der Substitution $x = \varrho^2$.

Formeln 21

(i) Es gilt folgende Rekursion

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z).$$

(ii) Γ ist unendlich oft differenzierbar mit

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^\infty x^{z-1} \cdot e^{-x} \cdot (\ln x)^n dx$$

Beweis Zu (i): Es ist

$$\Gamma(1) = \int_{[0, \infty[} e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^\infty = 1$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_{[0, \infty[} e^{-\varrho^2} dy = \int_{]-\infty, \infty[} e^{-\varrho^2} dy \stackrel{\text{F 20 links}}{=} \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(z+1) = \int_{[0, \infty[} x^z e^{-x} dx \stackrel{\text{PI}}{=} \left[x^z (-e^{-x}) \right]_0^\infty - \int_{[0, \infty[} z \cdot x^{z-1} (-e^{-x}) dx = z \cdot \Gamma(z).$$

Zu (ii): Beim Beweis des Induktionsschritts wird eine „Differentiation unter dem Integral“ (vgl. Satz 9 (ii)) durchgeführt. Beachte, dass die Γ -Funktion auf ein kompaktes Intervall M um die betrachtete Differentiationsstelle $z \in \mathbb{R}^+$ eingeschränkt werden kann und so die Majorantenbedingung erfüllbar wird.

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n+1)}(z) &= \frac{d}{dz} \int_0^\infty x^{z-1} \cdot e^{-x} \cdot (\ln x)^n dx = \int_0^\infty \frac{d}{dz} [x^{z-1} \cdot e^{-x} \cdot (\ln x)^n] dx \\ &= \int_0^\infty \ln(x) \cdot x^{z-1} \cdot e^{-x} \cdot (\ln x)^n dx = \int_0^\infty x^{z-1} \cdot e^{-x} \cdot (\ln x)^{n+1} dx. \end{aligned}$$

◆

Jetzt können wir uns von der rechten Gleichheit in Formeln 20 überzeugen:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|^2} dx &\stackrel{\text{S 19(i)}}{=} \int_{[0, \infty[} e^{-\varrho^2} \cdot \varrho^{d-1} d\varrho \cdot d \cdot \text{vol}_d(B_d) = \frac{d}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \cdot \text{vol}_d(B_d) \\ &= \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) \cdot \text{vol}_d(B_d). \end{aligned}$$

30.4 Anwendung: Die Euler'sche Beta-Funktion

Definition Wir definieren die Euler'sche Beta-Funktion und konstatieren zwei Gleichheiten:

$$B : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) & \mapsto \int_{[0,1]} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \end{cases}$$

und konstatieren einige Gleichheiten:

Formeln 22 *Es ist:*

$$B(p, q) = 2 \int_{[0, \frac{\pi}{2}]} \sin^{2p-1} \varphi \cdot \cos^{2q-1} \varphi d\varphi = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Man beachte die Spezialfälle $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ und vergleiche die Formeln in AYS02(03)??

Beweis Die erste Gleichheit beruht auf der Substitution $x = \sin^2 \varphi$. Dann noch zur zweiten

$$\begin{aligned} B(p, q) \cdot \Gamma(p+q) &= 4 \int_{[0, \frac{\pi}{2}]} (\sin \varphi)^{2p-1} (\cos \varphi)^{2q-1} d\varphi \cdot \int_{[0, \infty[} \varrho^{2(p+q)-1} e^{-\varrho^2} d\varrho \\ &= 4 \int_{[0, \infty[} \int_{[0, \frac{\pi}{2}]} (\varrho \sin \varphi)^{2p-1} (\varrho \cos \varphi)^{2q-1} \cdot \varrho e^{-\varrho^2} d\varphi d\varrho \\ &= 4 \int_{[0, \infty[} \int_{[0, 2\pi]} \chi_{[0, \frac{\pi}{2}]}(\varphi) (\varrho \sin \varphi)^{2p-1} (\varrho \cos \varphi)^{2q-1} \cdot \varrho e^{-\varrho^2} d\varphi d\varrho \\ &\stackrel{S.16}{=} 4 \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+}(x) \cdot x_2^{2p-1} \cdot x_1^{2q-1} \cdot e^{-x_1^2 - x_2^2} dx \\ &\stackrel{Fub}{=} 2 \int_{\mathbb{R}^+} x_1^{2q-1} \cdot e^{-x_1^2} dx_1 \cdot 2 \int_{\mathbb{R}^+} x_2^{2p-1} \cdot e^{-x_2^2} dx_2 \\ &= \Gamma(q) \cdot \Gamma(p). \end{aligned}$$



31 Ergänzungen zum Satz von Stokes

31.1 Korrespondenz zwischen Formen und Funktionen, Vektorfeldern

Es sei der \mathbb{R}^n mit dem kanonischen (euklidischen) Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und demzufolge mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|$ ausgestattet. Denken Sie an die Identität

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \angle(v, w).$$

Die Menge der \mathcal{C}^1 -Vektorfelder auf $X \subseteq \mathbb{R}^n$ wird mit $\mathcal{C}^1(X, \mathbb{R}^n)$ bezeichnet.

Für $p = 0, 1, n - 1, n$ definieren wir die b_p -Operatoren

$$\begin{aligned}
 b_0 : & \begin{cases} \Omega^0(X) & \rightarrow \mathcal{C}^1(X) \\ \omega & \mapsto \omega^{b_0} = \omega \end{cases} \\
 b_1 : & \begin{cases} \Omega^1(X) & \rightarrow \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R}^n) \\ \omega & \mapsto \omega^{b_1} = \begin{pmatrix} \omega_1(x) \\ \omega_2(x) \\ \vdots \\ \omega_n(x) \end{pmatrix} \end{cases} \\
 b_{n-1} : & \begin{cases} \Omega^{n-1}(X) & \rightarrow \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R}^n) \\ \omega & \mapsto \omega^{b_{n-1}} = \begin{pmatrix} \omega_{2\dots n}(x) \\ \vdots \\ (-1)^{r+1} \omega_{1\dots\widehat{r}\dots n}(x) \\ \vdots \\ (-1)^n \omega_{1\dots n-1}(x) \end{pmatrix} \end{cases} \\
 b_n : & \begin{cases} \Omega^n(X) & \rightarrow \mathcal{C}^1(X) \\ \omega & \mapsto \omega^{b_n} = \omega_{12\dots n}(x) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Sie ordnen den p -Formen in X Vektorfelder bzw. \mathcal{C}^1 -Funktionen auf X zugeordnet werden. Die Umkehroperatoren dieser bijektiven Operatoren werden mit den \sharp -Symbolen geschrieben.

Beachte, dass der Definition dieser Operatoren das euklidische Skalarprodukt — unsichtbar — unterlegt ist. Die Differentialgeometrie arbeitet diese strukturell-bedeutsame Sichtweise genau heraus.

Für $f \in \mathcal{C}^1(X)$ und $v \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R}^n)$ definieren wir die Operatoren

$$\begin{aligned}
 \text{grad } f(x) &= \nabla f(x) & := & (df^{\sharp_0})^{b_1}(x) = (\partial_1 f(x) \ \cdots \ \partial_n f(x)) \\
 \text{div } v(x) &= \nabla \cdot v(x) & := & (dv^{\sharp_{n-1}})^{b_n}(x) = \partial_1 v_1(x) + \dots + \partial_n v_n(x). \\
 \text{rot } v(x) &= \nabla \times v(x) & := & (d(v^{\sharp_1}))^{b_2} \quad (\mathbf{Nur\ für\ } n = 3)
 \end{aligned}$$

Formelsammlungen enthalten viele Aussagen über diese Operatoren, die innerhalb des Differentialformenkalküls strukturell-systematisch erfasst werden.

Übung: Berechnen Sie die Koordinaten für die Operatoren

Beispiele für $n = 2, 3$.

31.2 Integral einer p -Form über einer p -Fläche

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir betrachten ab jetzt ausschließlich p -Flächen $\Phi : K \rightarrow X$ mit der folgenden Eigenschaft:

Es existieren eine offene Umgebung U_K von K und eine \mathcal{C}^1 -Fortsetzung $\Phi : U_K \rightarrow \mathbb{R}^n$ von Φ .

Definition

- (i) Es sei $\omega = \omega_I dx^I$ eine reine p -Form in X und $\Phi : K \rightarrow X$ eine p -Fläche in X . Wir definieren das Integral der p -Form ω über die p -Fläche Φ durch

$$\int_{\Phi} \omega := \int_K \det \Phi'^I(u) \cdot \omega_I(\Phi(u)) du.$$

Die rechte Seite ist wohldefiniert, da K kompakt und die Funktion $\det \Phi' \cdot (\omega_I \circ \Phi)$ auf K eindeutig definiert und stetig ist.

- (ii) Die Definition lässt sich ohne weiteres für beliebige p -Formen und „Ketten von p -Flächen“ verallgemeinern.
- (iii) Wir nennen zwei Ketten (von p -Flächen) ψ und $\tilde{\psi}$ in X *äquivalent* oder gleich *gleich*, wenn für eine beliebige p -Form ω in X gilt:

$$\int_{\psi} \omega = \int_{\tilde{\psi}} \omega.$$

Offensichtlich sind dies Verallgemeinerungen der entsprechenden Begriffe für Einheitspolyeder als Kompakta.

Satz 23 *Es seien $\Phi : K \rightarrow X$ und $\tilde{\Phi} : \tilde{K} \rightarrow X$ zwei p -Flächen in X , die sich „nur“ durch eine orientierungserhaltende Transformation $\vartheta : \tilde{K} \rightarrow K$ im Parameterbereich unterscheiden. Das heißt genauer, dass eine stetige Abbildung $\vartheta : \tilde{K} \rightarrow K$ existiert mit*

$$\tilde{\Phi} = \Phi \circ \vartheta,$$

und der zusätzlichen Eigenschaft, dass die Einschränkung $\vartheta : \tilde{K}_{\text{offen}} \rightarrow K_{\text{offen}}$ ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus mit positiver Determinante der Jacobi-Matrix ist.

Dann gilt für eine p -Form in X :

$$\int_{\tilde{\Phi}} \omega = \int_{\Phi} \omega.$$

Beweis Es genügt, reine p -Formen $\omega = \omega_I dx^I$ zu betrachten. Mit Korollar 11 gilt

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Phi}} \omega &= \int_{\Phi \circ \vartheta} \omega = \int_{\tilde{K}} \det(\Phi \circ \vartheta)'^I(v) \cdot \omega_I(\Phi \circ \vartheta(v)) dv \\ &= \int_{\tilde{K}} \det \vartheta'(v) \cdot \det \Phi'^I(\vartheta(v)) \cdot \omega_I(\Phi(\vartheta(v))) dv \\ &= \int_K \det \Phi'^I(u) \cdot \omega_I(\Phi(u)) du \\ &= \int_{\Phi} \omega. \end{aligned}$$



Formeln 24 Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

(i) Es sei $g : \{0\} \rightarrow X$ eine 0-Fläche (Auswahl eines Punktes in X).

Das Integral einer 0-Form $\omega = f$ über dieser 0-Fläche gilt:

$$\int_g \omega = f(g(0)).$$

(ii) Es sei $\gamma : J \rightarrow X$ eine 1-Fläche (Kurve).

Zwischen dem Integral einer 1-Form ω und dem Kurvenintegral des zugehörigen Vektorfelds $v = \omega^{\flat_1}$ über der Kurve besteht der folgende Zusammenhang:

$$\int_\gamma \omega = \int_J \langle T_\gamma(t), v(\gamma(t)) \rangle dt \stackrel{\text{def}}{=} \text{work}(v, \gamma).$$

(iii) Es sei $\Phi : K \rightarrow X$ eine $(n-1)$ -Fläche (Hyperfläche).

Zwischen dem Integral einer $(n-1)$ -Form ω und dem Hyperflächenintegral des zugehörigen Vektorfelds $v = \omega^{\flat_{n-1}}$ besteht der folgende Zusammenhang:

$$\int_\Phi \omega = \int_K \langle N_\Phi(u), v(\Phi(u)) \rangle du \stackrel{\text{def}}{=} \text{flow}(v, \Phi).$$

(iv) Es sei $\Phi : K \rightarrow X$ eine n -Fläche.

Zwischen dem Integral einer n -Form ω und dem Integral der zugehörigen Funktion $f = \omega^{\flat_n}$ besteht der folgende Zusammenhang:

$$\int_\Phi \omega = \int_K \det \Phi'(u) \cdot f(\Phi(u)) du.$$

Beweis Nur die dritte Aussage ist nicht ganz so einfach einzusehen: Wir betrachten eine $(n-1)$ -Form $\omega = \sum_{r=1}^n \omega_{1 \dots \hat{r} \dots n} dx^{1 \dots \hat{r} \dots n}$ und das zugehörige Vektorfeld

$$v = \omega^{\flat_{n-1}} = \begin{pmatrix} \omega_{2 \dots n} \\ \vdots \\ (-1)^{r+1} \omega_{1 \dots \hat{r} \dots n} \\ \vdots \\ (-1)^{n+1} \omega_{1 \dots \hat{n}} \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \int_\Phi \omega &= \sum_{r=1}^n \int_K \det \Phi'^{1 \dots \hat{r} \dots n}(u) \cdot \omega_{1 \dots \hat{r} \dots n}(\Phi(u)) du \\ &= \int_K \sum_{r=1}^n \underbrace{(-1)^{r+1} \det \Phi'^{1 \dots \hat{r} \dots n}(u)}_{N_\Phi(u)} \cdot \underbrace{(-1)^{r+1} \omega_{1 \dots \hat{r} \dots n}(\Phi(u))}_{\omega^{\flat_{n-1}}(\Phi(u))} du \\ &= \int_K \langle N_\Phi(u), \omega^{\flat_{n-1}}(\Phi(u)) \rangle du \end{aligned}$$



32 Reparametrisierung von Ketten

32.1 Einführung

In Abschnitt 25.2 (AYS03) hatten wir das Integral einer p -Form $\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)} \omega_I dx^I$ in einer offenen Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ über einer p -Kette $\psi = \sum_{\ell=1}^m \alpha_\ell \sigma_\ell$ mit Simplex $\sigma_\ell : E_p \rightarrow X$ eingeführt:

$$\int_\psi \omega := \sum_{\ell=1}^m \sum_{I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^p)} \alpha_\ell \int_{E_p} \det \sigma^{I'}(u) \cdot \omega_I(\sigma(u)) du_1 \dots du_p.$$

Dieser Ausdruck ist für praktische Berechnungen sehr unhandlich, da man für eine konkret gegebene geometrische „ p -dimensionalen Fläche“ im \mathbb{R}^n erst eine geeignete Kette inklusive ihrer Simplexe und deren Unter-Determinanten ermitteln muss. Zusätzlichen Aufwand verursacht die Mengenintegration über die Einheitspolyeder.

Diese Schwierigkeiten kann man mit Hilfe eines systematischen Vorgehens beheben, das wir jetzt kurz beschreiben. Die in dem Diagramm

$$E_p \xrightarrow{\Psi} X$$

als Pfeil dargestellte Kette Ψ wird in geeigneter Weise durch zwei Pfeile innerhalb des Diagramms

$$E_p \xrightarrow{\kappa} K \xrightarrow{\Phi} X$$

ersetzt, die wie folgt zu interpretieren sind:

- κ ist eine p -Kette, die die kompakte Menge K in geeigneter Weise als Bild „erfasst“. Man könnte dabei κ als „orientiertes p -Kompaktum“ bezeichnen.
- $\Phi : K \rightarrow X$ ist eine p -Fläche in X mit Parameterbereich K . (Sie hat die zusätzliche zu Beginn von Abschnitt 31.2 erwähnte Eigenschaft der C^1 -Fortsetzbarkeit.)

Es geht dann darum, mit Hilfe dieser Faktorisierung der Kette Ψ

- das Integral einer p -Form ω über Ψ ,
- den Rand $\partial\Psi$ — oder eine dazu äquivalente Kette — und
- das Integral einer $(p-1)$ -Form η über diesen Rand $\partial\Psi$

zu berechnen.

Dabei kann man sich zunächst auf den Fall beschränken, dass $\Phi = \text{id}_K$ die „identische“ Fläche in $X \subseteq \mathbb{R}^p$ ist. Für allgemeineres $\Phi : K \rightarrow X$ kann man die Berechnung mittels Zurückziehen der Form ω auf eine Umgebung von K bewerkstelligen.

Wir werden uns Würfeln W , Quadern Q , Kugeln B , Sphären S und Tori T als neuen Parameterbereichen zuwenden.

32.2 Orientierte p -Kompakta

Definition Wir nennen das Tripel $(\kappa, K, K_{\text{offen}})$ ein (*positiv*) *orientiertes p -Kompaktum*, wenn die folgenden Daten gegeben sind:

- K_{offen} ist eine (in \mathbb{R}^p) beschränkte offene Menge.
- Dies zieht nach sich, dass $K = \overline{K_{\text{offen}}}$ kompakt ist.
- Es gibt für $\ell = 1, \dots, m$ Simplexe $\kappa_\ell : E_p \rightarrow U_K$ (offene Umgebung von K), mit der Eigenschaft, dass die Einschränkungen $\kappa_\ell : E_p^\circ \rightarrow \kappa_\ell(E_p^\circ)$ \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismen sind.
- Das Bild der Kette $\kappa = \sum_{\ell=1}^m \text{sgn}(\det \kappa'_\ell) \kappa_\ell$ zerlegt K in folgendem genauen Sinne:

$$\begin{aligned} \bigcup_{\ell=1}^m \kappa_\ell(E_p) &= K \\ \bigcup_{\ell=1}^m \kappa_\ell(E_p^\circ) &= K_{\text{offen}}, \quad \kappa_\ell(E_p^\circ) \cap \kappa_{\tilde{\ell}}(E_p^\circ) = \emptyset \quad \text{für } \ell \neq \tilde{\ell}, \end{aligned}$$

Bemerkungen

(1) Der topologische Rand $E_p \setminus E_p^\circ$ des Einheitspolyeders E_p ist eine Nullmenge. Da die Simplexe κ_ℓ \mathcal{C}^1 -Abbildungen sind, ist die Menge

$$K_{\text{Null}} = K \setminus K_{\text{offen}} = \bigcup_{\ell=1}^m \kappa_\ell(E_p) \setminus \bigcup_{\ell=1}^m \kappa_\ell(E_p^\circ) \subseteq \bigcup_{\ell=1}^m \kappa_\ell(E_p \setminus E_p^\circ)$$

eine Nullmenge (in \mathbb{R}^p).

(2) Der topologische Rand von K ist im Bild des simplizialen Randes von κ enthalten:

$$\partial_{\text{top}} K := K \setminus K^\circ \subseteq K \setminus K_{\text{offen}} = K_{\text{Null}} \subseteq \bigcup_{\ell=1}^m \kappa_\ell(E_p \setminus E_p^\circ) = \partial \kappa(E_{p-1}).$$

Die linke Inklusion gilt, da K° die Vereinigung aller offenen Teilmengen von K ist und deshalb K_{offen} umfasst.

(3) Es sei jetzt weiter

$$\partial \kappa = \sum_{k=1}^t \delta_k \cdot (\iota_k \circ \lambda_k),$$

eine Darstellung (bis auf Äquivalenz) des simplizialen Randes von κ , wobei

- die $(p-1)$ -Ketten λ_k aus $(p-1)$ -Kompakta $(\lambda_k, L_k, L_{k,\text{offen}})$ entstammen,
- $\iota_k : L_k \rightarrow K$ $(p-1)$ -Flächen in (einer offenen Umgebung von) K und
- $\delta_k \in \{0, 1\}$ die Orientierung der Randflächen wiedergeben.

Es wird sich bei all unseren Beispielen herausstellen, dass das „Bild der Kette“ gleich dem topologischen Rand der kompakten Menge K ist:

$$\bigcup_{k=1}^t (\iota_k \circ \lambda_k)(L_k) = \partial_{\text{top}} K.$$

Ein erstes Beispiel für p -Kompakta sind p -Einheitspolyeder E_p , die als Tripel $(E_p, E_p^\circ, \text{id}_{E_p})$ die obige Definition erfüllen.

In einem Sätzchen registrieren wir, dass man bei der Berechnung von Integralen über die Ketten $\Phi \circ \kappa$ bzw. $\Phi \circ \partial\kappa$ die Simplex-Zerlegungen von κ bzw. $\partial\kappa$ „vergessen“ kann.

Sätzchen 25

Es sei $(\kappa, K, K_{\text{offen}})$ ein p -Kompaktum mit p -Kette κ .

Der Rand von κ lasse sich darstellen als $\partial\kappa = \sum_{k=1}^t \delta_k \cdot (\iota_k \circ \lambda_k)$.

$\Phi : K \rightarrow X$ sei eine durch K parametrisierte p -Fläche in der offenen Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

(i) Für eine reine p -Form $\omega = \omega_I dx^I$ in X gilt

$$\int_{\Phi \circ \kappa} \omega = \int_{\Phi} \omega = \int_K \det \Phi'^I(u) \cdot \omega_I(\Phi(u)) du.$$

(ii) Für eine reine $(p-1)$ -Form η_I in X gilt:

$$\int_{\partial(\Phi \circ \kappa)} \eta = \sum_{k=1}^t \delta_k \int_{\Phi \circ \iota_k} \eta = \sum_{k=1}^t \delta_k \int_{L_k} \det(\Phi \circ \iota_k)^{I'}(u) \cdot \eta_I(\Phi(\iota_k(u))) du.$$

Man beachte jeweils den Spezialfall, dass $p = n$ oder zusätzlich $\Phi : K \rightarrow \mathbb{R}^p$ die kanonische Teilmengen-Einbettung ist.

Beweis Es ist einfach

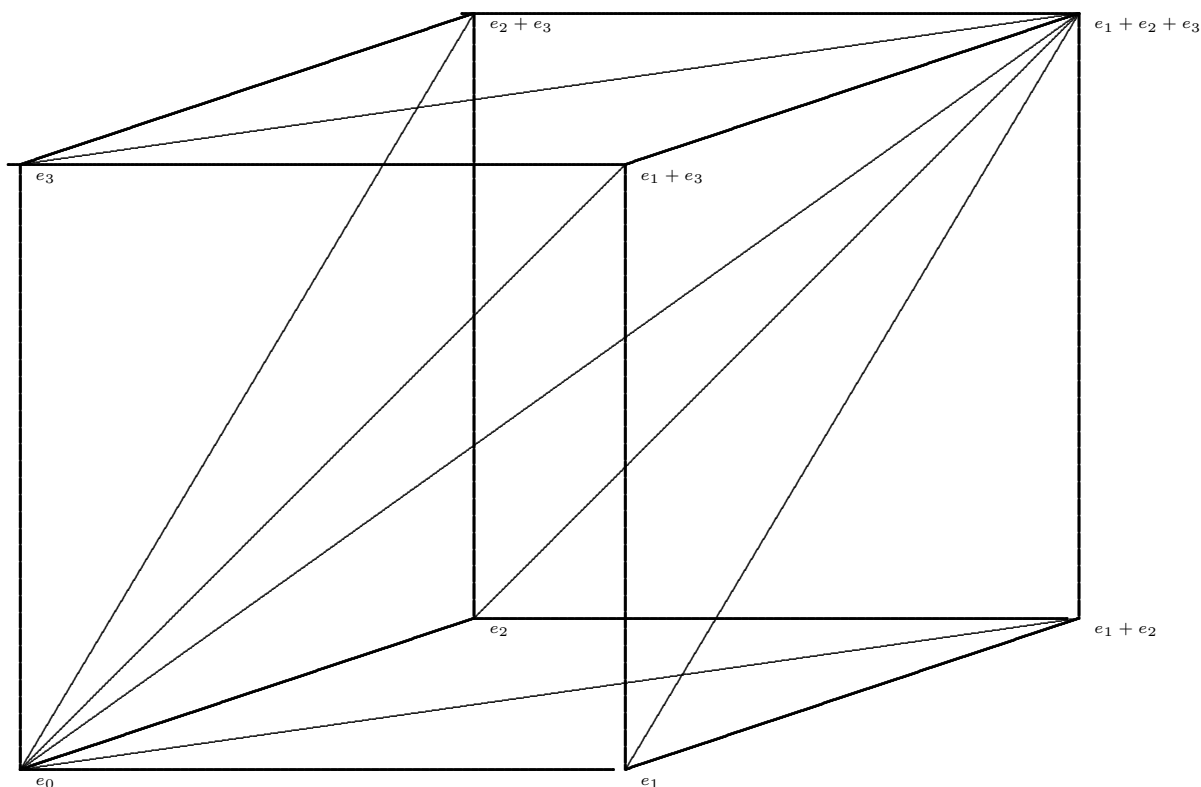
$$\begin{aligned} \int_{\Phi \circ \kappa} \omega &= \sum_{\ell=1}^m \int_{E_p} \text{sgn}(\det \kappa'_\ell) \cdot \det(\Phi \circ \kappa_\ell)^{I'}(u) \cdot \omega_I(\Phi(\kappa_\ell(u))) du \\ &= \sum_{\ell=1}^m \int_{E_p^\circ} \text{sgn}(\det \kappa'_\ell) \cdot \det(\Phi \circ \kappa_\ell)^{I'}(u) \cdot \omega_I(\Phi(\kappa_\ell(u))) du \\ &= \sum_{\ell=1}^m \int_{E_p^\circ} \det \Phi'^I(\kappa_\ell(u)) \cdot |\det \kappa'_\ell(u)| \cdot \omega_I(\Phi(\kappa_\ell(u))) du \\ &= \sum_{\ell=1}^m \int_{\kappa_\ell(E_p^\circ)} \det \Phi'^I(v) \cdot \omega_I(\Phi(v)) dv = \int_{K_{\text{offen}}} \det \Phi'^I(v) \cdot \omega_I(\Phi(v)) dv \\ &= \int_K \det \Phi'^I(v) \cdot \omega_I(\Phi(v)) dv. \end{aligned}$$

Für den Beweis der zweiten Aussage greifen wir auf die erste zurück:

$$\int_{\partial(\Phi \circ \partial\kappa)} \eta = \int_{\Phi \circ \partial\kappa} \eta = \sum_{k=1}^t \delta_k \int_{\Phi \circ \iota_k \circ \lambda_k} \eta \stackrel{(i)}{=} \sum_{k=1}^t \delta_k \int_{L_k} \det(\Phi \circ \iota_k)^{I'} \cdot \eta_I(\Phi(\iota_k(u))) du.$$



32.3 Orientierte Würfel



Beispiel für $p = 3$. Der Würfel ist unterteilt in sechs Teilpolyeder, die sich als Pyramide mit den sechs Dreiecken in den drei am Ursprung anliegenden Seitquadraten als Grundfläche und dem dem Ursprung diagonal gegenüberliegenden Eckpunkt als Spitze ergeben.

Für jede p -Permutation $J = (j_1, j_2, \dots, j_p) \in \mathcal{I}^{p!}$ betrachten wir den linearen Automorphismus

$$\tilde{\nu}_{j_1 \dots j_p} : \begin{cases} \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p) e_{j_1} \\ + (x_2 + x_3 + \dots + x_p) e_{j_2} \\ + (x_3 + \dots + x_p) e_{j_3} \\ \vdots \\ + x_p e_{j_p}, \end{cases} \end{cases}$$

dessen Ableitung die Determinante

$$\det \tilde{\nu}'_J = \text{sgn}(J)$$

hat. Die Einschränkung $\nu_J := \tilde{\nu}_J|_{E_p} : E_p \rightarrow \mathbb{R}^p$ auf den Einheitspolyeder E_p kann auch durch die Bilder der $p + 1$ Eckvektoren charakterisiert werden:

$$\nu_J : \begin{cases} e_0 \mapsto 0 \\ e_1 \mapsto e_{j_1} \\ e_2 \mapsto e_{j_1} + e_{j_2} \\ \vdots \\ e_p \mapsto e_{j_1} + e_{j_2} + \dots + e_{j_p}. \end{cases}$$

Der folgende Satz macht einsichtig, dass das Tripel $(\nu_{[p]}, N_p, (N_{p,\text{offen}}))$ mit

$$\begin{aligned}\nu_{[p]} &:= \sum_{J \in \mathcal{I}^p} \text{sgn}(J) \cdot \nu_J \\ N_p &:= [0, 1]^p \\ N_{p,\text{offen}} &:= \left\{ v \in \mathbb{R}^p \mid v_k \in]0, 1[, k \in \{1, \dots, p\}, v_k \neq v_{\tilde{k}} \text{ für } k \neq \tilde{k} \right\}\end{aligned}$$

als *orientierten p -Einheitswürfel* bezeichnen kann.

Satz 26 (Zerlegung des Einheitswürfels in Polyeder)

Der orientierte p -Einheitswürfel $(\nu_{[p]}, N_p, N_{p,\text{offen}})$ ist ein p -Kompaktum, das heißt:

(i) Das „Bild“ des orientierten p -Einheitswürfels ist gleich dem Einheitswürfel:

$$\bigcup_{J \in \mathcal{I}^p} \nu_J(E_p) = N_p.$$

(ii) Die inneren Kerne der Bildmengen der Simplexe bilden eine Zerlegung:

$$\bigcup_{J \in \mathcal{I}^p} \nu_J(E_p^\circ) = N_{p,\text{offen}}, \quad \nu_J(E_p^\circ) \cap \nu_{\tilde{J}}(E_p^\circ) = \emptyset \quad \text{für } J, \tilde{J} \in \mathcal{I}^p, J \neq \tilde{J},$$

Beweis

(0) Wir beweisen zunächst die Aussage (i) per Induktion über $p \in \mathbb{N}$. Für $p = 1$ ist sie trivialerweise erfüllt. Wir nehmen an, sie sei für $p - 1 \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Zeichnung $p = 2, p + 1 = 3$.

(1) Es sei $a \in [0, 1]^p$. Da $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) = \nu_J(e_p)$ für alle $J \in \mathcal{I}^p$ können wir den Fall $a = \mathbf{1}$ ausschließen.

(2) Es sei jetzt $q \in \{1, \dots, p\}$ eine Koordinatennummer, so dass

$$a_q = \lambda := \min\{a_1, \dots, a_p\} \in [0, 1[.$$

Wir definieren den Vektor

$$v(a) := \begin{pmatrix} \frac{a_1 - \lambda}{1 - \lambda} \\ \vdots \\ \frac{a_p - \lambda}{1 - \lambda} \end{pmatrix} \in [0, 1]^{q-1} \times \{0\} \times [0, 1]^{p-q} \xrightarrow{\tau} [0, 1]^{p-1} \times \{0\},$$

wobei $\tau = \tau^{-1}$ der lineare Isomorphismus ist, der die q -te und p -te Koordinate vertauscht.

(3) Nach Induktionsvoraussetzung, angewandt auf $[0, 1]^{p-1}$, gibt es eine $(p - 1)$ -Permutation $(j_1 \dots j_{p-1})$, so dass

$$\tau(v(a)) \in \nu_{j_1 \dots j_{p-1}}(E_{p-1}) \times \{0\} \subseteq \nu_{j_1 \dots j_{p-1} p}(E_p).$$

(4) Es ist dann

$$v(a) \in \tau(\nu_{j_1 \dots j_{p-1} p}(E_p)) = \nu_{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{p-1} q}(E_p)$$

mit der Permutation \tilde{J} , die aus J durch Vertauschung der Koordinatennummern p und q hervorgeht.

(5) Da

$$a = \lambda \mathbf{1} + (1 - \lambda)v(a),$$

auf der Verbindungsstrecke der beiden Punkte $v(a)$, $\mathbf{1} \in \nu_{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{p-1} q}(E_p)$ liegt, ist auch

$$a \in \nu_{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{p-1} q}(E_p),$$

womit Aussage (i) gezeigt ist.

(6) Es bleibt die Aussage (ii) zu beweisen. Zunächst stellen wir fest, dass

$$E_p^\circ = \left\{ u \in \mathbb{R}^p \mid u_k > 0, k \in \{1, \dots, p\}, u_1 + \dots + u_p < 1 \right\}.$$

Aus der zweiten Darstellung für die Abbildung ν_J zu Beginn dieses Abschnitts ist ersichtlich, dass die Koordinaten eines Vektors

$$v \in (\nu_J(E_p))^\circ = \nu_J(E_p^\circ)$$

paarweise verschieden sind, ungleich 0 und ungleich 1 sind. Das bedeutet $v \in N_{p, \text{offen}}$.

(7) Eine Durchsicht der Induktionsteilschritte (1) bis (4) zeigt dann, dass die Auffindung der Permutation J für $a \in (\nu_J(E_p))^\circ$ eindeutig ist, es kann also nicht eine Permutation $\tilde{J} \neq J$ mit $a \in (\nu_{\tilde{J}}(E_p))^\circ$ existieren.

Beachte dazu noch, dass der in Schritt (1) dokumentierte Fall bei jedem Induktionsschritt ausgeschlossen ist, dass insbesondere in (2) nur genau eine Koordinatennummer q mit minimaler Koordinate a_q ausgewählt werden kann und dass mit a auch $v(a)$ paarweise verschiedene Koordinaten aufweist. \blacklozenge

Wir definieren die (kanonischen) Würfel-Rand-Flächen als $(p - 1)$ -Flächen wie folgt:

$$\begin{aligned} \iota_{q,0} &: \begin{cases} N_{p-1} & \rightarrow N_p \\ (u_1, \dots, u_{p-1}) & \mapsto (u_1, \dots, x_{q-1}, 0, u_{q+1}, \dots, u_{p-1}) \end{cases} \\ \iota_{q,1} &: \begin{cases} N_{p-1} & \rightarrow N_p \\ (u_1, \dots, u_{p-1}) & \mapsto (u_1, \dots, x_{q-1}, 1, u_{q+1}, \dots, u_{p-1}). \end{cases} \end{aligned}$$

Satz 27 *Der simpliziale Rand $\partial\nu_{[p]}$ des orientierten p -Einheitswürfels $\nu_{[p]}$ besteht aus $2p$ durch das $(p - 1)$ -Kompaktum N_{p-1} parametrisierte $(p - 1)$ -Flächen:*

$$\partial\nu_{[p]} = \sum_{q=1}^p (-1)^{q+1} [\iota_{q,1} \circ \nu_{[p-1]} - \iota_{q,0} \circ \nu_{[p-1]}].$$

Der q -te Summand gibt gerade die beiden Seiten des Würfels in q -Richtung wieder.

Beweis

(1) Für den Rand von $\nu_{[p]} = \sum_{J \in \mathcal{I}^{p!}} \text{sgn}(J) \cdot \nu_{j_1 \dots j_p}$ gilt

$$\begin{aligned} \partial\nu_{[p]} &= \sum_{r=0}^p (-1)^r \sum_{J \in \mathcal{I}^{p!}} \text{sgn}(J) \cdot \nu_{j_1 \dots j_p} \circ s_{0 \dots \hat{r} \dots p} \\ &= \overbrace{\sum_{J \in \mathcal{I}^{p!}} \text{sgn}(J) \cdot \nu_{j_1 \dots j_p} \circ s_{1 \dots p}}^{r=0} + \overbrace{(-1)^p \sum_{J \in \mathcal{I}^{p!}} \text{sgn}(J) \cdot \nu_{j_1 \dots j_p} \circ s_{0 \dots p-1}}^{r=p} \\ &\quad + \sum_{r \in \{1, \dots, p-1\}} (-1)^r \sum_{J \in \mathcal{I}^{p!}} \text{sgn}(J) \cdot \nu_{j_1 \dots j_p} \circ s_{0 \dots \hat{r} \dots p} \end{aligned}$$

(2) Als Vorbereitung für die weitere Verarbeitung der ersten Summe ($r = 0$) definieren wir eine „Permutations-Äquivalenz“

$$\begin{cases} \mathcal{I}^{p!} & \rightarrow \{1, \dots, p\} \times \mathcal{I}^{(p-1)!} \\ J = (j_1 \dots j_p) & \mapsto (j_1 | \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{p-1}) = (j_1 | \tilde{J}) \end{cases}$$

mit Hilfe des folgenden Diagramms:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \cdots & \cdots & \cdots & p \\ j_1 & | & 1 & \cdots & \hat{j}_1 & \cdots & p \\ j_1 & | & j_2 & \cdots & \cdots & \cdots & j_p \end{array} \parallel \begin{array}{cccc} 1 & \cdots & \cdots & p-1 \\ \tilde{j}_1 & \cdots & \cdots & \tilde{j}_{p-1} \end{array}$$

Der Übergang von der ersten zur dritten Zeile auf der linken Seite des Doppelbalkens wird durch die gegebene Permutation $J = (j_1, \dots, j_p)$ bewerkstelligt.

Man sieht, dass J als Nacheinanderausführung zweier Permutationen, einer Durchfädelung „ j_1 nach links“ und einer Permutation \tilde{J} der $(p - 1)$ -Menge $\{1, \dots, \hat{j}_1, \dots, p\}$ — bei fixierter erster Stelle — geschrieben werden kann.

Durch eine (kanonische) streng monoton-bijektive Abbildung

$$\lambda : \{1, \dots, p - 1\} \rightarrow \{1, \dots, \hat{j}_1, \dots, p\},$$

die in der zweiten Zeile des Diagramms veranschaulicht ist, kann die Permutation \tilde{J} in eine Permutation

$$\tilde{J} := \lambda^{-1} \circ \tilde{J} \circ \lambda$$

der Menge $\{1, \dots, p-1\}$, also ein Element von $\mathcal{I}^{(p-1)!}$, transformiert werden. Damit ist die Äquivalenz als Abbildung definiert. Die Bijektivität und die Umkehrabbildung ergibt sich durch ein Rückwärtsdurchlaufen innerhalb des obigen Diagramms.

Auf dem Diagramm ist erkennbar, dass

$$\text{sgn } J = \text{sgn}(\tilde{J}) \cdot (-1)^{j_1+1} = \text{sgn}(\tilde{J}) \cdot (-1)^{j_1+1}.$$

(3) Die Abbildung

$$\nu_{j_1 \dots j_p} \circ s_{1 \dots p} : E_{p-1} \rightarrow [0, 1]^p$$

hat die Form

$$\left. \begin{matrix} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{p-1} \end{matrix} \right\} \xrightarrow{s_{1 \dots p}} \left. \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_p \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\nu_J} \left(\begin{matrix} e_{j_1} \\ e_{j_1} + e_{j_2} \\ e_{j_1} + e_{j_2} + e_{j_3} \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{j_1} + e_{j_2} + \dots + e_{j_p} \end{matrix} \right) \quad (*)$$

woraus die Beziehung

$$\nu_{j_1 \dots j_p} \circ s_{1 \dots p} = \iota_{j_1, 1} \circ \nu_{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{p-1}}$$

entnommen werden kann.

(4) Für die erste Summe in (1) gilt dann

$$\begin{aligned} & \sum_{J \in \mathcal{I}^{p!}} \text{sgn}(J) \cdot \nu_{j_1 \dots j_p} \circ s_{1 \dots p} \\ &= \sum_{J \in \mathcal{I}^{p!}} \text{sgn}(\tilde{J}) \cdot (-1)^{j_1+1} \cdot \iota_{j_1, 1} \circ \nu_{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{p-1}} \\ &= \sum_{j_1=1}^p \sum_{\tilde{J} \in \mathcal{I}^{(p-1)!}} \text{sgn}(\tilde{J}) \cdot (-1)^{j_1+1} \cdot \iota_{j_1, 1} \circ \nu_{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{p-1}} \\ &= \sum_{q=1}^p (-1)^{q+1} \sum_{\tilde{J} \in \mathcal{I}^{(p-1)!}} \text{sgn}(\tilde{J}) \cdot \iota_{q, 1} \circ \nu_{\tilde{J}} \\ &= \sum_{q=1}^p (-1)^{q+1} \cdot \iota_{q, 1} \circ \sum_{\tilde{J} \in \mathcal{I}^{(p-1)!}} \text{sgn}(\tilde{J}) \cdot \nu_{\tilde{J}} \\ &= \sum_{q=1}^p (-1)^{q+1} \cdot \iota_{q, 1} \circ \nu_{[p-1]} \end{aligned}$$

Das ist die Kette der q Seitwürfel, die den dem Ursprung diagonal gegenüberliegenden Eckpunkt $e_1 + \dots + e_p$ des Würfels enthalten.

(5) Die zweite Summe in (1) wird in drei Schritten bearbeitet, die analog zu (2) bis (4), dabei aber nicht einfach stur-kopierbar, sind.

Die Permutations-Äquivalenz

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{I}^{p!} \rightarrow \{1, \dots, p\} \times \mathcal{I}^{(p-1)!} \\ J = (j_1 \dots j_p) \mapsto (\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{p-1} | j_p) = (\tilde{J} | j_p) \end{array} \right.$$

wird mit Hilfe des Diagramms

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \dots & \dots & \dots & p-1 & p \\ \tilde{j}_1 & \dots & \dots & \dots & \tilde{j}_{p-1} & j_p \end{array} \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & \dots & \dots & \dots & p-1 & p \\ 1 & \dots & \hat{j}_p & \dots & p & j_p \\ j_1 & \dots & \dots & \dots & j_{p-1} & j_p \end{array} \right| \begin{array}{c} \\ \\ j_p \\ \\ j_p \end{array}$$

definiert.

Man sieht, dass die Permutation J (erste \rightarrow dritte Zeile rechts) als Nacheinander-ausführung zweier Permutationen, einer Durchfädung „ j_p nach rechts“ und einer Permutation \tilde{J} der $(p-1)$ -Menge $\{1, \dots, \hat{j}_p, \dots, p\}$ — bei fixierter letzter Stelle — geschrieben werden kann.

Durch eine (kanonische) streng monoton-bijektive Abbildung

$$\lambda : \{1, \dots, p-1\} \rightarrow \{1, \dots, \hat{j}_p, \dots, p\},$$

die in der zweiten Zeile des Diagramms veranschaulicht ist, kann die Permutation \tilde{J} in eine Permutation

$$\tilde{J} := \lambda^{-1} \circ \tilde{J} \circ \lambda$$

der Menge $\{1, \dots, p-1\}$, also ein Element von $\mathcal{I}^{(p-1)!}$, transformiert werden. Damit ist die Äquivalenz wieder wohldefiniert.

Auf dem Diagramm ist erkennbar, dass

$$\text{sgn } J = \text{sgn}(\tilde{J}) \cdot (-1)^{p-j_p} = \text{sgn}(\tilde{J}) \cdot (-1)^{p-j_p}.$$

(6) Die Abbildung

$$\nu_{j_1 \dots j_p} \circ s_{0 \dots p-1} : E_{p-1} \rightarrow [0, 1]^p$$

hat die Form

$$\left. \begin{array}{c} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{p-1} \end{array} \right\} \xrightarrow{s_{0 \dots p-1}} \left. \begin{array}{c} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{p-1} \end{array} \right\} \xrightarrow{\nu_J} \left(\begin{array}{c} 0 \\ e_{j_1} \\ e_{j_1} + e_{j_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{j_1} + e_{j_2} + \dots + e_{j_{p-1}} \end{array} \right) \quad (*)$$

woraus die Beziehung

$$\nu_{j_1 \dots j_p} \circ s_{0 \dots p-1} = \iota_{j_p, 0} \circ \tilde{\nu}_{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{p-1}}$$

entnommen werden kann.

(7) Für die zweite Summe ($r = p$) in (1) gilt nun

$$\begin{aligned} & (-1)^p \sum_{J \in \mathcal{I}^{p!}} \operatorname{sgn}(J) \cdot \nu_{j_1 \dots j_p} \circ s_{0 \dots p-1} \\ &= (-1)^p \sum_{J \in \mathcal{I}^{p!}} \operatorname{sgn}(\tilde{J}) \cdot (-1)^{p-j_p} \cdot \iota_{j_p, 0} \circ \tilde{\nu}_{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{p-1}} \\ &= \sum_{j_p=1}^p \sum_{\tilde{J} \in \mathcal{I}^{(p-1)!}} \operatorname{sgn}(\tilde{J}) \cdot (-1)^{j_p} \cdot \iota_{j_p, 0} \circ \tilde{\nu}_{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{p-1}} \\ &= \sum_{q=1}^p (-1)^q \sum_{\tilde{J} \in \mathcal{I}^{(p-1)!}} \operatorname{sgn}(\tilde{J}) \cdot \iota_{q, 0} \circ \nu_{\tilde{J}} \\ &= \sum_{q=1}^p (-1)^q \cdot \iota_{q, 0} \circ \sum_{\tilde{J} \in \mathcal{I}^{(p-1)!}} \operatorname{sgn}(\tilde{J}) \cdot \nu_{\tilde{J}} \\ &= \sum_{q=1}^p (-1)^q \cdot \iota_{q, 0} \circ \nu_{[p-1]} \end{aligned}$$

Das ist die Kette der p Seitwürfel, die den Ursprung enthalten.

(8) Als letztes bearbeiten wir noch — für festes $r \in \{1, \dots, p-1\}$ — die Summanden

$$\sum_{J \in \mathcal{I}^{p!}} \operatorname{sgn}(J) \cdot \nu_{j_1 \dots j_p} \circ s_{0 \dots \hat{r} \dots p}$$

aus der dritten Summe in (1). Ein einzelner Seit-Simplex

$$\nu_J \circ s_{0 \dots \hat{r} \dots p} : E_{p-1} \rightarrow E_p \rightarrow N_p$$

bildet die Eckvektoren von E_{p-1} wie folgt ab:

$$\left. \begin{matrix} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{p-1} \end{matrix} \right\} \xrightarrow{s_{0 \dots \hat{r} \dots p}} \left. \begin{matrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{r-1} \\ e_{r+1} \\ \vdots \\ e_p \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\nu_J} \left(\begin{matrix} 0 \\ e_{j_1} \\ e_{j_1} + e_{j_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{j_1} + e_{j_2} + \dots + e_{j_{r-1}} \\ e_{j_1} + e_{j_2} + \dots + e_{j_{r-1}} + e_{j_r} + e_{j_{r+1}} \\ \vdots \\ e_{j_1} + e_{j_2} + \dots + e_{j_p} \end{matrix} \right)$$

Im Vergleich zu ν_J fehlt im Bild genau der Eckvektor $e_{j_1} + e_{j_2} + \dots + e_{j_{r-1}} + e_{j_r}$ in der $(r+1)$ -ten Zeile.

In der dritten Summe kommt für festes r ein bestimmter Simplex

$$\nu_{j_1 \dots j_p} \circ s_{0 \dots \hat{r} \dots p} = \tilde{\nu}_{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_p} \circ s_{0 \dots \hat{r} \dots p}$$

immer zweimal — zugeordnet zu zwei Permutationen J und \tilde{J} mit $(j_r, j_{r+1}) = (\tilde{j}_{r+1}, \tilde{j}_r)$ — vor. Da die Vertauschung $(j_r, j_{r+1}) \mapsto (\tilde{j}_r, \tilde{j}_{r+1})$ innerhalb einer Permutation gerade eine Änderung des Signums bedeutet, haben diese beiden Summanden jeweils verschiedene Vorzeichen. Die gesamte dritte Summe verschwindet daher. \blacklozenge

Formeln 28 (Integration über den orientierten Einheitswürfel)

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\Phi : N_p \rightarrow X$ eine p -Fläche.

(i) Ist $\omega = \omega_I dx^I$ eine reine p -Form in X , so gilt

$$\int_{\Phi \circ \nu_{[p]}} \omega = \int_{N_p} \det \Phi'^I(u) \cdot \omega_I(\Phi(u)) du.$$

(ii) Für eine reine $(p-1)$ -Form $\eta = \eta_I dx^I$ in X gilt:

$$\int_{\partial(\Phi \circ \nu_{[p]})} \eta = \sum_{q=1}^p (-1)^{q+1} \int_{N_{p-1}} \left[(\det(\Phi')_{1 \dots \widehat{q} \dots p}^I \cdot \eta_I \circ \Phi)(u_1, \dots, u_{q-1}, v, u_q, \dots, u_{p-1}) \right]_{v=0}^{v=1} du.$$

Man beachte jeweils den Spezialfall, dass $p = n$ oder zusätzlich $\Phi : Q \rightarrow \mathbb{R}^p$ die kanonische Teilmengen-Einbettung ist.

Beweis

(i) folgt durch Einsetzung des p -Einheitswürfels in Satzchen 33 (i).

(ii) Wegen

$$\begin{aligned} \det(\Phi \circ \iota_{q,1})'^I(u) &= \det(\Phi')_{1 \dots \widehat{q} \dots p}^I(\iota_{q,1}(u)) \\ \det(\Phi \circ \iota_{q,0})'^I(u) &= \det(\Phi')_{1 \dots \widehat{q} \dots p}^I(\iota_{q,0}(u)) \\ \iota_{q,1}(u) &= (u_1, \dots, u_{q-1}, 1, u_q, \dots, u_{p-1}) \\ \iota_{q,0}(u) &= (u_1, \dots, u_{q-1}, 0, u_q, \dots, u_{p-1}) \end{aligned}$$

erhält die Formel (ii) aus Satzchen 33 hier die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \int_{\partial(\Phi \circ \nu_{[p]})} \eta &= \sum_{q=1}^p (-1)^{q+1} \left[\int_{N_{p-1}} \det(\Phi \circ \iota_{q,1})'^I(u) \cdot \eta_I(\Phi(\iota_{q,1}(u))) du \right. \\ &\quad \left. - \int_{N_{p-1}} \det(\Phi \circ \iota_{q,0})'^I(u) \cdot \eta_I(\Phi(\iota_{q,0}(u))) du \right] \\ &= \sum_{q=1}^p (-1)^{q+1} \left[\int_{N_{p-1}} \det(\Phi')_q^I(\iota_{q,1}(u)) \cdot \eta_I(\Phi(\iota_{q,1}(u))) du \right. \\ &\quad \left. - \int_{N_{p-1}} \det(\Phi')_q^I(\iota_{q,0}(u)) \cdot \eta_I(\Phi(\iota_{q,0}(u))) du \right] \end{aligned}$$

◆

32.4 Orientierte Quader

Es sei jetzt ein p -dimensionaler kompakter achsenparalleler Quader

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_p, b_p]$$

fest vorgegeben.

Die affine Abbildung

$$\alpha_Q : \begin{cases} N_p & \rightarrow Q \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} a_1 + (b_1 - a_1)u_1 \\ \vdots \\ a_p + (b_p - a_p)u_p \end{pmatrix} \end{cases}$$

mit positiver Determinante der Ableitung

$$\det \alpha'_Q = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_p - a_p) = \text{vol}(Q)$$

bildet den p -dimensionalen Einheitswürfel N_p bijektiv auf den Quader Q ab.

Es bedarf keiner weiteren ausführlichen Begründung, dass das Tripel $(\alpha_Q \circ \nu_{[p]}, Q, Q_{\text{offen}})$ mit $Q_{\text{offen}} := \alpha_Q(N_{p,\text{offen}})$ ein p -Kompaktum darstellt. Für den Rand gilt dann offenbar:

$$\begin{aligned} \partial(\alpha_Q \circ \nu_{[p]}) &= \alpha_Q \circ \partial(\nu_{[p]}) = \alpha_Q \circ \left(\sum_{q=1}^p (-1)^{q+1} [\iota_{q,1} \circ \nu_{[p-1]} - \iota_{q,0} \circ \nu_{[p-1]}] \right) \\ &= \sum_{q=1}^p (-1)^{q+1} [\alpha_Q \circ \iota_{q,1} \circ \nu_{[p-1]} - \alpha_Q \circ \iota_{q,0} \circ \nu_{[p-1]}], \end{aligned}$$

mit den Abbildungen N_{p-1} -parametrisierten

$$\alpha_Q \circ \iota_{q,1} : \begin{cases} N_{p-1} & \rightarrow [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times \{b_q\} \times \dots \times [a_p, b_p] \\ u & \mapsto (u_1, \dots, u_{q-1}, b_q, u_q, \dots, u_p) \end{cases}$$

$$\alpha_Q \circ \iota_{q,0} : \begin{cases} N_{p-1} & \rightarrow [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times \{a_q\} \times \dots \times [a_p, b_p] \\ u & \mapsto (u_1, \dots, u_{q-1}, a_q, u_q, \dots, u_p) \end{cases}$$

Es lassen sich die Formeln 28 ohne weiteres auf die neue Situation verallgemeinern:

Formeln 29 *Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\Phi : Q \rightarrow X$ eine p -Fläche.*

(i) *Ist $\omega = \omega_I dx^I$ eine reine p -Form in X , so gilt*

$$\int_{\Phi \circ \alpha_Q \circ \nu_{[p]}} \omega = \int_Q \det \Phi'^I(u) \cdot \omega_I(\Phi(u)) du.$$

(ii) *Für eine reine $(p-1)$ -Form $\eta = \eta_I dx^I$ in X gilt:*

$$\int_{\partial(\Phi \circ \alpha_Q \circ \nu_{[p]})} \eta = \sum_{q=1}^p (-1)^{q+1} \int_{Q^{\hat{q}}} \left[(\det(\Phi')_{1 \dots \hat{q} \dots p}^I \cdot \eta_I \circ \Phi)(u_1, \dots, u_{q-1}, v, u_q, \dots, u_{p-1}) \right]_{v=a_q}^{v=b_q} du$$

mit $Q^{\hat{q}} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times \widehat{[a_q, b_q]} \times \dots \times [a_p, b_p]$.

Man beachte jeweils den Spezialfall, dass $p = n$ oder zusätzlich $\Phi : Q \rightarrow \mathbb{R}^p$ die kanonische Teilmengen-Einbettung ist.

32.5 Orientierte Kugeln

Wir betrachten die in den Abschnitten 29.1 und 29.2 eingeführte Kugelüberlagerungsabbildung $\beta : Q \rightarrow \mathbb{R}^p$ mit dem Quader Q der Kugelkoordinaten.

Die Einheitskugel B im \mathbb{R}^p kann als p -Kompaktum $(\beta_{[p]}, B, B_{\text{offen}})$ beschrieben werden. Ihr liegen die folgenden Daten zugrunde:

- $Q = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \cdots \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ der p -Quader der Kugelkoordinaten,
- B ist die Einheitskugel als kompakte Menge, B_{offen} wie in Abschnitt 29.2 beschrieben.
- $\beta : Q \rightarrow B$ ist die Kugelkoordinaten-Abbildung

$$\beta : \left\{ \begin{array}{l} Q \rightarrow B \\ \left(\begin{array}{c} \varrho \\ \varphi \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{array} \right) = u \mapsto v = \varrho \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta_1 \cos \theta_2 & \cdots & \cos \theta_{p-3} & \cos \theta_{p-2} \\ \sin \varphi \cos \theta_1 \cos \theta_2 & \cdots & \cos \theta_{p-3} & \cos \theta_{p-2} \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \cdots & \cos \theta_{p-3} & \cos \theta_{p-2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \ddots & \cos \theta_{p-3} & \cos \theta_{p-2} \\ \sin \theta_{p-3} & \cos \theta_{p-2} \\ \sin \theta_{p-2} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

- mit Determinante

$$\det \beta'(u) = \varrho^{p-1} \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \cdots \cos^{p-2} \theta_{p-2}$$

- $\beta_{[p]} := \beta \circ \alpha_Q \circ \nu_{[p]}$ ist die durch Vorschalten der Quaderkette $\alpha_Q \circ \nu_{[p]}$ gegebene „Kugelmapping“,

Satz 30 (Rand der Kugelkette)

Der Rand der Kugelkette ist gleich der „Sphärenkette“:

$$\partial\beta_{[p]} = \xi \circ \alpha_P \circ \nu_{[p-1]}.$$

Dabei ist

$$P = [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \cdots \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\xi : \left\{ \begin{array}{l} P \rightarrow S \\ \left(\begin{array}{c} \varphi \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{array} \right) = v \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta_1 \cos \theta_2 & \cdots & \cos \theta_{p-3} & \cos \theta_{p-2} \\ \sin \varphi \cos \theta_1 \cos \theta_2 & \cdots & \cos \theta_{p-3} & \cos \theta_{p-2} \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \cdots & \cos \theta_{p-3} & \cos \theta_{p-2} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & \cos \theta_{p-3} & \cos \theta_{p-2} \\ & & & \sin \theta_{p-3} & \cos \theta_{p-2} \\ & & & & \sin \theta_{p-2} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

die Sphärenkoordinatenabbildung aus Abschnitt 29.3.

Beweis Zunächst ist

$$\partial\beta_{[p]} = \partial(\beta \circ \alpha_Q \circ \nu_{[p]}) = \beta \circ \alpha_Q \circ \partial\nu_{[p]}.$$

Für eine reine $(p - 1)$ -Form $\eta = \eta_I dx^I$ in einer \mathbb{R}^p -offenen Umgebung von S gilt dann mit Formeln 29:

$$\int_{\partial\beta_{[p]}} \eta = \int_{\beta \circ \alpha_Q \circ \partial\nu_{[p]}} \eta =$$

$$\sum_{q=1}^p (-1)^{q+1} \int_{Q^{\hat{q}}} \left[(\det(\beta')^I_{1 \dots \hat{q} \dots p} \cdot \eta_I \circ \beta)(v_1, \dots, v_{q-1}, t, v_q, \dots, v_{p-1}) \right]_{t=a_q}^{t=b_q} dv =$$

$$\left(\text{mit } Q^{\hat{q}} = \underbrace{[0, 1] \times [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \cdots \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}_{q\text{-ter Faktor fehlt}} \right)$$

Bei $q = 2$ ist $a_2 = 0$ und $b_2 = 2\pi$. Da β nur über die Funktionen \cos und \sin von φ abhängt, gilt

$$\beta(\varrho, 2\pi, \theta_1, \dots, \theta_{p-2}) = \beta(\varrho, 0, \theta_1, \dots, \theta_{p-2}),$$

was ein Verschwinden des Integranden für $r = 2$ nach sich zieht.

Für $q = 3, \dots, p - 2$ ist $a_q = -\frac{\pi}{2}$ und $b_q = +\frac{\pi}{2}$. Da β nur über die Funktion \cos von θ_{q-2} abhängt, gilt

$$\beta(\varrho, \varphi, \theta_1, \dots, +\frac{\pi}{2}, \dots, \theta_{p-2}) = \beta(\varrho, \varphi, \theta_1, \dots, -\frac{\pi}{2}, \dots, \theta_{p-2}),$$

so dass auch hier die Integranden verschwinden.

Es bleibt noch, den Summanden für $q = 1$

$$\int_{Q^{\hat{1}}} \left[(\det(\beta')^I_{2 \dots p} \cdot \eta_I \circ \beta)(\varrho, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{p-2}) \right]_{\varrho=0}^{\varrho=1} du$$

zu verarbeiten.

Für $\varrho = 0$ ergibt sich kein Beitrag, da die Determinante Faktoren ϱ enthält. Damit sind wir bei

$$\begin{aligned} & \int_{Q^{\hat{1}}} (\det(\beta')_{2\dots p}^I \cdot \eta_I \circ \beta)(1, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{p-2}) \, dv \\ &= \int_P (\det \xi^I \cdot \eta_I \circ \xi)(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{p-2}) \, dv \\ &= \int_{\xi} \eta \end{aligned}$$

angelangt. ◆

Formeln 31 Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\Phi : B \rightarrow X$ eine p -Fläche.

(i) Ist $\omega = \omega_I dx^I$ eine reine p -Form in X , so gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Phi \circ \beta_{[p]}} \omega &= \int_{\Phi} \omega && (p\text{-Flächenintegral}) \\ &= \int_B \det \Phi'^I(v) \cdot \omega_I(\Phi(v)) \, dv \\ &= \int_Q \det \Phi'^I(\beta(u)) \cdot \det \beta'(u) \cdot \omega_I(\Phi(u)) \, du. \end{aligned}$$

(ii) Für eine reine $(p-1)$ -Form $\eta = \eta_I dx^I$ in X gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\partial(\Phi \circ \beta_{[p]})} \eta &= \int_{\Phi \circ \xi} \eta && ((p-1)\text{-Flächenintegral}) \\ &= \int_P \det(\Phi \circ \xi)^I(u) \cdot \eta_I(\Phi(\xi(u))) \, du. \end{aligned}$$

Formeln 32 Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\Phi : B \rightarrow X$ eine p -Fläche.

Es sei $p = n$ und X eine offene Umgebung von S . Dann gilt für eine reine $(p-1)$ -Form $\eta = \eta_{1 \dots \hat{r} \dots p} dx^{1 \dots \hat{r} \dots p}$ in X

$$\begin{aligned} \int_{\partial \beta_{[p]}} \eta &= \int_{\xi} \eta && (\text{Hyperflächenintegral}) \\ &= \int_P \det \xi'^{1 \dots \hat{r} \dots p}(u) \cdot \eta_{1 \dots \hat{r} \dots p}(\xi(u)) \, du \\ &= \int_P \langle N_{\xi}(u), \eta^{\flat_{p-1}}(\xi(u)) \rangle \\ &= \text{flow}_{p-1}(\xi, \eta^{\flat_{p-1}}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dabei sind: } P &= [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \cdots \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ u &= (\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{p-2}) \\ \det \xi'^{1 \dots \hat{r} \dots p}(u) &= (-1)^{r+1} \cdot N_{\xi}^r(u) \\ &= (-1)^{r+1} \cdot \cos \theta_1 \cdots \cos^{p-2} \theta_{p-2} \cdot \xi^r(u) \\ (\eta^{\flat_{p-1}})^{\ell} &= (-1)^{\ell+1} \eta_{1 \dots \hat{\ell} \dots n} \end{aligned}$$

Beweis Er besteht darin, in (ii) der vorhergehenden Formeln für Φ die kanonische Injektion $B \rightarrow X$ einzusetzen und dann die bekannten Relationen für den Normalenvektor, das Hyperflächenintegral und für die Sphärenkoordinaten-Abbildung zu benutzen. \blacklozenge

33 Der Gauß'sche Divergenzsatz und die Green'sche Formel

Die Vorbemerkung gehört in Abschnitt 32.2 über orientierte p -Kompakta.

Wir betrachten in diesem Abschnitt die folgende Situation:

- Es sei $(\kappa, K, K_{\text{offen}})$ ein n -Kompaktum mit n -Kette κ .
- Der simpliziale Rand von κ habe die Darstellung

$$\partial\kappa = \sum_{k=1}^t \delta_k \cdot \iota_k \circ \lambda_k,$$

(bis auf Äquivalenz), wobei

- die $(n-1)$ -Ketten λ_k aus $(n-1)$ -Kompakta $(\lambda_k, L_k, L_{k,\text{offen}})$ entstammen,
- $\iota_k : L_k \rightarrow K$ $(n-1)$ -Flächen in (einer offenen Umgebung von) K und
- $\delta_k \in \{-1, +1\}$ die Orientierung der Randflächen wiedergeben. s

Es wird sich bei all unseren Beispielen herausstellen, dass das „Bild der Kette“ gleich dem topologischen Rand der kompakten Menge K ist:

$$\bigcup_{k=1}^t \iota_k(L_k) = \partial_{\text{top}} K.$$

- $\Phi : K \rightarrow X$ sei eine durch K parametrisierte n -Fläche in der offenen Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

In einem Sätzchen registrieren wir, dass man bei der Berechnung von Integralen über die Ketten $\Phi \circ \kappa$ bzw. $\Phi \circ \partial\kappa$ die Simplex-Zerlegungen von κ bzw. κ_k „vergessen“ kann.

Sätzchen 33

(i) Für eine n -Form $\omega = \omega_{1\dots n} dx^{1\dots n}$ in X gilt

$$\int_{\Phi \circ \kappa} \omega = \int_{\Phi} \omega = \int_K \det \Phi'(u) \cdot \omega_{1\dots n}(\Phi(u)) du.$$

(ii) Für eine reine $(p-1)$ -Form η_I in X gilt:

$$\int_{\partial(\Phi \circ \kappa)} \eta = \sum_{k=1}^t \delta_k \int_{\Phi \circ \iota_k} \eta = \sum_{k=1}^t \delta_k \int_{L_k} \det(\Phi \circ \iota_k)'(u) \cdot \eta_I(\Phi(\iota_k(u))) du.$$

Satz 34 (Divergenz–Satz)

Wir formulieren die Aussage in den verschiedensten Versionen:

(i) Es sei η eine beliebige $(n-1)$ -Form in X . Dann gilt

$$\int_{\Phi \circ \kappa} d\eta = \int_{\partial(\Phi \circ \kappa)} \eta$$

(ii) Es sei $\eta = \sum_{\ell=1}^n \eta_{1 \dots \widehat{\ell} \dots n} dx^{1 \dots \widehat{\ell} \dots n}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \int_K \det \Phi'(u) \cdot \left(\sum_{\ell=1}^n (-1)^{\ell+1} \partial_{\ell} \eta_{1 \dots \widehat{\ell} \dots n} \right) (\Phi(u)) du \\ &= \sum_{k=1}^t \delta_k \int_{L_k} \sum_{\ell=1}^n \det(\Phi \circ \iota_k)'^{1 \dots \widehat{\ell} \dots n}(u) \cdot \eta_{1 \dots \widehat{\ell} \dots n}(\Phi(\iota_k(u))) du. \end{aligned}$$

(iii) Es sei v ein Vektorfeld in X und $\operatorname{div} v = \sum_{\ell=1}^n \partial_{\ell} v^{\ell}$ die zugehörige Divergenz.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_K \operatorname{div} v(\Phi(u)) du &= \sum_{k=1}^t \delta_k \int_{L_k} \langle N_{\Phi \circ \iota_k}(u), v(\Phi(\iota_k(u))) \rangle du \\ &= \sum_{k=1}^t \delta_k \operatorname{flow}_{n-1}(\Phi \circ \iota_k, v) = \operatorname{flow}_{n-1} \left(\sum_{k=1}^t \delta_k (\Phi \circ \iota_k), v \right). \end{aligned}$$

(iv) Ist zusätzlich $\Phi : K \rightarrow \mathbb{R}^p$ die kanonische Teilmengen–Einbettung, so gilt:

$$\begin{aligned} \int_K \operatorname{div} v(u) du &= \sum_{k=1}^t \delta_k \int_{L_k} \langle N_{\iota_k}(u), v(\iota_k(u)) \rangle du \\ &= \sum_{k=1}^t \delta_k \operatorname{flow}_{n-1}(\iota_k, v) = \operatorname{flow}_{n-1} \left(\sum_{k=1}^t \delta_k \iota_k, v \right). \end{aligned}$$

(v) Ist insbesondere $(\beta, B, B_{\text{offen}})$ das Kugel– n –Kompaktum, so gilt:

$$\int_B \operatorname{div} v(u) du = \int_P \langle N_{\xi}(u), v(\xi(u)) \rangle du = \operatorname{flow}_{n-1}(\xi, v).$$

Bemerkung (1) Für $n=3$ ist die Aussage (iv) der klassische Gauß'sche Integralsatz.

(2) Mehr symbolisch–anschaulich als korrekt–mathematisch schreibt man oft:

$$\int_K \operatorname{div} v dV = \int_{\partial K} \langle N, v \rangle dO$$

dV steht für „Volumen–Element“, dO für das „Oberflächen–Element“.

Definition Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir definieren den *Laplace-Operator*

$$\Delta : \begin{cases} \mathcal{C}^2(X) & \rightarrow \mathcal{C}(X) \\ f & \mapsto \Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \partial_1^2 f + \dots + \partial_n^2 f \end{cases}$$

Man kann auch schreiben:

$$\Delta = \underbrace{\flat_n \circ d \circ \sharp_{n-1}}_{=\operatorname{div}} \circ \underbrace{\flat_1 \circ d \circ \sharp_0}_{=\operatorname{grad}}$$

Übung: Es ist

$$\operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) = f \cdot \Delta g + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle.$$

Satz 35 (Green'sche Formel)

Es sei $(\kappa, K, K_{\text{offen}})$ ein n -Kompaktum in $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Funktionen $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ seien \mathcal{C}^2 .

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_K (f \cdot \Delta g - g \Delta f) &= \sum_{k=1}^t \delta_k \int_{L_k} \langle N_{\iota_k}(u), (f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f)(\iota_k(u)) \rangle du \\ &= \operatorname{flow}_{n-1} \left(\sum_{k=1}^t \delta_k \iota_k, f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f \right). \end{aligned}$$

Beweis Betrachte das Vektorfeld

$$v := f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v &= \operatorname{div}(f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f) = [f \Delta g - \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle] - [g \Delta f - \langle \operatorname{grad} g, \operatorname{grad} f \rangle] \\ &= f \Delta g - g \Delta f. \end{aligned}$$

Die Anwendung des Divergenz-Satzes (iv) liefert die Behauptung. ◆

34 Kohomologie — Das Poincare Lemma

34.1 Exkurs in die Topologie

Definition

(1) Eine Teilmenge X des \mathbb{R}^n heißt *zusammenhängend*, wenn sie nicht durch eine Überdeckung zweier disjunkter nichtleerer offener Mengen trennbar ist. Das heißt, eine Darstellung als

$$X = (X \cap O_1) \cup (X \cap O_2) \quad \text{mit} \quad O_1 \cap O_2 = \emptyset, \quad O_1, O_2 \text{ nicht-leer, offen}$$

ist unmöglich.

(2) Oft (Funktionentheorie, Partielle Differentialgleichungen) wird eine nichtleere offene und zusammenhängende Teilmenge des \mathbb{R}^n ein *Gebiet* genannt.

Definition Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $a \in X$.

(1) X heißt *sternförmig* (bzgl. a), wenn für jedes $x \in X$ die Verbindungsstrecke zu a

$$\left\{ (1 - \lambda)x + \lambda a \mid \lambda \in [0, 1] \right\}$$

ganz in X enthalten ist.

(2) X heißt *zusammenziehbar* (auf a), wenn es eine stetige Abbildung (Kontraktion) $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$ gibt, so dass

$$F(x, 0) = x \text{ für alle } x \in X, \quad F(x, 1) = a.$$

Definition $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sei ein Gebiet.

(1) Es seien zwei Kurven $\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow X$ mit gemeinsamem Anfangs- A und Endpunkt B gegeben. Die beiden Kurven heißen zueinander *homotop* (relativ der Endpunkte), wenn es eine stetige Abbildung

$$\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow X$$

gibt, so dass

$$\begin{aligned} \Gamma(a, s) &= A \\ \Gamma(b, s) &= B \\ \Gamma(t, 0) &= \gamma(t) \\ \Gamma(t, 1) &= \tilde{\gamma}(t) \end{aligned}$$

für alle $s \in [0, 1]$ bzw. $t \in [a, b]$.

(2) X heißt *einfach zusammenhängend*, wenn jede geschlossene Kurve γ in X homotop zu einer Konstant-Kurve ist.

Sätzchen 36 *Es besteht die folgende Hierarchie von Eigenschaften:*

$$\begin{aligned} \text{konvex} &\implies \\ &\text{sternförmig} \implies \\ &\text{zusammenziehbar} \implies \\ &\text{einfach zusammenhängend.} \end{aligned}$$

Die Umkehrung ist jeweils nicht gegeben.

Beweis (1) Die erste Implikation ist trivial: In einem konvexen Gebiet sind mit zwei beliebigen Punkten die Verbindungsstrecken enthalten.

(2) Man wähle als Kontraktionsabbildung

$$F(x, \lambda) := (1 - \lambda)x + \lambda a.$$

(3) Eine geschlossene Kurve γ ist vermittle der Abbildung

$$\Gamma(t, \lambda) := F(\gamma(t), \lambda)$$

zur konstanten Kurve $\tilde{\gamma} = \text{const}_a$ homotop.

(4) $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist einfach zusammenhängend, aber nicht zusammenziehbar. ◆

Ein offener Kreisring

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \varrho_1 < \|x\| < \varrho_2\}$$

ist nicht einfach zusammenhängend.

34.2 Geschlossene und exakte Differentialformen

Definition Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\omega \in \Omega^p(X)$ eine p -Form.

(1) ω heißt *geschlossen* (*closed*), wenn $d\omega = 0$. Wir schreiben

$$\Omega_{\text{cl}}^p(X) = \ker(d : \Omega^p(X) \rightarrow \Omega^{p+1}(X)).$$

(2) ω heißt *exakt* (*exact*), wenn es eine $(p-1)$ -Form ξ gibt, so dass

$$\omega = d\xi.$$

Wir schreiben

$$\Omega_{\text{ex}}^p(X) = d(\Omega^{p-1}(X)).$$

(3) Zwei geschlossene Differentialformen η und $\omega^{(2)}$ heißen *kohomolog* zueinander (symbolisch: $\eta \sim \omega^{(2)}$), wenn ihre Differenz exakt ist.

(4) Wir setzen weiter

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{cl}}(X) &= \bigoplus_{\ell=0}^n \Omega_{\text{cl}}^{\ell}(X) \\ \Omega_{\text{ex}}(X) &= \bigoplus_{\ell=0}^n \Omega_{\text{ex}}^{\ell}(X) \end{aligned}$$

Erste Beobachtungen:

(0) Alle n -Formen sind geschlossen: $\Omega_{\text{cl}}^n(X) = \Omega^n(X)$.

(1) Die Kohomologie ist eine Äquivalenzrelation auf $\Omega_{\text{cl}}^p(X)$.

(2) Wegen $d^2 = 0$ ist jede exakte Form auch geschlossen:

$$\Omega_{\text{ex}}^p(X) \subseteq \Omega_{\text{cl}}^p(X).$$

Hochinteressant wird dann die Frage, ob geschlossene Differentialformen auch exakt sind bzw. wie groß der Quotienten-Vektorraum

$$\Omega_{\text{dR}}^p(X) := \Omega_{\text{cl}}^p(X) / \Omega_{\text{ex}}^p(X)$$

der Äquivalenzklassen von „geschlossenen modulo exakten“ p -Formen ist.

Satz 37 Es seien $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)} \in \Omega_{\text{cl}}(X)$ mit

$$\omega^{(1)} \sim \omega^{(2)}, \quad \eta^{(1)} \sim \eta^{(2)}.$$

(i) Für eine C^1 -Abbildung $f : Y \rightarrow X$ ist

$$f^* \omega^{(1)} \sim f^* \omega^{(2)}.$$

(ii)

$$\omega^{(1)} \wedge \eta^{(1)} \sim \omega^{(2)} \wedge \eta^{(2)}.$$

(iii) Ist $\psi \in \Psi_{p+1}(X)$ eine $(p+1)$ -Kette, so gilt

$$\int_{\partial\psi} \omega^{(1)} = \int_{\partial\psi} \omega^{(2)}.$$

Beweis

Es seien

$$\omega^{(1)} - \omega^{(2)} = d\xi$$

$$\eta^{(1)} - \eta^{(2)} = d\zeta$$

(i) Es ist einfach

$$f^* \omega^{(1)} - f^* \omega^{(2)} = f^*(\omega^{(1)} - \omega^{(2)}) = f^*(d\xi) = d(f^* \xi).$$

(ii)

$$\begin{aligned} \omega^{(1)} \wedge \eta^{(1)} - \omega^{(2)} \wedge \eta^{(2)} &= \omega^{(1)} \wedge (\eta^{(1)} - \eta^{(2)}) + (\omega^{(1)} - \omega^{(2)}) \wedge \eta^{(2)} \\ &= \omega^{(1)} \wedge (d\zeta) + (d\xi) \wedge \eta^{(2)} \\ &= d(\omega^{(1)} \wedge \zeta + \xi \wedge \eta^{(2)}). \end{aligned}$$

(iii) Mit dem Satz von Stokes gilt:

$$\int_{\partial\psi} (\omega^{(1)} - \omega^{(2)}) = \int_{\partial\psi} d\xi = \int_{\psi} dd\xi = 0.$$



Es sei in $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die $(n-1)$ -Form

$$\omega = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \frac{x_r}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{r}{2}}} dx^{1 \dots \hat{r} \dots n}$$

gegeben. Ihre äußere Ableitung ist die n -Form

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{r=1}^n \partial_r \left[\frac{x_r}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{r}{2}}} \right] dx^{1 \dots n} \\ &= \sum_{r=1}^n \frac{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{r}{2}} - 2x_r^2 \cdot \frac{r}{2} \cdot (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{r}{2}-1}}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^r} dx^{1 \dots n} \\ &= \sum_{r=1}^n \frac{(x_1^2 + \dots + x_n^2) - r \cdot x_r^2}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{r}{2}+1}} dx^{1 \dots n} = 0. \end{aligned}$$

34.3 Das Lemma von Poincaré

Es sei jetzt $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Für ein festes $\varepsilon > 0$ bezeichne

$$Y := X \times]-\varepsilon, 1 + \varepsilon[$$

einen offenen „Zylinder“ über X . Die Elemente bezeichnen wir mit

$$(y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, t).$$

Das Zurückziehen der natürlichen Projektion $Y \rightarrow X$ besteht in der natürlichen Abbildung

$$* : \begin{cases} \Omega(X) \rightarrow \Omega(Y) \\ \omega = \sum_{I \in \mathcal{I}} \omega_I(x) dx^I \mapsto \omega^* = \sum_{I \in \mathcal{I}^{(n+1)}} \omega_I^*(y) dy^I, \end{cases}$$

wobei die Komponentenfunktionen ω_I^* des Bildes $\omega^* \in \Omega(Y)$ gegeben sind durch

$$\omega_I^*(y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) = \begin{cases} \omega_I(y_1, \dots, y_n), & \text{falls } I \in \mathcal{I}^{(n)}, \\ 0, & \text{falls } y_{n+1} \in I. \end{cases}$$

Dies kommt auch durch die Angabe

$$\omega^* = \sum_{I \in \mathcal{I}^{(n+1)}} \omega_I^*(x, t) dx^I = \sum_{I \in \mathcal{I}^{(n)}} \omega_I(x) dx^I$$

zur Geltung. Die Funktionen ω_I^* hängen gar nicht von der Variablen $t = y_{n+1}$ ab. In den Produkten dy^I treten keine Faktoren dy^{n+1} auf.

Auf diese Weise wird die äußere Algebra $\Omega(X)$ zu einer Teilalgebra von $\Omega(Y)$.

Es gibt dann eine „Zwischenalgebra“

$$\Omega(X) \hookrightarrow \Omega^*(Y) \hookrightarrow \Omega(Y),$$

die wie folgt definiert ist:

$$\Omega^*(Y) := \left\{ \sum_{I \in \mathcal{I}^{(n+1)}} \omega_I(x, t) dx^I \right\}.$$

Sie enthält die p -Formen aus $\Omega(Y)$, bei denen die Komponentenfunktionen auch von $t = y_{n+1}$ abhängen, es treten aber nach wie vor keine Faktoren dy^{n+1} in den Produkten dy^I auf.

Die Elemente von $\Omega(X)$ können auch als eine durch $t \in]-\varepsilon, 1 + \varepsilon[$ parametrisierte Schar von p -Formen auf X aufgefasst werden.

Wir definieren einige Operatoren $\Omega^*(Y) \rightarrow \Omega^*(Y)$ durch ihre Wirkung auf reine p -Formen:

$$\begin{aligned} \partial_t : \omega_I dx^I &\mapsto (\partial_{n+1} \omega_I) dx^I \\ d_x : \omega_I dx^I &\mapsto \left(\sum_{\ell=1}^n \partial_\ell \omega_I dx^\ell \right) \wedge dx^I \\ \int \cdot dt : \omega_I dx^I &\mapsto \left(\int_0^1 \omega_I dt \right) dx^I \end{aligned}$$

Formeln 38 Für eine p -Form $\omega \in \Omega^*(Y)$ gilt:

$$d\omega = d_x\omega + dt \wedge \partial_t\omega$$

$$\int_0^1 \partial_t\omega(\cdot, t) dt = \omega(\cdot, 1) - \omega(\cdot, 0)$$

$$d\left(\int_0^1 \omega(\cdot, t) dt\right) = \int_0^1 (d_x\omega) dt$$

Dabei ist d die „normale“ äußere Ableitung für eine Form in $\Omega(Y)$.

Beweis Es genügt, reine p -Formen $\omega_I dx^I$ zu betrachten. Dann ist

$$d\omega = \left(\sum_{\ell=1}^n \partial_\ell \omega_I dx^\ell + \partial_t \omega_I dt\right) \wedge dx^I = d_x\omega + dt \wedge \partial_t\omega.$$

Die anderen beiden Formeln sind Anwendungen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Man beachte auch, dass Integration (über t) und Differentiation (nach x) vertauschen. \blacklozenge

Satz 39 (Poincaré-Lemma) Für $p \geq 1$ ist eine geschlossene p -Form ω in einem zusammenziehbaren Gebiet X exakt.

Beweis

(1) Da X zusammenziehbar ist, existiert die \mathcal{C}^1 -Kontraktionsabbildung

$$F : X \times [0, 1] \rightarrow X \quad \text{mit } F(x, 0) = x, \quad F(x, 1) = a$$

mit der $n \times (n + 1)$ -Matrix $F'(x, t)$ als Ableitung.

(2) Es sei $\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}(\binom{n}{p})} \omega_I dx^I$. Wir betrachten die von X auf Y zurückgezogene p -Form

$$\begin{aligned} F^*\omega(x, t) &= \sum_{I \in \mathcal{I}(\binom{n}{p})} \sum_{J \in \mathcal{I}(\binom{n+1}{p})} \det(F')^I_J(x, t) \omega_I(F(x, t)) dy^J \\ &= \sum_{I \in \mathcal{I}(\binom{n}{p})} \sum_{\substack{J \in \mathcal{I}(\binom{n+1}{p}) \\ j_p = n+1}} \det(F')^I_J(x, t) \omega_I(F(x, t)) dy^J + \\ &\quad \sum_{I \in \mathcal{I}(\binom{n}{p})} \sum_{\substack{J \in \mathcal{I}(\binom{n+1}{p}) \\ j_p \neq n+1}} \det(F')^I_J(x, t) \omega_I(F(x, t)) dy^J \\ &= \underbrace{\left(\sum_{I \in \mathcal{I}(\binom{n}{p})} \sum_{J \in \mathcal{I}(\binom{n}{p})} \det(F')^I_J(x, t) \omega_I(F(x, t)) dx^{j_1 \dots j_{p-1}} \right)}_{=:(-1)^p \eta} \wedge dt + \\ &\quad \underbrace{\sum_{I \in \mathcal{I}(\binom{n}{p})} \sum_{J \in \mathcal{I}(\binom{n}{p})} \det(F')^I_J(x, t) \omega_I(F(x, t)) dx^J}_{=:\zeta} \\ &= \zeta - dt \wedge \eta \end{aligned}$$

(3) Es ist

$$\begin{aligned}\zeta(x, 0) &= \sum_{I \in \mathcal{I}^{\binom{n}{p}}} \sum_{J \in \mathcal{I}^{\binom{n}{p}}} \underbrace{\det(F')_J^I(x, 0)}_{= \delta_J^I} \omega_I(x) dx^J = \omega(x), \\ \zeta(x, 1) &= \sum_{I \in \mathcal{I}^{\binom{n}{p}}} \sum_{J \in \mathcal{I}^{\binom{n}{p}}} \underbrace{\det(F')_J^I(x, 1)}_{= 0} \omega_I(a) dx^J = 0.\end{aligned}$$

(4) Als nächstes betrachten wir die Zurückziehung von $d\omega = 0$ in Y

$$\begin{aligned}0 &= F^*(d\omega) = dF^*\omega \\ &= d(\zeta - dt \wedge \eta) = d\zeta + dt \wedge d\eta \\ &= (d_x\zeta + dt \wedge \partial_t\zeta) + dt \wedge (d_x\eta + dt \wedge \partial_t\eta) \\ &= d_x\zeta + dt \wedge (\partial_t\zeta + d_x\eta)\end{aligned}$$

ζ und $d_x\zeta$ sind Elemente von $\Omega^*(Y)$ und enthalten daher keine Faktoren dt . Deshalb muss gelten:

$$d_x\eta = -\partial_t\zeta.$$

(5) Insgesamt haben wir dann

$$d\left(\int_0^1 \eta dt\right) = \int_0^1 d_x\eta dt = -\int_0^1 \partial_t\zeta dt = \zeta(x, 0) - \zeta(x, 1) = \omega.$$

◆

34.4 Die L^p -Räume

Im folgenden seien die beiden Konstanten $p, q > 1$ durch

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad q = \frac{p}{p-1} \quad \Longleftrightarrow \quad p = \frac{q}{q-1}$$

verknüpft.

Hilfssatz 40 Für $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ gilt die Abschätzung

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Beweis Für festes y bestimmen wir das Minimum der partielle Funktion

$$f(x) := \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy.$$

Die einzige Nullstelle der ersten Ableitung

$$f'(x) = x^{p-1} - y.$$

ist $y^{\frac{1}{p-1}}$. Diese Stelle ist wegen

$$f(y^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{\frac{1}{p-1}+1} = y^{\frac{p}{p-1}} \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \right) = 0$$

eine Nullstelle und dann wegen

$$f(0) = \frac{y^q}{q} \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

eine Minimumsstelle. ◆

Satz 41

(i) Für zwei Funktionen $f, g \in \overline{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d)$ sei das Produkt wohldefiniert. Dann gilt

$$\int^{\uparrow} |f \cdot g| \leq \left(\int^{\uparrow} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int^{\uparrow} |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

(ii) Für zwei Funktionen $f, g \in \overline{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d)$ sei die Summe wohldefiniert. Dann gilt

$$\left(\int^{\uparrow} |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int^{\uparrow} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int^{\uparrow} |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Beweis

(0) Im Fall $\left(\int^{\uparrow} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$ ist (sehr ausführlich)

$$\begin{aligned} & \left(\int^{\uparrow} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \\ \implies & \int^{\uparrow} |f|^p = 0 \\ \implies & |f|^p = 0 \quad \text{fast überall} \\ \implies & |f| = 0 \quad \text{fast überall} \\ \implies & f = 0 \quad \text{fast überall} \\ \implies & |fg| = 0 \quad \text{fast überall} \\ \implies & \int^{\uparrow} |f \cdot g| = 0. \end{aligned}$$

und daher die Ungleichung erfüllt. Im Fall $\int^{\uparrow} |f|^p = \infty$ ist die Ungleichung ebenfalls trivial erfüllt. Wir können also $\int^{\uparrow} |f|^p \in \mathbb{R}^+$ und dann entsprechend $\int^{\uparrow} |g|^q \in \mathbb{R}^+$ voraussetzen.

(1) Durch Multiplikation mit positiven Konstanten können die Funktionen f und g unbeschadet der Gültigkeit der Ungleichung im Satz dahingehend verändert werden, dass

$$\int^{\uparrow} |f|^p = 1 = \int^{\uparrow} |g|^q.$$

(2) Für festes $x \in \mathbb{R}^d$ ist aufgrund des Hilfssatzes

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq \frac{1}{p} \cdot |f(x)|^p + \frac{1}{q} \cdot |g(x)|^q$$

und deshalb

$$\int^{\uparrow} |f \cdot g| \leq \frac{1}{p} \cdot \int^{\uparrow} |f|^p + \frac{1}{q} \cdot \int^{\uparrow} |g|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Die zweite Aussage kann man durch die folgende Ungleichungskette nachprüfen. Dabei kann man ohne weiteres annehmen, dass die Nenner nicht Null sind.

$$\begin{aligned} \left(\int^{\uparrow} |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \frac{\int^{\uparrow} |f + g|^p}{\left(\int^{\uparrow} |f + g|^p \right)^{\frac{1}{q}}} = \frac{\int^{\uparrow} |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1}}{\left(\int^{\uparrow} (|f + g|^{p-1})^q \right)^{\frac{1}{q}}} \\ &\leq \frac{\int^{\uparrow} |f| \cdot |f + g|^{p-1}}{\left(\int^{\uparrow} (|f + g|^{p-1})^q \right)^{\frac{1}{q}}} + \frac{\int^{\uparrow} |g| \cdot |f + g|^{p-1}}{\left(\int^{\uparrow} (|f + g|^{p-1})^q \right)^{\frac{1}{q}}} \\ &\leq \left(\int^{\uparrow} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int^{\uparrow} |g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$



Definition (1) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *lokal integrierbar*, wenn für jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ die Funktion $f \cdot \chi_K$ integrierbar ist.

(2) Die Menge der lokal integrierbaren Funktion(-sklassen)en wird mit

$$\mathcal{L}_{\text{lok}}(\mathbb{R}^d) \text{ bzw. } L_{\text{lok}}(\mathbb{R}^d)$$

bezeichnet.

Eine einfache Beobachtung halten wir fest im

Satz 42 Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ sind äquivalent die Aussagen:

$$(A) f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$$

$$(B) f \in \mathcal{L}_{\text{lok}}(\mathbb{R}^d) \text{ und } \int^{\uparrow} f < +\infty.$$

Beweis Die Implikation $(A) \implies (B)$ ist trivial. Ist umgekehrt (B) erfüllt, so konvergiert die Folge $(f \cdot \chi_{[-n, +n]^d})_{n \in \mathbb{N}}$ integrierbarer Funktionen stellenweise gegen f . Der Satz von Lebesgue sorgt für die Integrierbarkeit der Grenzfunktion. \blacklozenge

Wir definieren den Vektorraum

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in \mathcal{L}_{\text{lok}}(\mathbb{R}^d) \mid \int^{\uparrow} |f|^p < \infty \right\}$$

und auf ihm das Funktional

$$\|\cdot\|_p : \begin{cases} \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto \left(\int^{\uparrow} |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{cases}$$

Die Eigenschaften sind im nächsten Satz aufgelistet:

Satz 43 Für zwei Äquivalenzklassen $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(i) \|f\|_p = 0 \iff f = 0 \text{ (fast überall)}$$

$$(ii) \|\alpha \cdot f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$$

$$(iii) \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Das bedeutet wieder, dass der Vektorraum der Äquivalenzklassen fast überall gleicher Funktionen

$$L^p(\mathbb{R}^d) := \left\{ [f] \mid f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d) \right\}$$

mit dem Funktional $\|\cdot\|_p$ ein normierter Vektorraum ist.

35 Skalare Gewöhnliche Differentialgleichungen

35.1 Beispiele

Beispiel 1: Betrachte die (Differential-)Gleichung:

$$y' = -x \cdot y.$$

Gesucht ist eine Funktion y mit Variabler x , die diese Gleichung erfüllt. Überprüfen Sie (mit Hilfe der Kettenregel), dass die *Gauß'sche Glockenfunktion*

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

eine Lösung darstellt. Gibt es noch andere Lösungen?

Beispiel 2: Es seien K und R zwei positive Konstanten. Die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -Kx - R\dot{x}$$

beschreibt die Bewegung eines Körpers, der von einer Schraubenfeder angetrieben wird und dabei einer Reibung unterliegt.

- Der (doppelte) Punkt über dem x bedeutet die erste (bzw. zweite) Ableitung nach der Zeitvariablen t . Die Ausdrücke \dot{x} bzw. \ddot{x} stehen also für die Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung des Körpers.
- Die Beschleunigung (Bremsung) \ddot{x} (linke Seite) wird hervorgerufen durch die Federkraft $-Kx$ (Gemäß Hooke'schem Gesetz ist sie proportional zur Dehnung x der Feder) und durch die Reibung $-R\dot{x}$ (sie ist proportional zur Geschwindigkeit).

Wir probieren einen Ansatz:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\varrho t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ \dot{x}(t) &= -\varrho e^{-\varrho t} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \omega e^{-\varrho t} \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ \ddot{x}(t) &= \varrho^2 e^{-\varrho t} \cdot \sin(\omega \cdot t) - 2\varrho\omega e^{-\varrho t} \cdot \cos(\omega \cdot t) - \omega^2 e^{-\varrho t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{aligned}$$

Setzen wir diese Funktion und ihre Ableitungen in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich

$$\varrho^2 - \omega^2 = -K + R\varrho \quad -2\varrho\omega = -R\omega^2$$

und daraus

$$\varrho = \frac{R}{2} \quad \omega = \pm \sqrt{K - \frac{R^2}{4}}.$$

Weisen Sie direkt nach, dass die gedämpfte Schwingung

$$x(t) = e^{-\frac{R}{2}t} \cdot \sin\left(\sqrt{K - \frac{R^2}{4}} \cdot t\right)$$

eine Lösung der Differentialgleichung darstellt.

Gibt es noch andere Lösungen? Gibt es systematische Verfahren zur Lösung? Weiß man von jeder Differentialgleichung, ob es eine Lösung gibt?

35.2 Definition

Wir vereinbaren zunächst für dieses Kapitel, dass N eine feste natürliche Zahl, D eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^{1+N} ist. I sei ein offenes Intervall von \mathbb{R} .

Definition Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine N -mal differenzierbare Funktion, so heißt y *Lösung der Differentialgleichung (N -ter Ordnung)*

$$y^{(N)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(N-1)})$$

wenn für alle $x \in I$ gilt:

$$y^{(N)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(N-1)}(x)).$$

(Erinnerung: $y^{(i)}$ bezeichnet die i -te Ableitung von y .) Die Funktion f heißt in diesem Zusammenhang *Rechte Seite*.

Eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *maximal* oder mit *maximaler Definitionsmenge*, wenn es eine „umfassendere“ weitere Lösung $\tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$I \subsetneq \tilde{I} \quad \text{und} \quad y(x) = \tilde{y}(x) \quad \text{für } x \in I$$

nicht gibt.

Bemerkungen

- Eine Differentialgleichung beschreibt also die Aufgabe, bei gegebener „Rechter Seite“ f eine unbekannt differenzierbare Funktion $x \mapsto y$ zu finden. Bei Einsetzung dieser Funktion und ihrer Ableitungen in die Rechte Seite soll auf der linken Seite die N -te Ableitung (linke Seite) herauskommen.
- Da auf der linken Seite die N -te Ableitung explizit (aufgelöst) auftritt, spricht man auch von einer *expliziten* Differentialgleichung (N -ter Ordnung). Beispielsweise ist

$$\sin[(y')^3] + y^2 = \cos(x)$$

keine explizite Differentialgleichung (erster Ordnung). Für die expliziten Differentialgleichungen existiert eine geschlossene Theorie. Nicht-explizite Differentialgleichungen kann man unter Umständen mit ad-hoc Methoden lösen.

- Es sei

$$y^{(N)} = f(x, y, y', \dots, y^{(N-1)})$$

eine Differentialgleichung N -ter Ordnung und $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ ein Punkt in der Definitionsmenge D . Stellt man an eine Lösung y der Differentialgleichung zusätzlich die *Anfangsbedingung*, dass

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, y^{(N-1)}(x_0) = y_{N-1},$$

so spricht man von einem *Anfangswertproblem (AWP)*. Wir werden anhand einiger Beispiele sehen, dass „im Normalfall“ AWPe genau eine Lösung besitzen.

- Eine (explizite) Differentialgleichung *erster Ordnung* hat die Form

$$y' = f(x, y).$$

Es ist eine differenzierbare Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y'(x) = f(x, y(x))$ für alle $x \in I$ gesucht. Ein zugeordnetes AWP hat dann die Form

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- Oft werden als Variablen auch t statt x und x statt y verwendet. Der Buchstabe erinnert dann an „time (Zeit)“. Der Ableitungsbeistrich wird bei dieser Notation durch einen Punkt ersetzt. Beispielsweise lauten dann explizite Differentialgleichungen erster bzw. zweiter Ordnung dann

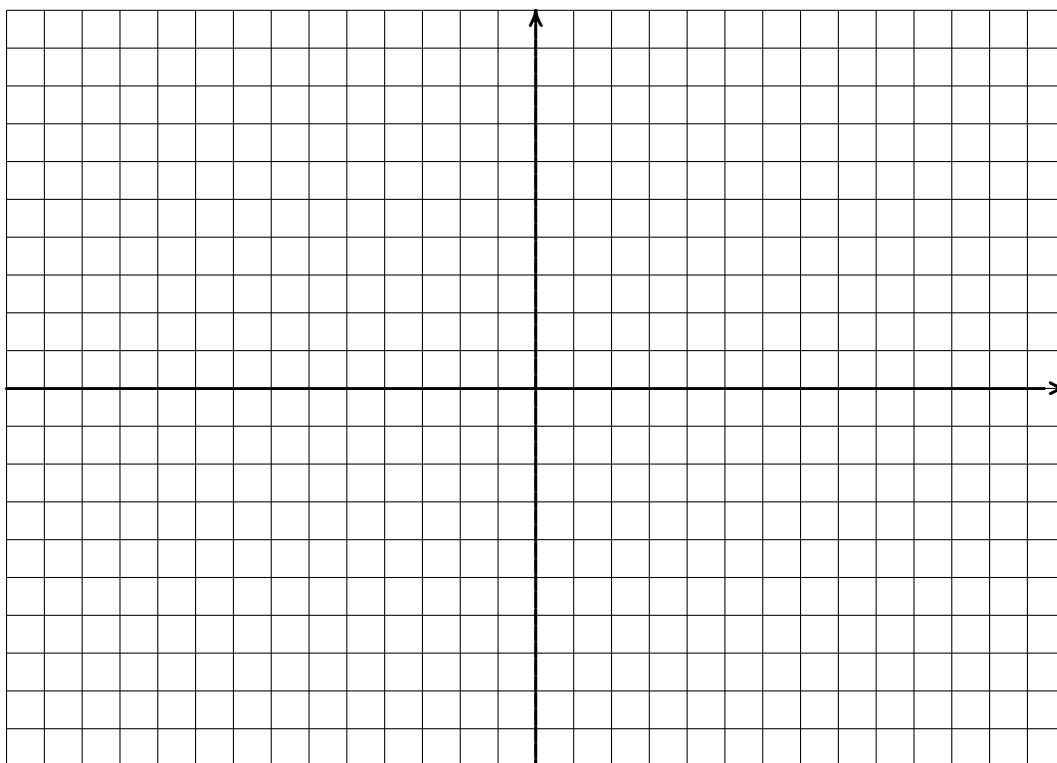
$$\dot{x} = f(t, x) \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} = f(t, x, \dot{x}).$$

- Eine Differentialgleichung und ihre Lösung können auf die folgende Weise geometrisch interpretiert werden. Die Ableitung y' der gesuchten Funktion an einer Stelle x kann als Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion aufgefasst werden. Diese Steigung ist also gerade als Funktion von x und y gegeben.

In einem x - y -Koordinatensystem kann man die Zuordnung $(x, y) \mapsto y'(x)$ dadurch graphisch veranschaulichen, dass man an einigen (günstig ausgewählten) Punkten $(x, y) \in I \times \mathbb{R}$ kleine „Tangentchen“, sogenannte *Linienelemente*, einzeichnet. Es entsteht ein *Richtungsfeld*. Hilfreich sind dabei *Isoklinen*, das sind Kurven in der (x, y) -Ebene, entlang derer die $f(x, y)$ konstant ist. Das graphische Lösen der Differentialgleichungs-Aufgabe besteht dann darin, Funktionsgraphen zu finden, die sich an die Linienelemente anschmiegen.

Beispiel: Wir zeichnen das Richtungsfeld für die Differentialgleichung aus dem Anfangsbeispiel:

$$y' = -x \cdot y$$



35.3 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Definition Eine (explizite) Differentialgleichung erster Ordnung heißt *mit getrennten Variablen*, wenn es zwei Funktionen $h : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ (D_1, D_2 offene Intervalle) gibt, so dass die rechte Seite die Form

$$f(x, y) = h(x) \cdot g(y), \quad (x, y) \in D = D_1 \times D_2$$

annimmt.

Beispiel: Wir betrachten das AWP erster Ordnung

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = -x \cdot y \\ y(0) = 1. \end{array} \right. \quad \parallel \quad \left\{ \begin{array}{l} y' = h(x) \cdot g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$$

und lösen es mit einem formalen (mathematisch nicht abgesicherten) Verfahren. Wir schreiben die Differentialgleichung als

$$\frac{dy}{dx} = -x \cdot y \quad \parallel \quad \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$$

und dann als Gleichung zwischen „Differentialen“

$$\frac{1}{y} \cdot dy = -x \cdot dx \quad \parallel \quad \frac{1}{g(y)} \cdot dy = h(x) \cdot dx$$

die integriert werden können. Die Anfangsbedingung legt dabei Integrationsgrenzen fest:

$$\int_1^y \frac{1}{\hat{y}} \cdot d\hat{y} = \int_0^x (-\hat{x}) \cdot d\hat{x} \quad \parallel \quad \int_{y_0}^y \frac{1}{g(\hat{y})} \cdot d\hat{y} = \int_{x_0}^x h(\hat{x}) \cdot d\hat{x}$$

(Der „Dach-Akzent“ ist für die Unterscheidung von Integrationsvariablen und Integrationsgrenzen nötig).

Als Resultat erhalten wir:

$$\ln(y) - \ln(1) = -\frac{x^2}{2} + \frac{0^2}{2} \quad \parallel \quad G(y) = H(x),$$

wobei G die Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ mit $G(y_0) = 0$ und H die Stammfunktion h mit $H(x_0) = 0$ ist. Wir wenden – wenn möglich – die Umkehrfunktion der linken Seite an und erhalten:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \parallel \quad y = G^{-1}(H(x)).$$

Man rechnet leicht nach, dass die Funktion auf der linken Seite das zugehörige AWP löst. Das allgemeine Verfahren auf der rechten Seite beinhaltet aber problematische Vorgehensweisen:

- Falls $g(y) = 0$ an einer Stelle y ist, darf man nicht einfach durch $g(y)$ dividieren.
- Existiert überhaupt die Umkehrfunktion von G ?

Der folgende Satz und sein Beweis stellen das Verfahren auf eine sichere Grundlage.

Satz 44 *Es seien D_1, D_2 offene Intervalle, $x_0 \in D_1$ und $h : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Wir betrachten das AWP*

$$\begin{cases} y' = h(x) \cdot g(y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

(i) *Ist $g(y_0) \neq 0$, so gibt es ein offenes Intervall I mit $x_0 \in I \subseteq D_1$ und eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ des AWP. Sie kann mit Hilfe des obigen Verfahrens konstruiert werden.*

Die Lösung ist eindeutig in dem folgenden Sinne: Ist $\tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Lösung, so stimmt sie auf dem Schnittintervall $I \cap \tilde{I}$ mit y überein.

(ii) *Ist $g(y_0) = 0$, so ist die konstante Funktion*

$$y(x) \equiv y_0$$

eine Lösung des AWP. Es kann auch andere Lösungen geben.

Beweis (1) Da $g(y_0) \neq 0$ ist, gibt es ein offenes Intervall $J_1 \subseteq D_2$ um y_0 mit $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J_1$. Daher ist die Funktion $\frac{1}{g}$ auf J_1 definiert und stetig.

(2) $\frac{1}{g}$ ist stetig und besitzt daher gemäß HDI eine Stammfunktion G auf J_1 mit $G(y_0) = 0$.

(3) Wegen $G' = \frac{1}{g} \neq 0$ auf J_1 ist G streng monoton auf J_1 , deshalb als Funktion

$$G : \begin{cases} J_1 & \rightarrow & J_2 := G(J_1) \\ x & \mapsto & G(x) \end{cases}$$

umkehrbar. Wegen $G(y_0) = 0$ gilt $0 \in J_2$ und $G^{-1}(0) = y_0$.

(4) Die Funktion h ist stetig auf D_1 , sie besitzt daher eine Stammfunktion H mit $H(x_0) = 0$. Es sei I ein offenes Intervall in D_1 mit $x_0 \in I$ und $H(I) \subseteq J_2$.

(5) Dann ist die Funktion

$$y = G^{-1} \circ H : I \rightarrow \mathbb{R}$$

wohldefiniert. Wir zeigen, dass es sich um eine Lösung des AWP handelt.

(6) Die Anfangsbedingung ist erfüllt

$$y(x_0) = G^{-1}(H(x_0)) = G^{-1}(0) = y_0.$$

(7) Wegen

$$y'(x) = (G^{-1})'(H(x)) \cdot H'(x) = \frac{1}{G'(G^{-1}(H(x)))} \cdot H'(x) = g(y(x)) \cdot h(x), \quad x \in I$$

(Kettenregel) ist y auch Lösung der Differentialgleichung.

(8) Ist $\tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Lösung des AWP, so gilt für $x \in I \cap \tilde{I}$:

$$H(x) = \int_{x_0}^x h(\hat{x}) d\hat{x} \stackrel{(*)}{=} \int_{x_0}^x \frac{\tilde{y}'(\hat{x})}{g(\tilde{y}(\hat{x}))} d\hat{x} \stackrel{(**)}{=} \int_{y_0}^{\tilde{y}(x)} \frac{1}{g(z)} dz = G(\tilde{y}(x)).$$

Die Umformung (*) beruht darauf, dass \tilde{y} Lösung ist, in (**) haben wir die Substitution $z = \tilde{y}(x)$ durchgeführt. Die gesamte Gleichung besagt gerade, dass für $x \in I$

$$\tilde{y}(x) = G^{-1}(H(x)) = y(x)$$

ist.

(ii) Die erste Aussage kann man direkt verifizieren. Die zweite Aussage werden wir weiter unten anhand des Beispiels 2 begründen. \blacklozenge

Die Differentialgleichung mit getrennte Variablen beinhaltet zwei interessante Sonderfälle ab:

- Bei der Differentialgleichung

$$y' = h(x)$$

hängt die rechte Seite gar nicht von der Funktion y ab. Als Lösung eines zugehörigen AWP's

$$\begin{cases} y' = h(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ergibt sich die Stammfunktion von h :

$$y(x) = \int_{x_0}^x h(\hat{x}) d\hat{x} + y_0$$

Dies würde sich auch bei Anwendung des obigen Satzes auf diese Situation ergeben. Die Linienelemente haben in diesem Fall entlang vertikaler Isoklinen konstante Steigung.

- Eine Differentialgleichung

$$y' = g(y)$$

mit $D = \mathbb{R} \times D_2$) und dann einer von x unabhängigen rechten Seite heißt *autonom*. Es gilt der folgende Satz:

Satz 45 Ist $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der obigen autonomen Differentialgleichung, so ist für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ auch die verschobene („geschiftete“) Funktion

$$\begin{cases} I + \xi & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto y(x - \xi) \end{cases}$$

eine Lösung.

Dies ergibt sich aus der Kettenregel

$$\frac{d}{dx}y(x - \xi) = y'(x - \xi) = g(y(x - \xi)).$$

Dies wird auch bei Betrachtung des Richtungsfelds anschaulich klar. Es ist unabhängig von x . Deshalb kann der Graph einer Lösung in x -Richtung um ξ verschoben werden, er bleibt dabei Graph einer Lösung.

Die Lösung eines AWP

$$\begin{cases} y' = g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

mit einer von x unabhängigen rechten Seite ergibt sich gemäß obigen Satz als

$$y(x) = G^{-1}(x - x_0),$$

wobei G^{-1} die Umkehrfunktion der Funktion $y \mapsto \int_{y_0}^y \frac{d\hat{y}}{g(\hat{y})}$ mit geeignetem Definitionintervall ist.

Beispiele

1. Betrachte das AWP

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Für $y_0 = 0$ ist die Lösung trivial, im anderen Fall erhält man gemäß obigem Verfahren zunächst die Gleichung

$$\int_{y_0}^y \frac{d\hat{y}}{\hat{y}^2} = \int_{x_0}^x 1 d\hat{x},$$

die mit Hilfe der Stammfunktionen in

$$-\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} = x - x_0$$

überführt wird. Als Lösung ergibt sich:

$$y(x) = \frac{1}{-x + x_0 + \frac{1}{y_0}}.$$

Diese Lösung hat für $x \rightarrow x_0 + \frac{1}{y_0}$ eine Polstelle.

2. Wir betrachten das AWP

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

und überzeugen uns davon, dass für je zwei reelle Zahlen $k \leq 0 \leq \ell$ die abschnittsweise durch Parabeläste definierte Funktion $y_{k,\ell} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$y_{k,\ell}(x) = \begin{cases} -(x-k)^2, & \text{falls } x < k, \\ 0, & \text{falls } k \leq x \leq \ell, \\ (x-\ell)^2, & \text{falls } x > \ell, \end{cases}$$

eine Lösung des AWP darstellt. Die Anfangsbedingung ist erfüllt. Dass die drei Zeilen die Differentialgleichung erfüllen, weisen wir beispielhaft für den „schwierigsten“ Fall der ersten Zeile nach: Die Ableitung der unteren Zeile ist

$$[-(x-k)^2]' = -2(x-k) = 2|x-k| = 2\sqrt{|-(x-k)^2|},$$

entsprechendes gilt für die mittlere und obere Zeile. Wir haben also ein Beispiel eines AWP gefunden, das unendlich viele Lösungen hat. Eine umfassendere Theorie der Differentialgleichungen klärt auf, dass dies auf eine Eigenschaft der rechten Seite zurückzuführen ist, die mit der Nicht-Differenzierbarkeit $g(y)$ an der Stelle y_0 zusammenhängt.

3. Zur Übung:

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2}{x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Mit Hilfe der Methode der Trennung der Variablen kann man für eine weitere Klasse von Differentialgleichungen Lösungen auffinden. Sie haben die Form

$$y' = f(ax + by + c),$$

wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ Konstanten sind. O.B.d.A. kann $b \neq 0$ angenommen werden.

Ist $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, so kann man ihr durch eine Transformation

$$u(x) := ax + by(x) \quad y(x) = \frac{1}{b} \cdot (u(x) - ax)$$

eine andere Funktion $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv zuordnen. Ist y eine Lösung der obigen Differentialgleichung, so gilt

$$u'(x) = a + by'(x) = a + bf(ax + by(x) + c) = a + bf(u(x)),$$

u ist also Lösung der transformierten Differentialgleichung,

$$u' = a + bf(u)$$

mit getrennten Variablen.

Als Beispiel betrachten wir das AWP

$$\begin{cases} y' = (x + y)^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Mit $a = b = 1, c = 0$ kann sie der obigen Beispielklasse zugeordnet werden. Mit der Transformation $u(x) = x + y(x)$ erhalten wir das transformierte AWP

$$\begin{cases} u' = 1 + u^2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

mit der Lösung $u(x) = \tan(x)$. Also ist $y(x) = \tan(x) - x$ eine Lösung des ursprünglichen AWP.

35.4 Lineare Differentialgleichungen

Definition Eine (explizite) Differentialgleichung N -ter Ordnung heißt *linear*, wenn die Definitionsmenge der rechten Seite f die Form $D = I \times \mathbb{R}^N$, hat und dann die rechte Seite sich als

$$y^{(N)} = a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_{N-1}(x)y^{(N-1)} + b(x) \quad (\text{iLDG})$$

darstellen lässt mit stetigen Funktionen $a_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, N-1$ und $b : I \rightarrow \mathbb{R}$. Wegen des Terms $b(x)$ nennt man die Differentialgleichung zusätzlich *inhomogen*. Wird die Funktion $b \equiv 0$ gesetzt, so spricht man von einer (zugehörigen) *homogenen* Differentialgleichung

$$y^{(N)} = a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_{N-1}(x)y^{(N-1)}. \quad (\text{hLDG})$$

Allgemein lässt sich der folgende Satz über lineare Differentialgleichungen formulieren:

Satz 46 (i) *Superpositionsprinzip für homogene Differentialgleichungen: Sind die Funktionen y und \tilde{y} zwei Lösungen von (hLDG), so ist auch die Linearkombination*

$$\alpha y + \beta \tilde{y}$$

eine Lösung. Die Lösungen bilden also einen \mathbb{R} -Vektorraum.

(ii) *Ist \hat{y} eine fest vorgegebene Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (iLDG), so lässt sich jede Lösung in der Form*

$$y = \hat{y} + \tilde{y}$$

darstellen, wobei \tilde{y} eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung (hLDG) ist.

Beweis Das rechnet man jeweils einfach nach. Für (i):

$$\begin{aligned} (\alpha y + \beta \tilde{y})^{(N)}(x) &= \alpha y^{(N)}(x) + \beta \tilde{y}^{(N)}(x) \\ &= \alpha [a_0(x)y(x) + a_1(x)y'(x) + \dots + a_{N-1}(x)y^{(N-1)}(x)] + \\ &\quad \beta [a_0(x)\tilde{y}(x) + a_1(x)\tilde{y}'(x) + \dots + a_{N-1}(x)\tilde{y}^{(N-1)}(x)] \\ &= a_0(x)(y + \tilde{y})(x) + a_1(x)(y + \tilde{y})'(x) + \dots + a_{N-1}(x)(y + \tilde{y})^{(N-1)}(x). \end{aligned}$$

Für (ii): Tatsächlich ist die Differenz zweier Lösungen y und \hat{y} der inhomogenen Differentialgleichung (LDG) eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

$$\begin{aligned} (y - \hat{y})^{(N)}(x) &= y^{(N)}(x) - \hat{y}^{(N)}(x) \\ &= [a_0(x)y(x) + a_1(x)y'(x) + \dots + a_{N-1}(x)y^{(N-1)}(x) + b(x)] - \\ &\quad [a_0(x)\hat{y}(x) + a_1(x)\hat{y}'(x) + \dots + a_{N-1}(x)\hat{y}^{(N-1)}(x) + b(x)] = \\ &= a_0(x)(y - \hat{y})(x) + a_1(x)(y - \hat{y})'(x) + \dots + a_{N-1}(x)(y - \hat{y})^{(N-1)}(x) \end{aligned}$$



Wir betrachten zwei Sonderfälle.

35.5 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Es geht also um Differentialgleichungen der Form

$$y' = a(x)y + b(x)$$

mit stetigen Funktionen $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Wir definieren für $x_1, x_2 \in I$ die *Übergangsfunktion*

$$\Phi_a(x_2, x_1) := \exp\left(\int_{x_1}^{x_2} a(\hat{x})d\hat{x}\right)$$

und notieren einige Eigenschaften (Nachrechnen!) für $x_1, x_2, x_3, x, x_0 \in I$

$$\begin{aligned}\Phi_a(x_1, x_1) &= 1, \\ \Phi_a(x_1, x_2) \cdot \Phi_a(x_2, x_3) &= \Phi_a(x_1, x_3), \\ \Phi_a(x_1, x_2) &= \frac{1}{\Phi_a(x_2, x_1)}. \\ \Phi'_a(x, x_1) &= a(x) \cdot \Phi_a(x, x_1) \quad (\text{Ableitung nach } x)\end{aligned}$$

Satz 47 (Lösungen der homogenen Differentialgleichung)

(i) *Das AWP*

$$\begin{cases} y' = a(x)y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

hat die eindeutige Lösung auf I

$$y(x) = \Phi_a(x, x_0) \cdot y_0.$$

(ii) *Die Menge aller Lösungen der Differentialgleichung*

$$y' = a(x)y$$

ist gegeben durch

$$y(x) = \Phi_a(x, x_0) \cdot C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Beweis Der Satz 44 („getrennte Variablen“) würde es erlauben, die obige Lösung aufzufinden. Da wir aber die gesuchte Lösung schon zur Verfügung haben, rechnen wir die Lösungseigenschaft einfach nach:

$$y'(x) = \Phi'(x, x_0) \cdot y_0 = a(x) \cdot \Phi(x, x_0) \cdot y_0 = a(x) \cdot y(x).$$

Die Anfangsbedingung ist ebenfalls erfüllt.

Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen: Dazu sei $y_0 \neq 0$, was bedeutet, dass y nirgends in I den Wert 0 annimmt. Ist $\tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{I} \subseteq I$ eine weitere Lösung des AWP, so gilt für die Funktion $\frac{\tilde{y}}{y}$ gemäß Quotientenregel

$$\left(\frac{\tilde{y}}{y}\right)'(x) = \frac{\tilde{y}'(x)y(x) - y(x)\tilde{y}'(x)}{y^2(x)} = \frac{a(x)\tilde{y}(x) \cdot a(x)y(x) - a(x)y(x) \cdot a(x)\tilde{y}(x)}{y^2(x)} = 0.$$

Wegen $\left(\frac{\tilde{y}}{y}\right)(x_0) = \frac{y_0}{y_0} = 1$ muss nach Folgerung ?? die Funktion $\frac{\tilde{y}}{y} \equiv 1$ sein. \tilde{y} stimmt also mit y überein.

Für $y_0 = 0$ ist $y \equiv 0$ die einzige Lösung. Eine andere Lösung \hat{y} wäre in einem offenen Intervall $\hat{I} \subseteq I$ ungleich Null. Für sie könnte man dann die vorige Überlegung anwenden. \blacklozenge

Um eine Lösung für die inhomogene Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + b(x)$$

zu finden, wendet man das Prinzip der

Variation der Konstanten

der Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

an. Dies bedeutet dass man als Ansatz für die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung die Konstante C in der Lösungsformel 47 (ii) durch eine Funktion $C(x)$ ersetzt:

$$y(x) = \Phi_a(x, x_0) \cdot C(x).$$

Man setzt diesen Ansatz in (iLDG) ein und erhält mit der Produktregel

$$\begin{aligned} a(x)y(x) + b(x) &= y'(x) \\ &= \Phi(x, x_0) \cdot C'(x) + a(x) \cdot \Phi_a(x, x_0) \cdot C(x) \\ &= a(x) \cdot y(x) + \Phi(x, x_0) \cdot C'(x). \end{aligned}$$

was auf die Gleichung

$$C'(x) = \Phi_a(x_0, x) \cdot b(x)$$

führt, die dann nur noch integriert werden muss. Die Integrations-Konstante ist dabei durch die Anfangsbedingung festgelegt:

$$C(x) = \int_{x_0}^x \Phi_a(x_0, \hat{x}) \cdot b(\hat{x}) d\hat{x} + y_0$$

Die gesamt Lösung kann also in einem Satz notiert werden.

Satz 48 (Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung)

(i) Für die eindeutige Lösung des inhomogenen AWP's

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

gilt

$$\begin{aligned} y(x) &= \Phi_a(x, x_0) \cdot \left[\int_{x_0}^x \Phi_a(x_0, \hat{x}) \cdot b(\hat{x}) d\hat{x} + y_0 \right] \\ &= \int_{x_0}^x \Phi_a(x, \hat{x}) \cdot b(\hat{x}) d\hat{x} + \Phi_a(x, x_0) \cdot y_0. \end{aligned}$$

(Beachte die Besonderheit, dass die Variable x sowohl als Integrationsgrenze als auch im Integranden auftritt.)

(ii) Die Gesamtheit aller Lösungen des AWP's ist gegeben durch

$$y(x) = \int_{x_0}^x \Phi_a(x, \hat{x}) \cdot b(\hat{x}) d\hat{x} + \Phi_a(x, x_0) \cdot C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Der Ausdruck (ii) gibt die Beobachtung aus Satz 46 wieder. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung setzt sich aus einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung zusammen.

35.6 Exkurs: Nullstellen von Polynomen

Es sei

$$p(z) = a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

ein Polynom mit Koeffizienten $a_N, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$. Im Fall $a_N \neq 0$ hat es den Grad N , es kann dann

$$p(z) = a_N \cdot \left(z^N + \frac{a_{N-1}}{a_N} z^{N-1} + \dots + \frac{a_1}{a_N} z + \frac{a_0}{a_N} \right)$$

geschrieben werden. Der Koeffizient von z^N in dem Polynom in Klammern ist 1. Ein solches Polynom heißt *normiert*. Da dieser Übergang zum normierten Polynom die Nullstellen nicht verändert, beschränken wir uns im folgenden nur auf solche normierten Polynome.

Satz 49 (und Definition) *Es sei*

$$p(z) = z^N + \frac{a_{N-1}}{a_N} z^{N-1} + \dots + \frac{a_1}{a_N} z + \frac{a_0}{a_N}$$

ein normiertes Polynom N -ten Grades und $1 \leq \ell \leq N$. Die folgenden Aussagen über eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ sind äquivalent:

- (i) (Def) λ ist eine ℓ -fache Nullstelle des Polynoms.
- (ii) λ ist Nullstelle der Polynome $p, p', p'', \dots, p^{(\ell-1)}$.
- (iii) Es gibt ein normiertes Polynom q_ℓ vom Grad $N - \ell$, so dass

$$p(z) = (z - \lambda)^\ell \cdot q_\ell(z).$$

Anders formuliert: Aus p können ℓ Linearfaktoren $(z - \lambda)$ abgespalten werden.

Beweis (iii) \implies (ii) Hat p die Darstellung von (iii), so zeigt die Leibniz-Produktregel, dass in jeder Ableitung $p^{(j)}$ für $j = 0, \dots, \ell - 1$ ein Faktor $(z - \lambda)$ auftritt. Deshalb ist $p^{(j)}(\lambda) = 0$.

(ii) \implies (iii) Wir zeigen mit Induktion über $j = 1, \dots, \ell$: Aus p können j Linearfaktoren $(z - \lambda)$ abgespalten werden. Induktionsanfang $j = 1$: Es gilt

$$\begin{aligned} p(z) &= p(z) - p(\lambda) = \\ &= a_1(z - \lambda) + \dots + a_{N-1}(z^{N-1} - \lambda^{N-1}) + (z^N - \lambda^N) \end{aligned}$$

Für $k = 1, \dots, N$ ist aber weiter

$$z^k - \lambda^k = (z - \lambda) \cdot \underbrace{(z^{k-1} + z^{k-2}\lambda^1 + z^{k-2}\lambda^2 + \dots + z\lambda^{k-2} + \lambda^{k-1})}_{=: e_k(z, \lambda)}$$

und deshalb

$$p(z) = (z - \lambda) \cdot \underbrace{(a_1 + a_2 e_2(z, \lambda) + \dots + a_{N-1} e_{N-1}(z, \lambda) + e_N(z, \lambda))}_{=: q_1(z)}.$$

Wir nehmen jetzt an, dass die Aussage für $j < \ell$ bewiesen ist. Das Polynom hat also die Darstellung

$$p(z) = (z - \lambda)^j \cdot q_j(z).$$

Es ist $j \leq \ell - 1$ und daher nach Voraussetzung in (ii): $p^{(j)}(\lambda) = 0$. Eine genauere Überlegung mit Hilfe einer j -fachen Anwendung der Leibniz-Produktregel (oder mit den Satz von Taylor) zeigt, dass dann

$$q_j(\lambda) = 0$$

sein muss. Das aber bedeutet (vgl. Induktionsanfang), dass aus dem Polynom q_j ein Faktor $z - \lambda$ abgespalten werden kann. Insgesamt kann also

$$p(z) = (z - \lambda)^j \cdot q_j(z) = (z - \lambda)^j \cdot (z - \lambda) q_{j+1}(z) = (z - \lambda)^{j+1} q_{j+1}(z)$$

mit einem Polynom q_{j+1} vom Grad $N - (j + 1)$ geschrieben werden. ◆

Nicht beweisen können wir hier den

Satz 50 (Fundamentalsatz der Algebra)

Es sei p ein normiertes Polynom vom Grad $N \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten.

(i) Das Polynom p hat eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$.

(ii) Es gibt einen Datensatz

$$(\ell_1, \lambda_1), (\ell_2, \lambda_2), \dots, (\ell_q, \lambda_q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}$$

mit paarweise verschiedenen λ_j und

$$\ell_1 + \dots + \ell_q = N,$$

so dass

$$p(z) = (z - \lambda_1)^{\ell_1} \cdot (z - \lambda_2)^{\ell_2} \cdot \dots \cdot (z - \lambda_q)^{\ell_q}.$$

Das Polynom zerfällt also komplett in Linearfaktoren.

Dabei folgt (ii) aus (i) aufgrund des vorhergehenden Satzes.

Die letzte Aussage kann auch auf Polynome mit reellen Koeffizienten angewandt werden. Über die komplexen Nullstellen λ_j , die in den Linearfaktoren auftreten, kann man hier genaueres sagen:

Satz 51

Es sei p ein normiertes Polynom vom Grad $N \geq 1$ mit **reellen** Koeffizienten.

(i) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine ℓ -fache Nullstelle, so ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\bar{\lambda}$ eine ℓ -fache Nullstelle. Das ist natürlich nur für echt komplexe Zahlen (mit Imaginärteil ungleich Null) interessant.

(ii) Es gibt einen Datensatz, bestehend aus

$$\begin{aligned} (I) \quad & (\ell_1, \lambda_1), (\ell_2, \lambda_2), \dots, (\ell_r, \lambda_r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \\ (II) \quad & (m_1, \mu_1), (m_2, \mu_2), \dots, (m_s, \mu_s) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \\ (\overline{II}) \quad & (m_1, \bar{\mu}_1), (m_2, \bar{\mu}_2), \dots, (m_s, \bar{\mu}_s) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \end{aligned}$$

mit paarweise verschiedenen zweiten Komponenten $\lambda_*, \mu_*, \bar{\mu}_*$ und

$$\ell_1 + \dots + \ell_r + 2(m_1 + \dots + m_s) = N,$$

so dass

$$\begin{aligned} p(z) = & (z - \lambda_1)^{\ell_1} \cdot (z - \lambda_2)^{\ell_2} \cdot \dots \cdot (z - \lambda_r)^{\ell_r} \cdot \\ & (z^2 - 2 \operatorname{Re}(\mu_1) + |\mu_1|^2)^{m_1} \cdot \dots \cdot (z^2 - 2 \operatorname{Re}(\mu_s) + |\mu_s|^2)^{m_s}. \end{aligned}$$

Das Polynom zerfällt also komplett in reelle Linearfaktoren und reelle quadratische Faktoren.

Beweis (i) Ist $p(\lambda) = 0$, so ist auch $p(\bar{\lambda}) = \overline{p(\lambda)} = 0$. Die gleiche Überlegung gilt für die Ableitungen.

(ii) Je zwei Potenzen von Linearfaktoren $(z - \mu_j)^{m_j}$ und $(z - \bar{\mu}_j)^{m_j}$ für $j = 1, \dots, s$ mit echt-komplexen μ_j können zur Potenz der quadratischen Faktoren

$$(z - \mu_j)^{m_j} (z - \bar{\mu}_j)^{m_j} = (z^2 - 2 \operatorname{Re}(\mu_j) + |\mu_j|^2)^{m_j}$$

zusammengefasst werden. ♦

35.7 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Es handelt sich um Gleichungen der Form

$$y^{(N)} + a_{N-1}y^{(N-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0.$$

mit Konstanten $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, N-1$. Sie können natürlich auch explizit geschrieben werden. Man beachte, dass die Rechte Seite

$$-(a_{N-1}y^{(N-1)} + \dots + a_1y' + a_0y)$$

auf ganz $I = \mathbb{R}$ definiert ist.

Der im Anfangsbeispiel 2 erfolgreiche Ansatz führt insgesamt auf die Lösung in dem folgenden Satz.

Satz 52 *Es sei*

$$y^{(N)} + a_{(N-1)}y^{(N-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

eine lineare Differentialgleichung N -ter Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten. Betrachte für das zugehörige (charakteristische) Polynom

$$z^N + a_{N-1}z^{N-1} + \dots + a_1z + a_0$$

den in Satz 51 beschriebenen Datensatz.

(i) *Gehört (ℓ, λ) zum Datensatz (I), so sind die ℓ Funktionen*

$$y_{(j,\lambda)}^I(x) = x^{j-1} \cdot \exp(\lambda x), \quad j = 1, \dots, \ell$$

Lösungen der Differentialgleichung.

(ii) *Gehört (m, μ) zum Datensatz (II), so sind die $2m$ Funktionen*

$$\begin{aligned} y_{(j,\mu)}^{II}(x) &= x^{j-1} \cdot e^{(\operatorname{Re} \mu)x} \cdot \cos[(\operatorname{Im} \mu)x] \\ y_{(j,\mu)}^{III}(x) &= x^{j-1} \cdot e^{(\operatorname{Re} \mu)x} \cdot \sin[(\operatorname{Im} \mu)x], \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Lösungen der Differentialgleichung.

(iii) *In (i) und (ii) sind insgesamt*

$$\ell_1 + \dots + \ell_r + 2(m_1 + \dots + m_s) = N,$$

Lösungen aufgelistet, die wir mit

$$\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N$$

durchnummerieren. Dann ist die Menge aller Lösungen der Differentialgleichung gegeben durch

$$y = \tilde{y}_1 \cdot C_1 + \tilde{y}_2 \cdot C_2 + \dots + \tilde{y}_N \cdot C_N, \quad C_1, \dots, C_N \in \mathbb{R}.$$

(iv) *Die (eindeutige) Lösung eines AWP's N -ter Ordnung*

$$\begin{cases} y^{(N)} + a_{(N-1)}y^{(N-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(x_0) = y_{N-1} \end{cases}$$

mit N Anfangsbedingungen kann aus der Menge aller Lösungen (iii) durch Lösung des inhomogenen Linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(x_0) \cdot C_1 + \tilde{y}_2(x_0) \cdot C_2 + \dots + \tilde{y}_N(x_0) \cdot C_N &= y_0 \\ &\vdots \\ \tilde{y}_1^{(N-1)}(x_0) \cdot C_1 + \tilde{y}_2^{(N-1)}(x_0) \cdot C_2 + \dots + \tilde{y}_N^{(N-1)}(x_0) \cdot C_N &= y_{N-1} \end{aligned}$$

gewonnen werden.

Diese allgemeinen Sätze sind vor allem im Hinblick auf Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung interessant: Vgl. Aulbach S. 269 – 274.

35.8 Der Transformations–Hauptsatz

Für offenes $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sei

$$\mathcal{C}_{\text{gp}}^1(D) := \left\{ y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \mid I \text{ offenes Intervall, } (x, y(x)) \in D \text{ für alle } x \in I \right\}$$

die Menge der auf offenen Intervallen definierten \mathcal{C}^1 -Funktionen, deren Graph in D verläuft.

Es sei jetzt noch $\tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus der Form

$$\vartheta : \begin{cases} D & \rightarrow \tilde{D} \\ (x, y) & \mapsto (u, v) = (\vartheta_1(x), \vartheta_2(x, y)) \end{cases}$$

(ein „Bündelisomorphismus“) gegeben. Abhängig von diesem Diffeomorphismus definieren wir zwei Transformationen (für **L**ösungen und **R**echte Seiten) durch

$$\Theta_L : \begin{cases} \mathcal{C}_{\text{gp}}^1(D) & \rightarrow \mathcal{C}_{\text{gp}}^1(\tilde{D}) \\ y & \mapsto v, \quad \text{wobei } v(u) := \vartheta_2(u, y(\vartheta_1^{-1}(u))) \end{cases}$$

und

$$\Theta_R : \begin{cases} \mathcal{C}(D, \mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{C}(\tilde{D}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto \tilde{f}, \quad \text{mit } \tilde{f}(u, v) := \partial_1 \vartheta_2(u, y) + \frac{\partial_2 \vartheta_2(u, y)}{\vartheta_1'(\vartheta_1^{-1}(u))} \cdot f(\vartheta_1^{-1}(u), y) \Big|_{y=\vartheta_2^{-1}(u, v)}. \end{cases}$$

Dabei ist $\vartheta_2^{-1}(u, \cdot)$ die Umkehrfunktion von $\vartheta_2(u, \cdot)$ für festes u .

Satz 53 (Der Transformations–Hauptsatz) Die Funktion $y \in \mathcal{C}_{\text{gp}}^1(D)$ ist genau dann eine Lösung der skalaren Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = f(x, y),$$

wenn die transformierte Funktion $v := \Theta_L y \in \mathcal{C}_{\text{gp}}^1(\tilde{D})$ eine Lösung der transformierten Differentialgleichung

$$v' = \tilde{f}(u, v) \quad \text{mit } \tilde{f} := \Theta_R f$$

ist.

Beweis Wir stellen zunächst fest, dass

$$y(\vartheta_1^{-1}(u)) = \vartheta_2^{-1}(u, \vartheta_2(u, y(\vartheta_1^{-1}(u)))) = \vartheta_2^{-1}(u, v(u)).$$

Dann wird „einfach und ausführlich“ mit Kettenregel nachgerechnet:

$$\begin{aligned} v'(u) &= \vartheta_2(\cdot, y \circ \vartheta_1^{-1})'(u) \\ &= \partial_1 \vartheta_2(u, y(\vartheta_1^{-1}(u))) + (\vartheta_1^{-1})'(u) \cdot y'(\vartheta_1^{-1}(u)) \cdot \partial_2 \vartheta_2(u, y(\vartheta_1^{-1}(u))) \\ &= \partial_1 \vartheta_2(u, \vartheta_2^{-1}(u, v(u))) + \frac{1}{\vartheta_1'(\vartheta_1^{-1}(u))} \cdot f(\vartheta_1^{-1}(u), \vartheta_2^{-1}(u, v(u))) \cdot \partial_2 \vartheta_2(u, \vartheta_2^{-1}(u, v(u))) \\ &= \tilde{f}(u, v). \end{aligned}$$



36 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen

36.1 Einführung, „Zusammenflicken“

Die Überlegungen dieses Kapitels sind für Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

$$y' = f(x, y)$$

anwendbar. Es ist dabei die stetige rechte Seite $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ definiert.

Wir erweitern etwas den Lösungsbegriff.

Definition Es sei I ein (nicht notwendig offenes) Intervall positiver Länge. Die Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt

Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ auf I ,

wenn gilt:

- y ist in allen $x \in I^\circ$ (offenes Teilintervall) differenzierbar,
- y ist in den Randpunkten x von I (rechts- bzw. linksseitig) differenzierbar,
- Es gilt für alle $x \in I$

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Satz 54 (Zusammenflicken von Lösungen) Es sei I ein Intervall positiver Länge, $x_0 \in I^\circ$. Ist dann

- y_1 eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ auf $I_1 := I \cap]-\infty, x_0]$,
- y_2 eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ auf $I_2 := I \cap [x_0, +\infty[$,
- $y_1(x_0) = y_2(x_0)$,

so ist die zusammengeflückte Funktion

$$y(x) := \begin{cases} y_1(x), & \text{falls } x \in I, x \leq x_0, \\ y_2(x), & \text{falls } x \in I, x \geq x_0, \end{cases}$$

eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ auf I .

Beweis Die einzig etwas problematische Stelle ist x_0 . y ist

- in x_0 linksseitig differenzierbar, da y_1 es ist, und
- in x_0 rechtsseitig differenzierbar, da y_2 es ist.

- Außerdem gilt

$$y'_{\text{links}}(x_0) = y'_1(x_0) = f(x_0, y_1(x_0)) = f(x_0, y_2(x_0)) = y'_2(x_0) = y'_{\text{rechts}}(x_0)$$

Daraus folgt, dass y in x_0 differenzierbar ist mit

$$y'(x) = f(x_0, y(x_0)).$$



Lemma 55 *Es sei I ein Intervall, $x_0 \in I$, $(x_0, y_0) \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ Rechte Seite. Für eine Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(A) *y ist Lösung des AWP*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

(B) *y ist stetig und genügt der Integralgleichung (für $x \in I$)*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\hat{x}, y(\hat{x})) d\hat{x}.$$

(C) *Die Funktion y ist Fixpunkt der Abbildung*

$$\begin{cases} \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) & \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) \\ y & \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{(\cdot)} f(\hat{x}, y(\hat{x})) d\hat{x} \end{cases}$$

Beweis Er besteht in der Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. ◆

36.2 Der Satz von Picard–Lindelöf

Der folgende erste Existenz- und Eindeutigkeitsatz ist noch schwach, da er eine starke (unpraktische) Voraussetzung hat. Dafür tritt aber die Anwendung des Banach'schen Fixpunktsatzes deutlich hervor.

Satz 56 Für die Rechte Seite $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ einer Differentialgleichung seien die folgenden Bedingungen erfüllt:

(A) Es sei $I = [c, d]$ kompakt und $D = [c, d] \times \mathbb{R}^n$.

(B) $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ genüge einer globalen Lipschitz-Bedingung bzgl. der zweiten Variablen, d.h. es existiert eine Konstante $L \geq 0$, so dass für alle $(x, y), (x, \tilde{y}) \in D$

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\|_{\mathbb{R}^n} \leq L \cdot \|y - \tilde{y}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

(C) Es gelte die Bedingung: $L \cdot (d - c) < 1$.

Dann gibt es zu jedem $(x_0, y_0) \in D$ genau eine Lösung auf I des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (\text{AWP}).$$

Beweis Nach dem vorigen Lemma ist eine Funktion y genau dann Lösung des im Satz gegebenen AWP, wenn sie Fixpunkt der Abbildung

$$T : \begin{cases} \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) & \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) \\ y(\cdot) & \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{(\cdot)} f(\hat{x}, y(\hat{x})) d\hat{x} \end{cases}$$

ist. Wir wissen bereits, dass der Vektorraum $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ durch die Supremumsnorm

$$\|y\|_{\infty} = \sup_{x \in I} \|y(x)\|_{\mathbb{R}^n}$$

zu einem Banachraum (normierter Vektorraum, der als induziert-metrischer Raum vollständig ist) wird. Wir brauchen also nur zu zeigen, dass T eine Kontraktion ist.

Es seien also y_1, y_2 zwei Funktionen aus $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)\|_{\mathbb{R}^n} &= \left\| \left[y_0 + \int_{x_0}^x f(\hat{x}, y_1(\hat{x})) d\hat{x} \right] - \left[y_0 + \int_{x_0}^x f(\hat{x}, y_2(\hat{x})) d\hat{x} \right] \right\|_{\mathbb{R}^n} \\ &= \left\| \int_{x_0}^x [f(\hat{x}, y_1(\hat{x})) - f(\hat{x}, y_2(\hat{x}))] d\hat{x} \right\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x \|f(\hat{x}, y_1(\hat{x})) - f(\hat{x}, y_2(\hat{x}))\|_{\mathbb{R}^n} d\hat{x} \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x L \cdot \|y_1(\hat{x}) - y_2(\hat{x})\|_{\mathbb{R}^n} d\hat{x} \right| \\ &\leq L \cdot \left| \int_{x_0}^x \|y_1(\hat{x}) - y_2(\hat{x})\|_{\mathbb{R}^n} d\hat{x} \right| \\ &\leq L \cdot \left| \int_{x_0}^x \|y_1 - y_2\|_{\infty} d\hat{x} \right| \\ &= L \cdot |x - x_0| \cdot \|y_1 - y_2\|_{\infty} \\ &\leq L \cdot (d - c) \cdot \|y_1 - y_2\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Da diese Abschätzung für alle $x \in I$ richtig ist, gilt

$$\|(Tx_1) - (Tx_2)\|_\infty = \sup_{x \in I} \{ \|(Tx_1)(x) - (Tx_2)(x)\|_{\mathbb{R}^n} \} \leq L \cdot (d - c) \cdot \|y_1 - y_2\|_\infty.$$

Aufgrund der Voraussetzung des Satzes $L \cdot (d - c) < 1$ ist T eine Kontraktion. Der Beweis ist beendet. \blacklozenge

Dieser Satz kann Ausgangsplattform einer ganzen Kaskade von Existenz- und Eindeutigkeitsätzen gesehen werden, die sich im Hinblick auf verschiedenste Gesichtspunkte unterscheiden:

- Unterschiedlich starke Voraussetzungen an die „Glattheit“ der Rechten Seite:
Stetigkeit — Lipschitz-Stetigkeit — Differenzierbarkeit
- Unterschiedlich starke Aussagen über das Existenzintervall:
lokal — lokal quantitativ — global — global quantitativ
- Verwendung anderer Normen in den relevanten Funktionenräumen

Es ist schon überraschend, dass man unter Benutzung eines Tricks die letzte Voraussetzung (C) einfach beseitigen kann. Es gilt also

Satz 57 *Im vorherigen Satz kann die Bedingung (C) einfach weggelassen werden.*

Beweis Es sei $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ vorgegeben. Für ein festes $\alpha \geq 0$ definieren wir eine Gewichtsfunktion auf I

$$p(x) := e^{-\alpha|x-x_0|}$$

und dann auf $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ die Norm

$$\|y\|_{\infty,p} := \sup_{x \in I} \{p(x) \cdot \|y(x)\|_{\mathbb{R}^n}\}.$$

Auch unter dieser Norm wird $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ zum Banachraum.

Die Iterationsabbildung T wird genau so gewählt und einige Schritte weit abgeschätzt wie oben. Dann aber weiter:

$$\begin{aligned} \|(Tx_1)(x) - (Tx_2)(x)\|_{\mathbb{R}^n} &\leq L \cdot \left| \int_{x_0}^x \|y_1(\hat{x}) - y_2(\hat{x})\|_{\mathbb{R}^n} d\hat{x} \right| \\ &= L \cdot \left| \int_{x_0}^x \|y_1(\hat{x}) - y_2(\hat{x})\|_{\mathbb{R}^n} \cdot e^{-\alpha|\hat{x}-x_0|} \cdot e^{+\alpha|\hat{x}-x_0|} d\hat{x} \right| \\ &\leq L \cdot \left| \int_{x_0}^x \|y_1 - y_2\|_{\infty,p} \cdot e^{+\alpha|\hat{x}-x_0|} d\hat{x} \right| \\ &= L \cdot \|y_1 - y_2\|_{\infty,p} \cdot \left| \int_{x_0}^x e^{+\alpha|\hat{x}-x_0|} d\hat{x} \right| \\ &= L \cdot \|y_1 - y_2\|_{\infty,p} \cdot \frac{e^{+\alpha|x-x_0|}}{\alpha} \end{aligned}$$

Daraus folgt aber zunächst

$$\|(Tx_1)(x) - (Tx_2)(x)\|_{\mathbb{R}^n} \cdot e^{-\alpha|x-x_0|} \leq \frac{L}{\alpha} \cdot \|y_1 - y_2\|_{\infty,p}$$

und dann durch Übergang zum Supremum

$$\|Tx_1 - Tx_2\|_{\infty,p} \leq \frac{L}{\alpha} \cdot \|y_1 - y_2\|_{\infty,p}.$$

Das aber bedeutet, dass durch geeignete Wahl von α die Metrik so verändert wird, dass T zu einer Kontraktion wird. \blacklozenge

Satz 58 Im (vor-)vorherigen Satz können die Bedingungen (A),(B) durch die folgenden Bedingungen ersetzt werden:

(A)' Es ist I ein beliebiges Intervall und $D = I \times \mathbb{R}^n$.

(B)' Auf jedem kompakten Teilintervall J von I erfülle f eine Lipschitzbedingung: d.h. es existiert eine (i.a. von J abhängige) Konstante $L_J \geq 0$, so dass für alle $(x, y_1), (x, y_2) \in J \times \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\|_{\mathbb{R}^n} \leq L_J \cdot \|y_1 - y_2\|_X.$$

Beweis Es sei $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine wachsende Folge von kompakten Intervallen mit $x_0 \in I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$I = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k.$$

Auf jedem I_k hat das AWP genau eine Lösung $y_k : I_k \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Für $k \leq \ell$ muss y_k gleich der Einschränkung von y_ℓ auf I_k sein.

Die Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei dadurch (wohl-)definiert, dass ihre Einschränkung auf I_k mit y_k übereinstimmt.

Gäbe es zwei verschiedene Lösungen des y, \tilde{y} des AWP, so müsste eine Stelle $a \in I$ vorliegen mit $y(a) \neq \tilde{y}(a)$. Das widerspricht aber der eindeutigen Lösbarkeit des AWP auf einem x_0 und a umfassenden kompakten Intervall. \blacklozenge

Hilfssatz 59 Wir definieren die Funktion

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n \\ y \mapsto \begin{cases} y, & \text{falls } y \in B_1(0), \\ \frac{y}{\|y\|}, & \text{sonst.} \end{cases} \end{cases}$$

Diese Funktion hat die Lipschitz-Konstante 1.

Beweis Es seien $y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\tilde{y}\| \leq \|y\|$. Wir definieren durch Unterklammerung

$$\begin{aligned} y &= \underbrace{\max\{1, \|y\|\}}_{=: \lambda} \cdot \underbrace{\varphi(y)}_{=: z} \\ \tilde{y} &= \underbrace{\max\{1, \|\tilde{y}\|\}}_{=: \tilde{\lambda}} \cdot \underbrace{\varphi(\tilde{y})}_{=: \tilde{z}} \end{aligned}$$

Es ist dann auch $\|\tilde{z}\| \leq \|z\|$, aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\langle z, \tilde{z} \rangle \leq \|z\| \cdot \|\tilde{z}\| \leq \|z\|^2 = \langle z, z \rangle.$$

Mit $\mu := \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} \geq 1$ ist dann

$$\begin{aligned}
 & \|y - \tilde{y}\|^2 - \|\varphi(y) - \varphi(\tilde{y})\|^2 \\
 = & \|\lambda z - \tilde{\lambda} \tilde{z}\|^2 - \|z - \tilde{z}\|^2 \\
 = & \tilde{\lambda} \cdot \|\mu \cdot z - \tilde{z}\|^2 - \|z - \tilde{z}\|^2 \\
 \geq & \|\mu \cdot z - \tilde{z}\|^2 - \|z - \tilde{z}\|^2 \\
 = & \mu^2 \langle z, z \rangle - 2\mu \langle z, \tilde{z} \rangle + \langle \tilde{z}, \tilde{z} \rangle - \langle z, z \rangle + 2\langle z, \tilde{z} \rangle - \langle \tilde{z}, \tilde{z} \rangle \\
 = & (\mu^2 - 1) \langle z, z \rangle - 2(\mu - 1) \langle z, \tilde{z} \rangle \\
 = & (\mu - 1) [(\mu + 1) \langle z, z \rangle - 2 \langle z, \tilde{z} \rangle] \\
 \geq & 0.
 \end{aligned}$$

◆

Satz 60 An die Rechte Seite $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ einer Differentialgleichung seien die folgenden Voraussetzungen gestellt:

(A) Es ist $I = [c, d]$ kompakt, $B_\varrho(y_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ die Kugel im \mathbb{R}^n mit Radius ϱ und Mittelpunkt y_0 . Dann ist $D = I \times B_\varrho(y_0)$ ein „liegender Zylinder“.

(B) f genüge auf D einer Lipschitz-Bedingung bzgl. der zweiten Variablen, d.h. es existiert eine Konstante $L \geq 0$, so dass für alle $(x, y), (x, \tilde{y}) \in I \times B_\varrho(y_0)$ gilt:

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\|_{\mathbb{R}^n} \leq L_J \cdot \|y - \tilde{y}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Dann existiert auf dem Intervall

$$J := \left[x_0 - \frac{\varrho}{M}, x_0 + \frac{\varrho}{M} \right] \cap I, \quad M := \max\{|f(x, y)| \mid (x, y) \in D\}$$

genau eine Lösung von (AWP).

Beweis (1) Wir modifizieren Die Rechte Seite der Differentialgleichung

$$F(x, y) := f\left(x, \varrho \cdot \varphi\left(\frac{y - y_0}{\varrho}\right) + y_0\right).$$

(2) Für $y \in B_\varrho(y_0)$ ist $\|\frac{y - y_0}{\varrho}\| \leq 1$ und deshalb

$$F(x, y) = f(x, y).$$

F erfüllt eine globale Lipschitz-Bedingung mit der gleichen Lipschitz-Konstante:

$$\begin{aligned}
 \|F(x, y) - F(x, \tilde{y})\| &= \underbrace{\|f(x, \varrho \cdot \varphi(\frac{y - y_0}{\varrho}) + y_0)\|}_{\in B_\varrho(y_0)} - \underbrace{\|f(x, \varrho \cdot \varphi(\frac{\tilde{y} - y_0}{\varrho}) + y_0)\|}_{\in B_\varrho(y_0)} \\
 &\leq L \cdot \|\varrho \cdot \varphi(\frac{y - y_0}{\varrho}) + y_0 - \varrho \cdot \varphi(\frac{\tilde{y} - y_0}{\varrho}) + y_0\| \\
 &\leq L \cdot \|y - \tilde{y}\|.
 \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\sup\{\|F(x, y)\| \mid (x, y) \in J \times \mathbb{R}^n\} = \max\{\|f(x, y)\| \mid (x, y) \in J \times B_\varrho(y_0)\} = M.$$

(3) Es sei jetzt $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ die gemäß Satz 57 existente und eindeutige Lösung des AWP

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = x_0.$$

Für $x \in J$ gilt dann

$$\begin{aligned} \|y(x) - y_0\| &= \left\| \int_{x_0}^x y'(\hat{x}) d\hat{x} \right\| = \left\| \int_{x_0}^x F(\hat{x}, y(\hat{x})) d\hat{x} \right\| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x M d\hat{x} \right| = |x - x_0| \cdot M \leq \varrho. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass der Graph von y ganz in D verläuft.

(5) Es folgt, dass y auch Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung ist. Für $x \in J$ gilt nämlich $y(x) \in B_\varrho(y_0)$, deshalb

$$y'(x) = F(x, y(x)) = f\left(x, \varrho \cdot \varphi\left(\frac{y(x) - y_0}{\varrho}\right) + y_0\right) = f(x, y(x)).$$

(6) Die Eindeutigkeit ist ebenso einfach zu zeigen: Hätte das AWP aus dem Satz zwei verschiedene Lösungen auf J , so hätte auch das modifizierte AWP mit F als Rechter Seite zwei Lösungen, was aber unmöglich ist. \blacklozenge

Theorem 61 (Gronwall Ungleichung) *Es seien $a, b, c : [\tau, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Die Funktion c sei nicht-negativ:*

$$c(t) \geq 0, \quad t \in [\tau, \infty[.$$

Wenn die implizite Abschätzung für a

$$a(t) \leq b(t) + \int_{\tau}^t c(s)a(s) ds, \quad t \in [\tau, \infty[\quad (*)$$

gilt, dann gilt die folgende explizite Abschätzung:

$$\begin{aligned} a(t) &\leq b(t) + \int_{\tau}^t c(s)e^{c(t-s)}b(s) ds \\ &= e^{c(t-\tau)} \left[b(t) + \int_{\tau}^t e^{c(\tau-s)}b'(s) ds \right], \quad t \in [\tau, \infty[. \end{aligned}$$

Die Umformung der zweiten Zeile ist nur möglich, wenn b differenzierbar ist.

Der obige Satz bleibt richtig, wenn man das Intervall $[\tau, \infty[$ durch das Intervall $[-\infty, \tau]$ ersetzt und dann die Funktion als nicht-positiv $c(t) \leq 0$, $t \in [-\infty, \tau]$, voraussetzt.

Beweis

Wir definieren die stetig differenzierbare Funktion

$$w(t) := e^{c(\tau-t)} \cdot \int_{\tau}^t c(s)a(s) ds.$$

und schätzen die Ableitung ab:

$$\begin{aligned} w'(t) &= e^{c(\tau-t)}c(t)a(t) - c(t)e^{c(\tau-t)} \cdot \int_{\tau}^t c(s)a(s) ds \\ &= e^{c(\tau-t)}c(t) \cdot \left[a(t) - \int_{\tau}^t c(s)a(s) ds \right] \\ &\stackrel{(*)}{\leq} e^{c(\tau-t)}c(t) \cdot b(t). \end{aligned}$$

Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt dann:

$$w(t) - \underbrace{w(\tau)}_{=0} \leq \int_{\tau}^t c(s)e^{c(\tau-s)}b(s) ds.$$

Eine zweite Anwendung der impliziten Abschätzung liefert

$$a(t) \stackrel{(*)}{\leq} b(t) + e^{c(t-\tau)}w(t) \leq b(t) + \int_{\tau}^t c(s)e^{c(t-s)}b(s) ds.$$

Die Umformung der zweiten Zeile besteht in partieller Integration:

$$\begin{aligned} &= b(t) - \int_{\tau}^t \left[-c(s)e^{c(t-s)} \right] b(s) ds \\ &= b(t) + \int_{\tau}^t e^{c(t-s)}b'(s) ds - \left[e^{c(t-s)}b(s) \right]_{s=\tau}^{s=t} \\ &= \int_{\tau}^t e^{c(t-s)}b'(s) ds + e^{c(t-\tau)}b(\tau) \\ &= e^{c(t-\tau)} \cdot \left[\int_{\tau}^t e^{c(\tau-s)}b'(s) ds + b(\tau) \right]. \end{aligned}$$



36.3 Beispiel eines Differentialgleichungssystems

Wir betrachten exemplarisch ein Differentialgleichungssystem, das zweidimensional, erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist. (Aus Staatsexamen nicht vertieft: F05, T3 A4).

Bestimmen Sie die Menge der auf \mathbb{R} definierten Lösungsfunktionen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned}y_1'(t) &= y_1(t) + 4y_2(t) \\y_2'(t) &= 2y_1(t) + 3y_2(t)\end{aligned}$$

Es empfiehlt sich, eine andere Notation (mit Variabler t) zu wählen:

$$\begin{aligned}x' &= x + 4y \\y' &= 2x + 3y\end{aligned}$$

HINWEISE zur Lösung: Wähle eine der beiden Gleichungen aus (hier: die erste) und ...

- löse sie nach der „anderen“ Funktion auf:

$$y = \frac{1}{4}(x' - x)$$

- leite sie ein weiteres Mal ab:

$$x'' = x' + 4y'$$

Setzt man nun die beiden Gleichungen für die „andere“ Funktion geschickt in die letzte Gleichung ein, so erhält man

$$\begin{aligned}x'' &= x' + 4y' \\&= x' + 4[2x + 3y] \\&= x' + 4\left[2x + \frac{3}{4}(x' - x)\right] \\&= 4x' + 5x\end{aligned}$$

und damit eine einzige Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$x'' - 4x' - 5x = 0 \quad (*)$$

Wir lösen sie mit Hilfe des letzten Satzes. Das charakteristische Polynom

$$z^2 - 4z - 5 = (z + 1) \cdot (z - 5)$$

hat die beiden Nullstellen:

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda = -1,$$

so dass sich als Lösungen der Differentialgleichung (*) die beiden Funktionen

$$x_1(t) = e^{5t}, \quad x_2(t) = e^{-t}$$

ergeben. Die Menge aller Lösungen von (*) ist somit gegeben durch

$$x(t) = e^{5t} \cdot C_1 + e^{-t} \cdot C_2$$

Daraus kann die Funktion $y = \frac{x' - x}{4}$ berechnet werden, es ergibt sich dann als Menge der Lösungen des gegebenen Differentialgleichungssystems

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \left(\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} e^{5t} \cdot C_1 + e^{-t} \cdot C_2 \\ e^{5t} \cdot C_1 - \frac{1}{2}e^{-t} \cdot C_2 \end{array} \right), C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$