

Skript zur Vorlesung

Analysis 3

(Wintersemester 2015/16)

Dieses Geheft enthält in kompakter Form die wesentlichen Inhalte, wie sie in der Vorlesung „Analysis 3“ vorgestellt werden.

Es ist zum Gebrauch neben der Vorlesung gedacht und erhebt nicht den Anspruch, „in sich selbst verständlich“ oder vollständig zu sein.

S. Hilger

Inhaltsverzeichnis

16.5	Extrema unter Nebenbedingungen	4
17	Kurven im \mathbb{R}^w	10
17.1	Definitionen und Beispiele	10
17.2	Bogenlänge	11
18	Mehrdimensionale Taylor–Approximation und kritische Punkte	17
18.1	Satz über die Taylor–Approximation	17
18.2	Taylorpolynome	20
18.3	Extrema reellwertiger Funktionen	23
18.4	Sattelpunkte reellwertiger Funktionen \ominus	25
19	Der Approximationssatz von Stone–Weierstraß \ominus	27
19.1	Vorbereitung: Der Satz von Dini	27
19.2	Algebren und Trenn-Algebren	29
19.3	Der Satz	30
20	Integration im \mathbb{R}^d	34
20.1	Einstieg	34
20.2	Integration stetiger Funktionen über Quadern	36
20.3	Unterhalbstetige Funktionen	39
20.4	\mathcal{C}^\uparrow -Funktionen	41
20.5	Integration von \mathcal{C}^\uparrow -Funktionen	45
20.6	Integration von \mathcal{C}^\downarrow -Funktionen	51
20.7	Volumen kompakter Mengen im \mathbb{R}^d	52
20.8	Volumen von Kugeln	56
21	Die Transformationsformel	59
21.1	Vorbereitung: Zerlegung der Eins	59
21.2	Vorbereitung: Die Primitiv–Zerlegung	61
21.3	Die Transformationsformel	65
21.4	Anwendungen: Volumina	71
22	Lebesgue’sche Integration	73
22.1	Die Route zum Lebesgue-Integral — Überblick	73
22.2	Ober- und Unterintegral für beliebige Funktionen	74
22.3	Integrierbare Funktionen	79
23	Nullmengen im \mathbb{R}^d	86
23.1	Das Mass einer integrierbaren Menge	86
23.2	Vorbereitung: Quader-Überdeckung	88
23.3	Grundlegung	89
23.4	Das Cantor’sche Diskontinuum	93
23.5	Fast-Überall-Eigenschaften	96
23.6	Satz von Fubini für integrierbare Funktionen	98
23.7	Die Transformationsformel für integrierbare Funktionen	100

24 Konvergenzsätze \ominus	103
24.1 Der Konvergenzsatz von Levi	103
24.2 Der Konvergenzsatz von Lebesgue	104
24.3 Integration einer Funktionenreihe	107
24.4 Riemann–Integrierbarkeit impliziert Lebesgue–Integrierbarkeit	109
24.5 Parameterabhängige Integration	110
25 Die Banachräume der Lebesgue-Theorie \ominus	112
25.1 Klassen von fast–überall definierten Funktionen	112
25.2 Der Banachraum $L^1(\mathbb{R}^d)$	113
25.3 Die Banachräume $L^p(\mathbb{R}^d)$	115
25.4 Verallgemeinerung auf lokalkompakte Räume	118
25.5 Verallgemeinerung auf Maßräume	119
26 Orientierte Integration — Allgemeines	121
26.1 p -Flächen und p -Ketten	121
26.2 Vektorfelder	122
27 Orientierte Integration über 1-Ketten	124
27.1 1-Ketten	124
27.2 Das Arbeitsintegral im \mathbb{R}^d	125
27.3 Konservative Vektorfelder	126
27.4 Das Arbeitsintegral bei Linearisierung	129
28 Der Satz von Green	132
28.1 Die Rotation als Funktion	132
28.2 Die verschiedenen Versionen des Satzes von Green	133
28.3 Geschlossene und exakte Vektorfelder	136
29 Hyperflächen im \mathbb{R}^d	138
29.1 Einstieg	138
29.2 Das Hyperflächenintegral	140
29.3 Flächen im \mathbb{R}^3	142
29.4 Rotationsflächen im \mathbb{R}^3	144
30 Der Satz von Stokes	147
30.1 Die Rotation als Vektorfeld	147
30.2 Vorwärtsschieben und Zurückziehen bei 2-Flächen	149
30.3 Der klassische Satz von Stokes	152
30.4 Geschlossene und exakte Vektorfelder	153
31 Der Satz von Gauß	154
31.1 Die Divergenz als Trilinearform	154
31.2 Die Divergenz als Funktion	157
31.3 Die verschiedenen Versionen des Satzes von Gauß	158

16.5 Extrema unter Nebenbedingungen

16.5.1 Definitionen: Extrema Es sei X Teilmenge von \mathbb{R}^d (oder eines allgemeineren metrischen Raumes) und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion, $a \in X$.

(1) Der Punkt $(a, f(a))$ des Graphen heißt wie in der ersten Spalte angegeben, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass die Bedingung der zweiten Spalte gilt:

<i>lokales Maximum</i>	$f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in D$ mit $ x - a < \varepsilon$
<i>lokales Minimum</i>	$f(x) \geq f(a)$ für alle $x \in D$ mit $ x - a < \varepsilon$
<i>strenges lokales Maximum</i>	$f(x) < f(a)$ für alle $x \in D$ mit $0 < x - a < \varepsilon$
<i>strenges lokales Minimum</i>	$f(x) > f(a)$ für alle $x \in D$ mit $0 < x - a < \varepsilon$

(2) Der Punkt $(a, f(a))$ des Graphen heißt wie in der ersten Spalte angegeben, wenn die Bedingung der zweiten Spalte erfüllt ist:

<i>globales Maximum</i>	$f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in D$
<i>globales Minimum</i>	$f(x) \geq f(a)$ für alle $x \in D$
<i>strenges globales Maximum</i>	$f(x) < f(a)$ für alle $x \in D \setminus \{a\}$
<i>strenges globales Minimum</i>	$f(x) > f(a)$ für alle $x \in D \setminus \{a\}$

(3) Man spricht jeweils von einem *Extremum*, wenn es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

(4) In diesem Zusammenhang heißt a auch *Stelle* des Maximums, Minimums oder Extremums und $f(a)$ der *Wert* des Maximums, Minimums oder Extremums.

16.5.2 Satz: Notwendige Bedingung für Extremum Es sei $a \in X$ ein innerer Punkt. Ist die Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ in a differenzierbar und hat sie dort ein Extremum, so gilt

$$f'(a) = (0 \ 0 \ \cdots \ 0).$$

16.5.3 Beweis Es sei $j \in \{1, \dots, d\}$ fest gewählt. Da a ein innerer Punkt ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass die partielle Funktion

$$f(a_1, \dots, a_{j-1}, \underset{j}{\cdot}, a_{j+1}, \dots, a_d) : \begin{cases}]a_j - \delta, a_j + \delta[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_d) \end{cases}$$

wohl-definiert ist. Sie hat ein Extremum bei a_j , deshalb ist aufgrund von Satz 9.7.2 (i) $\partial_j f(a) = 0$. Da dies für alle $j \in \{1, \dots, d\}$ gilt, ist aufgrund von Satz 16.2.9

$$f'(a) = (\partial_1 f(a) \ \partial_2 f(a) \ \cdots \ \partial_d f(a)) = (0 \ 0 \ \cdots \ 0).$$

16.5.4 Satz: Extrema unter Nebenbedingungen / Spezialfall

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, die Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar.

Es sei $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere stetig differenzierbare Funktion, die über

$$X_N := \{x \in X \mid h(x) = 0\}$$

(N für Nullniveau oder Nebenbedingung) eine Teilmenge von X definiert. Auf X_N ist dann die Einschränkung von f

$$f_N : \begin{cases} X_N & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$$

definiert.

Es seien für eine Stelle $a \in X_N$ die folgenden Aussagen gegeben:

- f_N habe (als Funktion auf X_N) in a ein lokales Extremum.
- Es ist $h'(a) \neq 0$.

Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$f'(a) = \lambda h'(a),$$

d.h. die beiden Zeilenvektoren sind linear abhängig.

16.5.5 Bemerkungen

1. Dieser Satz kann auf eine höhere Zahl von Nebenbedingungen verallgemeinert werden, siehe Abschnitt 16.5.10.
2. Die Zahl λ heißt ein *Lagrange'scher Multiplikator*.
3. Der Sachverhalt, dass die Funktion $f_N : X_N \rightarrow \mathbb{R}$ in a ein Extremum aufweist, wird auch dadurch beschrieben, dass f in a ein *Extremum unter der Nebenbedingung* $h = 0$ hat.

16.5.6 Beweis[⊖] (1) Wegen $h'(a) \neq 0$ ist eine der partiellen Ableitungen $\partial_k h(a) \neq 0$. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $k = d$.

(2) Wir wählen offene Mengen \tilde{X}, \tilde{Y} mit

$$\tilde{a} := (a_1, \dots, a_{d-1}) \in \tilde{X} \subseteq \mathbb{R}^{d-1}, \quad \tilde{b} := a_d \in \tilde{Y} \subseteq \mathbb{R}, \quad \tilde{X} \times \tilde{Y} \subseteq X$$

und wenden den Satz 17.3.2 über implizite Funktionen auf die eingeschränkte Funktion

$$\tilde{h} : \begin{cases} \tilde{X} \times \tilde{Y} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\tilde{x}, \tilde{y}) & \mapsto h(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{cases}$$

an der Stelle $a = (\tilde{a}, \tilde{b})$ an. Die beiden Voraussetzungen aus Satz 17.3.2 sind erfüllt, da

$$h(\tilde{a}, \tilde{b}) = h(a) = 0, \quad D_2 h(\tilde{a}, \tilde{b}) = \partial_d h(a) \neq 0 \quad (\Rightarrow \text{invertierbar}).$$

(3) Es existieren also offene Mengen U, V mit

$$(\tilde{a}, \tilde{b}) \in U \times V \subseteq \tilde{X} \times \tilde{Y} \subseteq X$$

und eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U \rightarrow V$, so dass

$$h(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \iff \tilde{y} = g(\tilde{x}) \quad \text{für alle } \tilde{x} \in U.$$

(4) Wir notieren aus Satz 17.3.2 (ii) den Ausdruck für die Ableitung im Punkt $\tilde{a} \in U$

$$g'(\tilde{a}) = -[D_2h(\tilde{a}, g(\tilde{a}))]^{-1}D_1h(\tilde{a}, g(\tilde{a})).$$

(5) Mit Hilfe dieser Funktion g können wir die eingeschränkte Definitionsmenge X_N von f_N umparametrisieren:

$$F : \begin{cases} U & \rightarrow \mathbb{R} \\ \tilde{x} & \mapsto f_N(\tilde{x}, g(\tilde{x})) = f(\tilde{x}, g(\tilde{x})). \end{cases}$$

(6) Da die Funktion f_N bei a ein Extremum besitzt, hat F im Punkt \tilde{a} eines. Die Ableitung von F in \tilde{a} muss Null sein:

$$\begin{aligned} 0 = \underbrace{F'(\tilde{a})}_{1 \times (d-1)} &= \underbrace{D_1f(\tilde{a}, g(\tilde{a}))}_{1 \times (d-1)} + \underbrace{D_2f(\tilde{a}, g(\tilde{a}))}_{1 \times 1} \underbrace{g'(\tilde{a})}_{1 \times (d-1)} \\ &= D_1f(\tilde{a}, g(\tilde{a})) - \underbrace{D_2f(\tilde{a}, g(\tilde{a})) \cdot [D_2h(\tilde{a}, g(\tilde{a}))]^{-1}}_{=: \lambda} D_1h(\tilde{a}, g(\tilde{a})). \end{aligned}$$

(7) Geeignet zusammengefasst bedeutet dies aber:

$$\begin{aligned} D_1f(\tilde{a}, g(\tilde{a})) &= \lambda \cdot D_1h(\tilde{a}, g(\tilde{a})) \\ D_2f(\tilde{a}, g(\tilde{a})) &= \lambda \cdot D_2h(\tilde{a}, g(\tilde{a})) \end{aligned}$$

und deshalb — unter Beachtung von $a = (\tilde{a}, g(\tilde{a}))$ —

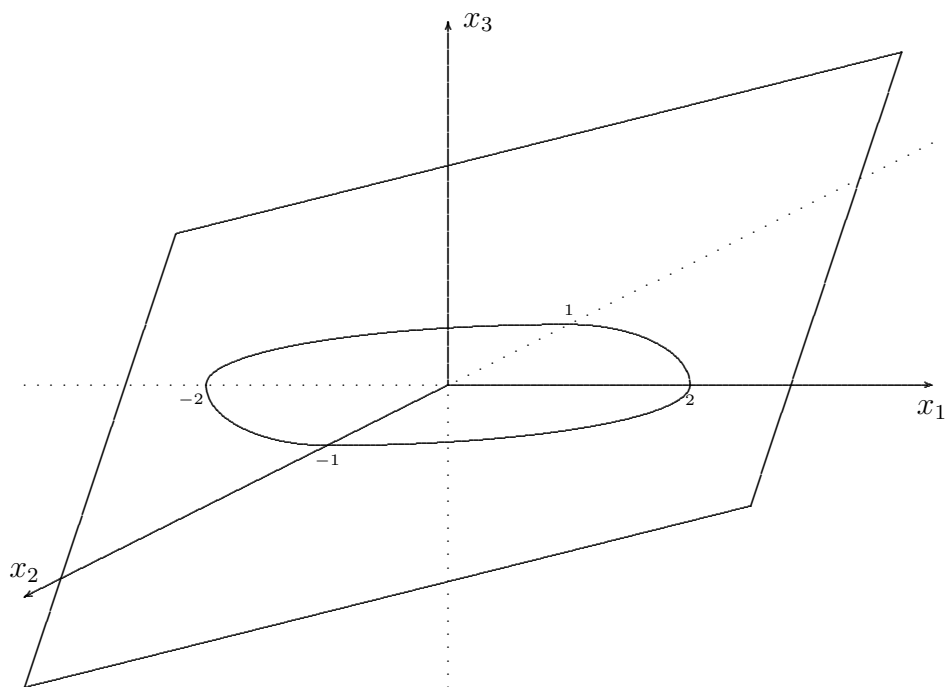
$$f'(a) = \begin{pmatrix} D_1f(a) & D_2f(a) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} D_1h(a) & D_2h(a) \end{pmatrix} = \lambda \cdot h'(a).$$

16.5.7 Einfaches Beispiel Es seien die beiden Funktionen

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_1 + 3x_2 \end{cases} \quad h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto \left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + x_2^2 - 1 \end{cases}$$

gegeben. Es sollen die Extrema von f unter der Nebenbedingung $h = 0$ aufgefunden werden.

16.5.8 Graphische Veranschaulichung



Die Nullstellenmenge der Funktion h ist eine Ellipse in der (x_1, x_2) -Ebene. Der Graph der Funktion f beschreibt eine Ebene durch den Ursprung, die nach „rechts-hinten“ aufsteigt. Wo befinden sich die höchsten und niedrigsten Punkte der Ebene über der Ellipse?

16.5.9 Lösung Wir schreiben die Lagrange-Bedingung $f'(x_1, x_2) = \lambda \cdot h'(x_1, x_2)$ und die Ellipsen-Bedingung $h(x_1, x_2) = 0$ auf.

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda \cdot \frac{1}{2}x_1 \\ 3 &= \lambda \cdot 2x_2 \\ \left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + x_2^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Es handelt sich um ein (nicht-lineares) Gleichungssystem aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten.

Löst man die ersten beiden Gleichungen nach x_1, x_2 auf und setzt dies in die dritte ein, so erhält man die quadratische Gleichung

$$\frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 1$$

mit den beiden Lösungen

$$\lambda^+ = +\frac{\sqrt{13}}{2}, \quad \lambda^- = -\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Es ergeben sich dann weiter die Lösungen

$$\begin{aligned} x_1^+ &= +\frac{4}{\sqrt{13}}, & x_2^+ &= +\frac{3}{\sqrt{13}} \\ x_1^- &= -\frac{4}{\sqrt{13}}, & x_2^- &= -\frac{3}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

Setzt man nun diese beiden Lösungen in f ein, so stellt sich heraus, dass (x_1^+, x_2^+) eine Maximumsstelle und (x_1^-, x_2^-) eine Minimumsstelle ist.

16.5.10 Satz: Extrema unter Nebenbedingungen / Verallgemeinerung

Es sei $Z \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, die Funktion $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar.

Es sei $h : Z \rightarrow \mathbb{R}^w$, $w \leq d$, eine weitere stetig differenzierbare Funktion, die über

$$Z_N := \{x \in Z \mid h(x) = 0\}$$

(N für Null- oder Nebenbedingung) eine Teilmenge von Z definiert. Die Funktion f kann auf Z_N eingeschränkt werden:

$$f_N : \begin{cases} Z_N & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x). \end{cases}$$

Es seien für eine Stelle $c \in Z_N$ die folgenden Aussagen erfüllt:

- f_N habe (als Funktion auf Z_N) in c ein lokales Extremum.
- Die Matrix $h'(c) \in \mathbb{R}^{w \times d}$ hat Vollrang w , d.h. es gibt w linear unabhängige Spaltenvektoren.

Dann gibt es einen Zeilenvektor $\lambda = (\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_w) \in \mathbb{R}^w$, so dass

$$\underbrace{f'(c)}_{1 \times d} = \underbrace{\lambda}_{1 \times w} \cdot \underbrace{h'(c)}_{w \times d}.$$

Anders ausgedrückt: Die Ableitung von f in c ist eine Linearkombination der Ableitungen der Koordinatenfunktionen von h in c .

16.5.11 Bemerkungen

1. Man veranschauliche sich diesen Satz zunächst einmal für den Fall $w = 1$.
2. Die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_w$ heißen *Lagrange'sche Multiplikatoren*.
3. Der Sachverhalt, dass die Funktion $f_N : Z_N \rightarrow \mathbb{R}$ in c ein Extremum aufweist, wird auch dadurch beschrieben, dass f in c ein *Extremum unter der Nebenbedingung* $h = 0$ hat.
4. Anstelle von einer Nebenbedingung $h = 0$ spricht man oft von den w Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} h_1(x) &= 0 \\ &\vdots \\ h_w(x) &= 0. \end{aligned}$$

16.5.12 Beweis[⊖]

(1) Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $c \in X \times Y = Z$ mit offenen Mengen $X \subseteq \mathbb{R}^{d-w}$, $Y \subseteq \mathbb{R}^w$. Im folgenden beziehen sich die Ableitungssymbole D_1 und D_2 auf diese beiden Mengen.

(2) Zusätzlich können wir aufgrund der Vollrangbedingung annehmen, dass der Anteil $D_2h(c)$ in

$$\underbrace{Dh(c)}_{w \times d} = \left(\underbrace{D_1h(c)}_{w \times (d-w)} \quad \underbrace{D_2h(c)}_{w \times w} \right)$$

invertierbar ist. Anderenfalls nummerieren wir die Variablen in $X \times Y$ um.

(3) Wir wenden den Satz 17.3.2 über implizite Funktionen auf die Funktion $h : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^w$ an der Stelle $c = (a, b)$ an.

Es existieren also offene Mengen U, V mit

$$(a, b) \in U \times V \subseteq X \times Y \subseteq Z$$

und eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U \rightarrow V$, so dass

$$h(x, y) = 0 \quad \iff \quad y = g(x) \quad \text{für alle } x \in U.$$

Wir notieren aus Satz 17.3.2 (ii) den Ausdruck für die Ableitung im Punkt $a \in U$

$$\underbrace{g'(a)}_{w \times (d-w)} = - \underbrace{[D_2h(a, g(a))]^{-1}}_{w \times w} \cdot \underbrace{D_1h(a, g(a))}_{w \times (d-w)}. \quad (*)$$

Mit Hilfe dieser Funktion g können wir die Definitionsmenge Z_N der Funktion f_N in einer Umgebung von a „mit weniger Koordinaten aus U schreiben“, es entsteht die Funktion

$$F : \begin{cases} U & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_N(x, g(x)) = f(x, g(x)). \end{cases}$$

Da die Funktion f_N bei c ein Extremum besitzt, hat F im Punkt a eines. Die Ableitung von F in a muss Null sein:

$$\begin{aligned} 0 = \underbrace{F'(a)}_{1 \times (d-w)} &= \underbrace{D_1f(a, g(a))}_{1 \times (d-w)} + \underbrace{D_2f(a, g(a))}_{1 \times w} \underbrace{g'(a)}_{w \times (d-w)} \\ &\stackrel{(*)}{=} \underbrace{D_1f(a, g(a))}_{1 \times (d-w)} - \underbrace{D_2f(a, g(a))}_{1 \times w} \cdot \underbrace{[D_2h(a, g(a))]^{-1}}_{w \times w} \cdot \underbrace{D_1h(a, g(a))}_{w \times (d-w)}. \end{aligned}$$

Geeignet zusammengefasst bedeutet dies aber:

$$\begin{aligned} D_1f(a, g(a)) &= \lambda \cdot D_1h(a, g(a)) \\ D_2f(a, g(a)) &= \lambda \cdot D_2h(a, g(a)) \end{aligned}$$

und deshalb — unter Beachtung von $c = (a, g(a))$ —

$$f'(c) = \begin{pmatrix} D_1f(c) & D_2f(c) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} D_1h(c) & D_2h(c) \end{pmatrix} = \lambda \cdot h'(c).$$

17 Kurven im \mathbb{R}^w

17.1 Definitionen und Beispiele

17.1.1 Definitionen: Kurven

(1) Es sei J ein Intervall. Eine stetige Abbildung

$$\gamma : \begin{cases} J & \rightarrow \mathbb{R}^w \\ t & \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_w(t)) \end{cases}$$

heißt *Kurve im \mathbb{R}^w* . Eine Kurve wird also durch w stetige Funktionen, die Koordinatenfunktionen, $\gamma_i : J \rightarrow \mathbb{R}$ beschrieben.

In diesem Zusammenhang heißt die Definitionsmenge auch *Parameterbereich*, die Bildmenge

$$\gamma(J) = \{ \gamma(t) \mid t \in J \} \subseteq \mathbb{R}^w$$

heißt *Spur* der Kurve. Oft kommt es vor (beachte aber genau den Unterschied), dass zwischen Kurve (Abbildung) und Spur (Menge) nicht klar unterschieden wird.

Physikalische Vorstellung: Die Variable t wird als Zeit aufgefasst. Die Funktion γ gibt den Ort (im \mathbb{R}^w) eines (punktförmig gedachten) Teilchens zum Zeitpunkt t an.

(2) Erinnerung: Die Kurve γ heißt (*stetig*) *differenzierbar (in t)*, wenn alle Koordinatenfunktionen (stetig) differenzierbar (in t) sind.

(3) Ist eine Kurve in $\tau \in J$ differenzierbar, so heißt der Vektor

$$\gamma'(\tau) := (\gamma'_1(\tau), \dots, \gamma'_w(\tau))$$

der *Tangentenvektor an die Kurve γ zum Parameterwert τ* . Die Gerade

$$\{ \gamma(\tau) + s\gamma'(\tau) \mid s \in \mathbb{R} \}$$

heißt die *Tangente an die Kurve γ zum Parameterwert τ* — oder (nicht ganz eindeutig:) im Punkt $\gamma(\tau)$.

(4) Eine differenzierbare Kurve γ heißt *regulär*, wenn $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Sie heißt *singulär* für $\tau \in J$, falls $\gamma'(\tau) = 0$.

17.1.2 Parametertransformation Ist $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^w$ eine Kurve und $\vartheta : \tilde{J} \rightarrow J$ eine streng monoton steigende (oder fallende) surjektive Abbildung, so ist

$$\gamma \circ \vartheta : \begin{cases} \tilde{J} & \rightarrow \mathbb{R}^w \\ s & \mapsto \gamma(\vartheta(s)) \end{cases}$$

eine Kurve mit der gleichen Spur wie γ . Mit Hilfe von ϑ wurde der Parameter $t \in J$ in den Parameter $s \in \tilde{J}$ *transformiert*. Die Abbildung ϑ heißt in diesem Zusammenhang eine (*orientierungserhaltende* bzw. *orientierungsumkehrende*) *Parametertransformation*.

17.1.3 Beispiele

(1) Sind a, b zwei positive Zahlen, so wird durch die Abbildung

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto (a \cdot \cos t, b \cdot \sin t) \end{cases}$$

eine *Ellipse* mit dem Ursprung als Mittelpunkt und den beiden Halbachsen a und b beschrieben. Für $r := a = b$ ergibt sich eine *Kreislinie* zum Radius r .

(2) Die Kurve

$$\gamma : \begin{cases} [-1, 1] & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto (t, \sqrt{1-t^2}) \end{cases}$$

beschreibt (ebenfalls) einen Halbkreisbogen. Die Spur stimmt mit der der auf den Parameterbereich $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ eingeschränkten Kreislinie (1) überein.

(3) Die Abbildung

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto (\cos t, \sin t, t) \end{cases}$$

beschreibt eine *Schraubenlinie* im \mathbb{R}^3 .

(4) Ist $f : J \rightarrow \mathbb{R}^v$ eine stetige Funktion, so kann der Graph als Kurve im \mathbb{R}^{v+1}

$$\gamma_f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^{v+1} \\ t & \mapsto (t, f(t)) \end{cases}$$

aufgefasst werden. Beachte dabei den Spezialfall $v = 1$.

17.2 Bogenlänge

17.2.1 Zerlegung des Parameterintervalls und Polygonzug Wir betrachten jetzt Kurven γ , die ein kompaktes Intervall $J = [c, d]$ als Parameterbereich haben.

Für eine vorgegebene Zerlegung \mathcal{Z} (vgl. Abschnitt 10.1.1)

$$c = t_0 < t_1 < \dots < t_n = d$$

des Intervalls können wir die Gesamtlänge des die Punkte

$$\gamma(t_0), \quad \gamma(t_1), \quad \dots \quad \gamma(t_n)$$

verbindenden Polygonzugs (Vereinigung der Verbindungsstrecken) im \mathbb{R}^w berechnen:

$$\mathcal{L}(\gamma, \mathcal{Z}) := \|\gamma(t_1) - \gamma(t_0)\| + \|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\| + \dots + \|\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})\|.$$

Gehen wir zu einer Verfeinerung $\tilde{\mathcal{Z}}$ von \mathcal{Z} über, so gilt wegen der Dreiecksungleichung:

$$\mathcal{L}(\gamma, \mathcal{Z}) \leq \mathcal{L}(\gamma, \tilde{\mathcal{Z}}).$$

17.2.2 Definition:

Als *Länge* der Kurve definieren wir die Obergrenze all dieser Längen:

$$\mathcal{L}(\gamma) := \sup_{\mathcal{Z}} \{\mathcal{L}(\gamma, \mathcal{Z})\}.$$

Ist $\mathcal{L}(\gamma) < \infty$, so heißt die Kurve γ *rektifizierbar*.

In diese Definition gehen

- nur Punkte $\gamma(t_i)$ auf der Spur von γ in einer bestimmten Reihenfolge,
- nicht aber die Kurve als Abbildung $\gamma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^w$

ein. Das bedeutet, dass die Definition unabhängig von einer Parametertransformation ist. Eigentlich müsste man das präziser beschreiben und beweisen.

17.2.3 Satz: Kriterium für Rektifizierbarkeit

- (i) Es gibt stetige Kurven (mit kompaktem Parameterbereich), die nicht rektifizierbar sind.
- (ii) Ist die Kurve $\gamma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^w$ stetig differenzierbar, so ist γ rektifizierbar und es gilt:

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_c^d \|\gamma'(t)\| dt = \int_c^d \sqrt{[\gamma'_1(t)]^2 + [\gamma'_2(t)]^2 + \dots + [\gamma'_w(t)]^2} dt.$$

17.2.4 Beweis

Zu (i): Als Beispiel nehmen wir die auf $[0, 1]$ definierte Kurve im \mathbb{R}^2 :

$$\gamma(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} t \\ t \sin(\frac{\pi}{t} - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}, & \text{falls } t > 0, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir wählen eine feste gerade natürliche Zahl n und dann eine Zerlegung \mathcal{Z}_n gemäß der zweiten Zeile der folgenden Tabelle

i	0	1	2	$n - 3$	$n - 2$	$n - 1$	n
t_i	0	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n-1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$
$\sin(\frac{\pi}{t} - \frac{\pi}{2})$	/	-1	+1	-1	+1	-1	+1
$\gamma(t_i)$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{n-1} \\ \frac{+1}{n-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{+1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{1} \\ \frac{+1}{1} \end{pmatrix}$

mit $t_i := \frac{1}{n-i+1}$ für $i \geq 1$. Für $i \geq 2$ ist der Abstand zweier Punkte auf der Kurve

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (t_i + t_{i-1})^2} \geq t_i + t_{i-1} \geq 2t_{i-1}$$

So ergibt sich als Länge des zugehörigen Polygonzugs:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\gamma, \mathcal{Z}_n) &= \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \geq \sum_{i=1}^n 2t_{i-1} = \sum_{i=1}^n \frac{2}{n-i+1} = \\ &= 2 \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} \right].\end{aligned}$$

Sie wächst für $n \rightarrow \infty$ gegen ∞ .

Zu (ii)[⊖] Es sei ein (beliebig kleines) $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

(1) Die Funktionen γ'_j sind stetig, also mit Satz 15.8.2 sogar gleichmäßig stetig. Daher gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $j = 1, \dots, w$

$$\|\gamma'_j(t) - \gamma'_j(s)\| \leq \frac{\varepsilon}{w(d-c)}, \quad \text{wenn nur } |t-s| < \delta.$$

(2) Wir zeigen: Hat eine Zerlegung

$$\mathcal{Z} : c = t_0 < t_1 < \dots < t_n = d$$

von $[c, d]$ eine Feinheit $< \delta$, d.h.

$$t_i - t_{i-1} < \delta \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n,$$

so gilt

$$\left| \mathcal{L}(\gamma, \mathcal{Z}) - \int_c^d \|\gamma'(t)\| dt \right| \leq \varepsilon.$$

Es sei nun $i \in \{1, \dots, n\}$ einer der Zerlegungsindices. Da die Abbildung $t \mapsto \|\gamma'(t)\|$ stetig ist, gibt es gemäß Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 10.7.1) ein $\tau \in [t_{i-1}, t_i]$, so dass

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt = \|\gamma'(\tau)\| \cdot [t_i - t_{i-1}].$$

Gemäß Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 9.8.8) gibt es für jede Koordinatennummer $j \in \{1, \dots, w\}$ eine Stelle $\tau_j \in [t_{i-1}, t_i]$, so dass

$$\gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{i-1}) = \gamma'_j(\tau_j) \cdot [t_i - t_{i-1}].$$

Zusammen gilt dann, wenn wir noch zweimal die Dreiecksungleichung anwenden

$$\begin{aligned}& \left| \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt \right| \\ &= \left| \|(\gamma'_1(\tau_1), \gamma'_2(\tau_2), \dots, \gamma'_w(\tau_w))\| - \|(\gamma'_1(\tau), \gamma'_2(\tau), \dots, \gamma'_w(\tau))\| \right| \cdot [t_i - t_{i-1}] \\ &\leq \|(\gamma'_1(\tau_1) - \gamma'_1(\tau), \gamma'_2(\tau_2) - \gamma'_2(\tau), \dots, \gamma'_w(\tau_w) - \gamma'_w(\tau))\| \cdot [t_i - t_{i-1}] \\ &\leq \sum_{j=1}^w |\gamma'_j(\tau_j) - \gamma'_j(\tau)| \cdot [t_i - t_{i-1}] \\ &\leq \sum_{j=1}^w \frac{\varepsilon}{w(d-c)} \cdot [t_i - t_{i-1}] = \frac{\varepsilon}{d-c} \cdot [t_i - t_{i-1}].\end{aligned}$$

Summieren wir über alle Teilintervalle der Zerlegung \mathcal{Z} , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{L}(\gamma, \mathcal{Z}) - \int_c^d \|\gamma'(t)\| dt \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \left[\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt \right] \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{d-c} \cdot [t_i - t_{i-1}] = \frac{\varepsilon}{d-c} \cdot (d-c) = \varepsilon. \end{aligned}$$

(3) Es sei jetzt \mathcal{Z}' eine beliebige Zerlegung von $[c, d]$. Dann gibt es eine Verfeinerung \mathcal{Z} mit einer Körnigkeit $< \delta$ und wir erhalten:

$$\mathcal{L}(\gamma, \mathcal{Z}') \leq \mathcal{L}(\gamma, \mathcal{Z}) \leq \int_c^d \|\gamma'(t)\| dt + \varepsilon.$$

Es folgt, da \mathcal{Z}' völlig beliebig war:

$$\mathcal{L}(\gamma) \leq \int_c^d \|\gamma'(t)\| dt + \varepsilon.$$

Andererseits ist

$$\mathcal{L}(\gamma) \geq \mathcal{L}(\gamma, \mathcal{Z}) \geq \int_c^d \|\gamma'(t)\| dt - \varepsilon.$$

In einem geschrieben ist dies:

$$\int_c^d \|\gamma'(t)\| dt - \varepsilon \leq \mathcal{L}(\gamma) \leq \int_c^d \|\gamma'(t)\| dt + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung des Satzes.

17.2.5 Bemerkung

Ist $\vartheta : [c_2, d_2] \rightarrow [c, d]$ eine stetig differenzierbare streng monoton steigende (bzw. fallende) Abbildung, also eine Parametertransformation, so gilt mit der mehrdimensionalen Kettenregel (KR) in der Version von Korollar Satz 16.2.15 und der Substitutionsregel (SR) Satz 11.4.1

$$\begin{aligned} & \int_{c_2}^{d_2} \|(\gamma \circ \vartheta)'(s)\| ds \stackrel{\text{KR}}{=} \int_{c_2}^{d_2} \|(\gamma'(\vartheta(s)) \cdot \vartheta'(s))\| ds \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \int_{c_2}^{d_2} \|(\gamma'(\vartheta(s)))\| \cdot \vartheta'(s) ds, \quad (\text{falls } \vartheta \text{ steigend}) \\ - \int_{c_2}^{d_2} \|(\gamma'(\vartheta(s)))\| \cdot \vartheta'(s) ds, \quad (\text{falls } \vartheta \text{ fallend}) \end{array} \right\} \stackrel{\text{SR}}{=} \int_c^d \|\gamma'(t)\| dt. \end{aligned}$$

Damit wird auf andere Weise bestätigt, dass die Länge einer stetig differenzierbaren Kurve γ unabhängig von der konkreten Parameterdarstellung ist.

17.2.6 Korollar

Die Graph-Kurve γ_f einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^v$ hat die Länge

$$\mathcal{L}(\gamma_f) = \int_c^d \sqrt{1 + \|f'(t)\|^2} dt.$$

Im Fall $v = 1$ gilt dann

$$\mathcal{L}(\gamma_f) = \int_c^d \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt.$$

17.2.7 Beispiel: Kreisumfang

Die Länge der Kreislinie, vgl. Beispiel 17.1.3 (1)

$$\gamma : \begin{cases} [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix} \end{cases}$$

ist

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = 2\pi r.$$

Alternativ kann man auf der Grundlage von Beispiel 17.1.3 (2) die Länge des Halbkreisbogens als Länge des Graphen der Funktion

$$f : \begin{cases} [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$$

berechnen. Mit dem HDI und der Formel für die Ableitung des Arcussinus in Abschnitt 9.6.7 ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma_f) &= \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 + \left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2} dt \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = [\arcsin t]_{-1}^{+1} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \end{aligned}$$

17.2.8 Beispiel: Abrollender Kreis Wir betrachten die Kurve, die ein Randpunkt auf der Umfangsline eines auf der x -Achse nach rechts abrollenden Einheitskreises während einer Umdrehung beschreibt.

Zeichnung

Die Kurve ist gegeben durch die Funktion

$$\gamma \begin{cases} [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - t) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \sin t \\ 1 + \cos t \end{pmatrix}, \end{cases}$$

was wir noch erläutern wollen:

- Der erste Vektor $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt die Position des Mittelpunktes zur Zeit t . Beim Start befindet sich der Mittelpunkt auf der Höhe 1 über dem Nullpunkt der x -Achse.
- Der zweite Vektor $\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - t) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - t) \end{pmatrix}$ beschreibt die Position des Randpunktes relativ zum Mittelpunkt. Beim Start ($t = 0$) befindet sich der Randpunkt in der 12-Uhr-Position. Die Variable t geht über ein Minuszeichen ein, da das Rad eine Rechts-Drehung (mathematisch negativ) ausführt.
- Das Intervall $[0, 2\pi]$ beschreibt aufgrund der 2π -Periodizität genau eine Voldrehung. Dabei bewegt sich auch der Mittelpunkt um die Strecke 2π weiter.

Für die Länge der Kurve ergibt sich jetzt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{[1 + \cos t]^2 + [\sin t]^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2 \cos t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2(\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2})} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos^2(\frac{t}{2})} dt = \int_0^{2\pi} 2 |\cos(\frac{t}{2})| dt = 4 \int_0^{\pi} \cos(\frac{t}{2}) dt \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos s ds = 8 \left[\sin s \right]_{s=0}^{s=\frac{\pi}{2}} = 8. \end{aligned}$$

Der Randpunkt legt also während einer Umdrehung den 8-fachen Radius zurück.

18 Mehrdimensionale Taylor–Approximation und kritische Punkte

18.1 Satz über die Taylor–Approximation

18.1.1 Bezeichnungen für d -Tupel

Für ein d -Tupel $p = (p_1, \dots, p_d) \in (\mathbb{N}_0)^d$ führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} |p| &:= p_1 + \dots + p_d \\ p! &:= p_1! \cdot \dots \cdot p_d! \\ \partial^p &:= \partial_1^{p_1} \cdot \dots \cdot \partial_d^{p_d} \\ x^p &:= x_1^{p_1} \cdot \dots \cdot x_d^{p_d} \end{aligned}$$

18.1.2 Satz

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und konvex. Ein Punkt $a \in X$ und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^d$ mit $a + b \in X$ seien fixiert.

Ist dann $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{C}^n -Funktion, so ist die Funktion

$$g : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto f(a + tb) \end{cases}$$

ebenfalls \mathcal{C}^n (in den Randpunkten einseitig). Für die n -te Ableitung gilt

$$g^{(n)}(t) = \sum_{|p|=n} \frac{n!}{p!} (\partial^p f)(a + tb) b^p.$$

18.1.3 Beweis

(1) Wir werden die umfassendere Aussage

$$\begin{aligned} g^{(n)}(t) &= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, d\}^n} (\partial_{i_n} \dots \partial_{i_1} f)(a + tb) b_{i_n} \dots b_{i_1} \\ &= \sum_{|p|=n} \frac{n!}{p!} (\partial^p f)(a + tb) b^p \end{aligned}$$

beweisen, die erste Gleichheit per Induktion über $n \in \mathbb{N}$, die zweite mit einer kombinatorischen Überlegung.

(2) Zum Induktionsbeweis. Für $n = 1$ ist dies einfach die Kettenregel:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d}{dt} f(a_1 + tb_1, \dots, a_d + tb_d) \\ &= \sum_{i=1}^d (\partial_i f)(a + tb) b_i = \sum_{i \in \{1, \dots, d\}} (\partial_i f)(a + tb) b_i \end{aligned}$$

Ist dann die Aussage für $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, so gilt — wieder mit der Kettenregel —

$$\begin{aligned}
 g^{(n+1)}(t) &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, d\}^n} (\partial_{i_n} \dots \partial_{i_1} f)(a + tb) b_{i_n} \dots b_{i_1} \right] \\
 &= \sum_{j=1}^d \left[\partial_j \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, d\}^n} (\partial_{i_n} \dots \partial_{i_1} f)(a + tb) b_{i_n} \dots b_{i_1} \right] b_j \\
 &\quad \text{(Umbenennung des Index } j \rightarrow i_{n+1}\text{)} \\
 &= \sum_{i_{n+1}=1}^d \left[\partial_{i_{n+1}} \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, d\}^n} (\partial_{i_n} \dots \partial_{i_1} f)(a + tb) b_{i_n} \dots b_{i_1} \right] b_{i_{n+1}} \\
 &= \sum_{(i_1, \dots, i_{n+1}) \in \{1, \dots, d\}^{n+1}} (\partial_{i_{n+1}} \dots \partial_{i_1} f)(a + tb) b_{i_{n+1}} \dots b_{i_1}.
 \end{aligned}$$

(3) Für ein fest gegebenes d -Tupel $p = (p_1, \dots, p_d)$ mit Länge $|p| = n$ treten in der oberen Summe bei Schritt (1) insgesamt

$$\frac{n!}{p!} = \frac{n!}{p_1! \cdots p_d!} = \binom{n}{p_1 \cdots p_d}$$

Summanden auf, deren zugehöriges Index- n -Tupel (i_1, \dots, i_n) die Zahlen $j \in \{1, \dots, d\}$ genau p_j -mal enthält.

Aufgrund der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen sind diese Summanden aber alle gleich

$$(\partial_{i_n} \dots \partial_{i_1} f)(a + tb) b_{i_n} \dots b_{i_1} = (\partial^p f)(a + tb) b^p.$$

Deshalb können sie bei der Summation zusammengefasst werden.

18.1.4 Satz: Taylor-Approximation (mehrdimensional)

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und konvex, $a \in X$.

(i) Ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion in $\mathcal{C}^{n+1}(X)$, so gibt zu jedem $x \in X$ ein $\xi \in [0, 1]$ mit

$$f(x) = \sum_{0 \leq |p| \leq n} (\partial^p f)(a) \frac{(x-a)^p}{p!} + \underbrace{\sum_{|p|=n+1} (\partial^p f)(a + \xi(x-a)) \frac{(x-a)^p}{p!}}_{r_{n+1}(x)}.$$

(ii) Dabei ist $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r_{n+1}(x)}{\|x-a\|^n} = 0$.

18.1.5 Beweis[⊖]

Wir führen die Aussage mit Hilfe der Funktion

$$g : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto f(a + t(x - a)) \end{cases}$$

auf die entsprechende Aussage über die 1-dimensionale Taylor-Approximation zurück. Gemäß Satz 14.1.5 über die 1-dimensionale Taylor-Approximation gibt es ein $\xi \in [0, 1]$, so dass

$$\begin{aligned} f(x) = g(1) &= \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^n \overbrace{\sum_{|p|=k} (\partial^p f)(a) \frac{(x-a)^p}{p!}} + \overbrace{\sum_{|p|=n+1} (\partial^p f)(a + \xi(x-a)) \frac{(x-a)^p}{p!}} \\ &= \sum_{0 \leq |p| \leq n} (\partial^p f)(a) \frac{(x-a)^p}{p!} + \sum_{|p|=n+1} (\partial^p f)(a + \xi(x-a)) \frac{(x-a)^p}{p!} \end{aligned}$$

Zu (ii): Es ist

$$\begin{aligned} &\lim_{x \dot{\rightarrow} a} \frac{r_{n+1}(x)}{\|x-a\|^n} \\ &= \lim_{x \dot{\rightarrow} a} \sum_{|p|=n+1} (\partial^p f)(a + \xi(x-a)) \frac{(x-a)^p}{p! \cdot \|x-a\|^n} \\ &= \lim_{x \dot{\rightarrow} a} \sum_{|p|=n+1} \frac{1}{p!} \underbrace{(\partial^p f)(a + \xi(x-a))}_{\text{stetig}} \underbrace{\left(\frac{x_1 - a_1}{\|x-a\|} \right)^{p_1} \cdots \left(\frac{x_d - a_d}{\|x-a\|} \right)^{p_d}}_{\leq 1} \cdot \|x-a\| \end{aligned}$$

18.2 Taylorpolynome

18.2.1 Definitionen

Der Satz 18.1.4 bietet — wie im 1-dimensionalen Fall — den Anlass, einige spezielle Begriffe einzuführen:

1. Der Ausdruck

$$\sum_{0 \leq |p| \leq n} (\partial^p f)(a) \frac{(x-a)^p}{p!}$$

heißt das *Taylorpolynom n -ten Grades mit Entwicklungsstelle a* . Es handelt sich um ein Polynom n -ten Grades in den d Variablen $(x-a)_1, \dots, (x-a)_d \in \mathbb{R}$. Vorgegeben ist dabei eine Abbildung f , die an der Stelle $a \in X$ n -mal (total) differenzierbar ist.

2. Die Differenz $r_{n+1}(x)$ zwischen Funktion und zugeordnetem Taylorpolynom n -ten Grades wird wieder als (*Taylor-*)*Restglied* ($n+1$)-*ter Ordnung* bezeichnet. Es gilt dann

$$f(x) = \sum_{0 \leq |p| \leq n} (\partial^p f)(a) \frac{(x-a)^p}{p!} + r_{n+1}(x)$$

und

$$r_n(x) - r_{n+1}(x) = \sum_{|p|=n} (\partial^p f)(a) \frac{(x-a)^p}{p!}.$$

18.2.2 Taylorpolynom Grad 2 Wir wollen den Ausdruck für das Taylorpolynom zweiten Grades etwas genauer betrachten. Es ist für eine C^2 -Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq |p| \leq 2} (\partial^p f)(a) \frac{(x-a)^p}{p!} \\ \stackrel{(|p|=0)}{=} & f(a) \frac{(x-a)^0}{0!} + \\ \stackrel{(|p|=1)}{=} & \partial_1 f(a) \cdot (x_1 - a_1) + \dots + \partial_d f(a) \cdot (x_d - a_d) + \\ \stackrel{(|p|=2)}{=} & \sum_{i=1}^d (\partial_i^2 f)(a) \frac{(x_i - a_i)^2}{2} + \sum_{i,j=1; i < j}^d (\partial_i \partial_j f)(a) (x_i - a_i)(x_j - a_j) \\ = & f(a) + \\ & (\partial_1 f(a) \ \dots \ \partial_d f(a)) \cdot (x-a) + \\ = & \frac{1}{2} \cdot (x-a)^T \cdot \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(a) & \partial_1 \partial_2 f(a) & \dots & \partial_1 \partial_d f(a) \\ \partial_2 \partial_1 f(a) & \partial_2^2 f(a) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \partial_d \partial_1 f(a) & \dots & \dots & \partial_d^2 f(a) \end{pmatrix} \cdot (x-a) \\ \stackrel{\text{Def 18.2.3}}{=} & f(a) + (x-a)^T \cdot \text{grad } f(a) + \frac{1}{2} \cdot (x-a)^T \cdot \text{Hess } f(a) \cdot (x-a) \end{aligned}$$

18.2.3 Definitionen: Gradient, Hesse'sche Matrix

- Existieren für eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle $a \in X$ alle ersten partiellen Ableitungen, so heißt der Spaltenvektor

$$\text{grad } f(a) = \nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_d f(a) \end{pmatrix}.$$

der *Gradient* von f an der Stelle a . Man nennt den Operator ∇ gelegentlich auch den *Nabla-Operator* (Nabla (gr): Harfe).

- Ist die Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung von $a \in X$ zweimal stetig differenzierbar, so heißt die symmetrische $d \times d$ -Matrix

$$\text{Hess } f(a) = (\partial_i \partial_j f(a))_{ij} = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(a) & \partial_1 \partial_2 f(a) & \cdots & \partial_1 \partial_d f(a) \\ \partial_2 \partial_1 f(a) & \partial_2^2 f(a) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \partial_d \partial_1 f(a) & \cdots & \cdots & \partial_d^2 f(a) \end{pmatrix}$$

die *Hesse'sche Matrix* von f im Punkt a .

18.2.4 Bemerkungen

- Die „Um-Schreibung“ eines Zeilenvektors in einen Spaltenvektor bei der Definition des Gradienten ist aus Sicht der multilinearen Algebra, die genau das Transformationsverhalten von Tensoren („höherstufigen Vektoren“) bei Basistransformationen im unterliegenden Vektorraum in den Blick nimmt, eigentlich unzulässig. Erst, wenn diese Umschreibung als ein Übergang von einer Linearform (= Zeilenvektor) zum dualen (Spalten-)Vektor bzgl. des **kanonischen Skalarprodukts** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ im \mathbb{R}^d interpretiert wird, ist wieder „fester Grund“ erreicht. Es gilt dann für einen Vektor $y \in \mathbb{R}^d$

$$\underbrace{(\partial_1 f(a) \quad \cdots \quad \partial_d f(a)) \cdot y}_{\text{Matrix-Produkt}} = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_d f(a) \end{pmatrix}, y \right\rangle}_{\text{Skalar-Produkt}} = \underbrace{y^T \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_d f(a) \end{pmatrix}}_{\text{Matrix-Produkt}}.$$

- Nur wenn die Bild-Zeilen-Vektoren der ersten Ableitungsfunktion von f — mit Hilfe des **kanonischen Skalarprodukts** — in Spaltenvektoren umgewandelt werden,

$$f' : \begin{cases} X & \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times d} \stackrel{\text{dual}}{\simeq} \mathbb{R}^{d \times 1} \stackrel{\text{nat}}{\cong} \mathbb{R}^d \\ x & \mapsto \text{grad } f(x), \end{cases}$$

kann die Hesse'sche Matrix als zweite (totale) Ableitung

$$f'' = (f')' : \begin{cases} X & \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d} \\ x & \mapsto \text{Hess } f(x) \end{cases}$$

von f aufgefasst werden.

18.2.5 Hilfssatz (aus der Linearen Algebra)

Für eine reelle symmetrische $d \times d$ -Matrix A sind die folgenden vier Aussagen äquivalent:

- (A) (Definition) A ist positiv definit.
 (B) Für einen beliebigen Vektor $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ gilt: $x^T A x > 0$
 (C) Die Determinanten der (symmetrischen) Untermatrizen von A

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, d,$$

(also: von links oben her) sind positiv.

Bildlich: Die Einträge (und Blöcke) in den Diagonalen dominieren die Einträge (und Blöcke) außerhalb der Diagonalen.

- (D) Alle d Eigenwerte (A ist diagonalisierbar) sind reell und positiv.

18.2.6 Hilfssatz (dualisiert)

Für eine reelle symmetrische $d \times d$ -Matrix A sind die folgenden vier Aussagen äquivalent:

- (A) (Definition) A ist negativ definit.
 (B) Für einen beliebigen Vektor $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ gilt: $x^T A x < 0$.
 (C) Die Determinanten $\det A_j$ der (symmetrischen) Untermatrizen von A

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, d,$$

(also: von links oben her) sind abwechselnd positiv und negativ:

$$(-1)^j \cdot \det A_j > 0.$$

- (D) Alle d Eigenwerte (A ist diagonalisierbar) sind reell und negativ.

18.2.7 Bemerkung

Entsprechende Listen äquivalenter Aussagen gibt es für die Eigenschaften

- „positiv semidefinit“,
- „negativ semidefinit“.

Weiter heißt eine reelle symmetrische $d \times d$ -Matrix A *indefinit*, wenn es zwei Vektoren $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^d$ gibt, so dass

$$x^T A x > 0, \quad \tilde{x}^T A \tilde{x} < 0.$$

18.3 Extrema reellwertiger Funktionen

18.3.1 Satz: Extrema — Hinreichende Bedingungen

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $a \in X$.

Die Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sei in $\mathcal{C}^2(X)$, es sei $f'(a) = 0$.

- (i) Ist $\text{Hess } f(a)$ positiv definit, so hat f in a ein strenges lokales Minimum.
- (ii) Ist $\text{Hess } f(a)$ negativ definit, so hat f in a ein strenges lokales Maximum.

18.3.2 Beweis[⊖]

Wir müssen nur (i) zeigen und können dabei $a = 0$ voraussetzen.

(1) Nach Satz 18.1.4 und Abschnitt 18.2.2 ist

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{2} x^T \cdot \text{Hess } f(0) \cdot x + r_3(x),$$

wobei

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_3(x)}{\|x\|^2} = 0.$$

(2) Die $(d-1)$ -dimensionale Sphäre

$$S = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = 1\}$$

im \mathbb{R}^d ist kompakt, die stetige Abbildung

$$\begin{cases} S & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto x^T \cdot \text{Hess } f(0) \cdot x \end{cases}$$

nimmt deshalb auf S ihr Minimum an. Der Minimumswert M muss, da S abgeschlossen ist, positiv sein: $M > 0$.

(3) Für $x \neq 0$ zunächst gilt die Abschätzung,

$$x^T \cdot \text{Hess } f(0) \cdot x = \frac{x^T}{\|x\|} \cdot \text{Hess } f(0) \cdot \frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|^2 \geq M \cdot \|x\|^2,$$

die dann insgesamt auch für $x = 0$ zutrifft.

(4) Aufgrund der in (1) zitierten Abschätzung lässt sich ein $\delta > 0$ finden, so dass

$$|r_3(x)| \leq \frac{M}{4} \cdot \|x\|^2 \quad \text{für } \|x\| < \delta.$$

(5) Es folgt dann für diese x

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{2} \underbrace{x^T \cdot \text{Hess } f(0) \cdot x}_{\geq M \|x\|^2} + \underbrace{r_3(x)}_{\geq -\frac{M}{4} \|x\|^2} \geq f(0) + \frac{M}{4} \|x\|^2,$$

f hat also ein strenges Minimum in 0.

18.3.3 Korollar: Extrema reeller Funktionen

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}$ offen, $a \in X$.

Die Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sei in $\mathcal{C}^2(X)$, es sei $f'(a) = 0$.

- (i) Ist $f''(a)$ positiv, so hat f in a ein strenges lokales Minimum.
- (ii) Ist $f''(a)$ negativ, so hat f in a ein strenges lokales Maximum.

18.4 Sattelpunkte reellwertiger Funktionen \ominus

In diesem Abschnitt sei $X \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge der Ebene.

18.4.1 Definition: Sattelpunkt

Man sagt, die Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ hat bei a einen (*strengen*) *Sattelpunkt*, wenn es zwei reguläre Kurven

$$\alpha, \beta :] - \varepsilon, +\varepsilon[\rightarrow X \quad \text{mit } \alpha(0) = \beta(0) = a$$

gibt, so dass

- die zusammengesetzte Funktion $f \circ \alpha :] - \varepsilon, +\varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ bei 0 ein strenges Maximum hat,
- die zusammengesetzte Funktion $f \circ \beta :] - \varepsilon, +\varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ bei 0 ein strenges Minimum hat,
- die beiden Vektoren $\alpha'(0), \beta'(0)$ linear unabhängig in \mathbb{R}^2 sind.

Die dritte Bedingung ist nicht automatisch durch die ersten beiden erfüllt, wie man erwarten könnte. Als Beispiel diene

$$f(x_1, x_2) = -x_1^6 + x_1^2 \cdot x_2$$

Die Kurven

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \beta(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

haben beide den Tangentialvektor $\alpha'(0) = \beta'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und es gilt

$$\begin{aligned} (f \circ \alpha)(t) &= -t^6 && \text{(Maximum)} \\ (f \circ \beta)(t) &= -t^6 + t^4 = t^4(1 - t^2) = \begin{cases} > 0, & \text{falls } 0 < |t| < 1, \\ = 0, & \text{falls } t = 0. \end{cases} && \text{(Minimum)} \end{aligned}$$

Zeichnung

18.4.2 Satz

Hat die Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bei a einen (*strengen*) Sattelpunkt und ist sie da differenzierbar, so ist die Ableitung Null:

$$Df(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

18.4.3 Beweis

Es seien α, β die beiden Kurven, die die Sattelpunkteigenschaft hervorbringen. Aufgrund der Kettenregel Satz 16.2.13 ist das folgende 2×2 -Gleichungssystem für die beiden Koordinaten in dem Zeilenvektor $f'(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right)$ erfüllt:

$$\begin{aligned} \partial_1 f(a) \cdot \alpha'_1(0) + \partial_2 f(a) \cdot \alpha'_2(0) &= f'(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) \stackrel{\text{KR}}{=} (f \circ \alpha)'(0) = 0 \\ \partial_1 f(a) \cdot \beta'_1(0) + \partial_2 f(a) \cdot \beta'_2(0) &= f'(\beta(0)) \cdot \beta'(0) \stackrel{\text{KR}}{=} (f \circ \beta)'(0) = 0 \end{aligned}$$

Dass der jeweils letzte Ausdruck verschwindet, liegt daran, dass die Funktionen $f \circ \alpha$ und $f \circ \beta$ in 0 jeweils ein Extremum haben. Da die beiden Vektoren $\alpha'(0), \beta'(0)$ linear unabhängig in \mathbb{R}^2 sind, hat das LGS eine eindeutige Lösung, nämlich

$$Df(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

18.4.4 Satz: Sattelpunkt — Hinreichende Bedingung

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $a \in X$.

Die Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sei in $\mathcal{C}^2(X)$, es sei $f'(a) = 0$. Ist $\text{Hess } f(a)$ indefinit, so hat f in a einen Sattelpunkt.

18.4.5 Beweis

Wir können uns wieder auf den Fall $a = 0$ beschränken.

Da $\text{Hess } f(a)$ indefinit ist, gibt es einen Vektor $y \in \mathbb{R}^2$ mit

$$y^T \cdot \text{Hess } f(a) \cdot y > 0.$$

Das aber bedeutet, dass die Funktion

$$f|_{\langle y \rangle} : \begin{cases}]-\delta, \delta[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(ty) \end{cases}$$

eine verschwindende erste und eine positive zweite Ableitung hat. Es existiert also eine Kurve mit Minimum.

Analog existiert eine Kurve mit Maximum.

19 Der Approximationssatz von Stone–Weierstraß \ominus

19.1 Vorbereitung: Der Satz von Dini

19.1.1 Definition:

Wir sagen, eine Menge X sei *kompakt* (oder ein *kompakter Raum*), wenn sie ein topologischer Raum (beispielsweise definiert durch eine Metrik) ist, bzgl. der X selbst kompakt ist.

Wir betrachten in diesem Abschnitt für einen kompakten Raum X den Funktionenvektorraum ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$)

$$\mathcal{C}(X, \mathbb{K}) := \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{K} \mid \text{stetig} \right\}.$$

Da stetige Funktionen auf kompakten Mengen beschränkt sind, ist die Supremumsnorm

$$\|f\| := \sup_{x \in X} \{|f(x)|\}$$

auf diesem Vektorraum definiert. Er wird zu einem vollständig metrischen Raum. Wir können die topologischen Begriffe aus Kapitel 15 anwenden.

19.1.2 Satz von Dini

Es sei X ein kompakter metrischer Raum.

Es sei $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge stetiger Funktionen. Dann gilt die Implikation

$$\left. \begin{array}{l} (f_n) \text{ stellenweise monoton} \\ (f_n) \text{ stellenweise konvergent gegen } f \\ f \text{ stetig} \end{array} \right\} \implies (f_n) \text{ gleichmäßig konvergent.}$$

19.1.3 Beweis

(1) O.B.d.A. ist (f_n) monoton wachsend. Es sei f die (stellenweise) Grenzfunktion und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir betrachten zunächst ein beliebiges, festes $a \in X$.

(2) Es gibt ein $N_a \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_n(a) - f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } n \geq N_a.$$

(3) Es gibt weiter eine Umgebung U_a von a , so dass aufgrund der Stetigkeit der beiden Funktionen f_{N_a} und f für alle $x \in U_a$

$$\begin{aligned} |f_{N_a}(x) - f_{N_a}(a)| &\leq \frac{\varepsilon}{3} \\ |f(x) - f(a)| &\leq \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

demzufolge auch

$$|f_{N_a}(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

gilt.

(4) Jetzt wähle man endlich viele Stellen $a_1, \dots, a_m \in X$, so dass $X \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_{a_i}$ und setze

$$N := \max\{N_{a_i} \mid i = 1, \dots, m\}.$$

(5) Ist nun $x \in X$ beliebig, so gibt es ein $j \in \{1, \dots, m\}$, so dass $x \in U_{a_j}$. Es gilt dann für alle $n \geq N$ aufgrund der Monotonie von (f_n)

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq f(x) - f_N(x) \leq f(x) - f_{N_j}(x) \leq \varepsilon.$$

19.2 Algebren und Trenn-Algebren

19.2.1 Definition: \mathbb{K} -Algebra

Ist auf einem \mathbb{K} -Vektorraum V eine Multiplikation, d.h. eine \mathbb{K} -bilineare Abbildung

$$\begin{cases} V \times V & \rightarrow V \\ (v, \tilde{v}) & \mapsto v \cdot \tilde{v} \end{cases}$$

erklärt, so spricht man von einer \mathbb{K} -Algebra.

Es ist nicht einheitlich geregelt, ob der Begriff der Algebra beinhaltet, dass für die Multiplikation das Assoziativgesetz gilt. Für uns sei dies aber der Fall.

Die Algebra heißt kommutativ, wenn zusätzlich für diese Multiplikation das Kommutativgesetz gilt.

19.2.2 Beispiele

(1) \mathbb{R} ist eine kommutative \mathbb{R} -Algebra, \mathbb{C} ist eine kommutative \mathbb{C} -Algebra und eine kommutative \mathbb{R} -Algebra.

(2) Die Menge aller (quadratischen) $(d \times d)$ -Matrizen mit Einträgen aus \mathbb{K} bildet eine \mathbb{K} -Algebra, die für $d \geq 2$ nicht kommutativ ist.

(3) Die Menge der Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ mit einer beliebigen Menge X als Definitionsmenge bildet eine kommutative \mathbb{K} -Algebra, sie wird mit $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ bezeichnet. Die Teilmenge der beschränkten Funktionen auf X bildet eine Unteralgebra $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ von $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.

(4) Ist auf X eine Metrik (oder Topologie) erklärt, so bildet die Menge der stetigen Funktionen ebenfalls eine Unteralgebra $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ von $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$. Weiter ist dann die Menge der stetigen beschränkten Funktionen eine weitere Unteralgebra $\mathcal{BC}(X, \mathbb{K})$.

Beachte, dass für kompaktes X gilt: $\mathcal{C}(X, \mathbb{K}) = \mathcal{BC}(X, \mathbb{K})$.

19.2.3 Definition: Trenn-Algebra

Wir nennen eine Unteralgebra (= Teilmenge, die eine Algebra ist) $\mathcal{A}(X, \mathbb{K})$ von $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ eine *Trenn-Algebra*, wenn sie die folgenden Trennungseigenschaften aufweist:

- Die Algebra $\mathcal{A}(X, \mathbb{K})$ trenne die Stellen: Zu je zwei verschiedenen Stellen $x, \tilde{x} \in X$ existiere (mindestens) eine Funktion $f \in \mathcal{A}(X, \mathbb{K})$, so dass

$$f(x) \neq f(\tilde{x}).$$

- Die Algebra $\mathcal{A}(X, \mathbb{K})$ trenne die Werte: Zu jeder Stelle $x \in X$ gebe es zwei Funktionen f und \tilde{f} , so dass

$$f(x) \neq \tilde{f}(x).$$

19.3 Der Satz

19.3.1 Satz: Approximationssatz von Stone–Weierstraß

Es sei X eine kompakte Menge und $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ eine Trenn–Algebra von stetigen reellwertigen Funktionen. Dann gilt für den Abschluss von $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$:

$$\overline{\mathcal{A}(X, \mathbb{R})} = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$$

Mit anderen Worten: Zu jeder stetigen Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ gibt es eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der Trenn–Algebra $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Wir zeigen diesen Satz mit einer Kaskade von Hilfssätzen.

19.3.2 Hilfssatz

Zu beliebigen $a, b \in X$, $a \neq b$, und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt es (mindestens) eine Funktion $f \in \mathcal{A}(X, \mathbb{R})$, so dass

$$f(a) = \alpha, \quad f(b) = \beta.$$

19.3.3 Beweis

Der Beweis wird zeigen, dass die Voraussetzungen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und X kompakt hier nicht benötigt werden.

Gemäß Definition des Begriffs der „Trenn–Algebra“ gibt es zu $a, b \in X$ fünf Funktionen $e, g_a, h_a, g_b, h_b \in \mathcal{A}(X, \mathbb{K})$, so dass

$$e(a) \neq e(b), \quad g_a(a) \neq h_a(a), \quad g_b(b) \neq h_b(b).$$

Man sieht dann leicht, dass die Funktion $f \in \mathcal{A}(X, \mathbb{K})$, definiert durch

$$f(x) := \alpha \frac{[e(x) - e(b)] \cdot [g_a(x) - h_a(x)]}{[e(a) - e(b)] \cdot [g_a(a) - h_a(a)]} + \beta \frac{[e(x) - e(a)] \cdot [g_b(x) - h_b(x)]}{[e(b) - e(a)] \cdot [g_b(b) - h_b(b)]},$$

die Aussage des Sätzchens erfüllt.

Frage: Warum braucht man die Faktoren mit g und h ?

Antwort: Es ist keineswegs klar, dass die konstanten Funktionen, hier $\frac{e(b)}{e(a)-e(b)}$ bzw. $\frac{e(a)}{e(b)-e(a)}$ in der Algebra $\mathcal{A}(X, \mathbb{K})$ enthalten sind.

19.3.4 Hilfssatz

Es existiert eine monoton wachsende Folge (p_n) von Polynomen $p_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen die Wurzelfunktion \sqrt{x} konvergiert.

19.3.5 Beweis

(1) Wir definieren diese Folge rekursiv durch

$$p_1 \equiv 0, \quad p_{n+1}(x) := p_n(x) + \frac{x - p_n^2(x)}{2}$$

und zeigen per Induktion

(2) $0 \leq p_n(x) \leq \sqrt{x}$ für alle $x \in [0, 1]$.

Für die Durchführung des Induktionsschritts beachte man einfach

$$\sqrt{x} - p_{n+1}(x) = \sqrt{x} - \left[p_n(x) + \frac{x - p_n^2(x)}{2} \right] = \underbrace{[\sqrt{x} - p_n(x)]}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\left[1 - \frac{\sqrt{x} + p_n(x)}{2} \right]}_{\in [0,1]}.$$

Man ersieht aus dieser Identität auch, dass (p_n) monoton wachsend ist.

(3) Für jedes $x \in [0, 1]$ ist die Folge $(p_n(x))$ monoton wachsend und (nach oben) beschränkt, sie besitzt demzufolge einen Grenzwert $f(x)$. Durch Grenzübergang in der Rekursionsformel sieht man $f^2(x) = x$, wegen $f(x) \geq 0$ muss $f(x) = \sqrt{x}$ sein.

(4) Der Satz 19.1.2 von Dini zeigt abschließend, dass die Konvergenz gleichmäßig ist.

19.3.6 Hilfssatz

Ist $f \in \mathcal{A}(X, \mathbb{R})$, so ist $|f| \in \overline{\mathcal{A}(X, \mathbb{R})}$.

19.3.7 Beweis

Zum Beweis definieren wir die Funktionen

$$g_n(x) := \|f\| \cdot p_n\left(\left(\frac{f(x)}{\|f\|}\right)^2\right),$$

sie gehören alle zu $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$. Gemäß vorigem Hilfssatz besteht gleichmäßige Konvergenz der Folge

$$p_n(y^2) \longrightarrow \sqrt{y^2} = |y| \text{ auf } [0, 1],$$

deshalb dann auch die der Folge

$$g_n(x) = \|f\| \cdot p_n\left(\left(\frac{f(x)}{\|f\|}\right)^2\right) \longrightarrow \|f\| \cdot \sqrt{\left(\frac{f(x)}{\|f\|}\right)^2} = |f(x)|.$$

19.3.8 Hilfssatz

Ist $f \in \overline{\mathcal{A}(X, \mathbb{R})}$, so ist $|f| \in \overline{\mathcal{A}(X, \mathbb{R})}$.

19.3.9 Beweis

Es gibt eine Folge $(f_n) \subseteq \mathcal{A}(X, \mathbb{R})$, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Die Folge $(|f_n|) \subseteq \mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ konvergiert gleichmäßig gegen $|f|$. Da $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ abgeschlossen ist, ist $|f| \in \overline{\mathcal{A}(X, \mathbb{R})}$.

19.3.10 Hilfssatz

Zu je zwei Funktionen $f, g \in \overline{\mathcal{A}(X, \mathbb{R})}$ gehören auch die beiden Funktionen

$$\max(f, g) \quad \text{und} \quad \min(f, g) \quad (\text{stellenweise definiert})$$

zu $\overline{\mathcal{A}(X, \mathbb{R})}$.

19.3.11 Beweis

Dies folgt aus den Identitäten:

$$\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}, \quad \min(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}.$$

19.3.12 Hilfssatz

Zu zwei stetigen Funktionen $f^\perp : X \rightarrow \mathbb{R}$ (bottom) und $f^\top : X \rightarrow \mathbb{R}$ (top) mit

$$f^\perp(x) < f^\top(x), \quad x \in X,$$

gibt es eine Funktion g in $\overline{\mathcal{A}(X, \mathbb{R})}$, so dass

$$f^\perp(x) < g(x) < f^\top(x), \quad x \in X.$$

19.3.13 Beweis

(1) Es seien a, b zwei (nicht notwendig verschiedene) Stellen in X . Es gibt dann gemäß Satzchen 19.3.2 eine Funktion $g_{ab} \in \overline{\mathcal{A}(X, \mathbb{R})}$, so dass

$$f^\perp(a) < g_{ab}(a), \quad g_{ab}(b) < f^\top(b).$$

(2) Wir halten jetzt ein beliebiges $a \in X$ fest. Zu jedem $b \in X$ gibt es dann eine offene Umgebung U_b von b , so dass

$$g_{ab}(x) < f^\top(x), \quad x \in U_b.$$

Da X kompakt ist, gibt es endlich viele $i = 1, \dots, m$, so dass

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_{b_i}.$$

Wir definieren die Funktion g_a durch

$$g_a(x) := \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{g_{ab_i}(x), \dots, g_{ab_m}(x)\}.$$

Sie hat die folgenden beiden Eigenschaften:

$$f^\perp(a) < g_a(a), \quad g_a(x) < f^\top(x), \quad x \in X.$$

Die erste ist klar wegen $f^\perp(a) < g_{ab_i}(a)$ für alle $i = 1, \dots, m$. Zum Nachweis der zweiten betrachte man ein festes $x \in X$, suche sich das i mit $x \in U_{b_i}$ und erhält dann $g_a(x) \leq g_{ab_i}(x) < f^\top(x)$.

Weiter gibt es jetzt zu jedem $a \in X$, da g_a und f^\perp stetig sind, eine Umgebung V_a von a , so dass

$$f^\perp(x) < g_a(x), \quad x \in V_a.$$

Da X kompakt ist, gibt es endlich viele $j = 1, \dots, j$, so dass

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^j U_{b_j}.$$

Wir definieren die Funktion g durch

$$g(x) := \max_{j \in \{1, \dots, j\}} \{g_{a_1}(x), \dots, g_{a_j}(x)\}.$$

Sie hat die folgenden beiden Eigenschaften:

$$f^\perp(x) < g(x) < f^\top(x), \quad x \in X.$$

Die zweite Ungleichung ist klar wegen $g_{a_j}(x) < f^\top(x)$ für alle $j = 1, \dots, j$. Zum Nachweis der zweiten betrachte man ein festes $x \in X$, suche sich das j mit $x \in U_{a_j}$ und erhält dann $f^\perp(x) < g_{a_j}(x) \leq g(x)$.

19.3.14 Beweis des Satzes von Stone–Weierstrass.

Es sei also f stetig und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Setze im letzten Hilfssatz

$$f^\perp = f - \varepsilon, \quad f^\top = f + \varepsilon.$$

Es existiert dann eine Funktion $g \in \overline{\mathcal{A}(X, \mathbb{R})}$ mit

$$f - \varepsilon < g < f + \varepsilon,$$

was die Abschätzung $\|f - g\| < \varepsilon$ nach sich zieht.

19.3.15 Korollar: Klassischer Approximationssatz von Weierstraß

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakte und $\mathcal{P}(X, \mathbb{R})$ die Algebra der reellen Polynome (in d Variablen). Dann gilt für den Abschluss von $\mathcal{P}(X, \mathbb{R})$:

$$\overline{\mathcal{P}(X, \mathbb{R})} = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$$

Mit anderen Worten: Zu jeder stetigen Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ gibt es eine Folge von Polynomen $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Mit nochmals anderen Worten: Zu jeder stetigen Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein Polynom $p : X \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X.$$

20 Integration im \mathbb{R}^d

20.1 Einstieg

20.1.1 Welche Daten werden gebraucht? Der mehrdimensionalen Integralrechnung liegt zunächst das Vorhaben zugrunde, die „im \mathbb{R}^d “ definierten reellwertigen Funktionen f über Teilmengen X von \mathbb{R}^d zu integrieren und ihnen eine reelle Zahl, das Integral

$$\int_X f \in \mathbb{R}$$

zuzuordnen.

Es stellt sich dabei heraus, dass dieses Vorhaben erheblich anspruchsvoller — und deshalb wieder sehr viel interessanter — im Vergleich zu seiner eindimensionalen Entsprechung ist.

Dem Vorhaben unterliegt stark die Klärung, welche „spezielleren und verallgemeinernden“ mathematischen Objekte die Rolle der Teilmengen X und der Funktionen f einnehmen.

Anstelle der Teilmengen X kommen in Frage:

D Quader, kompakte Träger, Mengensimplexe,

V (orientierte) Simplexe und Ketten,

L messbare und L-integrierbare Mengen.

Anstelle der Funktionen f treten in Erscheinung:

D stetige Funktionen,

V differenzierbare Funktionen, Differentialformen,

L messbare und L-integrierbare Funktionen.

Die drei Kürzel bedeuten dabei:

D Definition: Eine erste einfache Definition des mehrdimensionalen Integrals mittels mehrfacher eindimensionaler Integration ist für Quader und stetige Funktionen angebar. Zur Ausschaltung des Einwands, dass diese Definition von der Reihenfolge der Einzel-Integrationen abhängig sein könnte, muss der in sich gewichtige Satz von Stone-Weierstraß bereitgestellt werden.

V Vektoranalysis: Sie beschäftigt sich mit der Verallgemeinerung der Substitutionsregel und des HDI für den höher-dimensionalen Kontext. Am Ende stehen die Transformationsformel und der Satz von Stokes.

L Lebesgue-Theorie: Hier begibt man sich auf die Suche nach möglichst großen Klassen von Mengen und Funktionen, für die das Integral sinnvoll definiert werden kann. Der gewichtigere Aspekt dabei ist, dass diese Klassen mathematisch sehr geschmeidig werden:

- Die Klasse der L-integrierbaren Funktionen bildet einen vollständig normierten Vektorraum, einen so genannten Banachraum.

- Das System aller messbaren Mengen bildet eine so genannte σ -Algebra, das heißt das Komplemente, abzählbare Vereinigungen und Schnitte messbarer Mengen wieder messbar sind.

20.1.2 Verschiedene Zugänge

Der „Berggipfel“ der mehrdimensionalen Integration kann auf verschiedenen Pfaden bzw. Routen erreicht werden.

Es gibt dabei nicht eine besonders leichte oder besonders kurze Route. Wir wollen drei Zugänge kurz schildern.

1. Riemman: Das mehrdimensionale Integral wird analog zum eindimensionalen Fall als Riemann-Integral eingeführt über Zerlegungen, Ober- und Untersummen, Ober- und Unterintegrale. Wie im eindimensionalen Fall ist der Zugang anschaulich und handwerklich. Er stößt jedoch auf Dauer an Grenzen, so dass man im Nachhinein „theoretische Nacharbeit“ leisten muss.
2. Lebesgue: Das Integral über Teilmengen des \mathbb{R}^d wird als Spezialfall innerhalb der noch allgemeineren Maß- und Integrationstheorie eingeführt, die abstrakter, mächtiger und mathematisch geschlossener ist. Obwohl dies auch im Hinblick auf die Stochastik interessant wäre, ist der Aufwand innerhalb einer Analysis-Vorlesung zu groß.
3. Approximation: Die Idee, die mehrdimensionale Integration einfach als mehrfache eindimensionale Integration einzuführen, ist zunächst nur für eine „kleine“ Klasse, nämlich die der stetigen Funktionen ausführbar. Mit Hilfe zahlreicher mathematischer Überlegungen kann diese Klasse nach und nach erweitert werden, bis man bei einer ziemlich großen Klasse, der der Lebesgue-integrierbaren Funktionen, angekommen ist.

Wir werden in etwa den dritten Weg gehen, dabei aber über die theoretischen und technischen Hilfsmittel hinwegstreifen, um zügig zu Anwendungen und Berechnungen bei konkreten Beispielen zu kommen.

20.2 Integration stetiger Funktionen über Quadern

20.2.1 Definition

Es sei

$$Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k] \times \underbrace{[a_{k+1}, b_{k+1}] \times \dots \times [a_d, b_d]}_{=: Q_{d-k}} \subseteq \mathbb{R}^d,$$

ein achsenparalleler kompakter Quader und $\varrho : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Wir definieren rekursiv für $k = 0, \dots, d$ die Funktionen

$$(I_0\varrho) : \begin{cases} Q_d & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \varrho(x) \end{cases}$$

$$(I_k\varrho) : \begin{cases} Q_{d-k} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_{a_k}^{b_k} (I_{k-1}\varrho)(x_k, \dots, x_{d-k+1}) dx_k. \end{cases}$$

Die Funktion $I_k\varrho$ entsteht also dadurch, dass

- bzgl. der ersten k Variablen, x_1, \dots, x_k
- über die Intervalle $[a_1, b_1], \dots, [a_k, b_k]$
- bei festgehaltenen restlichen Variablen x_{k+1}, \dots, x_d

eindimensional integriert wird. Wie bereits mehrfach aufgetreten, ist bei einer rekursiven Definition eine Pünktchen-Schreibweise viel suggestiver:

$$(I_k\varrho)(x_{k+1}, \dots, x_d) = \int_{a_k}^{b_k} \cdots \int_{a_1}^{b_1} \underbrace{\varrho(x_1, \dots, x_k)}_{\text{integriert}}, \underbrace{x_{k+1}, \dots, x_d}_{\text{fixiert}} dx_1 \cdots dx_k.$$

Dieser Iterationsprozess ist wohldefiniert, da jeweils mit $I_k\varrho$ auch $I_{k+1}\varrho$ wieder eine stetige Funktion mit kompaktem Träger ist (Beweis in der Übung).

(3) Nach d -maliger Integration entsteht die Zahl

$$\int_Q \varrho(x) dx := I_d\varrho = \int_{a_d}^{b_d} \cdots \int_{a_1}^{b_1} \varrho(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d.$$

Sie wird das *Integral* von ϱ über den Quader Q genannt.

20.2.2 Satz: Vertauschbarkeit in der Integrationsreihenfolge

Es sei $\pi : \{1, \dots, d\} \rightarrow \{1, \dots, d\}$ eine bijektive Abbildung (Permutation). Dann gilt für stetiges $\varrho : Q \rightarrow \mathbb{R}$:

(i)

$$\int_Q \varrho(x) dx = \int_{a_{\pi(d)}}^{b_{\pi(d)}} \cdots \int_{a_{\pi(1)}}^{b_{\pi(1)}} \varrho(x_1, \dots, x_d) dx_{\pi(1)} \dots dx_{\pi(d)}.$$

Bei der Definition des Integrals kommt es also auf die Reihenfolge der einzelnen Integrationen nicht an.

(ii)

$$\int_Q \varrho(x) dx = \int_{a_d}^{b_d} \cdots \int_{a_1}^{b_1} \varrho(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(d)}) dx_1 \dots dx_d.$$

Im Integranden können die Variablen beliebig vertauscht werden.

20.2.3 Beweis

(0) Es genügt offensichtlich, die Formel (i) für $d = 2$ und den Fall, zu beweisen, dass π die beiden Koordinaten 1 und 2 vertauscht.

Es sei also ein Quader $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ gegeben.

(1) Wir nehmen zunächst an, dass die stetige Funktion ϱ als Summe von Zweierprodukten von stetigen Funktionen geschrieben werden kann, die nur von jeweils einer Koordinate abhängen:

$$\varrho(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^n \sigma_j(x_1) \cdot \tau_j(x_2) \quad (*)$$

Dann gilt (sehr ausführlich)

$$\begin{aligned} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \varrho(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \sum_{j=1}^n \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \sigma_j(x_1) \cdot \tau_j(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \sigma_j(x_1) dx_1 \cdot \tau_j(x_2) dx_2 \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{a_1}^{b_1} \sigma_j(x_1) dx_1 \cdot \int_{a_2}^{b_2} \tau_j(x_2) dx_2 \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{a_1}^{b_1} \sigma_j(x_1) \cdot \int_{a_2}^{b_2} \tau_j(x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \sigma_j(x_1) \cdot \tau_j(x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \varrho(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \end{aligned}$$

(2) Es sei jetzt $\varrho : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Funktion und ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

Alle Funktionen $\varrho : Q \rightarrow \mathbb{R}$ der Form (*) bilden eine \mathbb{R} -Trenn-Algebra. Aufgrund des Satzes von Stone-Weierstraß 19.3.15 gibt es eine Funktion $\sum_{j=1}^n \sigma_j(x_1) \cdot \tau_j(x_2)$ in dieser Trenn-Algebra mit

$$\sup_{x \in Q} \left\{ \left| \varrho(x_1, x_2) - \sum_{j=1}^n \sigma_j(x_1) \cdot \tau_j(x_2) \right| \right\} \leq \frac{\varepsilon}{2(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)}.$$

Aufgrund des Abschätzungssatzes der Integralrechnung gilt

$$\begin{aligned} & \left| \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} [\varrho(x_1, x_2) - \sum_{j=1}^n \sigma_j(x_1) \cdot \tau_j(x_2)] dx_1 dx_2 \right| \\ & \leq \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \left| \varrho(x_1, x_2) - \sum_{j=1}^n \sigma_j(x_1) \cdot \tau_j(x_2) \right| dx_1 dx_2 \\ & \leq \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\varepsilon}{2(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)} dx_1 dx_2 = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

und mit der gleichen Abschätzungskette

$$\left| \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} [\varrho(x_1, x_2) - \sum_{j=1}^n \sigma_j(x_1) \cdot \tau_j(x_2)] dx_2 dx_1 \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann weiter mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} & \left| \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \varrho(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \varrho(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \right| \\ & \leq \left| \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} [\varrho(x_1, x_2) - \sum_{j=1}^n \sigma_j(x_1) \cdot \tau_j(x_2)] dx_1 dx_2 \right| \\ & \quad + \left| \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} [\sum_{j=1}^n \sigma_j(x_1) \cdot \tau_j(x_2) - \varrho(x_1, x_2)] dx_2 dx_1 \right| \\ & \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Da ε beliebig war, stimmen die beiden Integrale in der obersten Zeile überein.

(3) Die Aussage unter (ii) folgt aus der ersten (i) durch Anwendung auf die Permutation π^{-1} und anschließende Umbenennung der Variablen:

$$\begin{aligned} \int_Q \varrho(x) dx &= \int_{a_{\pi^{-1}(d)}}^{b_{\pi^{-1}(d)}} \cdots \int_{a_{\pi^{-1}(1)}}^{b_{\pi^{-1}(1)}} \varrho(x_1, \dots, x_d) dx_{\pi^{-1}(1)} \cdots dx_{\pi^{-1}(d)} \\ &= \int_{a_d}^{b_d} \cdots \int_{a_1}^{b_1} \varrho(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(d)}) dx_1 \cdots dx_d. \end{aligned}$$

20.3 Unterhalbstetige Funktionen

20.3.1 Die erweiterte Zahlengerade

Wir werden in diesem und den nächsten Abschnitten Funktionen mit Werten in der erweiterten Zahlengerade $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ zu betrachten haben. Auf dieser Menge sind eine Ordnung und eine Metrik definiert.

Die auf \mathbb{R} definierten Grundrechenarten können als stetige Operationen teilweise auf die erweiterte Zahlengerade fortgesetzt werden:

- Die Addition ist auf $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \setminus \{(-\infty, +\infty), (+\infty, -\infty)\}$ wohldefiniert.
- Die Multiplikation ist auf $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \setminus \{(0, -\infty), (0, +\infty), (-\infty, 0), (+\infty, 0)\}$ wohldefiniert.
- Die Inversenbildung $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ wohldefiniert.
- Die auf das Intervall $]0, +\infty]$ eingeschränkte Inversenbildung kann stetig auf $[0, +\infty]$ fortgesetzt werden durch die Festsetzung $\frac{1}{0} = +\infty$.

Beachte aber, dass die Körper-Axiome (Gesetze der Grundrechenarten) nicht uneingeschränkt gültig sind.

20.3.2 Definition: Unterhalbstetig

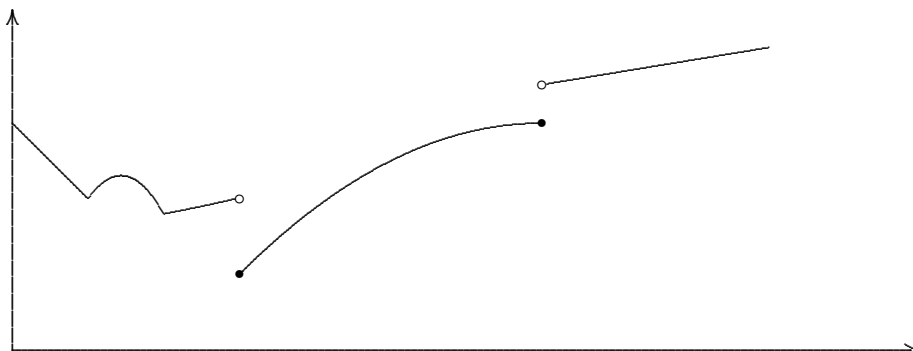
Eine Funktion $\varrho : \mathbb{R}^d \rightarrow]-\infty, +\infty]$ heißt in $a \in \mathbb{R}^d$ *unterhalbstetig* (oder *von unten halbstetig*), wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$\varrho(a) - \varepsilon < \varrho(x) \quad \text{für alle } x \text{ mit } \|x - a\| < \delta.$$

Eine Funktion $\varrho : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ heißt *unterhalbstetig* (schlechthin), wenn sie in jedem $a \in \mathbb{R}^d$ unterhalbstetig ist.

20.3.3 Veranschaulichung für $d = 1$

Sehr vereinfacht und bildlich gesprochen: Der Graph kann in einer kleinen Umgebung von a nicht nach unten, wohl aber nach oben springen.



20.3.4 Beispielklasse Stetige Funktionen sind unterhalbstetig.

20.3.5 Beispiel und Definition: Indikatorfunktion

Ist $Y \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Teilmenge, so heißt

$$\chi_Y : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in Y, \\ 0, & \text{falls } x \notin Y. \end{cases} \end{cases}$$

die *Indikatorfunktion* oder *charakteristische Funktion* von Y .

Eine Indikatorfunktion ist genau dann unterhalbstetig, wenn die zugehörige Teilmenge offen ist.

20.3.6 Satz: Minimum einer unterhalbstetigen Funktion

Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und $f : K \rightarrow]-\infty, +\infty]$ unterhalbstetig. Dann nimmt die Funktion f auf K ihr Minimum an.

20.3.7 Beweis in der Übung. Später hier.

20.4 C^\uparrow -Funktionen

20.4.1 Definition: Kompakter Träger

Es sei X ein metrischer Raum, beispielsweise eine Teilmenge von \mathbb{R}^d und $\varrho : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

1. Die Teilmenge

$$\text{supp } \varrho := \overline{\{x \in X \mid \varrho(x) \neq 0\}}$$

heißt der *Träger* (engl: support) der Funktion ϱ .

2. Die Menge aller Funktionen $\varrho : X \rightarrow \mathbb{R}$, deren Träger kompakt ist, wird mit $\mathcal{C}_c(X)$ bezeichnet.
3. Für eine Funktion ϱ aus $\mathcal{C}_c(X)$ definieren wir das Integral als die Zahl

$$\int \varrho = \int_{\mathbb{R}^d} \varrho := \int_Q \varrho(x) dx,$$

wobei Q ein achsenparalleler Quader mit $\text{supp } \varrho \subseteq Q$ ist.

Man mache sich klar, dass diese Definition unabhängig von dem konkret ausgewählten Quader Q ist.

20.4.2 Satz und Definition

Wir definieren eine Teilmenge $\mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$ von Funktionen $\mathbb{R}^d \rightarrow]-\infty, +\infty]$ durch die folgenden äquivalenten Aussagen:

- (A) (Definition) $\varrho \in \mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$.
- (B) Es gibt eine monoton steigende Folge $(\varrho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Funktionen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, die stellenweise gegen ϱ konvergiert.
- (C) ϱ ist unterhalbstetig und es gibt eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^d$, so dass

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid \varrho(x) < 0\} \subseteq K.$$

- (D) ϱ ist unterhalbstetig und besitzt eine Minorante $\tilde{\varrho} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$.

20.4.3 Beweis

(B) \Rightarrow (C). Es seien $a \in \mathbb{R}^d$ und $\varepsilon > 0$ fixiert. Wegen $\varrho(a) = \sup\{\varrho_k(a) \mid k \in \mathbb{N}\}$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\varrho_k(a) > \varrho(a) - \varepsilon.$$

Da ϱ_k stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\varrho(x) \geq \varrho_k(x) > \varrho(a) - \varepsilon \quad \text{für alle } x \text{ mit } \|x - a\| < \delta.$$

Also ist ϱ unterhalbstetig.

Weiter ist

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid \varrho(x) < 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d \mid \varrho_1(x) < 0\}$$

in einer kompakten Menge enthalten.

(C) \Rightarrow (B). Wir zeigen dies in mehreren Schritten.

(1) Gemäß Satz 20.3.6 nimmt die Funktion ϱ auf \mathbb{R}^d ihr Minimum M an. Es sei

$$\widetilde{M} := \min\{0, M\}.$$

(2) Es sei \mathcal{T} die Menge der Tripel

$$\mathcal{T} := \left\{ (a, \varepsilon, c) \in \mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid \varepsilon > 0, c \geq \widetilde{M}, \right. \\ \left. f(x) \geq c \text{ für alle } x \in U_\varepsilon(a) \right\}.$$

(3) Die Menge \mathcal{T} ist abzählbar, es existiert also eine bijektive Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow \mathcal{T} \\ j & \mapsto (a_j, \varepsilon_j, c_j). \end{cases}$$

(4) Aufgrund der Unterhalbstetigkeit ist es möglich, für jedes $(a_j, \varepsilon_j, c_j) \in \mathcal{T}$ eine Funktion $\sigma_j \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ zu konstruieren mit

$$\sigma_j(x) \begin{cases} = c_j, & \text{falls } x \in U_{\varepsilon_j/2}(a_j/2) \\ \leq c_j, & \text{falls } x \in U_{\varepsilon_j}(a_j) \\ = \widetilde{M}, & \text{falls } x \in K \setminus U_{\varepsilon_j}(a_j) \\ \leq 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^d \setminus (K \cup U_{\varepsilon_j}(a_j)) \end{cases}$$

Es folgt dann für $x \in \mathbb{R}^d$

$$\sigma_j(x) \leq \varrho(x) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \{\sigma_j(x)\}.$$

(5) Setzt man nun

$$\varrho_k(x) := \sup\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\},$$

so ist die Folge $(\varrho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend, in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ enthalten mit

$$\varrho = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{\varrho_k\}.$$

(C) \Rightarrow (D). Gemäß Satz 20.3.6 nimmt die Funktion ϱ auf K ihr Minimum M an. O.B.d.A kann $M < 0$ angenommen werden, anderenfalls kann die Nullfunktion als Minorante genommen werden.

Es gibt einen Quader Q mit $K \subseteq Q$. Konstruiere nun eine stetige Funktion $\tilde{\varrho}$, die auf Q konstant gleich M ist und außerhalb des (in jeder Richtung) verdoppelten Quaders $2 \cdot Q$ gleich Null ist. Das ist dann eine Minorante für ϱ .

Die Implikation (D) \Rightarrow (C) ist trivial.

20.4.4 Satz: Eigenschaften von $\mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$

(i) Die Menge $\mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$ ist **kein** Vektorraum von Funktionen.

Es treten aber viele andere „Abschluss-Eigenschaften“ in Erscheinung:

(ii) Es seien $\varrho, \tilde{\varrho} \in \mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Dann gehören auch die Funktionen

$$\alpha \cdot \varrho, \quad \varrho + \tilde{\varrho}, \quad \min\{\varrho, \tilde{\varrho}\}, \quad \max\{\varrho, \tilde{\varrho}\}$$

zu $\mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Es sei $(\varrho_k)_{k \in I}$ eine Familie von Funktionen aus $\mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$. Dann gehört auch die Funktion

$$\varrho := \sup\{\varrho_k \mid k \in I\}$$

zu $\mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$.

(iv) Es sei $(\varrho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$ mit $\varrho_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gehört auch die Funktion

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k$$

zu $\mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$.

(v) Es sei $\varrho \in \mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$ und $a \in \mathbb{R}^d$. Dann gehören die partiellen Funktionen

$$\varrho(\cdots, a_\ell, \cdots) : \begin{cases} \mathbb{R}^{d-1} & \rightarrow]-\infty, +\infty] \\ y & \mapsto \varrho(y_1, \dots, y_{k-1}, a_\ell, y_k, \dots, y_d) \end{cases}$$

zu $\mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^{d-1})$.

20.4.5 Beweis[⊖]

(i) Die Indikatorfunktion des offenen Einheitsintervalls

$$\chi_{]0,1[} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{cases}$$

ist unterhalbstetig. Die Funktion $-\chi_{]0,1[}$ ist nicht unterhalbstetig.

(ii) Sind $(\varrho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{\varrho}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zugehörigen monoton steigenden stellenweise konvergenten Folgen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, so haben die Folgen

$$(\alpha \varrho_k), \quad (\varrho_k + \tilde{\varrho}_k), \quad (\min\{\varrho_k, \tilde{\varrho}_k\}), \quad (\max\{\varrho_k, \tilde{\varrho}_k\})$$

die gleichen Eigenschaften und konvergieren gegen die im Satz angegebenen Funktionen.

(iii) Es seien $a \in \mathbb{R}^d$ und $\varepsilon > 0$ fixiert. Wegen $\varrho(a) = \sup\{\varrho_k(a) \mid k \in I\}$ gibt es ein $k \in I$, so dass

$$\varrho_k(a) > \varrho(a) - \varepsilon.$$

Da ϱ_k unterhalbstetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\varrho(x) \geq \varrho_k(x) > \varrho(a) - \varepsilon \quad \text{für alle } x \text{ mit } \|x - a\| < \delta.$$

Also ist ϱ unterhalbstetig. Weiter ist für irgendein fixiertes $k \in I$

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid \varrho(x) < 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d \mid \varrho_k(x) < 0\}$$

und die rechts stehende Menge ist kompakt.

(iv) Die durch die Reihe definierte Funktion ist Supremum der Partialsummen, von denen wir aufgrund von (i) wissen, dass sie zu $\mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$ gehören.

(v) Es sei wieder $(\varrho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, die stellenweise gegen ϱ konvergiert. Dann ist die Folge

$$\varrho_k(\cdots, a_\ell, \cdots) : \begin{cases} \mathbb{R}^{d-1} & \rightarrow]-\infty, +\infty] \\ y & \mapsto \varrho_k(y_1, \dots, y_{k-1}, a_\ell, y_k, \dots, y_d) \end{cases}$$

der zugehörigen partiellen Funktionen eine monoton steigende Folge in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^{d-1})$, die stellenweise gegen die im Satz angegebene partielle Funktion konvergiert.

20.4.6 Beispiele Eine Funktion gehört zu der Menge $\mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$, wenn sie eine der folgenden Eigenschaften hat:

- gleich Null oder Positiv-konstant
- stetig und nicht-negativ
- unterhalbstetig und nicht-negativ
- Indikatorfunktion einer offenen Teilmenge
- sie ist Konstant-Gleich-Plus-Unendlich

20.5 Integration von \mathcal{C}^\uparrow -Funktionen

20.5.1 Definition:

Ist $\varrho : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion in $\mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$, so definieren wir

$$\int^{\uparrow} \varrho(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d}^{\uparrow} \varrho(x) dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varrho_k(x) dx,$$

wobei $(\varrho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ irgendeine Folge von Funktionen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ ist, die

- monoton steigend ist und
- die gegebene Funktion ϱ als stellenweisen Grenzwert besitzt.

20.5.2 Kommentare

Diese Definition muss noch etwas kommentiert werden:

- Die Zusatzinformation, dass über die Menge \mathbb{R}^d integriert wird, wird, wann immer möglich, weggelassen.
- Beachte, dass die Zahlenfolge auf der rechten Seite monoton wachsend ist und daher ihr Grenzwert in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eindeutig festgelegt ist.
- Der folgende Satz wird aufzeigen, dass die Definition des Integrals unabhängig von der ausgewählten Folge $(\varrho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ ist.
- Insbesondere ist dann gesichert, dass für Funktionen $\varrho \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ die ursprüngliche Definition des Integrals mit der aktuellen übereinstimmt.

20.5.3 Satz

Es seien $(\varrho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{\varrho}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zwei monoton steigende Folgen von Funktionen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varrho_k(x) = \varrho(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\varrho}_k(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \varrho_k(x) dx = \int^{\uparrow} \varrho(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \tilde{\varrho}_k(x) dx.$$

20.5.4 Beweis[⊖]

(1) In Abhängigkeit von $(k, \ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definieren wir die Funktionen

$$r_{k\ell} := \min\{\varrho_k, \tilde{\varrho}_\ell\} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$$

und denken uns diese Funktionen in einer „unendlichen Tabelle“ angeordnet:

$$\begin{array}{ccccccc}
 r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1\ell} & \cdots & \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} \varrho_1 \\
 r_{21} & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2\ell} & \cdots & \longrightarrow \varrho_2 \\
 r_{31} & r_{32} & r_{33} & \cdots & r_{3\ell} & \cdots & \longrightarrow \varrho_3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 r_{k1} & r_{k2} & r_{k3} & \cdots & r_{k\ell} & \cdots & \longrightarrow \varrho_k \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 k \rightarrow \infty & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{\varrho}_1 & \tilde{\varrho}_2 & \tilde{\varrho}_3 & \cdots & \tilde{\varrho}_\ell & \cdots & \longrightarrow
 \end{array}$$

(2) Wir betrachten beispielsweise die k -te Zeile. Die in ihr enthaltene Funktionenfolge ist monoton steigend und konvergiert stellenweise gegen ϱ_k , was durch

$$\begin{aligned} \lim_{\ell \rightarrow \infty} r_{k\ell}(x) &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \min\{\varrho_k(x), \tilde{\varrho}_\ell(x)\} = \min\{\varrho_k(x), \lim_{\ell \rightarrow \infty} \tilde{\varrho}_\ell(x)\} \\ &= \min\{\varrho_k(x), \tilde{\varrho}(x)\} = \varrho_k(x). \end{aligned}$$

begründet ist.

(3) Wegen

$$r_{k1} \leq r_{k\ell} \leq \varrho_k \quad \text{gilt} \quad \text{supp } r_{k\ell} \subseteq \text{supp } r_{k1} \cup \text{supp } \varrho_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

so dass alle Funktionen in der k -ten Zeile einen Träger haben, der in der gleichen kompakten Menge enthalten ist. Aufgrund des Satzes 19.1.2 von Dini liegt gleichmäßige Konvergenz ist.

(4) Insgesamt können wir jetzt abschätzen

$$\int \varrho_k(x) dx \stackrel{\text{glim K}}{=} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int r_{k\ell}(x) dx \stackrel{r_{k\ell} \leq \tilde{\varrho}_\ell}{\leq} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int \tilde{\varrho}_\ell(x) dx.$$

(5) Beim Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ auf der linken Seite bleibt die Abschätzung erhalten:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \varrho_k(x) dx \leq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int \tilde{\varrho}_\ell(x) dx.$$

(6) Führt man die genau gleichen Überlegungen bei Vertauschung von Zeilen und Spalten innerhalb der obigen Tabelle durch, so gelangt man analog zu der Abschätzung

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \int \tilde{\varrho}_\ell(x) dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varrho_k(x) dx,$$

wodurch der Satz gezeigt ist.

20.5.5 Satz: Eigenschaften des \mathcal{C}^\uparrow -Integrals

(i) Für $\varrho, \tilde{\varrho} \in \mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$ gilt:

$$\varrho \leq \tilde{\varrho} \implies \int^\uparrow \varrho(x) dx \leq \int^\uparrow \tilde{\varrho}(x) dx.$$

(ii) Es seien $\varrho, \tilde{\varrho} \in \mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int^\uparrow \alpha \cdot \varrho(x) dx &= \alpha \cdot \int^\uparrow \varrho(x) dx \\ \int^\uparrow [\varrho(x) + \tilde{\varrho}(x)] dx &= \int^\uparrow \varrho(x) dx + \int^\uparrow \tilde{\varrho}(x) dx \end{aligned}$$

(iii) Es sei $(\varrho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Funktionen aus $\mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\int^\uparrow \sup_{k \in \mathbb{N}} \varrho_k(x) dx = \sup_{k \in \mathbb{N}} \int^\uparrow \varrho_k(x) dx.$$

(iv) Es sei $(\varrho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$ mit $\varrho_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\int^\uparrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k(x) \right] dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int^\uparrow \varrho_k(x) dx.$$

(v) Satz von Fubini in $\mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$

Es sei $\varrho \in \mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt für $\ell \in \{1, \dots, d\}$

$$\int_{\mathbb{R}^d}^\uparrow \varrho(x) dx = \int_{\mathbb{R}^{d-1}}^\uparrow \left[\int_{\mathbb{R}}^\uparrow \varrho(y_1, \dots, y_{\ell-1}, x_\ell, y_\ell, \dots, y_d) dx_\ell \right] dy$$

Insbesondere kann die mehrdimensionale Integration als beliebige Abfolge von ein-dimensionalen Integrationen ausgeführt werden.

20.5.6 Beweis[⊖]

(i) Sind (ϱ_k) und $(\tilde{\varrho}_k)$ zugehörige Folgen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, so konvergieren auch die beiden monoton steigenden Folgen

$$\min\{\varrho_k, \tilde{\varrho}_k\} \rightarrow \varrho \quad \max\{\varrho_k, \tilde{\varrho}_k\} \rightarrow \tilde{\varrho}.$$

Wegen

$$\int_{\mathbb{R}^d} \min\{\varrho_k, \tilde{\varrho}_k\}(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \max\{\varrho_k, \tilde{\varrho}_k\}(x) dx$$

folgt die Behauptung nach Grenzübergang $k \rightarrow \infty$.

(ii) kann leicht auf zugehörige Folgen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ zurückgeführt werden.

(iii) zeigen wir in einer Abfolge von 10 Schritten.

(1) Wir zeigen die Aussage zunächst für den Fall, dass

$$\varrho_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \varrho \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d).$$

Es gibt dann einen Quader $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$ mit

$$\text{supp } \varrho_1 \cup \text{supp } \varrho \subseteq Q,$$

so dass wegen $\varrho_1 \leq \varrho_k \leq \varrho$

$$\text{supp } \varrho_k \subseteq Q \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

(2) Gemäß Satz von Dini 19.1.2 konvergiert dann (ϱ_k) auf Q sogar gleichmäßig gegen ϱ .

(3) Es existiert also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für $x \in Q$

$$0 \leq \varrho(x) - \varrho_k(x) \leq \frac{\varepsilon}{(b_1 - a_1) \dots (b_d - a_d)}$$

und dann

$$\int^{\uparrow} \varrho(x) dx - \int^{\uparrow} \varrho_k(x) dx = \int_Q [\varrho(x) - \varrho_k(x)] dx \leq \int_Q \frac{\varepsilon}{(b_1 - a_1) \dots (b_d - a_d)} dx = \varepsilon.$$

Das ist die Aussage für die \mathcal{C}_c -Situation.

(4) Wir wenden uns jetzt der allgemeineren Situation

$$\varrho_k \in \mathcal{C}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \varrho \in \mathcal{C}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d).$$

zu. Gemäß Aussage (i) dieses Satzes gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\int^{\uparrow} \varrho_k(x) dx \leq \int^{\uparrow} \varrho(x) dx$$

und deshalb

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \int^{\uparrow} \varrho_k(x) dx \leq \int^{\uparrow} \varrho(x) dx.$$

(5) Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es eine monoton steigende Folge $(r_{k\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ und

$$\sup_{\ell \in \mathbb{N}} r_{k\ell} = \varrho_k.$$

Eine tabellarische Anordnung hilft wieder, die folgenden Überlegungen mitzuvollziehen:

$$\begin{array}{cccccccc} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1\ell} & \cdots & \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} & \varrho_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2\ell} & \cdots & \longrightarrow & \varrho_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \cdots & r_{3\ell} & \cdots & \longrightarrow & \varrho_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & r_{k3} & \cdots & r_{k\ell} & \cdots & \longrightarrow & \varrho_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \end{array}$$

(6) Wir bilden die Suprema über die endlich vielen Funktionen in den Quadraten links-oben:

$$\tilde{r}_n := \sup_{k \leq n, \ell \leq n} r_{k\ell}.$$

Es ist klar, dass die Folge $(\tilde{r}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ enthalten ist und monoton steigend ist mit $\varrho = \sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{r}_n$.

(8) Es sei nun u eine beliebige Funktion in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ mit $u \leq \varrho$. Wegen

$$u \leq \varrho = \sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{r}_n$$

ist

$$u = \sup_{n \in \mathbb{N}} \min\{u, \tilde{r}_n\}.$$

Wegen $\tilde{r}_n \leq \varrho_n$ ist nach (i) dieses Satzes

$$\int^\uparrow \min\{u, \tilde{r}_n\} \leq \int^\uparrow \tilde{r}_n \leq \int^\uparrow \varrho_n.$$

Es folgt mit den Schritten (1) bis (3)

$$\int^\uparrow u = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int^\uparrow \min\{u, \tilde{r}_n\} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int^\uparrow \varrho_n.$$

(9) Ist nun $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\sup_{k \in \mathbb{N}} u_k = \varrho$, so folgt

$$\int^\uparrow \varrho = \sup_{k \in \mathbb{N}} \int^\uparrow u_k \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int^\uparrow \varrho_n.$$

(10) Die beiden Ungleichungen aus Schritt (4) und (9) ergeben die Behauptung.

(iv) folgt aus (iii).

(v) Es sei wieder $(\varrho_k) \subseteq \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ eine monoton steigende Folge mit $\lim \varrho_k(x) = \varrho(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

Wir setzen wie im Satz zur Abkürzung $y = (y_1, \dots, y_{\ell-1}, y_{\ell+1}, \dots, y_d)$.

Es sind dann die Funktionen

$$\tilde{\varrho}_k : \begin{cases} \mathbb{R}^{d-1} & \rightarrow \mathbb{R} \\ y & \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varrho_k(y_1, \dots, y_{\ell-1}, x_\ell, y_{\ell+1}, \dots, y_d) dx_\ell \end{cases}$$

in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^{d-1})$ enthalten.

Damit können wir schrittweise die Aussage (v) auf die entsprechende Aussage für Funktionen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ zurückspielen.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{d-1}}^\uparrow \left[\int_{\mathbb{R}}^\uparrow \varrho(y_1, \dots, y_{\ell-1}, x_\ell, y_{\ell+1}, \dots, y_d) dx_\ell \right] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}}^\uparrow \left[\int_{\mathbb{R}}^\uparrow \lim_{k \rightarrow \infty} \varrho_k(y_1, \dots, y_{\ell-1}, x_\ell, y_{\ell+1}, \dots, y_d) dx_\ell \right] dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}}^{\uparrow} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varrho_k(y_1, \dots, y_{\ell-1}, x_{\ell}, y_{\ell+1}, \dots, y_d) dx_{\ell} \right] dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}}^{\uparrow} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\varrho}_k(y) \right] dy \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{\varrho}_k(y) dy \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} \varrho_k(y_1, \dots, y_{\ell-1}, x_{\ell}, y_{\ell+1}, \dots, y_d) dx_{\ell} dy \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varrho_k(y_1, \dots, y_{\ell-1}, x_{\ell}, y_{\ell+1}, \dots, y_d) dx_{\ell} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}^{\uparrow} \varrho(y_1, \dots, y_{\ell-1}, x_{\ell}, y_{\ell+1}, \dots, y_d) dx_{\ell} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}^{\uparrow} \varrho(x) dx
\end{aligned}$$

20.6 Integration von \mathcal{C}^\downarrow -Funktionen

Die Definitionen aus den letzten beiden Abschnitten können komplett dualisiert werden. Wir stellen die wesentlichen Punkte nochmal kurz heraus:

20.6.1 Satz und Definition

Wir definieren eine Teilmenge $\mathcal{C}^\downarrow(\mathbb{R}^d)$ von Funktionen $\mathbb{R}^d \rightarrow [-\infty, +\infty]$ durch die folgenden äquivalenten Aussagen:

- (A) (Definition) $\varrho \in \mathcal{C}^\downarrow(\mathbb{R}^d)$.
- (B) Es gibt eine monoton fallende Folge $(\varrho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\varrho_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ für alle k , die stellenweise gegen ϱ konvergiert.
- (C) ϱ ist oberhalbstetig, nimmt den Wert $+\infty$ nicht an. Weiter gibt es eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^d$, so dass

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid \varrho(x) > 0\} \subseteq K.$$

- (D) ϱ ist oberhalbstetig und besitzt eine Majorante $\tilde{\varrho} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$.
- (E) $-\varrho \in \mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$.

Beachte, dass $\mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\downarrow(\mathbb{R}^d) = \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$.

20.6.2 Definition

Ist $\varrho : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion in $\mathcal{C}^\downarrow(\mathbb{R}^d)$, so definieren wir

$$\begin{aligned} \int^\downarrow \varrho(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d}^\downarrow \varrho(x) dx &:= & - \int^\uparrow (-\varrho)(x) dx && \text{oder — äquivalent:} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varrho_k(x) dx, \end{aligned}$$

wobei $(\varrho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ irgendeine monoton fallende Folge von Funktionen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ ist, die die gegebene Funktion ϱ als stellenweisen Grenzwert besitzt.

20.6.3 Indikatorfunktionen Für eine Indikatorfunktion χ_Y einer Teilmenge $Y \subseteq \mathbb{R}^d$ kann man jetzt die folgenden Äquivalenzen aufschreiben:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & \chi_Y \in \mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d) & \\ & \Downarrow & \\ & \chi_Y \text{ unterhalbstetig} & \iff Y \text{ offen} \\ \\ \text{(ii)} & \chi_Y \in \mathcal{C}^\downarrow(\mathbb{R}^d) & \iff Y \text{ kompakt} \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & \chi_Y \text{ oberhalbstetig} & \iff Y \text{ abgeschlossen} \end{array}$$

Die hier angesprochene merkwürdige Unsymmetrie kommt daher, dass die charakteristische Funktion nicht einer Dualisierung (durch Multiplikation mit -1) unterzogen wird.

20.7 Volumen kompakter Mengen im \mathbb{R}^d

20.7.1 Definition: Volumen

Ist $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt, so definieren wir das (*d-dimensionalen*) *Volumen* dieser Teilmenge durch

$$\text{vol}(K) = \text{vol}_d(K) := \int^{\downarrow} \chi_K(x) dx.$$

Die Definition ist mathematisch umsetzbar, da $\chi_K \in \mathcal{C}^{\downarrow}(\mathbb{R}^d)$.

Im Fall $d = 1$ kann man auch von der *Länge*, bei $d = 2$ von der *Fläche* sprechen.

Der folgende Satz listet gleich die grundlegenden Eigenschaften dieses Volumen-Begriffs auf.

20.7.2 Satz: Eigenschaften des Volumens

- (i) Es seien die beiden kompakten Mengen K und \tilde{K} disjunkt: $K \cap \tilde{K} = \emptyset$. Dann ist

$$\text{vol}(K \cup \tilde{K}) = \text{vol}(K) + \text{vol}(\tilde{K}).$$

- (ii) Es sei $d = m + n$. Die beiden Mengen $K_m \subseteq \mathbb{R}^m$, $K_n \subseteq \mathbb{R}^n$ seien kompakt. Dann gilt:

$$\text{vol}_{m+n}(K_m \times K_n) = \text{vol}_m(K_m) \cdot \text{vol}_n(K_n).$$

- (iii) Prinzip von Cavalieri: Für eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ definieren wir die $(d-1)$ -dimensionalen „Schnitte“

$$K_y := \{(x_1, \dots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1} \mid (x_1, \dots, x_{d-1}, y) \in K\}.$$

Dann gilt:

$$\text{vol}_d(K) = \int_{\mathbb{R}}^{\downarrow} \text{vol}_{d-1}(K_y) dy.$$

Beachte dabei, dass der Integrand außerhalb eines kompakten Intervalls Null ist.

- (iv) Das Volumen eines kompakten achsenparallelen Quaders ist

$$\text{vol}_d([a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_d - a_d).$$

20.7.3 Beweis

(i) Es ist in diesem Fall

$$\begin{aligned} \text{vol}(K) &= \int^{\downarrow} \chi_{K \cup \tilde{K}}(x) dx = \int^{\downarrow} (\chi_K(x) + \chi_{\tilde{K}}(x)) dx \\ &= \int^{\downarrow} \chi_K(x) dx + \int^{\downarrow} \chi_{\tilde{K}}(x) dx = \text{vol}(K) + \text{vol}(\tilde{K}). \end{aligned}$$

(ii) Wir schreiben einen Vektor $x \in \mathbb{R}^d$ als $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ mit $y \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^n$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \text{vol}_{m+n}(K_m \times K_n) &= \int_{\mathbb{R}^d}^{\downarrow} \chi_{K_m \times K_n}(x) dx \\ &\quad \text{(Satz von Fubini)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}^{\downarrow} \int_{\mathbb{R}^m}^{\downarrow} \chi_{K_m \times K_n}(y, z) dy dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}^{\downarrow} \int_{\mathbb{R}^m}^{\downarrow} \chi_{K_m}(y) \cdot \chi_{K_n}(z) dy dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}^{\downarrow} \int_{\mathbb{R}^m}^{\downarrow} \chi_{K_m}(y) dy \cdot \chi_{K_n}(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^m}^{\downarrow} \chi_{K_m}(y) dy \cdot \int_{\mathbb{R}^n}^{\downarrow} \chi_{K_n}(z) dz \\ &= \text{vol}_m(K_m) \cdot \text{vol}_n(K_n). \end{aligned}$$

(iii) Es ist einfach

$$\begin{aligned} \text{vol}_d(K) &= \int_{\mathbb{R}^d}^{\downarrow} \chi_K(\underbrace{x_1, \dots, x_{d-1}}_z, \underbrace{x_d}_y) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}^{\downarrow} \int_{\mathbb{R}^{d-1}}^{\downarrow} \chi_K(z, y) dz dy \\ &= \int_{\mathbb{R}}^{\downarrow} \int_{\mathbb{R}^{d-1}}^{\downarrow} \chi_{K_y}(z) dz dy \\ &= \int_{\mathbb{R}}^{\downarrow} \text{vol}_{d-1}(K_y) dy. \end{aligned}$$

(iv) Für den 1-dimensionalen Quader $[a_1, b_1]$ gilt

$$\text{vol}([a_1, b_1]) = \int_{\mathbb{R}}^{\downarrow} \chi_{[a_1, b_1]}(x) dx = b_1 - a_1.$$

Für die zweite Gleichheit muss man noch überlegen, dass die \mathcal{C}^{\downarrow} -Funktion $\chi_{[a_1, b_1]}$ von oben stellenweise durch die Trapezfunktionen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$

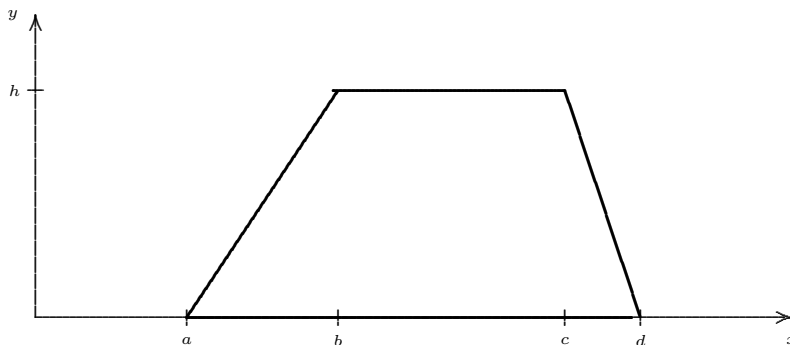
$$\varrho_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [a_1, b_1], \\ 0, & \text{falls } x \in]-\infty, a_1 - \frac{1}{k}] \cup]b_1 + \frac{1}{k}, +\infty[, \\ & \text{dazwischen affin interpoliert,} \end{cases}$$

approximiert werden. Die Integrale konvergieren selbstverständlich gegen $b_1 - a_1$.

Für die höherdimensionale Erweiterung führe man Induktion über die Dimension durch. Beim Induktionsschritt kommt Teil (i) zur Anwendung.

20.7.4 Beispiele

1. Wir rechnen die Fläche eines „achsenparallelen“ Trapezes T aus.



Wie man überlegen bzw. nachvollziehen kann, ist in der Höhe y der 1-dimensionale Schnitt gegeben durch

$$T_y = \{x \in \mathbb{R} \mid a + \frac{y}{h}(b-a) \leq x \leq c + (1 - \frac{y}{h})(d-c)\}.$$

Für $0 \leq y \leq h$ ist die Länge dieses Schnitts

$$\begin{aligned} \text{vol}_1(T_y) &= \int_{\mathbb{R}}^{\downarrow} \chi_{K_y}(x) dx = [c + (1 - \frac{y}{h})(d-c)] - [a + \frac{y}{h}(b-a)] \\ &= d - a - \frac{y}{h}(d-c+b-a), \end{aligned}$$

sonst Null. Es folgt dann

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(T) &= \int_{\mathbb{R}}^{\downarrow} \text{vol}_1(T_y) dy = \int_0^h [d - a - \frac{y}{h}(d-c+b-a)] dy \\ &= h \cdot (d-a) - \frac{h^2}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot (d-c+b-a) = \frac{h}{2} \cdot [(d-a) + (c-b)] \end{aligned}$$

2. Dreieck: Setzt man dann $b = c$ und $g := d - a$, so ergibt sich die Flächenformel für ein Dreieck D :

$$\text{vol}_2(D) = \frac{h}{2} \cdot g.$$

Somit sind die aus der Schule (oder aus Formelsammlungen) bekannten Flächenformeln „fachmathematisch genehmigt“.

3. Für eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ definieren wir den *Zylinder über K* mit Höhe $h > 0$ durch

$$\text{cyl}(K, h) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid (x_1, \dots, x_{d-1}) \in K, x_d \in [0, h]\}$$

Es gilt dann

$$\text{vol}_d(\text{cyl}(K)) = \text{vol}_{d-1}(K) \cdot \text{vol}_1([0, h]) = \text{vol}_{d-1}(K) \cdot h,$$

In Worten: „Grundvolumen mal Höhe“.

4. Für eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ definieren wir den *Kegel über K* mit Höhe $h > 0$ durch

$$\text{cone}(K, h) := \left\{ \left(\left(1 - \frac{y}{h}\right)x_1, \dots, \left(1 - \frac{y}{h}\right)x_{d-1}, y \right) \in \mathbb{R}^d \mid \right. \\ \left. (x_1, \dots, x_{d-1}) \in K, y \in [0, h] \right\}.$$

Der Punkt $(0, \dots, 0, h) \in \mathbb{R}^d$ ist die Spitze des Kegels.

Für die Schnittmengen des Kegels gilt

$$\text{vol}_{d-1}((\text{cone}(K, h))_y) = \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{d-1} \text{vol}_{d-1}(K), \quad y \in [0, h],$$

deshalb mit dem Prinzip von Cavalieri 20.7.2 (iii) und der Substitution $z = 1 - \frac{y}{h}$ gemäß Regel 11.4.1

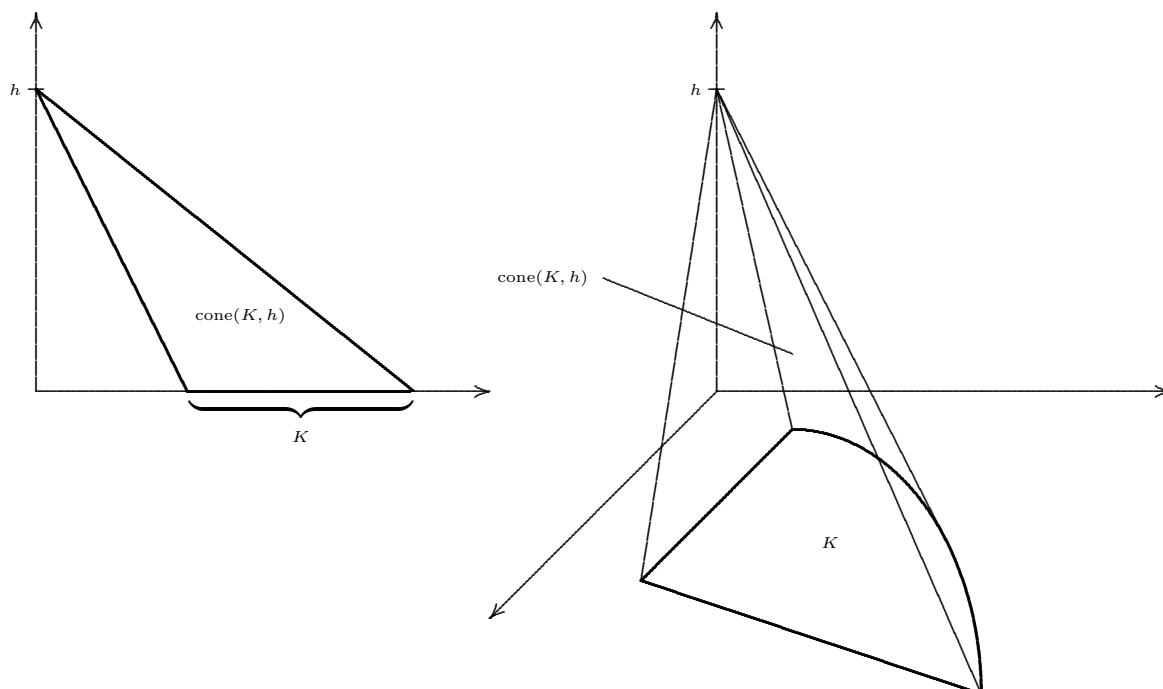
$$\begin{aligned} \text{vol}_d(\text{cone}(K, h)) &= \int_0^h \text{vol}_{d-1}((\text{cone}(K, h))_y) dy = \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{d-1} \cdot \text{vol}_{d-1}(K) dy \\ &= \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{d-1} dy \cdot \text{vol}_{d-1}(K) = \int_1^0 z^{d-1} \cdot (-h) dz \cdot \text{vol}_{d-1}(K) \\ &= \frac{1}{d} \cdot \text{vol}_{d-1}(K) \cdot h. \end{aligned}$$

5. Für $d = 2$ ist der Kegel über einer Strecke K nichts anderes als das Dreieck mit Grundseite K und Spitze $(0, h)$. Es ergibt sich für die Fläche

$$\text{vol}_2(\text{cone}(K, h)) = \frac{1}{2} \cdot \text{vol}_1(K) \cdot h.$$

6. Für $d = 3$ ist der Kegel über einem kompakten Flächenstück K nichts anderes als der Kegel bzw. die Pyramide o.ä. mit Spitze bei $(0, 0, h)$. Es ergibt sich für das Volumen

$$\text{vol}_3(\text{cone}(K, h)) = \frac{1}{3} \cdot \text{vol}_2(K) \cdot h.$$



20.8 Volumen von Kugeln

20.8.1 Formeln zur Vorbereitung

Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}_0$ das bestimmte Integral

$$(i) \quad a_n := \int_{-1}^{+1} (\sqrt{1-y^2})^{n-1} dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

(ii) Es gilt die Rekursionsformel

$$a_0 = \pi, \quad a_1 = 2, \quad a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

(iii) Es gilt die Rekursionsformel

$$a_0 = \pi, \quad a_n \cdot a_{n-1} = \frac{2\pi}{n}, \quad n \geq 1.$$

(iv) Es gilt explizit

$$a_n = \begin{cases} \pi \cdot \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2k-1}{2k} = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n}, & \text{falls } n \geq 2, \text{ gerade,} \\ 2 \cdot \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2k}{2k+1} = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n}, & \text{falls } n \geq 3, \text{ ungerade.} \end{cases}$$

(v) Das Wallis'sche Produkt (vgl. Abschnitt 5.9.4, AYS1) konvergiert und hat den Wert

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2 - 1} = \frac{\pi}{2}.$$

20.8.2 Beweis

(i) Die erste Umformung beruht auf der Substitution $y = \sin x$.

(ii) Wir zeigen die Rekursionsformel für $n \geq 2$ mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cdot \cos x dx \\ &= \left[\cos^{n-1} x \sin x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (n-1) \cos^{n-2} x (-\sin x) \cdot \sin x dx \\ &= (n-1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx + (n-1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \end{aligned}$$

Addieren des letzten Terms auf beiden Seiten liefert die Rekursionsformel.

(iii) Wir führen den Beweis mittels Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Zunächst ist

$$a_1 \cdot a_0 = 2\pi = \frac{2\pi}{1},$$

dann weiter

$$a_{n+1} \cdot a_n = \frac{n}{n+1} a_{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} a_{n-2} \stackrel{\text{IndV}}{=} \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{2\pi}{n-1} = \frac{2\pi}{n+1}.$$

(iv) folgt durch Anwendung von (iii).

(v) Da die Integrandenfunktionen in der Definition (i) jeweils eine monoton fallende Funktionenfolge auf den zugehörigen Integrationsintervallen bilden, ist auch die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend. Aufgrund von

$$1 \geq \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Daraus folgt für $\ell \in \mathbb{N}$ und $n := 2\ell$

$$\prod_{k=1}^{\ell} \frac{4k^2}{4k^2 - 1} = \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{4k^2}{4k^2 - 1} = \frac{\prod_{k=1}^{\frac{(n+1)-1}{2}} \frac{2k}{2k+1}}{\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2k-1}{2k}} = \frac{\frac{a_{n+1}}{2}}{\frac{a_n}{\pi}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}.$$

20.8.3 Satz: Volumen der Einheitskugel

Für das Volumen der d -dimensionalen Einheitskugel

$$B_d = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \leq 1 \right\}.$$

gilt

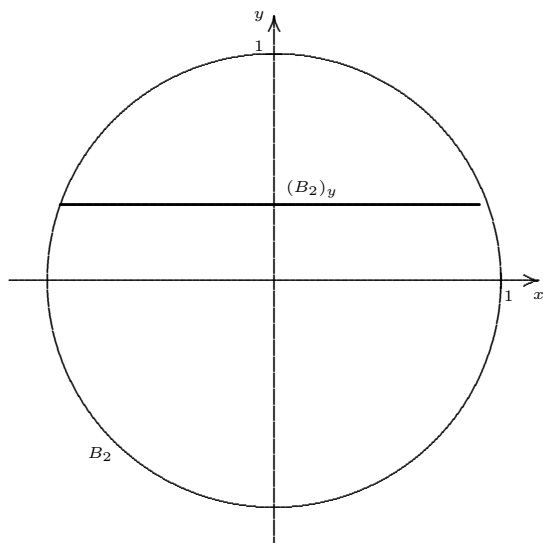
$$\text{vol}_d(B_d) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{(\frac{d}{2})!}, & \text{falls } d \text{ gerade} \\ \frac{2^{\frac{d+1}{2}} \cdot \pi^{\frac{d-1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot d}, & \text{falls } d \text{ ungerade} \end{array} \right\} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{d}{2})}.$$

Es wurde dabei noch bemerkt, dass dieser Wert mit Hilfe der Γ -Funktion ausgedrückt werden kann.

20.8.4 Beweis

(0) Wir bemerken zunächst, dass im Beweis nur die Formeln (i) – (iii) aus Satz 20.8.1 gebraucht werden.

(1) Es ist klar, dass $\text{vol}_1(B_1) = \text{vol}_1([-1, +1]) = 2$. Wir betrachten zunächst den Fall $d = 2$.



Der Schnitt von B_2 mit der Gerade in Höhe $y \in [-1, +1]$ ist gegeben durch das Intervall

$$(B_2)_y = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq +\sqrt{1-y^2}\} = [-\sqrt{1-y^2}, +\sqrt{1-y^2}]$$

mit Länge

$$\text{vol}_1([- \sqrt{1-y^2}, +\sqrt{1-y^2}]) = 2 \sqrt{1-y^2}.$$

Gemäß Cavalieri-Prinzip 20.7.2 (iii) ergibt sich in Verbindung mit der Formel in 20.8.1 (ii)

$$\text{vol}_2(B_2) = \int_{-1}^{+1} 2 \sqrt{1-y^2} dy = 2 a_2 = \pi.$$

(2) Da die Schnittmenge der d -dimensionalen Einheitskugel mit der Ebene $x_d = y$ gegeben ist durch

$$(B_d)_y = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^{d-1} \mid \|x\| \leq \sqrt{1-y^2}\}, & \text{falls } |y| \leq 1, \\ \emptyset, & \text{falls } |y| > 1, \end{cases}$$

ergibt sich mit dem Cavalieri-Prinzip 20.7.2 (iii)

$$\begin{aligned} \text{vol}_d(B_d) &= \int_{-1}^{+1} \text{vol}_{d-1}((B_d)_y) dy = \int_{-1}^{+1} (\sqrt{1-y^2})^{d-1} \text{vol}_{d-1}(B_{d-1}) dy \\ &= \int_{-1}^{+1} (\sqrt{1-y^2})^{d-1} dy \cdot \text{vol}_{d-1}(B_{d-1}) = a_d \cdot \text{vol}_{d-1}(B_{d-1}). \end{aligned}$$

(3) Zweimalige Anwendung dieser Formel liefert

$$\begin{aligned} \text{vol}_d(B_d) &= a_d \cdot \text{vol}_{d-1}(B_{d-1}) = a_d \cdot a_{d-1} \cdot \text{vol}_{d-2}(B_{d-2}) \\ &\stackrel{20.8.1(\text{iii})}{=} \frac{2\pi}{d} \cdot \text{vol}_{d-2}(B_{d-2}). \end{aligned}$$

Zusammen mit dem Induktionsanfang aus Schritt (1) Induktionsanfang

$$\text{vol}_1(B_1) = 2, \quad \text{vol}_2(B_2) = \pi$$

erhält man schließlich die Formel aus dem Satz für alle $d \in \mathbb{N}$.

20.8.5 Volumen der 7-Kugel Damit können wir die mehrfach angekündigte Berechnung des Volumens der 7-dimensionalen Einheitskugel abschließen:

$$\text{vol}_7(B_7) = \frac{2^{\frac{7+1}{2}} \cdot \pi^{\frac{7-1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 7} = \frac{2^4 \cdot \pi^3}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{16}{105} \pi^3.$$

Für $d = 3$ ergibt sich die aus der Schulgeometrie bekannte Formel

$$\text{vol}_3(B_3) = \frac{4}{3} \pi.$$

21 Die Transformationsformel

21.1 Vorbereitung: Zerlegung der Eins

21.1.1 Satz: C^∞ -Zerlegung der Eins

Es sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung der kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann gibt es endlich viele C^∞ -Funktionen

$$\psi_j : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow [0, 1] \\ x & \mapsto \psi_j(x), \end{cases} \quad j = 1, \dots, n$$

mit folgenden Eigenschaften

- Zu jedem $j = 1, \dots, n$ gibt es ein $U \in \mathcal{U}$, so dass $\text{supp } \psi_j \subseteq U$.
- Es ist $\psi_1(x) + \dots + \psi_n(x) = 1$ für alle $x \in K$.

Man sagt, dass die Funktionen ψ_j eine der Überdeckung \mathcal{U} unterliegende C^∞ -Zerlegung der Eins bilden.

21.1.2 Beweis[⊖]

(1) Es sei zunächst ein $a \in K$ festgehalten.

Dazu gibt es ein $U_a \in \mathcal{U}$ und weiter offene Kugeln V_a, W_a mit Mittelpunkt a und Radien $r_a < R_a$, so dass

$$a \in \overline{V_a} \subseteq W_a \subseteq \overline{W_a} \subseteq U_a.$$

Die C^∞ -Funktion

$$\omega_a : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow [0, 1] \\ x & \mapsto \Omega_{-R_a, -r_a, +r_a, +R_a}(\|x\|) \end{cases}$$

(vgl. Satz 11.2.2) hat auf $\overline{V_a}$ den konstanten Wert 1, außerhalb von W_a den konstanten Wert 0 und dazwischen nehmen sie Werte zwischen 0 und 1 an.

(2) Da K kompakt ist, existiert zu der offenen Überdeckung

$$\mathcal{V} := \{V_a | a \in K\}$$

eine endliche Teilüberdeckung

$$\mathcal{V}' = \{V_{a_j} | j = 1, \dots, n\}$$

von \mathcal{V} für K .

(3) Wir definieren die Funktionen ψ_1, \dots, ψ_n durch

$$\psi_j := [1 - \omega_{a_1}] \cdot \dots \cdot [1 - \omega_{a_{j-1}}] \cdot \omega_{a_j}$$

(Für $j = 1$ fallen die Faktoren in eckigen Klammern einfach weg).

(4) Es bleiben noch die im Satz angegebenen Eigenschaften zu überprüfen:

Da alle Funktionen ω_j Werte zwischen 0 und 1 annehmen, gilt dies auch für die Funktionen ψ_j . Es ist weiter zu sehen, dass

$$\text{supp } \psi_j \subseteq \text{supp } \omega_{a_j} \subseteq U_{a_j}.$$

(5) Als nächstes beweist man leicht per Induktion über $j = 1, \dots, n$, dass

$$\psi_1 + \dots + \psi_j = 1 - [1 - \omega_{a_1}] \cdot \dots \cdot [1 - \omega_{a_j}].$$

(6) Betrachtet man nun ein beliebiges $x \in K$, so ist es in einer offenen Kugel $V_{a_j} \in \mathcal{V}$ enthalten. Es gilt dann

$$\omega_{a_j}(x) = 1,$$

deshalb

$$\psi_1(x) + \dots + \psi_n(x) = 1 - [1 - \omega_{a_1}(x)] \cdot \dots \cdot \underbrace{[1 - \omega_{a_j}(x)]}_{=0} \cdot \dots \cdot [1 - \omega_{a_n}(x)] = 1.$$

- Aufgrund von (*) sind die oberen $j - 1$ Einträge in dieser Spalte gleich Null.
- Die Spalte als ganzes ist aufgrund der Invertierbarkeit der Matrix ungleich Null.
- Also gibt es ein k mit $j \leq k \leq d$, so dass an der Position (j, k) der Matrix ein Eintrag ungleich Null ist:

$$\partial_j(\vartheta_j)_k(0) \neq 0.$$

(5) Wir definieren die Funktion

$$h_{j+1} : \begin{cases} V_j & \rightarrow \mathbb{R}^d \\ y & \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{j-1} \\ (\vartheta_j)_k(y) \\ y_{j+1} \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Gemäß dem Satz über inverse Funktionen existieren Null-Umgebungen

$$W_{j+1} \subseteq V_j, \quad V_{j+1} := h_{j+1}(W_{j+1}),$$

so dass nach Einschränkung die Funktion

$$h_{j+1} : W_{j+1} \rightarrow V_{j+1}$$

bijektiv wird mit der primitiven \mathcal{C}^1 -Umkehrfunktion

$$h_{j+1}^{-1} : \begin{cases} V_{j+1} & \rightarrow W_{j+1} \\ x & \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ (h_{j+1}^{-1})_j(x) \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}. \end{cases}$$

(6) Wir definieren weiter die Null-Umgebungen und Funktionen

$$\begin{aligned} U_{j+1} &:= g_j^{-1}(W_{j+1}) \\ g_{j+1} &:= h_{j+1} \circ g_j : U_{j+1} \rightarrow V_{j+1} \\ \vartheta_{j+1} &:= Q_{j+1} \circ \vartheta_j \circ h_{j+1}^{-1} : V_{j+1} \rightarrow \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

Dabei sei Q_{j+1} die Permutationsmatrix, die die Zeilen k und j eines Vektors aus \mathbb{R}^d vertauscht, im Fall $k = j$ die Einheitsmatrix. Beachte $Q_{j+1}^2 = I$.

(7) Es ist dann nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \vartheta &= P_j \circ \vartheta_j \circ g_j \\ &= P_j \circ Q_{j+1} \circ Q_{j+1} \circ \vartheta_j \circ h_{j+1}^{-1} \circ h_{j+1} \circ g_j \\ &= \underbrace{P_j \circ Q_{j+1}}_{=: P_{j+1}} \circ \vartheta_{j+1} \circ \underbrace{h_{j+1} \circ g_j}_{=: g_{j+1}} \end{aligned}$$

und g_{j+1} ein Produkt von j primitiven Funktionen.

(8) Es muss noch die Eigenschaft (*) für $j + 1$ bewiesen werden. Dazu sei $x \in V_{j+1}$ beliebig. Dazu gibt es ein $y \in W_{j+1}$ mit $x = h_{j+1}(y)$. Es folgt dann

$$\begin{aligned} \vartheta_{j+1}(x) &= \vartheta_{j+1} \circ h_{j+1}(y) = Q_{j+1} \circ \vartheta_j(y) \\ &= Q_{j+1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{j-1} \\ (\vartheta_j)_j(y) \\ (\vartheta_j)_{j+1}(y) \\ \vdots \\ (\vartheta_j)_k(y) \\ \vdots \\ (\vartheta_j)_d(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{j-1} \\ (\vartheta_j)_k(y) \\ (\vartheta_j)_{j+1}(y) \\ \vdots \\ (\vartheta_j)_j(y) \\ \vdots \\ (\vartheta_j)_d(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j \\ (\vartheta_j)_{j+1}(y) \\ \vdots \\ (\vartheta_j)_j(y) \\ \vdots \\ (\vartheta_j)_d(y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

21.3 Die Transformationsformel

21.3.1 Satz: Transformationsformel für \mathcal{C}_c -Funktionen

Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $\vartheta : X \rightarrow Y$ eine bijektive \mathcal{C}^1 -Abbildung, wobei $\vartheta'(x)$ invertierbar ist für alle $x \in X$. Weiter sei $\varrho : Y \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger in Y .

Dann gilt:

$$\int \varrho(y) dy = \int \varrho(\vartheta(x)) \cdot |\det \vartheta'(x)| dx.$$

21.3.2 Beweis[⊖]

(1) Wir überlegen zunächst: Ist die Aussage für zwei Abbildungen $g : X \rightarrow Z$ und $h : Z \rightarrow Y$ richtig, so gilt sie auch für $\vartheta = h \circ g : X \rightarrow Y$. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \int \varrho(y) dy &= \int \underbrace{\varrho(h(z)) \cdot |\det h'(z)|}_{=: \tilde{\varrho}(z)} dz \\ &= \int \underbrace{\varrho(h(g(x))) \cdot |\det h'(g(x))| \cdot |\det g'(x)|}_{=: \tilde{\varrho}(g(x))} dx \\ &\quad \text{(Kettenregel und Determinanten-Multiplikations-Satz)} \\ &= \int \varrho(\vartheta(x)) \cdot |\det \vartheta'(x)| dx \end{aligned}$$

(2) Wir zeigen die Aussage zunächst für den Fall, dass

- Y konvex ist und
- ϑ eine primitive bijektive \mathcal{C}^1 -Abbildung $X \rightarrow Y$ ist, wobei $\vartheta'(x)$ invertierbar ist für alle $x \in X$.
(Zur Einpassung der Notation benennen wir diese Abbildung in g um.)

Aufgrund des Satzes 20.2.2 über die Vertauschbarkeit in der Integrationsreihenfolge können wir annehmen, dass die Funktion γ in der ersten Koordinate von g auftritt, die Funktion g also die Form

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} = g(x) = \begin{pmatrix} \gamma(x_1, \dots, x_d) \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}.$$

hat. Da Y konvex ist, ist auch das Bild $X = g^{-1}(Y)$ unter der stetigen Abbildung konvex.

(3) Es existieren kompakte achsenparallele Quader

$$\begin{aligned} Q_Y &= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d] \\ Q_X &= [\alpha_1, \beta_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d], \end{aligned}$$

so dass

$$\text{supp } \varrho \subseteq Q_Y, \quad g^{-1}(\text{supp } \varrho) \subseteq Q_X.$$

(4) Wegen

$$\det g'(x) = \det \begin{pmatrix} \partial_1 \gamma(x) & \partial_2 \gamma(x) & \cdots & \cdots & \partial_d \gamma(x) \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \partial_1 \gamma(x)$$

muss $\partial_1 \gamma \neq 0$ auf X sein. Aufgrund des Zwischenwertsatzes und der Konvexität von X muss $\partial_1 \gamma$ konstantes Vorzeichen haben.

(5) Für festes $\tilde{y} = (y_2, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$ sei das Intervall

$$[\alpha(\tilde{y}), \beta(\tilde{y})] := \gamma^{-1}(\cdot, \tilde{y})([\min(\text{supp } \varrho), \max(\text{supp } \varrho)]) \subseteq [\alpha_1, \beta_1]$$

definiert. Die auf ihm definierte Abbildung

$$\gamma_{\tilde{y}} : \begin{cases} [\alpha(\tilde{y}), \beta(\tilde{y})] & \rightarrow [a_1, b_1] \\ x_1 & \mapsto \gamma(x_1, \tilde{y}) \end{cases}$$

ist streng monoton.

(6) Es gilt nun

$$\begin{aligned} & \int \varrho(y) dy \\ &= \int_{a_d}^{b_d} \cdots \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} \varrho(y_1, \dots, y_d) dy_1 \right] dy_2 \cdots dy_d \\ & \quad \text{(1-dimensionale Substitutionsregel)} \\ &= \int_{a_d}^{b_d} \cdots \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{\alpha(\tilde{y})}^{\beta(\tilde{y})} \varrho(\gamma(x_1, \tilde{y}), \tilde{y}) |\partial_1 \gamma(x_1, \tilde{y})| dx_1 \right] dy_2 \cdots dy_d \\ & \quad \text{(Umbenennung der Integrationsvariablen), } \tilde{x} = \tilde{y} \\ &= \int_{a_d}^{b_d} \cdots \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{\alpha(\tilde{x})}^{\beta(\tilde{x})} \varrho(\gamma(x_1, \tilde{x}), \tilde{x}) |\partial_1 \gamma(x_1, \tilde{x})| dx_1 \right] dx_2 \cdots dx_d \\ & \quad \text{(Ausweitung der Integrationsgrenzen, da Integrand Null auf den Erweiterungsintervallen)} \\ &= \int_{a_d}^{b_d} \cdots \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{\alpha}^{\beta} \varrho(\gamma(x), \tilde{x}) |\partial_1 \gamma(x_1, \tilde{x})| dx_1 \right] dx_2 \cdots dx_d \\ &= \int \varrho(g(x)) |\det g'(x)| dx. \end{aligned}$$

(7) Wir zeigen die Aussage als nächstes für den Fall, dass Y eine beliebige offene Menge und $g : X \rightarrow Y$ eine primitive bijektive C^1 -Abbildung ist.

Zu jedem $z \in \text{supp } \varrho$ gibt es einen offenen achsenparallelen Quader Q_z mit $z \in Q_z \subseteq Y$. Alle diese Quader bilden eine offene Überdeckung der kompakten Menge $\text{supp } \varrho$. Es gibt also eine unterliegende C^∞ -Zerlegung der Eins, das sind endlich viele C^∞ -Funktionen

$$\psi_j : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow [0, 1] \\ y & \mapsto \psi_j(y) \end{cases}$$

mit folgenden Eigenschaften

- Zu jedem $j = 1, \dots, n$ gibt es ein $z \in \text{supp } \varrho$, so dass $\text{supp } \psi_j \subseteq Q_z$.
- Es ist $\psi_1(y) + \dots + \psi_n(y) = 1$ für alle $y \in \text{supp } \varrho$.

Die Abbildung ϱ kann jetzt als Summe

$$\varrho(y) = \varrho(y)\psi_1(y) + \dots + \varrho(y)\psi_n(y)$$

von n Funktionen $\varrho \cdot \psi_j$ mit Träger jeweils in einem Q_z geschrieben werden.

Deshalb ist die Aussage (3) auf die Aussage in Schritt (2) zurückgeführt.

(8) Ist nun $\vartheta : X \rightarrow Y$ eine beliebige C^1 -Abbildung, so gibt es gemäß dem Satz 21.2.4 über die Primitiv-Zerlegung eine Permutationsmatrix P und eine C^1 -Abbildung Θ , die das Produkt von d primitiven Abbildungen ist, so dass $\vartheta = P \circ \Theta$. Da der Satz für jede einzelne dieser Abbildungen richtig ist, gilt er auch für ϑ .

21.3.3 Hilfssatz

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.

(i) Zu der kompakten Menge $K \subseteq X$ gibt es eine \mathcal{C}^∞ -Funktion $\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ mit

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in K, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^d \setminus X. \end{cases}$$

(ii) Es sei $\varrho \in \mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$ mit $\text{supp } \varrho \subseteq X$. Dann gibt es eine monoton steigende Folge $(\varrho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\lim \varrho_k = \varrho$ stellenweise und

$$\text{supp } \varrho_k \subseteq X \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

21.3.4 Beweis

(1) Wähle für jedes $y \in K$ eine offene Umgebung U_y mit $y \in U_y \subseteq X$.

(2) Es gibt dann eine der Überdeckung $\{U_y | y \in K\}$ von K unterliegende \mathcal{C}^∞ -Zerlegung der Eins, bestehend aus n Funktionen ψ_1, \dots, ψ_n mit $\text{supp } \psi_j \subseteq X$ und $\psi_1 + \dots + \psi_n \equiv 1$ auf K .

(3) Setze einfach $\Psi := \psi_1 + \dots + \psi_n$.

(4) Zur Aussage (ii): Es gibt eine Folge $(\tilde{\varrho}_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, die monoton steigend stellenweise ϱ approximiert. Setze einfach

$$\varrho_k := \Psi \cdot \tilde{\varrho}_k.$$

21.3.5 Satz: Transformationsformel für $\mathcal{C}^\uparrow/\mathcal{C}^\downarrow$ -Funktionen

Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $\vartheta : X \rightarrow Y$ eine bijektive \mathcal{C}^1 -Abbildung, wobei $\vartheta'(x)$ invertierbar ist für alle $x \in X$.

(i) Weiter sei $\varrho : Y \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{C}^\uparrow -Funktion mit Träger in Y .

Dann ist die Funktion

$$\varrho \circ \vartheta : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} \varrho(\vartheta(x)), & \text{falls } x \in X, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{cases}$$

ebenfalls in $\mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$ enthalten. Es gilt

$$\int^\uparrow \varrho(y) dy = \int^\uparrow \varrho(\vartheta(x)) \cdot |\det \vartheta'(x)| dx.$$

(ii) Es gilt die zu (i) dualisierte Aussage für \mathcal{C}^\downarrow Funktionen.

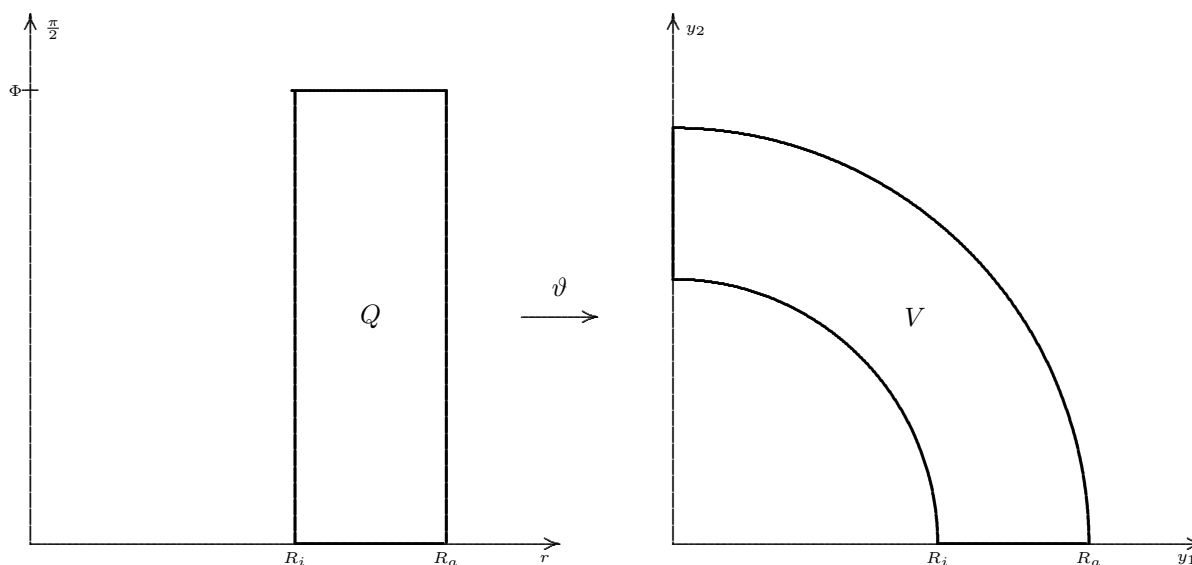
21.3.6 Beweis

Wähle eine approximierende Folge (ϱ_k) für ϱ gemäß dem vorhergehenden Hilfssatz. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \int^\uparrow \varrho(y) dy &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int^\uparrow \varrho_k(y) dy \\ &\stackrel{\text{S 21.3.1}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int^\uparrow \varrho_k(\vartheta(x)) \cdot |\det \vartheta'(x)| dx = \int^\uparrow \varrho(\vartheta(x)) \cdot |\det \vartheta'(x)| dx. \end{aligned}$$

21.3.7 Beispiel

Wir verbiegen ein Rechteck Q zu einem „Viertelring“ V wie in der folgenden Skizze:



Die Verbiegung ist gegeben durch die Abbildung

$$\vartheta : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x = (r, \varphi) & \mapsto (r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi) \end{cases}$$

mit Ableitung und Determinante

$$\vartheta'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \det \vartheta'(r, \varphi) = r.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(V) &= \int^{\downarrow} \chi_V(y) dy \stackrel{\text{TrF}}{=} \int^{\downarrow} \chi_V(\vartheta(x)) \cdot |\det \vartheta'(x)| dx \\ &= \int^{\downarrow} \chi_Q(r, \varphi) \cdot r d\varphi dr = \int_{R_i}^{R_a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r d\varphi dr \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R_a^2 - R_i^2}{2} = \pi \cdot \frac{R_a^2 - R_i^2}{4}. \end{aligned}$$

21.3.8 Hilfssatz aus der linearen Algebra, vgl. Kapitel 23.4 in LIA2_SS2014

Die folgenden Aussagen über eine Abbildung $\vartheta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ sind äquivalent:

- (A) (Def) Die Abbildung ϑ heißt *Isometrie*.
 (B) Der Abstand zweier beliebiger Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^d$ wird durch ϑ nicht verändert:

$$\|\vartheta(x) - \vartheta(\tilde{x})\| = \|x - \tilde{x}\| \quad \text{für alle } x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^d.$$

- (C) ϑ hat die Form

$$\vartheta(x) = Ax + b,$$

wobei A eine orthogonale $d \times d$ -Matrix ($A^T = A^{-1}$) und b ein Vektor des \mathbb{R}^d ist.

21.3.9 Beweis

Zur besseren Übersicht verwenden wir anstelle des Symbols \tilde{x} das Symbol y .

- (1) Wir beschäftigen uns zunächst mit der einfacheren Richtung (C) \Rightarrow (B): Hier ist einfach

$$\begin{aligned} \|(Ax + b) - (Ay + b)\|^2 &= \|A(x - y)\|^2 = \langle A(x - y), A(x - y) \rangle \\ &= [A(x - y)]^T A(x - y) = (x - y)^T \underbrace{A^T A}_{=I} (x - y) \\ &= (x - y)^T (x - y) = \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

- (2) Jetzt sei (B) erfüllt. Wir zeigen der Reihe nach, dass die durch

$$A(x) := \vartheta(x) - \vartheta(0)$$

auf \mathbb{R}^d definierte Abbildung

- ebenfalls eine Isometrie und normerhaltend ist,
- das Skalarprodukt invariant lässt,
- linear ist,
- orthogonal ist.

Der erste Punkt ist trivial.

- (3) Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ \|A(x) - A(y)\|^2 &= \langle A(x) - A(y), A(x) - A(y) \rangle \\ &= \langle A(x), A(x) \rangle - 2\langle A(x), A(y) \rangle + \langle A(y), A(y) \rangle \\ &= \|A(x)\|^2 - 2\langle A(x), A(y) \rangle + \|A(y)\|^2. \end{aligned}$$

Da A eine Isometrie und normerhaltend ist, folgt die Übereinstimmung der beiden Skalarprodukte in den jeweils letzten Zeilen:

$$\langle A(x), A(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^d.$$

(4) Weiter ist für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^d$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 & \|A(\alpha x + \beta y) - [\alpha A(x) + \beta A(y)]\|^2 \\
 = & \langle A(\alpha x + \beta y) - [\alpha A(x) + \beta A(y)], A(\alpha x + \beta y) - [\alpha A(x) + \beta A(y)] \rangle \\
 = & \langle A(\alpha x + \beta y), A(\alpha x + \beta y) \rangle \\
 & - 2\langle A(\alpha x + \beta y), [\alpha A(x) + \beta A(y)] \rangle \\
 & + \langle \alpha A(x) + \beta A(y), \alpha A(x) + \beta A(y) \rangle \\
 = & \langle A(\alpha x + \beta y), A(\alpha x + \beta y) \rangle \\
 & - 2\alpha \langle A(\alpha x + \beta y), A(x) \rangle - 2\beta \langle A(\alpha x + \beta y), A(y) \rangle \\
 & + \alpha^2 \langle A(x), A(x) \rangle + 2\alpha\beta \langle A(x), A(y) \rangle + \beta^2 \langle A(y), A(y) \rangle \\
 & \text{(Schritt 3: Invarianz des Skalarprodukts)} \\
 = & \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle \\
 & - 2\alpha \langle \alpha x + \beta y, x \rangle - 2\beta \langle \alpha x + \beta y, y \rangle \\
 & + \alpha^2 \langle x, x \rangle + 2\alpha\beta \langle x, y \rangle + \beta^2 \langle y, y \rangle \\
 = & 0.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass A linear ist.

(5) Nun ist für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ wegen

$$\langle x, y \rangle = \langle Ax, Ay \rangle = x^T A^T Ay$$

$A^T A = I$. Daraus folgt dann mit $b := \vartheta(0)$, dass $\vartheta(x) = Ax + \vartheta(0) = Ax + b$, also (C).

21.3.10 Korollar

Es sei $\vartheta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Isometrie.

(i) Für $\varrho \in \mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$

$$\int^\uparrow \varrho(y) dy = \int^\uparrow \varrho(\vartheta(x)) dx.$$

(ii) Für $\varrho \in \mathcal{C}^\downarrow(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\int^\downarrow \varrho(y) dy = \int^\downarrow \varrho(\vartheta(x)) dx.$$

21.3.11 Beweis

Es ist

$$\det \vartheta'(x) = A \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Wegen $A^T A = I$ ist

$$(\det A)^2 = \det A^T \cdot \det A = \det(A^T \cdot A) = \det I = 1,$$

woraus $|\det \vartheta'(x)| = |\det A| = 1$ folgt. Die Aussagen folgen dann mit Satz 21.3.5.

21.4 Anwendungen: Volumina

21.4.1 Satz: Weitere Eigenschaften des Volumens (vgl. Satz 20.7.2)

(i) Ist

$$\vartheta : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow \mathbb{R}^d \\ x & \mapsto Ax + b \end{cases}$$

eine affine Abbildung, so gilt für das Volumen einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$

$$\text{vol}_d(\vartheta(K)) = |\det A| \cdot \text{vol}_d(K).$$

(ii) Beachte bei (i) die Spezialfälle:

$$\vartheta \text{ ist Isometrie} \iff A \text{ ist orthogonal} \implies \text{vol}_d(\vartheta(K)) = \text{vol}_d(K)$$

$$\vartheta \text{ ist Homothetie} \iff A = \alpha \text{id}_{\mathbb{R}^d} \implies \text{vol}_d(\vartheta(K)) = \alpha^d \cdot \text{vol}_d(K).$$

21.4.2 Beweis

Ist A invertierbar, so folgt dies mit der Transformationsformel:

$$\begin{aligned} \text{vol}_d(\vartheta(K)) &= \int^{\downarrow} \chi_{\vartheta(K)}(x) dx \\ &= \int^{\downarrow} \chi_K(\vartheta^{-1}(x)) dx \\ &= \int^{\downarrow} \chi_K(\vartheta^{-1}(\vartheta(x))) \cdot |\det A| dx \\ &= |\det A| \cdot \int^{\downarrow} \chi_K(x) dx \\ &= |\det A| \cdot \text{vol}_d(K). \end{aligned}$$

Im Fall, dass A nicht-invertierbar ist, nehmen wir (O.B.d.A.) an, dass $b = 0$. Es gibt eine invertierbare lineare Abbildung (Matrix) $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$, so dass das Bild $BA(K)$ in der $(d-1)$ -dimensionalen Hyperebene $\{x \in \mathbb{R}^d | x_d = 0\}$ enthalten ist. Für jedes $\varepsilon > 0$ kann diese Bildmenge in einem Quader

$$[a_1, b_1] \times \dots \times [a_{d-1}, b_{d-1}] \times [-\varepsilon, +\varepsilon]$$

eingeschlossen werden. Da das Volumen dieser Quader durch Verkleinern von ε beliebig klein gemacht werden kann, muss

$$\text{vol}_d(BA(K)) = 0$$

gelten. Dann gilt aber auch

$$\text{vol}_d(A(K)) = \text{vol}_d(B^{-1}BA(K)) = |\det B^{-1}| \cdot \text{vol}_d(BA(K)) = 0 = |\det A| \cdot \text{vol}_d(K).$$

21.4.3 Beispiel Die d Vektoren $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}^d$ spannen — per definitionem — ein *Parallelepip*ed (auch: *Parallelotop*)

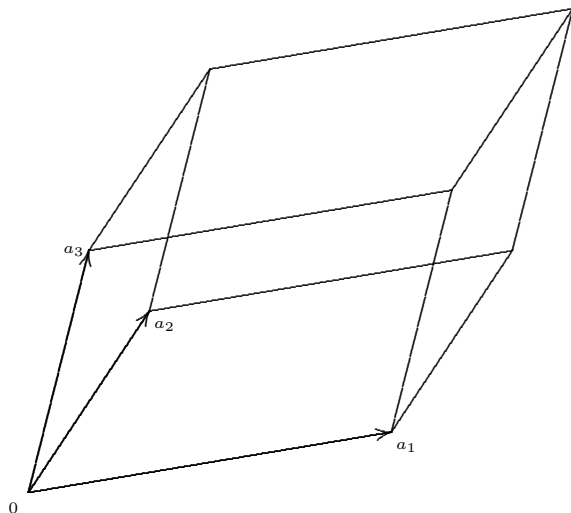
$$P = [0, 1] a_1 + [0, 1] a_2 + \dots + [0, 1] a_d$$

auf. Da es sich dabei um das Bild des Einheitswürfels $[0, 1]^d$ unter der durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_d \end{pmatrix}$$

mit den Spaltenvektoren a_1, \dots, a_d definierten Abbildung handelt, gilt

$$\text{vol}(P) = \text{vol}(A([0, 1]^d)) = |\det A| \text{vol}([0, 1]^d) = |\det A|.$$



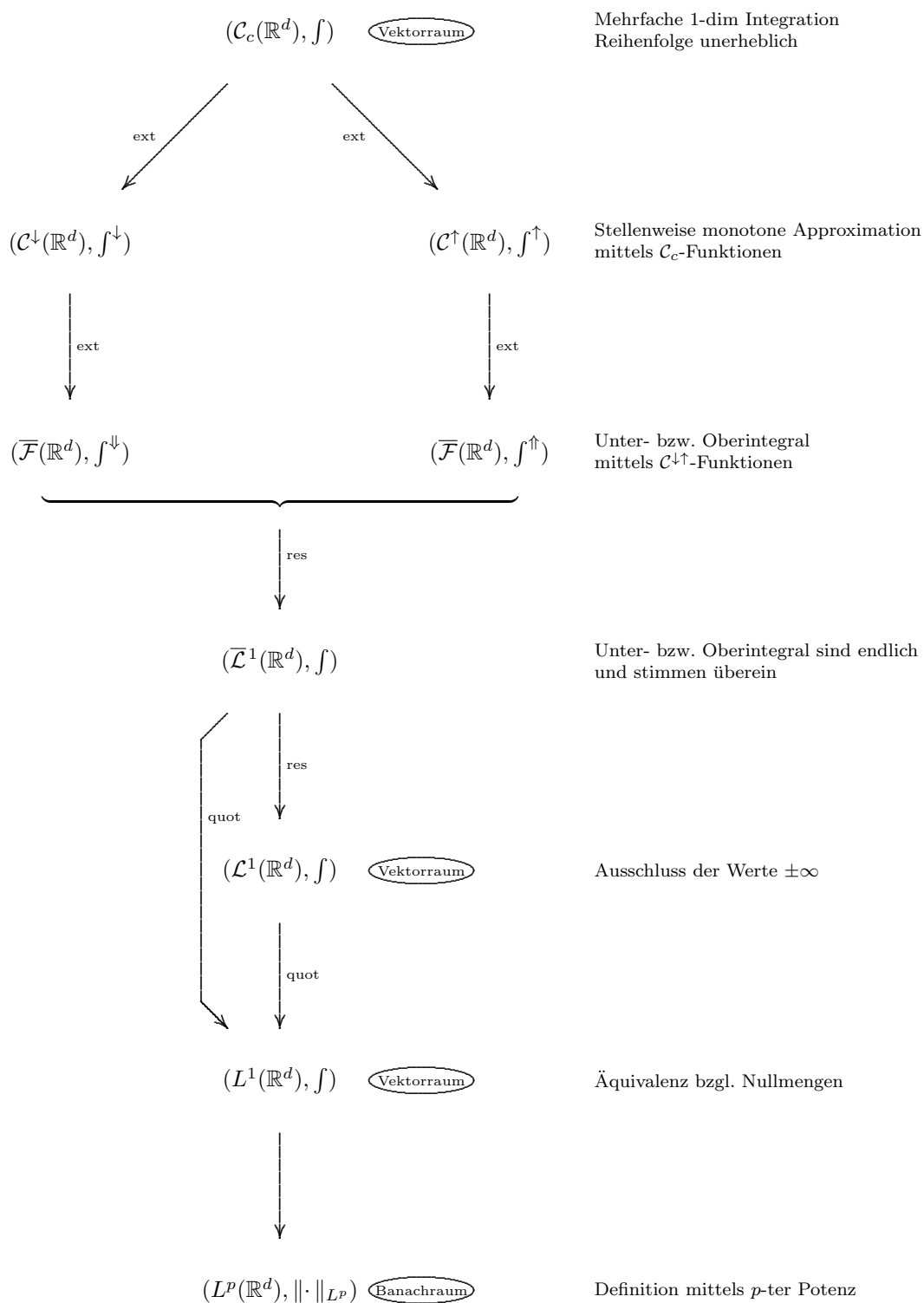
Im Fall $d = 3$ heißt die Zahl

$$\det A = \langle a_1 \times a_2, a_3 \rangle$$

auch das *Spatprodukt* der drei Vektoren a_1, a_2, a_3 .

22 Lebesgue'sche Integration

22.1 Die Route zum Lebesgue-Integral — Überblick



22.2 Ober- und Unterintegral für beliebige Funktionen

Wir bezeichnen die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [-\infty, +\infty]$ mit $\overline{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d)$.

22.2.1 Definition:

Für eine beliebige Funktion $f \in \overline{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d)$ definieren wir das *Ober- und Unterintegral* durch

$$\begin{aligned} \int^{\uparrow} f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d}^{\uparrow} f(x) dx &:= \inf \left\{ \int^{\uparrow} \varphi(x) dx \mid \varphi \in \mathcal{C}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d), \varphi \geq f \right\} &\in [-\infty, +\infty] \\ \int^{\downarrow} f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d}^{\downarrow} f(x) dx &:= \sup \left\{ \int^{\downarrow} \psi(x) dx \mid \psi \in \mathcal{C}^{\downarrow}(\mathbb{R}^d), \psi \leq f \right\} \\ &= - \int^{\uparrow} (-f)(x) dx &&\in [-\infty, +\infty] \end{aligned}$$

22.2.2 Satz

Es sei $f \in \overline{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d)$.

- (i) Gilt für das Oberintegral $\int^{\uparrow} f(x) dx > -\infty$, so ist diese Zahl eindeutig durch die folgende Aussage festgelegt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Funktion $\varphi \in \mathcal{C}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d)$, so dass

$$f \leq \varphi, \quad \int^{\uparrow} \varphi(x) dx \leq \int^{\uparrow} f(x) dx + \varepsilon.$$

- (ii) Gilt für das Unterintegral $\int^{\downarrow} f(x) dx < +\infty$, so ist diese Zahl eindeutig durch die folgende Aussage festgelegt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Funktion $\psi \in \mathcal{C}^{\downarrow}(\mathbb{R}^d)$, so dass

$$f \geq \psi, \quad \int^{\downarrow} \psi(x) dx \geq \int^{\downarrow} f(x) dx - \varepsilon.$$

22.2.3 Beweis

Berücksichtigt man die im nächsten Satz formulierte Eigenschaft (i), so beinhaltet der Satz eine Umschreibung der Definition.

22.2.4 Satz: Eigenschaften von \uparrow - und \downarrow -Integral

(i) Für zwei Funktionen $f, g \in \overline{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d)$ mit $f \leq g$ gilt

$$\int^{\uparrow} f(x) dx \leq \int^{\uparrow} g(x) dx$$

$$\int^{\downarrow} f(x) dx \leq \int^{\downarrow} g(x) dx$$

(ii) Für $\alpha \in \mathbb{R}^+$ und $f \in \overline{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\int^{\uparrow} (\alpha f)(x) dx = \alpha \int^{\uparrow} f(x) dx$$

$$\int^{\downarrow} (\alpha f)(x) dx = \alpha \int^{\downarrow} f(x) dx.$$

(iii) Sind für $f, g \in \overline{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d)$ die jeweils unterhalb der geschweiften Klammern angebrachten Bedingungen erfüllt, so gilt

$$\int^{\uparrow} \underbrace{(f+g)}_{\text{wohldefiniert}}(x) dx \leq \underbrace{\int^{\uparrow} f(x) dx}_{>-\infty} + \underbrace{\int^{\uparrow} g(x) dx}_{>-\infty}$$

$$\int^{\downarrow} \underbrace{(f+g)}_{\text{wohldefiniert}}(x) dx \geq \underbrace{\int^{\downarrow} f(x) dx}_{<+\infty} + \underbrace{\int^{\downarrow} g(x) dx}_{<+\infty}.$$

(iv) Für eine monoton wachsende Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\int^{\uparrow} (\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k)(x) dx = \sup_{k \in \mathbb{N}} \int^{\uparrow} f_k(x) dx.$$

Für eine monoton fallende Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\int^{\downarrow} (\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k)(x) dx = \inf_{k \in \mathbb{N}} \int^{\downarrow} f_k(x) dx.$$

22.2.5 Beweis[⊖]

Wir zeigen alle Behauptungen jeweils nur für das Oberintegral. Die dualen Aussagen für das Unterintegral ergeben sich dann aus der Gleichheit

$$\int^{\downarrow} f(x) dx = - \int^{\uparrow} (-f)(x) dx.$$

(i) ist direkt aus der Definition des Oberintegrals ersichtlich.

(ii) Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Gemäß Sätzchen 22.2.2(i) gibt es eine Funktion $\varphi \in \mathcal{C}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d)$ mit

$$f \leq \varphi \quad \text{und} \quad \int^{\uparrow} \varphi(x) dx \leq \int^{\uparrow} f(x) dx + \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Es folgt weiter mit (i) und Satz 20.5.5(ii)

$$\alpha f \leq \alpha \varphi, \quad \int^{\uparrow} \alpha f(x) dx \stackrel{(i)}{\leq} \int^{\uparrow} \alpha \varphi(x) dx = \alpha \int^{\uparrow} \varphi(x) dx \leq \alpha \int^{\uparrow} f(x) dx + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt:

$$\int^{\uparrow} \alpha f(x) dx \leq \alpha \int^{\uparrow} f(x) dx.$$

Diese Abschätzung wenden wir wie folgt in (*) nochmals an

$$\alpha \int^{\uparrow} f(x) dx = \alpha \int^{\uparrow} \alpha^{-1} \alpha f(x) dx \stackrel{(*)}{\leq} \alpha \alpha^{-1} \int^{\uparrow} \alpha f(x) dx = \int^{\uparrow} \alpha f(x) dx$$

und erhalten die umgekehrte Richtung.

(iii) Zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es Funktionen $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{C}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d)$, so dass

$$\begin{aligned} f &\leq \tilde{f}, & \int^{\uparrow} \tilde{f}(x) dx &\leq \int^{\uparrow} f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} \\ g &\leq \tilde{g}, & \int^{\uparrow} \tilde{g}(x) dx &\leq \int^{\uparrow} g(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} \int^{\uparrow} (f + g)(x) dx &\leq \int^{\uparrow} (\tilde{f} + \tilde{g})(x) dx \leq \int^{\uparrow} \tilde{f}(x) dx + \int^{\uparrow} \tilde{g}(x) dx \\ &\leq \int^{\uparrow} f(x) dx + \int^{\uparrow} g(x) dx + \varepsilon, \end{aligned}$$

da $\varepsilon > 0$ beliebig war, die Behauptung.

(iv) beweisen wir in einer Abfolge mehrerer Schritte.

(1) Zunächst können wir folgern:

$$\begin{aligned} f_k &\leq \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k \\ \implies \int^{\uparrow} f_k(x) dx &\leq \int^{\uparrow} \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) dx \\ \implies \sup_{k \in \mathbb{N}} \int^{\uparrow} f_k(x) dx &\leq \int^{\uparrow} \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) dx, \end{aligned}$$

so dass noch die umgekehrte Richtung gezeigt werden muss. Dafür können wir O.B.d.A. annehmen, dass $\sup_{k \in \mathbb{N}} \int^{\uparrow} f_k(x) dx < +\infty$.

(2) Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $\varphi_k \in \mathcal{C}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d)$, so dass

$$f_k \leq \varphi_k \quad \text{und} \quad \int^{\uparrow} f_k(x) dx \leq \int^{\uparrow} \varphi_k(x) dx \leq \int^{\uparrow} f_k(x) dx + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

(3) Wir definieren die monoton wachsende Funktionenfolge $(\tilde{\varphi}_k) \subseteq \mathcal{C}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d)$ durch

$$\tilde{\varphi}_k := \max\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}.$$

und konstatieren, dass

$$f_k \leq \tilde{\varphi}_k \quad \text{und} \quad \int^{\uparrow} f_k(x) dx \leq \int^{\uparrow} \tilde{\varphi}_k(x) dx \leq \int^{\uparrow} f_k(x) dx + \sum_{\ell=1}^k \frac{\varepsilon}{2^{\ell}},$$

die wir im nächsten Schritt per Induktion über k beweisen.

(4) Für $k = 1$ stimmt dies mit der entsprechenden Ungleichung weiter oben überein.

Für den Induktionsschluss $k \mapsto k + 1$ müssen wir etwas weiter ausholen. Zunächst ist

$$\left. \begin{aligned} f_k &\leq \varphi_k \leq \max\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\} = \tilde{\varphi}_k \\ f_k &\leq f_{k+1} \leq \varphi_{k+1} \end{aligned} \right\} \quad \text{deshalb} \quad f_k \leq \min\{\varphi_{k+1}, \tilde{\varphi}_k\} \in \mathcal{C}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d).$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \int^{\uparrow} f_k(x) dx + \int^{\uparrow} \tilde{\varphi}_{k+1}(x) dx &\leq \int^{\uparrow} \min\{\varphi_{k+1}, \tilde{\varphi}_k\}(x) dx + \int^{\uparrow} \tilde{\varphi}_{k+1}(x) dx \\ &= \int^{\uparrow} \min\{\varphi_{k+1}, \tilde{\varphi}_k\}(x) dx + \int^{\uparrow} \max\{\varphi_{k+1}, \tilde{\varphi}_k\}(x) dx \\ &= \int^{\uparrow} \varphi_{k+1}(x) dx + \int^{\uparrow} \tilde{\varphi}_k(x) dx \end{aligned}$$

und dann weiter

$$\begin{aligned} \int^{\uparrow} \tilde{\varphi}_{k+1}(x) dx &\leq \int^{\uparrow} \varphi_{k+1}(x) dx + \underbrace{\int^{\uparrow} \tilde{\varphi}_k(x) dx - \int^{\uparrow} f_k(x) dx}_{\text{IndV in (3)}} \\ &\leq \overbrace{\int^{\uparrow} f_{k+1}(x) dx}^{(2)} + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \sum_{\ell=1}^k \frac{\varepsilon}{2^{\ell}} \\ &\leq \int^{\uparrow} f_{k+1}(x) dx + \sum_{\ell=1}^{k+1} \frac{\varepsilon}{2^{\ell}}. \end{aligned}$$

(5) Wir definieren jetzt

$$f := \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k, \quad \tilde{\varphi} := \sup_{k \in \mathbb{N}} \tilde{\varphi}_k.$$

Es ist dann $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d)$, ferner wegen $f_k \leq \tilde{\varphi}$ für alle k

$$f \leq \tilde{\varphi},$$

wegen $\int^{\uparrow} \tilde{\varphi}_k(x) dx \leq \int^{\uparrow} f(x) dx + \varepsilon$ für alle k und Satz 20.5.5(iii) auch

$$\int^{\uparrow} \tilde{\varphi}(x) dx \stackrel{\text{S20.5.5(iii)}}{=} \sup_{k \in \mathbb{N}} \int^{\uparrow} \tilde{\varphi}_k(x) dx \leq \int^{\uparrow} f(x) dx + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist die Aussage bewiesen.

22.2.6 Satz: Beziehung zwischen \uparrow -Integral und \downarrow -Integral

(i) Für eine Funktion $f \in \overline{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\int^{\downarrow} f(x) dx \leq \int^{\uparrow} f(x) dx.$$

(ii) Für eine Funktion $f \in \mathcal{C}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\int^{\uparrow} f(x) dx = \int^{\uparrow} f(x) dx = \int^{\downarrow} f(x) dx.$$

(iii) Für eine Funktion $f \in \mathcal{C}^{\downarrow}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\int^{\downarrow} f(x) dx = \int^{\downarrow} f(x) dx = \int^{\uparrow} f(x) dx.$$

22.2.7 Beweis

(i) Es seien $\psi \in \mathcal{C}^{\downarrow}(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in \mathcal{C}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d)$ mit $\psi \leq f \leq \varphi$. Dann ist $-\psi \in \mathcal{C}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d)$ und es gilt

$$\int^{\downarrow} \psi(x) dx = - \int^{\uparrow} (-\psi)(x) dx \stackrel{S 20.5.5(i)}{=} \int^{\uparrow} \varphi(x) dx - \int^{\uparrow} (\varphi - \psi)(x) dx \leq \int^{\uparrow} \varphi(x) dx.$$

Durch Übergang zu sup auf der linken Seite und inf auf der rechten Seite gelangt man zu der im Satz angegebenen Abschätzung.

(ii) Zu $f \in \mathcal{C}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d)$ gibt es eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{C}^{\downarrow}(\mathbb{R}^d)$, die an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}^d$ monoton steigend gegen f konvergiert. Dann gilt (sehr ausführlich)

$$\begin{aligned} \int^{\uparrow} f(x) dx &= \int^{\uparrow} f(x) dx \\ &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \int f_k(x) dx \right\} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \int^{\downarrow} f_k(x) dx \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \int^{\downarrow} \psi(x) dx \mid \psi \in \mathcal{C}^{\downarrow}(\mathbb{R}^d), \psi \leq f \right\} \\ &= \int^{\downarrow} f(x) dx \stackrel{(i)}{\leq} \int^{\uparrow} f(x) dx \end{aligned}$$

(iii) Durch Dualisierung dieser Ungleichungskette erhält man für den anderen Fall $f \in \mathcal{C}^{\downarrow}(\mathbb{R}^d)$

$$\int^{\downarrow} f(x) dx \geq \int^{\uparrow} f(x) dx.$$

22.3 Integrierbare Funktionen

Zur Veranschaulichung

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \rightarrow \\
 -\infty & & & & & & +\infty \\
 & \int^{\downarrow} \psi(x) dx & \int^{\downarrow} f(x) dx & & \int^{\uparrow} f(x) dx & \int^{\uparrow} \varphi(x) dx &
 \end{array}$$

22.3.1 Satz und Definition:

Es sei eine Funktion $f \in \overline{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d)$ gegeben. Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

- (A) (Definition) Die Funktion $f \in \overline{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d)$ heißt *integrierbar*.
 (B) Die drei Bedingungen

$$-\infty < \int^{\downarrow}_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int^{\uparrow}_{\mathbb{R}^d} f(x) dx < +\infty$$

sind erfüllt.

- (C) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es zwei Funktionen $\psi \in \mathcal{C}^{\downarrow}(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in \mathcal{C}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d)$, so dass

$$\begin{aligned}
 \psi &\leq f \leq \varphi \\
 -\infty &< \int^{\downarrow} \psi(x) dx \leq \int^{\uparrow} \varphi(x) dx < +\infty \\
 \int^{\uparrow} (\underbrace{\varphi - \psi}_{\in \mathcal{C}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d)})(x) dx &\leq \varepsilon
 \end{aligned}$$

- (D) Es gibt eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int^{\uparrow} |f - f_n|(x) dx = 0.$$

22.3.2 Beweis[⊖]

Die Äquivalenz der beiden Aussagen (B) und (C) folgt direkt aus den Definitionen von Ober- und Unterintegral im letzten Abschnitt.

- (C) \Rightarrow (D): Gemäß Bedingung (C) gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ zwei Funktionen $\psi_n \in \mathcal{C}^{\downarrow}(\mathbb{R}^d)$, $\varphi_n \in \mathcal{C}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\begin{aligned}
 \psi_n &\leq f \leq \varphi_n \\
 -\infty &< \int^{\downarrow} \psi_n(x) dx \leq \int^{\uparrow} \varphi_n(x) dx < +\infty \\
 \int^{\uparrow} (\varphi_n - \psi_n)(x) dx &\leq \frac{1}{2n}.
 \end{aligned}$$

Für festes $n \in \mathbb{N}$ wird das Integral der Funktion $\varphi_n \in \mathcal{C}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d)$ durch die Integrale der Funktionen einer stellenweise monoton steigenden Folge $(g_{k,n})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ approximiert. Deshalb gibt es einen Index k_n , so dass

$$\int^{\uparrow} \varphi_n(x) dx - \int g_{k_n,n}(x) dx \leq \frac{1}{2n}.$$

Wir definieren die in (D) angekündigte Folge durch

$$f_n := g_{k_n,n}.$$

Es folgt weiter

$$\begin{aligned} \int^{\uparrow} (\varphi_n - f_n)(x) dx &= \int^{\uparrow} \varphi_n(x) dx + \int^{\uparrow} (-f_n)(x) dx \\ &= \int^{\uparrow} \varphi_n(x) dx + \int (-f_n)(x) dx \\ &= \int^{\uparrow} \varphi_n(x) dx - \int f_n(x) dx \leq \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Wegen

$$|f - f_n| \leq |f - \varphi_n| + |\varphi_n - f_n| = (\varphi_n - f) + (\varphi_n - f_n) \leq (\varphi_n - \psi_n) + (\varphi_n - f_n)$$

ist dann

$$\begin{aligned} \int^{\uparrow} |f - f_n|(x) dx &\leq \int^{\uparrow} (\varphi_n - \psi_n)(x) dx + \int^{\uparrow} (\varphi_n - f_n)(x) dx \\ &= \int^{\uparrow} (\varphi_n - \psi_n)(x) dx + \int^{\uparrow} (\varphi_n - f_n)(x) dx \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Für den Beweis der Richtung (D) \Rightarrow (C) sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Innerhalb der angegebenen Folge gibt es eine Funktion $f_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, so dass

$$\int^{\uparrow} |f - f_n|(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

und deshalb (Definition des \uparrow -Integrals) weiter eine Funktion $h_n \in \mathcal{C}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d)$ mit

$$|f - f_n| \leq h_n \quad \text{und} \quad \int^{\uparrow} h_n(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit den Funktionen

$$\psi_n := f_n - h_n \in \mathcal{C}^{\downarrow}(\mathbb{R}^d) \quad \varphi_n := f_n + h_n \in \mathcal{C}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d)$$

gilt dann weiter

$$\psi_n \leq f \leq \varphi_n \quad \text{und} \quad \int^{\uparrow} (\varphi_n - \psi_n)(x) dx = \int^{\uparrow} 2h_n(x) dx \leq \varepsilon.$$

Schließlich ist mit Satz 20.5.5(ii)

$$\begin{aligned} \int^{\downarrow} \psi_n(x) dx &= \int^{\downarrow} f_n(x) dx + \int^{\downarrow} (-h_n)(x) dx > -\infty \\ \int^{\uparrow} \varphi_n(x) dx &= \int^{\uparrow} f_n(x) dx + \int^{\uparrow} h_n(x) dx < +\infty. \end{aligned}$$

22.3.3 Bezeichnungen

Wir bezeichnen mit $\overline{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^d)$ die Menge der integrierbaren Funktionen $\mathbb{R}^d \rightarrow [-\infty, +\infty]$. Für $f \in \overline{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^d)$ heißt

$$\int f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^d}^{\downarrow} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d}^{\uparrow} f(x) dx$$

das (*Lebesgue-*)Integral von f .

Zur Unterscheidung von anderen Integralbegriffen spricht man oft auch von Lebesgue-Integrierbarkeit oder L-Integrierbarkeit.

Wir wollen als erstes die Verträglichkeit mit früheren Integralbegriffen absichern.

22.3.4 Satz

In jedem der folgenden Fälle ist die Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [-\infty, +\infty]$ integrierbar. Das (neue) Integral stimmt mit dem jeweils früher definierten Integral überein.

(A) $f \in \mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$ und $\int^\uparrow f(x) dx < +\infty$

(B) $f \in \mathcal{C}^\downarrow(\mathbb{R}^d)$ und $\int^\downarrow f(x) dx > -\infty$

(C) $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$.

22.3.5 Beweis

Für (A) sei auf die Aussage (ii) des Satzes 22.2.6 und auf die Definitionen von \mathcal{C}^\uparrow bzw. \mathcal{C}^\downarrow verwiesen. (C) folgt aus der Tatsache, dass $\int f(x) dx$ endlich ist für $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$.

22.3.6 Satz: Stetigkeit des Integrals

Es sei $f \in \overline{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^d)$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ eine Funktionenfolge gemäß Bedingung (D) des Satzes 22.3.1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int^{\uparrow} |f - f_n|(x) dx = 0.$$

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \int f(x) dx.$$

22.3.7 Beweis

Es ist

$$\begin{aligned} \left| \int f(x) dx - \int f_n(x) dx \right| &= \left| \int f(x) dx + \int (-f_n)(x) dx \right| \\ &= \left| \int^{\downarrow} f(x) dx + \int^{\downarrow} (-f_n)(x) dx \right| \\ &\stackrel{(\text{Satz 22.2.4(iii)})}{\leq} \left| \int^{\downarrow} (f - f_n)(x) dx \right| \leq \int^{\downarrow} |f - f_n|(x) dx \\ &\leq \int^{\uparrow} |f - f_n|(x) dx. \end{aligned}$$

Diese Abschätzungskette erscheint sehr aufwändig. Beachte aber, dass die Linearität des Integrals noch nicht zur Verfügung steht.

22.3.8 Bemerkung

Die Abbildung

$$\|\cdot\|_{\overline{\mathcal{L}}^1} : \begin{cases} \overline{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^d) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto \int^{\uparrow} f(x) dx \end{cases}$$

ist eine sogenannte *Pseudonorm* auf der Funktionenmenge. Der obige Satz besagt dann, dass das Lebesgue-Integral stetig ist.

22.3.9 Satz: Eigenschaften des Lebesgue-Integrals

Es seien $f, g \in \overline{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^d)$.

(i) Ist $f \leq g$, so gilt

$$\int f(x) dx \leq \int g(x) dx.$$

(ii) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion αf , falls sie wohldefiniert ist, integrierbar und es gilt:

$$\int (\alpha f)(x) dx = \alpha \int f(x) dx.$$

(iii) Die Funktion $f + g$ ist, falls sie wohldefiniert ist, integrierbar und es gilt

$$\int (f + g)(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Es sei jetzt zusätzlich f (durch eine endliche Schranke) beschränkt, also

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \{|f(x)|\} < \infty.$$

(iv) Die Funktion $f \cdot g$ ist, falls sie wohldefiniert ist, integrierbar.

(v) Für $p \geq 1$ ist $|f|^p$ integrierbar.

22.3.10 Beweis

Der Beweis kann leicht mit Hilfe des Satzes 22.3.1(D) auf die entsprechenden Eigenschaften des Integrals für Funktionen aus $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ zurückgeführt werden. Wir wollen den Beweis aber direkt aus den Eigenschaften von Ober- und Unterintegral ableiten.

(i) und (iii) ergeben sich sofort aus den entsprechenden Aussagen des Satzes 22.2.4. Für (ii) und $\alpha > 0$ ist die Aussage aus Satz 22.2.4(ii) zu entnehmen. Für $\alpha < 0$ muss man ausführlicher auf derselben Grundlage argumentieren:

$$\begin{aligned} \int^{\uparrow} (\alpha f)(x) dx &= \int^{\uparrow} (-\alpha)(-f)(x) dx = (-\alpha) \int^{\uparrow} (-f)(x) dx \\ &= \alpha \left[- \int^{\uparrow} (-f)(x) dx \right] = \alpha \int^{\downarrow} f(x) dx = \alpha \int f(x) dx. \end{aligned}$$

In gleicher Weise zeigt man

$$\int^{\downarrow} (\alpha f)(x) dx = \alpha \int f(x) dx.$$

Für (iv) und (v) benutzen wir die Charakterisierung der Integrierbarkeit in Satz 22.3.1(D).

(1) Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ existiert eine Funktion $\tilde{g} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\int^{\uparrow} |g - \tilde{g}|(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2(\|f\|_\infty + 1)}$$

(Die Addition der Zahl 1 dient nur dazu, den Nenner vom Verschwinden abzuhalten.)

(2) Wegen $\|\tilde{g}\|_\infty < \infty$ existiert dann weiter eine Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\int^{\uparrow} |f - \tilde{f}|(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2(\|\tilde{g}\|_\infty + 1)}$$

(3) Abschließend ist dann

$$\begin{aligned} \int^{\uparrow} |fg - \tilde{f}\tilde{g}|(x) dx &= \int^{\uparrow} |f(g - \tilde{g}) + (f - \tilde{f})\tilde{g}|(x) dx \\ &\leq \int^{\uparrow} (\|f\|_{\infty}|g - \tilde{g}| + \|\tilde{g}\|_{\infty}|f - \tilde{f}|)(x) dx \\ &\leq \int^{\uparrow} \|f\|_{\infty}|g - \tilde{g}|(x) dx + \int^{\uparrow} \|\tilde{g}\|_{\infty}|f - \tilde{f}|(x) dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(v) sei zur Übung überlassen.

22.3.11 Erinnerung: Positiv- und Negativteil einer Funktion

Es sei $f \in \overline{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d)$ eine Funktion. Wir erinnern an Abschnitt 10.6.1/AYS2 mit den Definitionen und Beziehungen

$$\begin{aligned} f_+ &:= \max\{f, 0\} \\ f_- &:= -\min\{f, 0\} \\ f &= f_+ - f_- \\ |f| &= f_+ + f_-, \end{aligned}$$

die auch in Bezug auf die Werte $\pm\infty$ wohldefiniert sind.

22.3.12 Satz

Es seien $f, g \in \overline{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d)$.

(i) Ist die Funktion f integrierbar, so sind die Funktionen $f_+, f_-, |f|$ integrierbar. Es gilt dann

$$\left| \int f(x) dx \right| \leq \int |f|(x) dx.$$

(ii) Sind f und g integrierbar, so sind auch die Funktionen

$$\min\{f, g\}, \quad \max\{f, g\}$$

integrierbar.

(iii) Sind zwei der drei Funktionen

$$f_+, \quad f_-, \quad |f|$$

integrierbar, so ist auch f integrierbar.

22.3.13 Beweis

(i) Gemäß Satz 22.3.1(D) gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, so dass

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f - \tilde{f}|(x) dx \leq \varepsilon.$$

Die Funktion \tilde{f}_+ ist ebenfalls in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ enthalten, es gilt dabei

$$|f_+ - \tilde{f}_+| \leq |f - \tilde{f}|$$

und deshalb weiter

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_+ - \tilde{f}_+|(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f - \tilde{f}|(x) dx \leq \varepsilon.$$

Wieder mit Satz 22.3.1(D) folgt die Integrierbarkeit von f_+ .

Für die beiden anderen Funktionen f_- und $|f|$ kann man diese Überlegung ganz genauso durchführen.

Aufgrund von

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

ist mit Satz 22.3.9

$$-\int |f|(x) dx = \int (-|f|)(x) dx \leq \int f(x) dx \leq \int |f|(x) dx$$

und deshalb

$$\left| \int f(x) dx \right| \leq \int |f|(x) dx.$$

(ii) Mit einer Fallunterscheidung $f(x) \leq g(x)$ und $f(x) \geq g(x)$ kann man leicht einsehen, dass

$$\begin{aligned} \min\{f, g\} &= \frac{f + g - |f - g|}{2} \\ \max\{f, g\} &= \frac{f + g + |f - g|}{2} \end{aligned}$$

(iii) Es seien f_+, f_- integrierbar und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt gemäß Satz 22.3.1(D) zwei Funktionen $\tilde{f}_p, \tilde{f}_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\int^{\uparrow} |f_+ - \tilde{f}_p|(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int^{\uparrow} |f_- - \tilde{f}_n|(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daraus folgt aber

$$\begin{aligned} \int^{\uparrow} |f - (f_p - f_n)|(x) dx &= \int^{\uparrow} |(f_+ - f_-) - (f_p - f_n)|(x) dx \\ &\leq \int^{\uparrow} |f_+ - f_p|(x) dx + \int^{\uparrow} |f_n - f_-|(x) dx \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei $f_p - f_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$. Also ist f integrierbar.

Die beiden anderen Fälle ergeben sich durch Verwendung der Beziehungen

$$f = 2f_+ - |f| \quad \text{bzw.} \quad f = |f| - 2f_-.$$

23 Nullmengen im \mathbb{R}^d

23.1 Das Mass einer integrierbaren Menge

23.1.1 Definitionen: Integrierbare Mengen und ihr Mass

1. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt *integrierbar*, wenn die zugehörige Indikatorfunktion χ_M integrierbar ist.
2. In diesem Fall heißt die Zahl

$$\mu(M) = \text{meas}(M) := \int \chi_M(x) dx \in \mathbb{R}_0^+$$

das *Mass* von M .

3. Ist $f : M \rightarrow [-\infty, +\infty]$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass $f \cdot \chi_M$ integrierbar ist, so heißt f *integrierbar über M* . Es heißt dann

$$\int_M f(x) dx := \int f(x)\chi_M(x) dx$$

das *Integral der Funktion f über der Teilmenge M* .

23.1.2 Beispiele

1. Kompakte Mengen $K \subseteq \mathbb{R}^d$ sind integrierbar, ihr Mass ist gleich dem früher definierten Volumen, da $\chi_K \in \mathcal{C}^\downarrow(\mathbb{R}^d)$ und deshalb gemäß Satz 22.2.6 (iii)

$$\begin{aligned} \text{vol}(K) &= \int^\downarrow \chi_K(x) dx = \int^\downarrow \chi_K(x) dx = \int^\uparrow \chi_K(x) dx \\ &= \int \chi_K(x) dx = \text{meas}(K) \end{aligned}$$

2. Offene beschränkte Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^d$ sind integrierbar, da $\chi_M \in \mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$ und deshalb gemäß Satz 22.2.6 (ii)

$$\int^\downarrow \chi_M(x) dx = \int^\uparrow \chi_M(x) dx \leq \int^\uparrow \chi_{\overline{M}}(x) dx < \infty$$

3. Ein beschränktes Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ mit linkem Endpunkt a und rechtem Endpunkt b ist integrierbar mit Mass

$$\text{meas } J = b - a.$$

Zur Begründung verweisen wir darauf, dass für jedes $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} b - a - 2\varepsilon &= \int^\downarrow \chi_{[a+\varepsilon, b-\varepsilon]}(x) dx \leq \int^\downarrow \chi_J(x) dx \\ &\leq \int^\uparrow \chi_J(x) dx \leq \int^\uparrow \chi_{[a, b]}(x) dx = b - a \end{aligned}$$

und deshalb

$$\int^\downarrow \chi_J(x) dx = \int^\uparrow \chi_J(x) dx = b - a.$$

4. Eine integrierbare Menge muss nicht beschränkt sein, wie das Beispiel

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n + \frac{1}{2^n}] \subseteq \mathbb{R}$$

zeigt.

23.1.3 Satz

Es seien M, \widetilde{M} integrierbare Mengen. Dann sind auch die Mengen

$$M \cap \widetilde{M}, \quad M \cup \widetilde{M}, \quad M \setminus \widetilde{M}$$

integrierbar.

23.1.4 Beweis

Die zugehörigen Indikatorfunktionen genügen den folgenden Relationen:

$$\begin{aligned}\chi_{M \cap \widetilde{M}} &= \chi_M \cdot \chi_{\widetilde{M}} \\ \chi_{M \cup \widetilde{M}} &= \chi_M + \chi_{\widetilde{M}} - \chi_{M \cap \widetilde{M}} \\ \chi_{M \setminus \widetilde{M}} &= \chi_M - \chi_{M \cap \widetilde{M}}\end{aligned}$$

Wende dann Satz 22.3.9 (iv) an.

23.2 Vorbereitung: Quader-Überdeckung

23.2.1 Hilfssatz: Quader-Überdeckung einer offenen Menge

Zu jeder offenen Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^d$ gibt es eine Folge von kompakten Würfeln $(Q_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$, so dass

$$X = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} Q_\ell$$

$$Q_\ell^\circ \cap Q_{\tilde{\ell}}^\circ = \emptyset, \quad \text{falls } \ell \neq \tilde{\ell}.$$

23.2.2 Beweis

(1) Für fixiertes $m \in \mathbb{N}_0$ ist die abzählbare Menge der Punkte

$$G_m = \left\{ \frac{y}{2^m} \mid y \in \mathbb{Z}^d \right\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

ein Gitter der Maschenweite $\frac{1}{2^m}$ im \mathbb{R}^d .

(2) An jedem Gitterpunkt $g \in G_m$ wird ein achsenparalleler kompakter Würfel

$$Q_{g,m} := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid g_k \leq x_k \leq g_k + \frac{1}{2^m}, k = 1, \dots, d \right\}$$

so angeheftet, dass der Gitterpunkt der Eckpunkt mit den minimalen Koordinaten ist. Die Würfel haben Kantenlänge $\frac{1}{2^m}$ und überdecken den Raum \mathbb{R}^d , die inneren Kerne

$$Q_{g,m}^\circ = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid g_k < x_k < g_k + \frac{1}{2^m}, k = 1, \dots, d \right\}$$

sind paarweise disjunkt.

(3) Es sei dann

$$\mathcal{Q} = \left\{ Q_{g,m} \mid m \in \mathbb{N}, g \in G_m \right\}$$

die abzählbare Menge aller solchen Würfel.

(4) Für zwei verschiedene Würfel $Q, \tilde{Q} \in \mathcal{Q}$ gilt nach Konstruktion genau eine der drei folgenden Aussagen:

$$Q^\circ \cap \tilde{Q}^\circ = \emptyset, \quad Q \subseteq \tilde{Q}, \quad \tilde{Q} \subseteq Q.$$

(5) Wir definieren die (abzählbare) Teilmenge

$$\mathcal{Q}'_X = \left\{ Q \in \mathcal{Q} \mid Q \subseteq X \right\}$$

von Würfeln aus \mathcal{Q} , die ganz in X enthalten sind. Da X offen ist, gibt es zu jedem $x \in X$ einen Würfel $Q \in \mathcal{Q}'_X$ mit $x \in Q$, es gilt also

$$X = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}'_X} Q.$$

(6) Mit Hilfe einer Induktion lassen sich aus der abzählbaren Menge \mathcal{Q}'_X alle Würfel entfernen, die ganz in einem anderen Würfel von \mathcal{Q}'_X enthalten sind. Die resultierende Menge \mathcal{Q}_X enthält dann aufgrund von (4) nur noch Würfel, die paarweise disjunkte innere Kerne haben.

23.3 Grundlegung

23.3.1 Definition und Satz: Nullmengen

Es sei N eine (nicht notwendig integrierbare) Teilmenge von \mathbb{R}^d und χ_N die zugehörige Indikatorfunktion. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (A) (Def) N heißt *Nullmenge*.
 (B) Es ist $\int^\uparrow \chi_N(x) dx = 0$.
 (C) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene integrierbare Menge X_ε mit

$$N \subseteq X_\varepsilon \quad \text{und} \quad \text{meas}(X_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

- (D) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Folge $(Q_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ von Quadern im \mathbb{R}^d , so dass

$$N \subseteq \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} Q_\ell, \quad \sum_{\ell=1}^{\infty} \text{vol}(Q_\ell) \leq \varepsilon.$$

23.3.2 Beweis

(B) \Rightarrow (C): Für den mehrschrittigen Beweis sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

(1) Aufgrund von $\int^\uparrow 2\chi_N(x) dx = 0$ gibt es eine Funktion $\varphi \in \mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$, so dass

$$2\chi_N \leq \varphi, \quad \int^\uparrow \varphi(x) dx \leq \varepsilon.$$

(2) Da φ unterhalbstetig ist, ist das Urbild

$$X_\varepsilon := \varphi^{-1}(]1, +\infty])$$

des (bzgl. der „Unterhalbstetigkeits-Topologie“) offenen Intervalls $]1, +\infty]$ offen in N .

(3) Für $x \in N$ gilt $2 \leq 2\chi_N(x) \leq \varphi(x)$, deshalb

$$x \in \varphi^{-1}(]2, \infty]) \subseteq \varphi^{-1}(]1, +\infty]) = X_\varepsilon.$$

Das bedeutet $N \subseteq X_\varepsilon$.

(4) Für $x \in X_\varepsilon$ gilt $\varphi(x) > 1$, wegen $\varphi \geq 0$ folgt $\chi_{X_\varepsilon} \leq \varphi$.

(5) Als Indikatorfunktion einer offenen Menge gehört χ_{X_ε} zu $\mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$, die Abschätzung

$$\int^\uparrow \chi_{X_\varepsilon}(x) dx \leq \int^\uparrow \varphi(x) dx \leq \varepsilon$$

liefert in Verbindung mit Satz 22.3.1 die Integrierbarkeit (der Indikatorfunktion) von X_ε und damit die Aussage (C).

(C) \Rightarrow (D): Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Menge X_ε mit $\text{vol}(X_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Gemäß dem Hilfssatz 23.2.1 ist X_ε Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Würfeln Q_ℓ mit paarweise disjunkten offenen Kernen. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{\infty} \text{vol}(Q_\ell) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \int \chi_{Q_\ell}(x) dx = \sum_{\ell=1}^{\infty} \int \chi_{Q_\ell^\circ}(x) dx \\ &= \int \sum_{\ell=1}^{\infty} \chi_{Q_\ell^\circ}(x) dx \leq \int \chi_{X_\varepsilon}(x) dx \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

(D) \Rightarrow (B): Es sei wieder ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gilt dann mit (D)

$$\chi_N \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \chi_{Q_\ell} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{\ell=1}^k \chi_{Q_\ell} \right\},$$

dann weiter, mit Bezug auf die Eigenschaften des \uparrow -Integrals aus Satz 22.2.4

$$\begin{aligned} \int^{\uparrow} \chi_N(x) dx &\leq \int^{\uparrow} \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{\ell=1}^k \chi_{Q_\ell} \right\}(x) dx = \sup_{k \in \mathbb{N}} \int^{\uparrow} \sum_{\ell=1}^k \chi_{Q_\ell}(x) dx \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\ell=1}^k \int^{\uparrow} \chi_{Q_\ell}(x) dx = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\ell=1}^k \text{vol}(Q_\ell) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Es muss also das Oberintegral den Wert Null haben, d.h. (B).

23.3.3 Satz

- (i) Eine Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.
- (ii) Die Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen ist eine Nullmenge.

23.3.4 Beweis

Die erste Aussage ist trivial.

(ii) Es sei $N = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} N_\ell$ eine abzählbare Vereinigung von (Null-)Mengen. Setzt man für $k \in \mathbb{N}$

$$\tilde{N}_k := N_1 \cup \dots \cup N_k,$$

so ist zunächst wegen

$$\chi_{\tilde{N}_k} \leq \chi_{N_1} + \dots + \chi_{N_k}$$

und aufgrund von Satz 22.2.4(i),(iii) auch \tilde{N}_k eine Nullmenge. Da die Folge $(\chi_{\tilde{N}_k})_{k \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, gilt Mit Satz 22.2.4(iv)

$$0 \leq \int^{\uparrow} \chi_N(x) dx = \int^{\uparrow} \sup_{k \in \mathbb{N}} \chi_{\tilde{N}_k}(x) dx = \sup_{k \in \mathbb{N}} \int^{\uparrow} \chi_{\tilde{N}_k}(x) dx = 0.$$

23.3.5 Korollar

- (i) Ist eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^d$ (höchstens) abzählbar, so ist sie eine Nullmenge.
- (ii) \mathbb{Q} ist eine Nullmenge.
- (iii) \mathbb{R} ist überabzählbar.
- (iv) Es gibt überabzählbare Nullmengen in \mathbb{R} .

23.3.6 Beweis

(i) Aufgrund von Satz 23.3.3(ii) können wir uns auf den Fall zurückziehen, dass $N = \{a\}$ genau ein Element enthält. Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ einen kompakten Quader $Q = N + [-\varepsilon, +\varepsilon]^d$, so dass

$$0 \leq \int^{\uparrow} \chi_N(x) dx \leq \int^{\uparrow} \chi_Q(x) dx = \text{vol}(Q) = (2\varepsilon)^d.$$

Also ist $\int^{\uparrow} \chi_N(x) dx = 0$.

(ii) ist ein Spezialfall von (i).

(iii) Wäre \mathbb{R} abzählbar, so ergäbe sich mit

$$1 = \text{vol}([0, 1]) = \int^{\uparrow} \chi_{[0,1]}(x) dx \leq \int^{\uparrow} \chi_{\mathbb{R}}(x) dx = 0$$

ein Widerspruch.

(iv) Als Beispiel dient das Cantor'sche Diskontinuum $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$, das wir erst später in Abschnitt 23.4 genauer kennenlernen werden. Der Satz 23.4.2 besagt, dass \mathbb{D} eine überabzählbare Nullmenge ist.

23.3.7 Satz

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine \mathcal{C}^1 -Abbildung. Ist $N \subseteq X$ eine Nullmenge, so ist auch das Bild $f(N)$ eine Nullmenge.

23.3.8 Beweis

(1) X lässt sich als abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen K_n , beispielsweise von Kugeln mit rationalen Mittelpunkten und rationalen Radien, darstellen. Wegen

$$f(N) = f\left(N \cap \bigcup_{k \in \mathbb{N}} K_k\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(N \cap K_k)$$

können wir o.B.d.A. annehmen, dass N in einer kompakten Teilmenge $K \subseteq X$ enthalten ist.

(2) Es existiert gemäß Abschätzungssatz 16.3.4 eine Konstante $M > 0$, so dass

$$\|f(x) - f(\tilde{x})\| \leq M \cdot \|x - \tilde{x}\| \quad \text{für alle } x, \tilde{x} \in K.$$

(3) Es sei jetzt $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es existiert eine abzählbare Menge $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Würfeln mit

$$N \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(Q_n) \leq \frac{\varepsilon}{M^d \cdot d^{\frac{d}{2}}}.$$

Für $x, \tilde{x} \in N \cap Q_n \subseteq K \cap Q_n \subseteq X \cap Q_n$ gilt dann

$$\|f(x) - f(\tilde{x})\| \leq M \cdot \|x - \tilde{x}\| \leq M \cdot \overbrace{\sqrt{d} \cdot \underbrace{\sqrt[d]{\text{vol}(Q_n)}}_{\text{Kantenlänge}}}^{\text{Länge der Raumdiagonalen}} =: A_n$$

(4) Dies besagt, dass sich das Bild $f(N \cap Q_n)$ in einer Kugel vom Durchmesser A_n , deshalb auch in einem kompakten Würfel W_n der Kantenlänge A_n einschließen lässt. Es ist

$$\text{vol}(W_n) = A_n^d = M^d \cdot d^{\frac{d}{2}} \cdot \text{vol}(Q_n)$$

und dann

$$f(N) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(N \cap Q_n) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n \quad \text{und} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(W_n) = M^d \cdot d^{\frac{d}{2}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(Q_n) \leq \varepsilon.$$

23.3.9 Satz

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ eine abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen (K_σ -Menge). Weiter sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Dann ist der Graph der Funktion

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^d \mid x \in X\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

eine Nullmenge.

23.3.10 Beweis

(0) Es genügt, die Aussage für eine kompakte Menge K anstelle von X zu beweisen. Mit K ist auch Γ_f kompakt.

Für festes $(x_1, \dots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$ nimmt die Funktion

$$\chi_{\Gamma_f}(x_1, \dots, x_{d-1}, \cdot) \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \{0, 1\} \\ y & \mapsto \chi_{\Gamma_f}(x_1, \dots, y) \end{cases}$$

den Wert 1 höchstens einmal an, nämlich wenn

$$(x_1, \dots, x_{d-1}) \in X \text{ und } y = f(x_1, \dots, x_{d-1}).$$

Deshalb ist

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{\Gamma_f}(x_1, \dots, x_{d-1}, y) dy = 0.$$

Mit dem Satz von Fubini für \mathcal{C}^1 -Funktionen folgt dann

$$\text{vol}(\Gamma_f) = \int \chi_{\Gamma_f}(x_1, \dots, x_{d-1}, y) dy dx_1 \dots dx_{d-1} = 0.$$

23.3.11 Beispiele

1. $(d-1)$ -dimensionale Hyperebenen im \mathbb{R}^d sind Nullmengen.
2. Die $(d-1)$ -dimensionale Sphäre

$$S_{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = 1\}$$

ist eine Nullmenge im \mathbb{R}^d , da sie Vereinigung der beiden Graphen Γ_f und Γ_{-f} ist, wobei die Funktion f durch die Käseglockenfunktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^{d-1} \supseteq B_1(0) & \rightarrow \mathbb{R}^d \\ x & \mapsto \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{d-1}^2} \end{cases}$$

gegeben ist.

3. Die Peano-Kurve im \mathbb{R}^2 ist nicht der Graph, sondern die Bildmenge einer stetigen Funktion $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

23.4 Das Cantor'sche Diskontinuum

23.4.1 Konstruktion Wir konstruieren in mehreren Schritten das Cantor'sche Diskontinuum.

(1) Dazu sei zunächst für $n \in \mathbb{N}$

$$\{0, 1\}^{\{1, \dots, n\}}$$

die Menge der Abbildungen $J : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$. Diese Abbildungen können auch als n -Tupel mit Nullen und Einsen als Einträgen aufgefasst werden.

(2) Wir definieren rekursiv eine monoton fallende Folge von Teilmengen des Einheitsintervalls.

- Für $n = 0$ ist $D_0 := [0, 1]$.
- Für $n = 1, 2, 3$ ist

$$D_1 := \underbrace{\left[0, \frac{1}{3}\right]}_{=: I_0} \cup \underbrace{\left[\frac{2}{3}, 1\right]}_{=: I_1}$$

$$D_2 := \underbrace{\left[0, \frac{1}{9}\right]}_{=: I_{00}} \cup \underbrace{\left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right]}_{=: I_{01}} \cup \underbrace{\left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right]}_{=: I_{10}} \cup \underbrace{\left[\frac{8}{9}, 1\right]}_{=: I_{11}}$$

$$D_3 := \underbrace{\left[0, \frac{1}{27}\right]}_{=: I_{000}} \cup \underbrace{\left[\frac{2}{27}, \frac{3}{27}\right]}_{=: I_{001}} \cup \underbrace{\left[\frac{6}{27}, \frac{7}{27}\right]}_{=: I_{010}} \cup \underbrace{\left[\frac{8}{27}, \frac{9}{27}\right]}_{=: I_{011}} \cup \underbrace{\left[\frac{18}{27}, \frac{19}{27}\right]}_{=: I_{100}} \cup \underbrace{\left[\frac{20}{27}, \frac{21}{27}\right]}_{=: I_{101}} \cup \underbrace{\left[\frac{24}{27}, \frac{25}{27}\right]}_{=: I_{110}} \cup \underbrace{\left[\frac{26}{27}, 1\right]}_{=: I_{111}}$$

- Ist nun D_n als die disjunkte Vereinigung von 2^n kompakten Teilintervallen I_J , $J \in \{0, 1\}^{\{1, \dots, n\}}$, konstruiert, so gewinnen wir D_{n+1} aus D_n dadurch, dass aus jedem Teilintervall $I \subseteq D_n$ genau das mittlere offene Drittel entfernt wird. Formal genauer gilt:

$$\begin{aligned} I_{(J,0)} &:= \left\{x \in I_J \mid \min I_J \leq x \leq \min I_J + \frac{\max I_J - \min I_J}{3}\right\} \\ I_{(J,1)} &:= \left\{x \in I_J \mid \max I_J - \frac{\max I_J - \min I_J}{3} \leq x \leq \max I_J\right\} \\ D_{n+1} &:= \bigcup_{J \in \{0,1\}^{\{1, \dots, n+1\}}} I_J. \end{aligned}$$

(3) Das Cantor'sche Diskontinuum \mathbb{D} ist als der Schnitt aller Teilmengen D_n definiert:

$$\mathbb{D} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n.$$

Wir halten die Eigenschaften von \mathbb{D} in einem Sätzchen fest:

23.4.2 Satz: Eigenschaften des Cantor'schen Diskontinuums

Das Cantor'sche Diskontinuum \mathbb{D} weist folgende Eigenschaften auf:

- \mathbb{D} ist eine kompakte Teilmenge von \mathbb{R} .
- \mathbb{D} ist eine Nullmenge.
- \mathbb{D} ist überabzählbar.

23.4.3 Beweis

(i) \mathbb{D} ist eine Schnittmenge von abgeschlossenen beschränkten Teilmengen von \mathbb{R} , also selbst beschränkt und abgeschlossen.

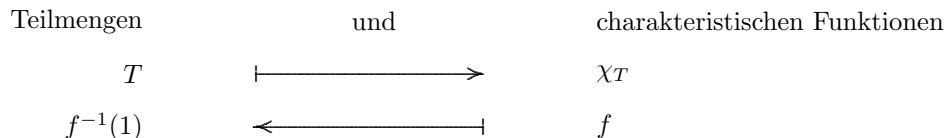
(ii) \mathbb{D} ist in jedem D_n enthalten, D_n wiederum ist eine (endliche) Vereinigung von (1-dimensionalen) Quadern mit $\text{vol}(D_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Diese Zahl kann kleiner als jedes $\varepsilon > 0$ werden.

(iii) Den Beweis von (iii) erbringen wir mit Hilfe der beiden folgenden Sätze.

23.4.4 Satz Zwischen den folgenden Mengen bestehen Bijektionen:

- Menge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ der Teilmengen von \mathbb{N} .
- Menge der charakteristischen Funktionen auf \mathbb{N} .
- Menge $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ der Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \{0, 1\}$.
- Cantorsches Diskontinuum \mathbb{D} .

23.4.5 Beweis Für jede Menge M gibt es die Bijektion zwischen



Eine charakteristische Funktion auf \mathbb{N} ist nichts anderes als eine Zuordnung von Nullen und Einsen zu Elementen von \mathbb{N} , also eine Folgen von Nullen und Einsen. — Und umgekehrt.

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ eine unendlich Folge von Nullen und Einsen, so ordnen wir ihr die Folge von Intervallen

$$J_{(a_1)}, \quad J_{(a_1, a_2)}, \quad J_{(a_1, a_2, a_3)}, \quad \dots$$

gemäß der Konstruktion des Cantor-Diskontinuums in Abschnitt 23.4 zu. Da

- die Folge absteigend ist, d.h. $J_{(a_1, \dots, a_{n+1})} \subseteq J_{(a_1, \dots, a_n)}$,
- alle Intervalle kompakt sind,
- die Intervall-Längen $\text{vol}_1(J_{(a_1, \dots, a_n)}) = \frac{1}{3^n}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen Null gehen,

handelt es sich um eine Intervallschachtelung (vgl. AYS1), die genau eine reelle Zahl x bestimmt. Da nach Konstruktion $x \in J_{(a_1, \dots, a_n)} \subseteq D_n$ für alle n gilt, ist $x \in \mathbb{D}$.

Die Abbildung $(a_n) \mapsto x$ ist injektiv, da für zwei verschiedene Folgen

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots), \quad (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \tilde{a}_n, \dots) \quad \text{mit } a_n \neq \tilde{a}_n$$

die zugehörigen Zahlen x und \tilde{x} in disjunkten Intervallen

$$J_{(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)}, \quad J_{(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \tilde{a}_n)}$$

liegen.

Die Abbildung ist auch surjektiv. Nach Konstruktion von \mathbb{D} gibt es nämlich zu jedem $x \in \mathbb{D}$ eine unendlich Intervallfolge

$$J_{(a_1)}, \quad J_{(a_1, a_2)}, \quad J_{(a_1, a_2, a_3)}, \quad \dots$$

so dass x in allen Intervallen enthalten ist.

23.4.6 Satz (Cantor): Mächtigkeit der Potenzmenge

Es sei M eine nicht-leere Menge und $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge.

- (i) Es gibt eine injektive Abbildung $M \rightarrow \mathcal{P}(M)$.
- (ii) Es gibt eine surjektive Abbildung $\mathcal{P}(M) \rightarrow M$.
- (iii) Es gibt keine bijektive Abbildung $M \rightarrow \mathcal{P}(M)$.

Mit anderen Worten

- (iv) Die Mächtigkeit einer Menge ist echt kleiner als die Mächtigkeit ihrer Potenzmenge.

23.4.7 Beweis[⊖]

Die Aussagen (i) und (ii) sind trivial.

Zum Beweis von (iii) nehmen wir das Gegenteil an, es existiere also eine bijektive Abbildung

$$\mathcal{M}: \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ n & \mapsto \mathcal{M}(n) \end{cases}$$

Wir definieren dann die Teilmenge

$$X := \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \mathcal{M}(n)\} \subseteq M$$

Da \mathcal{M} surjektiv ist, muss es eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ geben, so dass

$$X = \mathcal{M}(m).$$

Wir fragen uns dann, ob m in X enthalten ist.

WENN $m \in X$, also $m \in X = \mathcal{M}(m)$,

DANN folgt nach Definition von X

$$m \notin X.$$

WIDERSPRUCH.

WENN $m \notin X$, also $m \notin X = \mathcal{M}(m)$,

DANN folgt nach Definition von X

$$m \in X.$$

WIDERSPRUCH.

Es kann also keine solche Abbildung \mathcal{M} existieren.

23.5 Fast–Überall–Eigenschaften

23.5.1 Definition:

Es sei $\mathcal{A}(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, eine Aussagenschar. Man sagt,

$\mathcal{A}(x)$ gilt *fast–überall* (f.ü.) oder *modulo Nullmenge*,

wenn es eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^d$ gibt, so dass $\mathcal{A}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus N$ gilt.

Beachte, dass diese Eigenschaft „fast–überall“ aufgrund von Korollar 23.3.5 die Eigenschaften „bis auf endlich viele“ oder „bis auf abzählbar viele“ umfasst, nicht aber mit diesen übereinstimmt.

23.5.2 Satz

Für eine Abbildung $f \in \overline{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d)$ gelten die Aussagen:

- (i) $\int^\uparrow |f|(x) dx = 0 \iff f(x) = 0$ fast–überall.
- (ii) $\int^\uparrow f(x) dx < \infty \implies f(x) < \infty$ fast–überall.
- (iii) $\int^\downarrow f(x) dx > -\infty \implies f(x) > -\infty$ fast–überall.

23.5.3 Beweis[⊖]

(i) Wir definieren

$$M := \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}, \quad M_\ell := \{x \in \mathbb{R}^d \mid |f(x)| \geq \frac{1}{\ell}\}.$$

„ \implies “ Für $x \in \mathbb{R}^d$ gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} |f(x)| < \frac{1}{\ell} &\iff x \notin M_\ell \iff \chi_{M_\ell}(x) = 0 \\ |f(x)| \geq \frac{1}{\ell} &\iff x \in M_\ell \iff \chi_{M_\ell}(x) = 1, \end{aligned}$$

wir erhalten deshalb

$$\chi_{M_\ell} \leq \ell \cdot |f|.$$

Dann sind aber aufgrund von

$$\int^\uparrow \chi_{M_\ell}(x) dx \leq \int^\uparrow \ell |f|(x) dx \leq \ell \int^\uparrow |f|(x) dx = 0$$

die Mengen M_ℓ Nullmengen. Dann ist auch deren Vereinigung $M = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} M_\ell$ eine Nullmenge.

„ \impliedby “ Es ist

$$|f| \leq \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{falls } f(x) = 0 \\ +\infty, & \text{falls } f(x) \neq 0 \end{array} \right\} = \sup_{\ell \in \mathbb{N}} \{\ell \cdot \chi_M\}$$

und deshalb

$$\int^\uparrow |f|(x) dx \leq \int^\uparrow \sup_{\ell \in \mathbb{N}} \{\ell \cdot \chi_M\}(x) dx \leq \sup_{\ell \in \mathbb{N}} \left\{ \int^\uparrow \ell \cdot \chi_M(x) dx \right\} = 0.$$

(ii) Aufgrund der Definition des Oberintegrals existiert eine Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$, so dass

$$f \leq \tilde{f}, \quad \int^\uparrow \tilde{f}(x) dx < +\infty.$$

Daher genügt es den Fall $f \in \mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$ zu betrachten. Gemäß Definition von $\mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$ gibt es eine Funktion $\tilde{\tilde{f}} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ mit $f - \tilde{\tilde{f}} \geq 0$, weswegen wir $f \geq 0$ annehmen können.

Ist jetzt

$$M := \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) = +\infty\},$$

so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$n \cdot \chi_M \leq f,$$

deshalb

$$n \cdot \int^{\uparrow} \chi_M(x) dx = \int^{\uparrow} n \cdot \chi_M(x) dx \leq \int^{\uparrow} f(x) dx < +\infty.$$

Daraus folgt $\int^{\uparrow} \chi_M(x) dx = 0$.

23.5.4 Satz

Für zwei Funktionen $f, g \in \overline{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d)$ gilt:

$$f(x) = g(x) \text{ fast-überall} \quad \implies \quad \begin{cases} \int^{\uparrow} f(x) dx = \int^{\uparrow} g(x) dx \\ \int^{\downarrow} f(x) dx = \int^{\downarrow} g(x) dx \end{cases}$$

23.5.5 Beweis[⊖]

Wir beweisen nur die obere Aussage und definieren dazu die Nullmenge

$$N := \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq g(x)\}$$

und die Funktion auf \mathbb{R}^d

$$\tilde{\chi}_N(x) := \begin{cases} \infty, & \text{falls } x \in N, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^d \setminus N. \end{cases}$$

Für alle $\varphi \in \mathcal{C}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d)$ gilt dann,

$$\varphi + \tilde{\chi}_N \text{ wohldefiniert} \quad \int^{\uparrow} \varphi(x) dx > -\infty,$$

da eine Minorante in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ existiert. Ist zusätzlich $\varphi \geq f$, so gilt außerdem

$$g \leq \varphi + \tilde{\chi}_N$$

und deshalb

$$\begin{aligned} \int^{\uparrow} g(x) dx &\leq \int^{\uparrow} (\varphi + \tilde{\chi}_N)(x) dx \leq \int^{\uparrow} \varphi(x) dx + \int^{\uparrow} \tilde{\chi}_N(x) dx \\ &= \int^{\uparrow} \varphi(x) dx = \int^{\uparrow} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Geht man in dieser Ungleichung zum Infimum bzgl. aller $\varphi \in \mathcal{C}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \geq f$ über, so erhält man gemäß Definition des Oberintegrals

$$\int^{\uparrow} g(x) dx \leq \int^{\uparrow} f(x) dx.$$

Da in dieser Argumentation die beiden Funktionen f und g nicht gegeneinander ausgezeichnet waren, gilt auch die umgekehrte Richtung

$$\int^{\uparrow} f(x) dx \leq \int^{\uparrow} g(x) dx.$$

23.6 Satz von Fubini für integrierbare Funktionen

23.6.1 Satz von Fubini für integrierbare Funktionen

Es sei $f : \mathbb{R}^{d+p} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ eine integrierbare Funktion. Dann gibt es eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^p$, so dass folgendes gilt:

- (i) Für $y \in \mathbb{R}^p \setminus N$ ist die partielle Abbildung $f(\cdot, y) : \mathbb{R}^d \rightarrow [-\infty, +\infty]$ integrierbar.
- (ii) Die dann fast-überall auf \mathbb{R}^p definierte Abbildung

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^p \setminus N & \rightarrow \mathbb{R} \\ y & \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dx \end{cases}$$

ist integrierbar.

(iii) Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{d+p}} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^p} \overbrace{\int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dx}^{F(y)} dy.$$

23.6.2 Beweis[⊖]

(1) Wir definieren die beiden Abbildungen $\mathbb{R}^p \rightarrow [-\infty, +\infty]$

$$F^\downarrow(y) := \int_{\mathbb{R}^d}^\downarrow f(x, y) dx, \quad F^\uparrow(y) := \int_{\mathbb{R}^d}^\uparrow f(x, y) dx.$$

(2) Da f integrierbar ist, gibt es (integrierbare) Funktionen $\psi \in \mathcal{C}^\downarrow(\mathbb{R}^{d+p})$, $\varphi \in \mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^{d+p})$, so dass

$$\begin{aligned} \psi &\leq f \leq \varphi \\ \int_{\mathbb{R}^{d+p}} f(x, y) d(x, y) - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{d+p}} \psi(x, y) d(x, y)}_{\text{endlich}} &\leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{d+p}} \varphi(x, y) d(x, y)}_{\text{endlich}} - \int_{\mathbb{R}^{d+p}} f(x, y) d(x, y) &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

(3) Wir wenden den Satz von Fubini für \mathcal{C}^\uparrow -Funktionen auf φ , den für \mathcal{C}^\downarrow -Funktionen auf ψ an und definieren dabei die Funktionen $\Psi \in \mathcal{C}^\downarrow(\mathbb{R}^p)$, $\Phi \in \mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}^p)$ durch

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d+p}}^\uparrow \varphi(x, y) d(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^p}^\uparrow \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d}^\uparrow \varphi(x, y) dx}_{=: \Phi(y)} dy \\ \int_{\mathbb{R}^{d+p}}^\downarrow \psi(x, y) d(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^p}^\downarrow \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d}^\downarrow \psi(x, y) dx}_{=: \Psi(y)} dy \end{aligned}$$

(4) Wegen $\psi \leq f \leq \varphi$ ist

$$\Psi \leq F^\downarrow \leq F^\uparrow \leq \Phi \quad \text{auf } \mathbb{R}^p,$$

außerdem

$$\int_{\mathbb{R}^p}^\uparrow \Phi(y) dy - \int_{\mathbb{R}^p}^\downarrow \Psi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^{d+p}}^\uparrow \varphi(x, y) d(x, y) - \int_{\mathbb{R}^{d+p}}^\downarrow \psi(x, y) d(x, y) \leq \varepsilon.$$

Es folgt, dass F^\downarrow und F^\uparrow integrierbar sind mit

$$\int_{\mathbb{R}^p} F^\downarrow(y) dy = \int_{\mathbb{R}^p} F^\uparrow(y) dy = \int_{\mathbb{R}^{d+p}} f(x, y) d(x, y)$$

(5) Es ist $F^\uparrow - F^\downarrow \geq 0$ und

$$\int_{\mathbb{R}^p} (F^\uparrow - F^\downarrow)(y) dy = 0$$

gemäß Satz 23.5.2(i) existiert eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^p$ mit

$$F^\uparrow(y) = F^\downarrow(y) \text{ für } y \in \mathbb{R}^p \setminus N.$$

(6) Für genau diese $y \in \mathbb{R}^p \setminus N$ ist die Abbildung $f(\cdot, y)$ auf \mathbb{R}^d wegen der Übereinstimmung $F^\uparrow = F^\downarrow$ integrierbar. Es ist dann also

$$F(y) = F^\uparrow(y) = F^\downarrow(y) \text{ für } y \in \mathbb{R}^p \setminus N.$$

(7) Abschließend ist

$$\int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^p} F(y) dy = \int_{\mathbb{R}^p} F^\uparrow(y) dy = \int_{\mathbb{R}^{d+p}} f(x, y) d(x, y).$$

23.7 Die Transformationsformel für integrierbare Funktionen

23.7.1 Definition: Diffeomorphismus

Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ offene Teilmengen und $k \in \mathbb{N}$ oder $k = \infty$.

Eine Abbildung $\vartheta : X \rightarrow Y$ heißt ein \mathcal{C}^k -Diffeomorphismus, wenn

- sie bijektiv ist und
- sie eine \mathcal{C}^k -Abbildung ist und
- ihre Umkehrabbildung eine \mathcal{C}^k -Abbildung ist.

23.7.2 Satz: Transformationsformel für integrierbare Funktionen

Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ offen Teilmengen und $\vartheta : X \rightarrow Y$ ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus.

Die Funktion $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar genau dann, wenn die Funktion

$$(f \circ \vartheta) \cdot |\det \vartheta'| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

integrierbar ist. Es gilt in diesem Fall:

$$\int_X (f \circ \vartheta)(x) \cdot |\det \vartheta'(x)| dx = \int_Y f(y) dy.$$

23.7.3 Beweis

(0) Vorbemerkung: Dieser Beweis wird mit Methoden geführt, die dem nächsten Kapitel 24 über die Konvergenzsätze entstammen.

(1) Es sei $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Es existiert dann gemäß Satz 22.2.6 eine Folge (f_k) von Funktionen aus $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\text{supp } f_k \subseteq Y$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_{L^1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int^{\uparrow} |f - f_k| = 0.$$

Siehe auch Satz 21.3.5.

Da (f_k) dann auch eine Cauchy-Folge ist, liefert der Satz 25.2.3(i), dass es eine Teilfolge $(f_{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ gibt, so dass für eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} f_{k_\ell}(y) = f(y) \quad y \in \mathbb{R}^d \setminus N.$$

(2) Wir definieren die Folge (g_ℓ) von fast-überall definierten Funktionen

$$g_\ell := (f_{k_\ell} \circ \vartheta) \cdot |\det \vartheta'| : (X \setminus \vartheta^{-1}(N)) \rightarrow \mathbb{R}$$

($\vartheta^{-1}(N)$ ist gemäß Satz 23.3.7 eine Nullmenge). Da ϑ ein Diffeomorphismus ist, sind die Funktionen g_ℓ in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ enthalten mit $\text{supp } g_\ell \subseteq X$. Die Folge (g_ℓ) konvergiert fast überall stellenweise gegen

$$g := (f \circ \vartheta) \cdot |\det \vartheta'|,$$

da ϑ stetig ist.

(3) Es ist weiter für $\ell, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|g_\ell - g_m\|_{L^1} &= \int |g_\ell - g_m|(x) dx \\ &= \int |(f_{k_\ell} \circ \vartheta) \cdot |\det \vartheta'| - (f_{k_m} \circ \vartheta) \cdot |\det \vartheta'||(x) dx \\ &= \int |(f_{k_\ell} - f_{k_m}) \circ \vartheta| \cdot |\det \vartheta'| (x) dx \quad (\text{Transformationsformel für } \mathcal{C}_c) \\ &= \int |f_{k_\ell} - f_{k_m}|(y) dy \\ &= \|f_{k_\ell} - f_{k_m}\|_{L^1} \end{aligned}$$

(4) Es folgt, dass auch (g_ℓ) eine Cauchy-Folge ist, die fast-überall stellenweise gegen g konvergiert. Nach Satz 25.2.3(iii) ist $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und es gilt

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|g_\ell - g_m\|_{L^1} = 0.$$

(5) Mit Satz 25.2.3 gilt dann weiter

$$\begin{aligned} \int g(x) dx &= \int \lim_{\ell \rightarrow \infty} g_\ell(x) dx = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int g_\ell(x) dx \\ &\quad \text{(Transformationsformel für } \mathcal{C}_c) \\ &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int f_{k_\ell}(y) dy = \int \lim_{\ell \rightarrow \infty} f_{k_\ell}(y) dy = \int f(y) dy. \end{aligned}$$

Die andere Richtung der „Genau-dann-wenn“ Aussage ergibt sich dadurch, dass man die obigen Überlegungen in umgekehrter Richtung — eben für die Transformation ϑ^{-1} — anwendet.

Das folgende Korollar enthält gegenüber dem Satz kaum mehr Substanz. Sein Rahmen entspricht aber genau den späteren Anwendungen.

23.7.4 Korollar Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ integrierbare Teilmengen und $\vartheta : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Es seien weiter Teilmengen

$$\begin{aligned} X &= X_{\text{offen}} \cup X_{\text{Null}} \\ Y &= Y_{\text{offen}} \cup Y_{\text{Null}} \end{aligned}$$

mit den indizierten Eigenschaften gegeben, so dass die Einschränkung

$$\vartheta : X_{\text{offen}} \rightarrow Y_{\text{offen}} \text{ ein wohldefinierter } \mathcal{C}^1\text{-Diffeomorphismus ist.}$$

Die Funktion $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar genau dann, wenn die — zumindest auf X_{offen} wohldefinierte — Funktion

$$(f \circ \vartheta) \cdot |\det \vartheta'| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

integrierbar ist. Es gilt in diesem Fall:

$$\int_X (f \circ \vartheta) \cdot |\det \vartheta'| dx = \int_Y f(y) dy.$$

23.7.5 Beweis

Genau überlegen wir:

$$\begin{aligned} & f \cdot \chi_Y \text{ integrierbar} \\ \iff & f \cdot \chi_{Y_{\text{offen}}} \text{ integrierbar} \\ \stackrel{\text{S } 23.7.2}{\iff} & (f \circ \vartheta) \cdot |\det \vartheta'| \cdot \chi_{X_{\text{offen}}} \text{ integrierbar} \\ \iff & (f \circ \vartheta) \cdot |\det \vartheta'| \cdot \chi_X \text{ integrierbar.} \end{aligned}$$

Mit Satz 23.7.2 gilt dann

$$\int_X (f \circ \vartheta) \cdot |\det \vartheta'| dx = \int_{X_{\text{offen}}} (f \circ \vartheta) \cdot |\det \vartheta'| dx = \int_{Y_{\text{offen}}} f(y) dy = \int_Y f(y) dy.$$

24 Konvergenzsätze \ominus

24.1 Der Konvergenzsatz von Levi

Die herausragende Bedeutung des Lebesgue'schen Integrationsbegriffs kommt in den Sätzen dieses Abschnitts zum Ausdruck.

Im anfänglichen Satz von Levi wird der theoretische Gehalt des Lebesgue-Integrals auf den Punkt gebracht: Der „Integrationsoperator“, der einer Funktion eine reelle Zahl zuordnet, ist mit einem stellenweisen Grenzprozess, der „Supremumsbildung bei Monotonie“, vertauschbar.

Es bleibt dann einigen mathematischen Techniken überlassen, diesen Satz auf andere stellenweise Grenzwertprozesse wie

$$\sup \text{ (ohne Monotonie), } \inf, \liminf, \limsup, \lim, \sum_{\infty}$$

zu übertragen.

24.1.1 Satz: Monotone Konvergenz, Beppo Levi

Es sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \bar{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^d)$ eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen. Dann gilt die Implikation

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \int f_k(x) dx < +\infty \quad \implies \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k \text{ ist integrierbar mit}$$

$$\int (\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k)(x) dx = \sup_{k \in \mathbb{N}} \int f_k(x) dx.$$

24.1.2 Beweis

Wir setzen zunächst $f := \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k$.

Zu einem vorgegebenem $\varepsilon > 0$ existiert gemäß Satz 22.2.4 (iv) ein $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\int^{\uparrow} (f - f_k)(x) dx \stackrel{\text{Satz 22.2.4(iii)}}{\leq} \int^{\uparrow} f(x) dx + \int^{\uparrow} (-f_k)(x) dx$$

$$\stackrel{\text{Satz 22.3.9(ii)}}{=} \int^{\uparrow} f(x) dx - \int^{\uparrow} f_k(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dazu existiert nach Satz 22.3.6 wiederum eine Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\int |f_k - \tilde{f}|(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Insgesamt gilt dann

$$\int^{\uparrow} |f - \tilde{f}|(x) dx \leq \int^{\uparrow} |f - f_k|(x) dx + \int^{\uparrow} |f_k - \tilde{f}|(x) dx \leq \varepsilon,$$

nach Satz 22.3.6 ist f integrierbar mit dem angegebenen Integral.

24.2 Der Konvergenzsatz von Lebesgue

24.2.1 Satz

Es sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^d)$ eine **beliebige** Folge integrierbarer Funktionen. Dann gelten die Äquivalenzen

$$\text{Es ex. } g \in \overline{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d) \text{ mit } \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k \leq g, \int^{\uparrow} g(x) dx < +\infty \iff \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k \text{ ist integrierbar.}$$

$$\text{Es ex. } g \in \overline{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d) \text{ mit } \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k \geq g, \int^{\downarrow} g(x) dx > -\infty \iff \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k \text{ ist integrierbar.}$$

24.2.2 Beweis

Wir beschränken uns auf die obere Zeile im Satz.

Die Richtung \Leftarrow ist trivial, da man einfach $g = \sup_{k \in \mathbb{N}} |f_k|$ wählen kann.

Für die andere Richtung \Rightarrow definieren wir die Hilfsfolge von integrierbaren Funktionen

$$g_k := \max_{1 \leq n \leq k} f_n.$$

Es ist dann

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k = \sup_{k \in \mathbb{N}} g_k$$

und für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\int g_k(x) dx = \int (\max_{1 \leq n \leq k} f_n)(x) dx = \int^{\uparrow} (\max_{1 \leq n \leq k} f_n)(x) dx \leq \int^{\uparrow} g(x) dx.$$

Insgesamt haben wir

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \int g_k(x) dx \leq \int^{\uparrow} g(x) dx < +\infty,$$

so dass die Behauptung aus dem Satz 24.1.1 von Levi folgt.

24.2.3 Satz

Es sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von integrierbaren Funktionen mit der Eigenschaft, dass eine Funktion g existiert mit

$$|f_k| \leq g \text{ für alle } k \in \mathbb{N}, \quad \int^{\uparrow} g(x) dx < +\infty.$$

Dann gilt:

- (i) Die Funktion $\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$ ist integrierbar mit

$$\int (\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k)(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx.$$

- (ii) Die Funktion $\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$ ist integrierbar mit

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx \leq \int (\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k)(x) dx.$$

24.2.4 Beweis

(1) Es genügt, die Behauptung (i) zu zeigen. Wir definieren zunächst für festes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$g_n := \inf_{k \geq n} f_k,$$

sie ist gemäß der zweiten Aussage in Satz 24.2.1 integrierbar.

(2) Wegen

$$\int g_n(x) dx \leq \int f_k(x) dx \text{ für alle } k \geq n$$

gilt für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq n$

$$\int g_n(x) dx \leq \inf_{k \geq n} \int f_k(x) dx \leq \int^{\uparrow} g(x) dx < +\infty \quad (*).$$

(3) Damit erfüllt die monoton wachsende Folge (g_n) die Voraussetzungen des Satzes von Levi, es ist also

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} f_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$$

integrierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \int (\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k)(x) dx &= \int (\sup_{n \in \mathbb{N}} g_n)(x) dx \stackrel{\text{Levi}}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int g_n(x) dx \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} \int f_k(x) dx = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx. \end{aligned}$$

24.2.5 Satz: Majorisierte Konvergenz, Henri Lebesgue

Es sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von integrierbaren Funktionen, die stellenweise konvergiert. Es gebe weiter eine Funktion g mit

$$|f_k| \leq g \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, \quad \int^{\uparrow} g(x) dx < +\infty.$$

Dann ist die Grenzfunktion $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ integrierbar mit

$$\int (\lim_{k \rightarrow \infty} f_k)(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx.$$

24.2.6 Beweis

Aufgrund der Voraussetzung der stellenweisen Konvergenz gilt

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k,$$

so dass aus dem letzten Satz die Integrierbarkeit von $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ und dann die Ungleichungskette

$$\int (\lim_{k \rightarrow \infty} f_k)(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx \leq \int (\lim_{k \rightarrow \infty} f_k)(x) dx.$$

entnommen werden kann. Es folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx = \int (\lim_{k \rightarrow \infty} f_k)(x) dx.$$

24.3 Integration einer Funktionenreihe

24.3.1 Korollar: Gliedweise Integration einer Funktionenreihe

Es sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von integrierbaren Funktionen, so dass

- die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ stellenweise konvergiert und
- die (Zahlen-)Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \int |f_k|(x) dx$ konvergiert.

Dann ist die Grenzfunktion $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ integrierbar mit

$$\int \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) (x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k(x) dx.$$

Satz 24.3.3 wird aufzeigen, dass die erste Voraussetzung dieses Korollars „fast“ aus der zweiten folgt.

24.3.2 Beweis

f_k ist integrierbar für alle $k \in \mathbb{N}$.

$\implies |f_k|$ ist integrierbar für alle $k \in \mathbb{N}$.

$\implies \sum_{k=1}^n |f_k|$ ist integrierbar für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\xrightarrow{\text{Satz 24.1.1}} F := \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ ist integrierbar.

Es gilt weiter für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \leq \sum_{k=1}^n |f_k|(x) \leq F(x)$$

es ist also F eine integrierbare Majorante für die Partialsummenfolge $(\sum_{k=1}^n f_k)_{n \in \mathbb{N}}$.

Der Satz 24.2.5 von der majorisierten Konvergenz liefert nun die Aussage, dass f integrierbar ist mit

$$\int f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k(x) dx.$$

24.3.3 Satz: Gliedweise Integration einer Funktionenreihe, Beppo Levi

Vorbemerkung: Die Aussage des Satzes 23.5.2(ii), dass ein endlicher Integralwert die Fast-Überall-Endlichkeit nach sich zieht, ermöglicht die Aufhebung der ersten Voraussetzung im Satz 24.3.1 über die Integrierbarkeit einer Funktionenreihe. Wir formulieren den resultierenden (zweiten) Satz von Levi.

Es sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von integrierbaren Funktionen, so dass die Reihe reeller Zahlen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int |f_k|(x) dx$$

konvergiert.

Dann ist die Grenzfunktion $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ fast-überall-definiert und integrierbar. Es gilt

$$\int \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k(x) dx.$$

24.3.4 Beweis

f_k ist integrierbar für alle $k \in \mathbb{N}$.

$\implies |f_k|$ ist integrierbar für alle $k \in \mathbb{N}$.

$\implies \sum_{k=1}^n |f_k|$ ist integrierbar für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\stackrel{\text{S24.1.1, B, Levi}}{\implies} F := \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ ist integrierbar.

$\stackrel{\text{S 23.5.2(ii)}}{\implies}$ Der Grenzwert $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|(x)$ existiert und ist fast-überall endlich.

\implies Die Grenzfunktion $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ ist fast-überall definiert.

Es gilt weiter für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \leq \sum_{k=1}^n |f_k|(x) \leq F(x) \quad \text{fast-überall,}$$

so dass F eine integrierbare Majorante für die Partialsummenfolge $(\sum_{k=1}^n f_k)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

Der Satz 24.2.5 von der majorisierten Konvergenz liefert nun die Aussage, dass f integrierbar ist mit

$$\int f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k(x) dx.$$

24.4 Riemann–Integrierbarkeit impliziert Lebesgue–Integrierbarkeit

24.4.1 Satz

- (i) Es sei $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ eine (beschränkte) Riemann–integrierbare Funktion. Dann ist die Funktion f Lebesgue–integrierbar über $[c, d]$ mit

$$\int_{[c,d]} f(x) dx = \int_c^d f(x) dx.$$

- (ii) Es sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- Ist f über jedem kompakten Intervall $[c, d] \subseteq J$ integrierbar und
- existiert das uneigentliche Riemann–Integral $\int_{\inf J}^{\sup J} |f|(x) dx < \infty$,

so ist f über J Lebesgue–integrierbar, es gilt

$$\int_J f(x) dx = \int_{\inf J}^{\sup J} f(x) dx.$$

Zur Erinnerung: Das uneigentliche Riemann–Integral einer Funktion f über einem nicht–notwendig kompakten Intervall J ist definiert als der — dann existente — Grenzwert

$$\int_{\inf J}^{\sup J} f(x) dx := \lim_{c \searrow \inf J} \lim_{d \nearrow \sup J} \int_c^d f(x) dx.$$

24.4.2 Beweis

- (i) Gemäß Definition der Riemann–Integrierbarkeit existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\psi \leq f \leq \varphi, \quad \int_c^d (\varphi - \psi)(x) dx \leq \varepsilon.$$

Durch Abänderung an endlich vielen Stellen und Null–Fortsetzung auf \mathbb{R} erhält man Funktionen $\tilde{f}, \tilde{\psi}, \tilde{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{\psi} \in \mathcal{C}^\downarrow(\mathbb{R}), \quad \tilde{\varphi} \in \mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{R}), \quad \tilde{\psi} \leq \tilde{f} \leq \tilde{\varphi}, \quad \int^\uparrow (\tilde{\varphi} - \tilde{\psi})(x) dx \leq \varepsilon.$$

Daraus folgt, dass \tilde{f} Lebesgue–integrierbar ist. $f \cdot \chi_{[c,d]}$ gehört der gleichen Funktionsklasse wie \tilde{f} an und ist damit ebenfalls Lebesgue–integrierbar. Die Integrale stimmen überein.

- (ii) Es sei (K_n) eine monoton wachsende Folge kompakter Intervalle mit $J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist gemäß (i) die Funktion $|f| \cdot \chi_{K_n}$ Lebesgue–integrierbar, die Folge dieser Funktionen ist monoton steigend mit

$$\sup \int (|f| \cdot \chi_{K_n})(x) dx = \int_{\inf J}^{\sup J} |f|(x) dx < +\infty.$$

Mit dem Satz von Levi folgt, dass $|f| \cdot \chi_J$ Lebesgue–integrierbar ist. Insbesondere ist diese Funktion eine Lebesgue–integrierbare Majorante für die Folge $(f \cdot \chi_{K_n})_{n \in \mathbb{N}}$ Lebesgue–integrierbarer Funktionen. Also ist $f \cdot \chi_J = \lim_{n \rightarrow \infty} f \cdot \chi_{K_n}$ Lebesgue–integrierbar. Die Integrale stimmen überein.

24.5 Parameterabhängige Integration

24.5.1 Satz: Parameterabhängige Integration

Es sei M ein metrischer Raum, $a \in M$. Weiter sei $f : \mathbb{R}^d \times M \rightarrow [-\infty, +\infty]$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass für alle $y \in M$ die partielle Abbildung $f(\cdot, y) : \mathbb{R}^d \rightarrow [-\infty, +\infty]$ integrierbar ist.

(i) (Stetigkeit „unter“ dem Integral)

Es seien zusätzlich die folgenden Bedingungen erfüllt:

- Fast überall (bzgl. $x \in \mathbb{R}^d$) sei die partielle Abbildung $f(x, \cdot) : M \rightarrow [-\infty, +\infty]$ in a stetig.
- Es existiere eine integrierbare Funktion $g : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ mit

$$|f(x, y)| \leq g(x) \text{ für alle } y \in M.$$

Dann ist die Abbildung

$$h : \begin{cases} M & \rightarrow \mathbb{R} \\ y & \mapsto \int f(x, y) dx \end{cases}$$

stetig in a .

(ii) (Differentiation „unter“ dem Integral)

Es seien zusätzlich die folgenden Bedingungen erfüllt:

- M sei ein offenes Intervall von \mathbb{R} .
- Fast überall (bzgl. $x \in \mathbb{R}^d$) sei die partielle Abbildung $f(x, \cdot) : M \rightarrow \mathbb{R}$ (endlich und) in a differenzierbar mit der Ableitung $D_2 f(x, a) \in \mathbb{R}$.
- Es existiere eine integrierbare Funktion $g : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$, so dass für alle $y \in M$

$$|D_2 f(x, y)| \leq g(x) \text{ fast-überall (bzgl. } x \in \mathbb{R}^d).$$

Dann ist die Abbildung

$$h : \begin{cases} M & \rightarrow \mathbb{R} \\ y & \mapsto \int f(x, y) dx \end{cases}$$

in $a \in M$ differenzierbar mit Ableitung

$$h'(a) = \int D_2 f(x, a) dx.$$

24.5.2 Beweis

(i) Es sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$. Dann erfüllt die Folge der integrierbaren Funktionen $(f(\cdot, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ die Voraussetzungen des Satzes 24.2.5 von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz. Es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x, y_n) dx \stackrel{\text{Leb}}{=} \int \lim_{n \rightarrow \infty} f(x, y_n) dx = \int f(x, a) dx = h(a).$$

(ii) Es sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $M \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$. Wir definieren eine Folge (F_n) integrierbarer Funktionen durch

$$F_n : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x, y_n) - f(x, a)}{y_n - a}, \end{cases} \text{ fast überall bzgl. } x \in \mathbb{R}^d.$$

Aufgrund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung gibt es ein ξ_n zwischen y_n und a , so dass

$$|F_n(x)| = \left| \frac{f(x, y_n) - f(x, a)}{y_n - a} \right| = |D_2 f(x, \xi_n)| \leq g(x).$$

Es ist dann aufgrund des Satzes von Lebesgue

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(y_n) - h(a)}{y_n - a} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{f(x, y_n) - f(x, a)}{y_n - a} dx \stackrel{\text{Leb}}{=} \int \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, y_n) - f(x, a)}{y_n - a} \right) dx \\ &= \int D_2 f(x, a) dx.\end{aligned}$$

Da die Folge beliebig war, gilt auch

$$h'(a) = \lim_{y \xrightarrow{\bullet} a} \frac{h(y) - f(a)}{y - a} = \int D_2 f(x, a) dx.$$

25 Die Banachräume der Lebesgue-Theorie \ominus

25.1 Klassen von fast-überall definierten Funktionen

25.1.1 Definitionen

1. Eine auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^d$ definierte Funktion $f : D \rightarrow [-\infty, +\infty]$ heißt *fast-überall definiert*, wenn $\mathbb{R}^d \setminus D$ eine Nullmenge ist.
2. Zwei fast-überall definierte Funktionen f und \tilde{f} mit Definitionsmengen D bzw. \tilde{D} heißen *fast-überall gleich*, wenn es eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^d$ gibt, so dass

$$\mathbb{R}^d \setminus N \subseteq D \cap \tilde{D} \quad \text{und} \quad f(x) = \tilde{f}(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^d \setminus N.$$

3. Die Fast-überall-Gleichheit ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller fast-überall-definierten Funktionen. Wir nennen die Äquivalenzklassen einfach *Funktionsklassen*.
4. Wir bezeichnen die zu einer fast-überall definierten Funktion f gehörige Funktionsklasse mit $[f]$. Für die Menge der Funktionsklassen wird das Symbol $\overline{F}(\mathbb{R}^d)$ eingeführt.
5. Die Halbordnungsrelation \leq für Funktionen überträgt sich auf Funktionsklassen, indem man setzt

$$[f] \leq [\tilde{f}] \iff f(x) \leq \tilde{f}(x) \text{ f.ü.}$$

6. Die stellenweisen Grenzprozesse

$$\sup_{k \in \mathbb{N}}, \quad \inf_{k \in \mathbb{N}}, \quad \limsup_{k \rightarrow \infty}, \quad \liminf_{k \rightarrow \infty}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty}$$

für Folgen übertragen sich auf die Funktionsklassen, indem man sie „fast-überall“ durchführt. Wesentlich hierbei ist die Aussage aus Satz 23.3.3(ii), dass abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen sind.

7. Wir definieren auf der Menge der fast-überall definierten Funktionen die Operatoren

$$\int^{\uparrow} : \begin{cases} \overline{F}(\mathbb{R}^d) & \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ [f] & \mapsto \int^{\uparrow} \hat{f}(x) dx, \end{cases} \quad \int^{\downarrow} : \begin{cases} \overline{F}(\mathbb{R}^d) & \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ [f] & \mapsto \int^{\downarrow} \hat{f}(x) dx, \end{cases}$$

wobei \hat{f} irgendeine Funktion aus der Funktionsklasse $[f]$ mit Definitionsmenge \mathbb{R}^d ist. Aufgrund von Satz 23.5.4 sind die zugewiesenen Werte unabhängig von der konkreten Auswahl $\hat{f} \in [f]$.

8. Die Konvergenzsätze von Levi und Lebesgue aus Abschnitt 24 können auf Funktionsklassen übertragen werden. Die jeweiligen Voraussetzungen an die Folgen von Funktionen werden zu Voraussetzungen an Folgen von Funktionsklassen, sie beziehen sich also auf „Fast-Überall-Eigenschaften“.
9. Es ist in der mathematischen Literatur weithin üblich, in Bezug auf die Symbolik zwischen Funktionen und Funktionsklassen nicht klar zu unterscheiden. So wird eine Funktionsklasse $[f] \in \overline{F}(\mathbb{R}^d)$ oft einfach mit f bezeichnet.
10. Man muss sich jedoch sorgfältig vergegenwärtigen, dass die Funktionsklassen keine Funktionen mehr sind und deshalb Operationen bzw. Begriffe wie beispielsweise
 - Auswertung an einer Stelle oder
 - Einschränkung auf eine beliebige Teilmenge
 - Stetigkeit, Differenzierbarkeit (abgesehen von der Theorie der „Sobolew-Räume“)

nicht mehr definiert sind.

25.2 Der Banachraum $L^1(\mathbb{R}^d)$

Es sei $\overline{F}(\mathbb{R}^d)$ die Menge der Funktionsklassen von fast-überall definierten Funktionen auf \mathbb{R}^d .

1. Ist eine Funktion $f \in [f] \in \overline{F}(\mathbb{R}^d)$ integrierbar, so sind auch alle anderen Funktionen $\tilde{f} \in [f]$ integrierbar. Man kann daher von der *Integrierbarkeit der Funktionsklasse* sprechen.
2. Aufgrund von Satz 23.5.4 kann die Integration von integrierbaren Funktionsklassen durchgeführt werden:

$$\int : \begin{cases} \overline{F}(\mathbb{R}^d) & \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ [f] & \mapsto \int \hat{f}(x) dx, \end{cases}$$

wobei \hat{f} irgendeine Funktion aus $[f]$ mit Definitionsmenge \mathbb{R}^d ist.

3. Aufgrund von Satz 23.5.2(ii),(iii) nehmen alle Funktionen innerhalb einer integrierbaren Funktionsklasse $[f]$ die Werte $-\infty$ und $+\infty$ nur auf einer Nullmenge an. Bei Ersetzung dieser Funktionswerte durch endliche Werte bleibt die Funktion in der ursprünglichen Funktionsklasse, so dass bei **integrierbaren** Funktion(s)klass(en) der Kontext von $\pm\infty$ -Werten ohne Belang ist.
4. Wir bezeichnen die Menge der integrierbaren Funktionsklassen mit $L(\mathbb{R}^d) = L^1(\mathbb{R}^d)$.
5. Auf $L^1(\mathbb{R}^d)$ ist die Struktur eines \mathbb{R} -Vektorraums erklärt: Linearkombinationen werden einfach für Vertreter-Funktionen in der Klasse, die die Werte $\pm\infty$ nicht annehmen, durchgeführt. Die Linearkombination der Funktionsklasse ist — als Funktionsklasse — dann von der Auswahl der Vertreter-Funktionen unabhängig. Die Funktionsklasse $[0]$, die die Funktion 0 enthält, wird zum Nullvektor 0 dieses Vektorraums.

25.2.1 Satz

Das auf $L^1(\mathbb{R}^d)$ erklärte Funktional

$$\|\cdot\|_{L^1} : \begin{cases} L^1(\mathbb{R}^d) & \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ f & \mapsto \int |f|(x) dx \end{cases}$$

ist eine Norm, d.h.:

Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten die Aussagen

$$\|\alpha f\|_{L^1} = |\alpha| \cdot \|f\|_{L^1}$$

$$\|f + g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}$$

$$\|f\|_{L^1} = 0 \iff f = 0 \quad (\text{als Funktionsklasse!})$$

25.2.2 Beweis

Zum Beweis sei einfach auf die Definition der Integrierbarkeit und auf die Sätze 22.3.9 bzw. 23.5.2 verwiesen.

25.2.3 Satz: L^1 vollständig

Der normierte Vektorraum $L^1(\mathbb{R}^d)$ ist vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$ hat einen Grenzwert in $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Genauer: Es sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von integrierbaren Funktionen mit der Eigenschaft, dass die Folge $([f_k])_{k \in \mathbb{N}}$ der zugehörigen Äquivalenzklassen in $L^1(\mathbb{R}^d)$ eine Cauchy-Folge ist.

Dann gilt

- (i) Es gibt eine Teilfolge $(f_{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$, die fast-überall stellenweise gegen eine Grenzfunktion f konvergiert.
- (ii) Die Klasse $[f]$, die zur Grenzfunktion f dieser Teilfolge gehört, ist in $L^1(\mathbb{R}^d)$ enthalten.
- (iii) Es gilt dabei $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_{L^1} = 0$.
- (iv) Ist $(\tilde{f}_{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ eine weitere Teilfolge, die gemäß (i) fast-überall stellenweise konvergiert, so gehört ihre Grenzfunktion zur gleichen Klasse $[f]$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$.

25.2.4 Beweis

(1) Wir definieren die Teilfolgen-Auswahl-Funktion $\ell \mapsto k_\ell$ rekursiv durch die Bedingungen

$$k_1 := 1, \quad \|f_{k_{\ell+1}} - f_{k_\ell}\|_{L^1} \leq \frac{1}{2^\ell}.$$

Dies ist aufgrund der Cauchy-Voraussetzung möglich.

(2) Für ordnen der Teilfolge $(f_{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ wie folgt eine Teleskopreihe

$$f_{k_1} + \sum_{\ell=1}^{\infty} (f_{k_{\ell+1}} - f_{k_\ell}) = f_{k_1} + (f_{k_2} - f_{k_1}) + (f_{k_3} - f_{k_2}) + (f_{k_4} - f_{k_3}) + \dots$$

von Funktionen zu. Für die Glieder dieser Reihe gilt

$$\left| \int (f_{k_{\ell+1}} - f_{k_\ell})(x) dx \right| \leq \int |(f_{k_{\ell+1}} - f_{k_\ell})(x)| dx = \|f_{k_{\ell+1}} - f_{k_\ell}\|_{L^1} \leq \frac{1}{2^\ell},$$

so dass die Voraussetzung des Satzes 24.3.3 erfüllt ist. Die Grenzfunktion f existiert fast-überall, sie definiert eine Funktionsklasse $[f]$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Es gilt:

$$\int f(x) dx = \int f_{k_1}(x) dx + \sum_{\ell=1}^{\infty} \int (f_{k_{\ell+1}} - f_{k_\ell})(x) dx = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int f_{k_\ell}(x) dx.$$

(3) Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Aufgrund der Cauchy-Voraussetzung existiert zunächst ein $K \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k, j \geq K$ gilt

$$\|f_k - f_j\|_{L^1} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } k, j \geq K.$$

Es existiert dann weiter ein $L \in \mathbb{N}$ mit $k_L \geq K$, so dass

$$\sum_{\ell=L}^{\infty} \frac{1}{2^\ell} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

und deshalb

$$\|f - f_{k_L}\|_{L^1} = \left\| \sum_{\ell=L}^{\infty} (f_{k_{\ell+1}} - f_{k_\ell}) \right\|_{L^1} \leq \sum_{\ell=L}^{\infty} \|f_{k_{\ell+1}} - f_{k_\ell}\|_{L^1} \leq \sum_{\ell=L}^{\infty} \frac{1}{2^\ell} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für ein beliebiges $k \geq K$ gilt dann

$$\|f - f_k\|_{L^1} \leq \|f - f_{k_L}\|_{L^1} + \|f_{k_L} - f_k\|_{L^1} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Das ist die Aussage (iii).

(4) Würde die zweite Teilfolge eine Grenzfunktion g mit $[g] \neq [f]$ haben, so würde dies wegen

$$\|f - g\|_{L^1} \leq \|f - f_k\|_{L^1} + \|f_k - g\|_{L^1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

einen Widerspruch bedeuten.

25.2.5 Satz

Das Integral auf $L^1(\mathbb{R}^d)$ ist stetig.

Dies folgt einfach aus der Abschätzung

$$\left| \int f(x) dx - \int \tilde{f}(x) dx \right| = \left| \int (f - \tilde{f})(x) dx \right| \leq \int |f - \tilde{f}|(x) dx = \|f - \tilde{f}\|_{L^1}.$$

25.3 Die Banachräume $L^p(\mathbb{R}^d)$

25.3.1 Vereinbarung über die Zahlen p und q Im folgenden seien die beiden Konstanten $p, q > 1$ durch

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad q = \frac{p}{p-1} \quad \Longleftrightarrow \quad p = \frac{q}{q-1}$$

verknüpft.

25.3.2 Hilfssatz

Für $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ gilt die Abschätzung

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

25.3.3 Beweis

Für festes y bestimmen wir das Minimum der partielle Funktion

$$f(x) := \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy.$$

Die einzige Nullstelle der ersten Ableitung

$$f'(x) = x^{p-1} - y.$$

ist $y^{\frac{1}{p-1}}$. Diese Stelle ist wegen

$$f(y^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{\frac{1}{p-1}+1} = y^{\frac{p}{p-1}} \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \right) = 0$$

eine Nullstelle und dann wegen

$$f(0) = \frac{y^q}{q} \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

eine Minimumsstelle.

25.3.4 Satz

(i) Für zwei Funktionen $f, g \in \overline{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d)$ sei das Produkt wohldefiniert. Dann gilt

$$\int^{\uparrow} |f \cdot g| \leq \left(\int^{\uparrow} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int^{\uparrow} |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

(ii) Für zwei Funktionen $f, g \in \overline{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d)$ sei die Summe wohldefiniert. Dann gilt

$$\left(\int^{\uparrow} |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int^{\uparrow} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int^{\uparrow} |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

25.3.5 Beweis

(0) Im Fall $\left(\int^{\uparrow} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$ ist (sehr ausführlich)

$$\begin{aligned} & \left(\int^{\uparrow} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \\ \implies & \int^{\uparrow} |f|^p = 0 \\ \implies & |f|^p = 0 \quad \text{fast überall} \\ \implies & |f| = 0 \quad \text{fast überall} \\ \implies & f = 0 \quad \text{fast überall} \\ \implies & |fg| = 0 \quad \text{fast überall} \\ \implies & \int^{\uparrow} |f \cdot g| = 0. \end{aligned}$$

und daher die Ungleichung erfüllt. Im Fall $\int^{\uparrow} |f|^p = \infty$ ist die Ungleichung ebenfalls trivial erfüllt. Wir können also $\int^{\uparrow} |f|^p \in \mathbb{R}^+$ und dann entsprechend $\int^{\uparrow} |g|^q \in \mathbb{R}^+$ voraussetzen.

(1) Durch Multiplikation mit positiven Konstanten können die Funktionen f und g unbeschadet der Gültigkeit der Ungleichung im Satz dahingehend verändert werden, dass

$$\int^{\uparrow} |f|^p = 1 = \int^{\uparrow} |g|^q.$$

(2) Für festes $x \in \mathbb{R}^d$ ist aufgrund des Hilfssatzes

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq \frac{1}{p} \cdot |f(x)|^p + \frac{1}{q} \cdot |g(x)|^q$$

und deshalb

$$\int^{\uparrow} |f \cdot g| \leq \frac{1}{p} \cdot \int^{\uparrow} |f|^p + \frac{1}{q} \cdot \int^{\uparrow} |g|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Die zweite Aussage kann man durch die folgende Ungleichungskette nachprüfen. Dabei kann man ohne weiteres annehmen, dass die Nenner nicht Null sind.

$$\begin{aligned} \left(\int^{\uparrow} |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \frac{\int^{\uparrow} |f + g|^p}{\left(\int^{\uparrow} |f + g|^p \right)^{\frac{1}{q}}} = \frac{\int^{\uparrow} |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1}}{\left(\int^{\uparrow} (|f + g|^{p-1})^q \right)^{\frac{1}{q}}} \\ &\leq \frac{\int^{\uparrow} |f| \cdot |f + g|^{p-1}}{\left(\int^{\uparrow} (|f + g|^{p-1})^q \right)^{\frac{1}{q}}} + \frac{\int^{\uparrow} |g| \cdot |f + g|^{p-1}}{\left(\int^{\uparrow} (|f + g|^{p-1})^q \right)^{\frac{1}{q}}} \\ &\leq \left(\int^{\uparrow} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int^{\uparrow} |g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

25.3.6 Definition

(1) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *lokal integrierbar*, wenn für jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ die Funktion $f \cdot \chi_K$ integrierbar ist.

(2) Die Menge der lokal integrierbaren Funktion(-klassen) wird mit

$$\mathcal{L}_{\text{lok}}(\mathbb{R}^d) \text{ bzw. } L_{\text{lok}}(\mathbb{R}^d)$$

bezeichnet.

Eine einfache Beobachtung halten wir fest im

25.3.7 Satz

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ sind äquivalent die Aussagen:

(A) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$

(B) $f \in \mathcal{L}_{\text{lok}}(\mathbb{R}^d)$ und $\int^{\uparrow} f < +\infty$.

25.3.8 Beweis

Die Implikation (A) \implies (B) ist trivial. Ist umgekehrt (B) erfüllt, so konvergiert die Folge $(f \cdot \chi_{[-n, +n]^d})_{n \in \mathbb{N}}$ integrierbarer Funktionen stellenweise gegen f . Der Satz von Lebesgue sorgt für die Integrierbarkeit der Grenzfunktion.

Wir definieren den Vektorraum

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in \mathcal{L}_{\text{lok}}(\mathbb{R}^d) \mid \int^{\uparrow} |f|^p < \infty \right\}$$

und auf ihm das Funktional

$$\|\cdot\|_p : \begin{cases} \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto \left(\int^{\uparrow} |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{cases}$$

Die Eigenschaften sind im nächsten Satz aufgelistet:

25.3.9 Satz

Für zwei Äquivalenzklassen $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ (fast überall)

(ii) $\|\alpha \cdot f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$

(iii) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Das bedeutet wieder, dass der Vektorraum der Äquivalenzklassen fast überall gleicher Funktionen

$$L^p(\mathbb{R}^d) := \left\{ [f] \mid f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d) \right\}$$

mit dem Funktional $\|\cdot\|_p$ ein normierter Vektorraum ist.

25.4 Verallgemeinerung auf lokalkompakte Räume

Das dargelegte Konzept der Erweiterung

$$\left(\mathcal{C}(\mathbb{R}^d), \int\right) \longrightarrow \left(L^1(\mathbb{R}^d), \int\right)$$

kann wesentlich verallgemeinert werden.

25.4.1 Ausgangspunkt

Wir schildern die wesentlichen Daten des Ausgangspunkts:

\mathbb{R}^d Es wurden nur topologische Begriffe verwendet: offene, abgeschlossene, kompakte Teilmengen.

Die Vektorraumstruktur war unerheblich, sie spielte nur für die Transformationsformel, entfernt für den Satz von Fubini eine Rolle.

\mathcal{C}_c Die wesentlichen Features dieser Menge waren:

- \mathbb{R} -Vektorraum
- Sie ist abgeschlossen gegen Betragsbildung (bzw. sup / inf Bildung)
- Halbordnung $f \leq g \iff f(x) \leq g(x) \forall x \in \mathbb{R}^d$

\int Die wesentlichen Eigenschaften des Integrals als Abbildung $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ waren:

- Linearität,
- Monotonie
- Respektierung des s.m.s-Supremums.

25.4.2 Verallgemeinerung auf lokalkompakte Räume Bei der Konstruktion des Lebesgue-Integrals kann die Menge \mathbb{R}^d durch einen beliebigen lokalkompakten Raum X ersetzt werden.

25.4.3 Definition:

(1) Ein topologischer Raum X heißt Hausdorff'sch, wenn es zu zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ disjunkte offene Umgebungen U_x und U_y gibt.

(2) Ein topologischer Raum heißt lokalkompakt, wenn er Hausdorff'sch ist und jeder Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt.

25.4.4 Beispiel: $X = \mathbb{N}$ $X = \mathbb{N}$ ist mit der diskreten Topologie versehen.

- Alle Teilmengen sind offen.
- Alle Teilmengen sind abgeschlossen.
- Die kompakten Mengen sind genau die endlichen Teilmengen.
- Eine Funktion $X \rightarrow \mathbb{R}$ ist einfach eine reelle Folge.
- $\mathcal{C}_c(X)$ umfasst genau die Folgen, deren Glieder fast alle Null sind.
- Das Integral auf $\mathcal{C}(X)$ ist einfach die Summe der Glieder der Folge. Diese Zahl ist endlich, da die Summe endlich ist.
- $\mathcal{C}^\uparrow(\mathbb{N})$ ist die Menge der Folgen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, die nur endlich viele negative Glieder haben.
- $L^1(\mathbb{N})$ ist die Menge der Folgen, die bei Aufsummation zu absolut konvergenten Reihen werden.
- Der Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz ist gerade das Majoranten-Kriterium.

25.4.5 Beispiel: Das Dirac-Funktional Es sei $X = \mathbb{R}^n$. Wir definieren die Linearform

$$\varepsilon_0 : \begin{cases} \mathcal{C}(X) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto f(0) \end{cases}$$

Sie heißt Dirac'sches Maß auf X .

25.5 Verallgemeinerung auf Maßräume

Es sei jetzt X eine beliebige Menge, auf der eine σ -Algebra erklärt ist.

25.5.1 Definition:

(1) Es sei X eine Menge. Ein System \mathcal{S} von Teilmengen heißt σ -Algebra auf X , wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

- $X \in \mathcal{S}$.
- $A \in \mathcal{S} \implies X \setminus A \in \mathcal{S}$.
- $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge von Teilmengen aus $\mathcal{S} \implies \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{S}$.

X — oder besser das Paar (X, \mathcal{S}) heißt dann auch *Meßraum*, die Teilmengen aus der σ -Algebra heißen *messbar*.

(2) Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen zwei Meßräumen (X, \mathcal{S}_X) und (Y, \mathcal{S}_Y) heißt *messbar*, wenn das Urbild einer messbaren Menge aus \mathcal{S}_Y eine messbare Menge aus \mathcal{S}_X ist.

(3) Eine Abbildung $\mu : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Maß* auf einem Meßraum (X, \mathcal{S}_X) , wenn sie die Kolmogoroff-Axiome erfüllt:

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- $\mu(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{S}$.
- Für eine Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Mengen aus \mathcal{S} ist die σ -Additivität erfüllt:

$$\mu \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Das Tripel (X, \mathcal{S}, μ) heißt dann *Maßraum*.

25.5.2 Beispiel Auf \mathbb{R}^d ist eine kanonische σ -Algebra gegeben: Es ist die kleinste σ -Algebra, die alle offenen bzw. abgeschlossenen Teilmengen umfasst.

Gibt es im \mathbb{R}^d nicht-messbare Teilmengen? Ja!

Ist jetzt ein Maßraum $(X, \mathcal{S}, \mathbb{R}^d)$ gegeben, so kann man eine Integrationstheorie — ähnlich wie oben aufbauen:

- Man startet mit dem Vektorraum $\mathcal{E}(X)$ der Elementarfunktionen (\sim Treppenfunktionen), das sind Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen für messbare Mengen:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad A_i \text{ messbar.}$$

- Man schaut sich dann den Raum $\mathcal{E}^*(X)$ an, er umfasst alle Funktionen $X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, die sich als stellenweiser Limes streng monoton steigender Folgen von Elementarfunktionen ergeben.

Es stellt sich heraus, dass \mathcal{E}^* alle messbaren Funktionen $X \rightarrow [0, \infty]$ umfasst.

Als Integral für Funktionen aus \mathcal{E}^* definiert man (wieder) das Supremum der Integrale der Folgenglieder.

- Die Menge $L^1(X)$ der Lebesgue-integrierbaren Funktionen umfasst dann genau die Funktionen $X \rightarrow \mathbb{R}$, die messbar sind und für die der Positiv- und der Negativteil

$$f^+ := \sup\{f, 0\}, \quad f^- := -\inf\{f, 0\}$$

jeweils ein endliches Integral hat.

Als Integral definiert man die Differenz

$$\int f := \int f^+ - \int f^-.$$

26 Orientierte Integration — Allgemeines

26.1 p -Flächen und p -Ketten

26.1.1 Definition: p -Flächen

Es sei K eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^p mit der Eigenschaft, dass eine offene Menge K_{offen} existiert, so dass

$$K = \overline{K_{\text{offen}}}$$

$$K_{\text{Null}} := K \setminus K_{\text{offen}} \text{ ist eine Nullmenge.}$$

Weiter sei eine offene Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^d$ gegeben.

Eine Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} K & \rightarrow X \\ u & \mapsto \Phi(u) \end{cases}$$

heißt eine p -Fläche in X mit Parameterbereich K , wenn die Einschränkung $\Phi : K_{\text{offen}} \rightarrow X$ eine \mathcal{C}^1 -Abbildung ist.

26.1.2 Bemerkungen

1. Das Bild der Abbildung wird auch als *Spur* bezeichnet: $\text{Spur } \Phi = \Phi(K) \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^d$.
2. Die Ableitung

$$\Phi' : K_{\text{offen}} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times p}$$

ist auf K_{offen} eindeutig definiert und stetig. Als Abbildung $K \rightarrow \mathbb{R}^{d \times p}$ ist sie fast überall definiert.

3. Man behalte im Blick, dass der Parameterbereich K sehr oft ein Quader, ein Polyeder, eine Kugel oder ein so genannter Simplex sein wird.
4. Polyeder, Quader oder Kugeln im \mathbb{R}^p können auf natürliche Weise als p -Flächen aufgefasst werden. $\Phi = \iota : K \rightarrow \mathbb{R}^p$ ist dann einfach die kanonische injektive Einbettung.
5. Wir werden wiederholt p -Flächen zu betrachten haben, die die folgende stärkere Eigenschaft aufweisen:

Es existieren eine offene Umgebung U_K von K und eine \mathcal{C}^1 -Fortsetzung $\Phi : U_K \rightarrow \mathbb{R}^d$ von Φ .

In diesem Fall ist die Ableitung auf K

$$\Phi' : K \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$$

eindeutig definiert, stetig, ihre Koordinaten bzw. die Determinante sind integrierbar.

6. Beachte, dass p -Flächen entartet sein können. Es wäre verfrüht, das Bild einer p -Fläche als p -dimensional zu bezeichnen.

26.1.3 Definition: p -Ketten

Da es immer wieder vorkommt, dass bestimmte Mengen, über die integriert werden soll, „zusammengestückelt“ sind, ist noch der folgende Begriff geeignet:

Eine p -Kette ist eine formale Summe (= additive Zusammenstellung) von endlich vielen p -Flächen:

$$\Phi = \sum_{i=1}^d \Phi_i$$

Beachte dabei, dass es nicht — wie sonst bei Addition von Funktionen — um die Addition der Funktionswerte an den einzelnen Stellen der Definitionsmenge geht. Die einzelnen p -Flächen in der p -Kette können durchaus verschiedene Definitionsmengen haben.

Der Begriff „formale Summe“ wirkt etwas mysteriös, er lässt sich aber über so genannte „frei erzeugte Gruppen“ mathematisch solide definieren.

Die *Spur* der p -Kette Φ sei einfach die Vereinigung der Spuren der beteiligten p -Flächen.

26.2 Vektorfelder

26.2.1 Definitionen: Zeilenvektorfeld

1. Ist $X \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Teilmenge, so nennen wir eine Abbildung $v : X \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times d}$ ein *Zeilenvektorfeld* (oder kürzer: Vektorfeld) auf X .

Als Veranschaulichung kann man sich vorstellen, dass an jedem Punkt von X ein Vektor angeheftet ist.

2. Ist X offen, so heißt das Vektorfeld v ein C^k -Vektorfeld, wenn es eine C^k -Abbildung ist.

Ist X kompakt, so vereinbaren wir, dass v ein C^k -Vektorfeld ist, wenn es eine offene Umgebung U von X gibt und eine Fortsetzung des Vektorfeldes auf U , das ein C^k -Vektorfeld ist.

26.2.2 Ableitung eines Zeilenvektorfeldes

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen mit $a \in X$.

Zur Erinnerung: Ein Spaltenvektorfeld $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{d \times 1}$ heißt differenzierbar mit Ableitung $f'(a) \in \mathbb{R}^{d \times d}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\|f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a)\| \leq \varepsilon \|x - a\|, \quad \text{falls } \|x - a\| \leq \delta.$$

Dies lässt sich dualisieren: Ein Zeilenvektorfeld $v : X \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times d}$ heißt differenzierbar mit Ableitung $v'(a) \in \mathbb{R}^{d \times d}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\|v(x) - v(a) - (x - a) \cdot v'(a)\| \leq \varepsilon \|x - a\|, \quad \text{falls } \|x - a\| \leq \delta.$$

Aus dieser Dualisierung lässt sich erschließen (und mathematisch noch besser fundieren), dass die *Ableitung* eines C^1 -Zeilenvektorfeldes gleich der **transponierten** Jacobimatrix

$$v'(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 v_1 & \partial_1 v_2 & \cdots & \partial_1 v_d \\ \partial_2 v_1 & \partial_2 v_2 & \cdots & \partial_2 v_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_d v_1 & \partial_d v_2 & \cdots & \partial_d v_d \end{pmatrix} (a)$$

ist und dass diese Matrix immer **von rechts** an die Differenzen der Vektoren aus der Definitionsmenge heranmultipliziert wird.

Zur späteren Bezugnahme fügen wir hier noch zwei Definitionen an.

26.2.3 Definition: Rotations-Bilinearform eines Zeilenvektorfeldes

Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen mit $a \in X$ und $v : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein C^1 -Zeilenvektorfeld.

Die *Rotations-Bilinearform* des Vektorfeldes v ist gegeben durch die alternierende Bilinearform

$$\text{Rot } v : \begin{cases} X \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d & \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, p, q) & \mapsto p^T \cdot v'(a) \cdot q - q^T \cdot v'(a) \cdot p. \end{cases}$$

Man denke sich an der Stelle $a \in X$ die beiden Vektoren p, q als Parallelogramm angeheftet. $\text{Rot } v$ ist eine von dieser Konstellation abhängige reelle Zahl.

26.2.4 Definition: Divergenz-Trilinearform eines Zeilenvektorfeldes

Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen mit $a \in X$ und $v : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein C^1 -Zeilenvektorfeld.

Die *Divergenz-Trilinearform* des Vektorfeldes v ist gegeben durch die alternierende Trilinearform

$$\text{Div } v : \begin{cases} X \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, p_1, p_2, p_3) & \mapsto p_1^T \cdot v'(a) \cdot (p_2 \times p_3) + p_2^T \cdot v'(a) \cdot (p_3 \times p_1) + p_3^T \cdot v'(a) \cdot (p_1 \times p_2). \end{cases}$$

Man denke sich an der Stelle $a \in X$ die drei Vektoren p_1, p_2, p_3 als Parallel-Epipiped angeheftet. $\text{Div } v$ ist eine von dieser Konstellation abhängige reelle Zahl.

26.2.5 Ein Satz aus der linearen Algebra (LIA1, 9.2.1 (iv))

Für eine Abbildung $\theta : (\mathbb{R}^d)^d \rightarrow \mathbb{R}$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(A) $\theta(v_1, \dots, v_d) = \det(v_1, \dots, v_d)$.

(B) θ ist ...

- multilinear, d.h. alle partiellen Abbildungen sind linear.
- alternierend, d.h. bei Vertauschung zweier Argumente ändert sich das Vorzeichen des Wertes,
- normiert, d.h. $\theta(e_1, \dots, e_d) = 1$.

27 Orientierte Integration über 1-Ketten

27.1 1-Ketten

Eine 1-Fläche ist nichts anderes als eine Kurve, damit ist also eine 1-Kette γ eine formale Summe von Kurven: $\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i$ mit $\gamma_i : J_i \rightarrow X$.

27.1.1 Definitionen: Verbindung, Zyklus

1. Man sagt, die 1-Kette $\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i$ in X *verbindet* die Punkte x und \tilde{x} , wenn es eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} x &= \gamma_{\sigma(1)}(\min J_{\sigma(1)}), \\ \gamma_i(\max J_{\sigma(i)}) &= \gamma_{\sigma(i+1)}(\min J_{\sigma(i+1)}), \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1, \\ \gamma_n(\max J_{\sigma(n)}) &= \tilde{x}. \end{aligned}$$

x heißt dann auch *Anfangspunkt* und \tilde{x} *Endpunkt* der 1-Kette.

2. Die 1-Kette heißt *geschlossen* oder ein *Zyklus*, wenn Anfangspunkt und Endpunkt übereinstimmen.

27.1.2 Definition: Tangentialvektor

Ist $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $\gamma : J \rightarrow X$ eine (differenzierbare) Kurve, so definieren wir für jedes $t \in J_{\text{offen}}$ den *Tangentialvektor* als den Spaltenvektor

$$T_\gamma(t) := \gamma'(t) \in \mathbb{R}^{d \times 1}.$$

Die durch

$$\gamma(t) + \lambda T_\gamma(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

beschriebene (affine) Gerade heißt naheliegend *Tangente* an J durch $\gamma(t)$.

27.1.3 Definition: Inverse 1-Kette

1. Ist $\gamma : J \rightarrow X$ eine Kurve, so ist durch

$$\gamma^- : \begin{cases} J & \rightarrow X \\ t & \mapsto \gamma(\max J + \min J - t) \end{cases}$$

die zu γ *inverse Kurve* definiert. Anschaulich wird bei γ^- die Kurve γ in umgekehrter Richtung durchlaufen. Anfangs- und Endpunkt sind vertauscht. Man überlege, dass die Tangentialvektoren ihr Vorzeichen wechseln:

$$T_{\gamma^-}(t) = -T_\gamma(t), \quad t \in J.$$

2. Ist nun $\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i$ eine 1-Kette, so ist die zu γ inverse 1-Kette einfach die formale Summe der inversen Summanden:

$$\gamma^- := \sum_{i=1}^n \gamma_i^-.$$

Auch dabei sind Anfangs- und Endpunkt vertauscht.

27.2 Das Arbeitsintegral im \mathbb{R}^d

27.2.1 Definition: Arbeitsintegral

Es sei $v : X \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times d}$ ein Zeilenvektorfeld auf X .

- (1) Gegeben sei eine Kurve $\gamma : J \rightarrow X$. Ist der Integrand rechts integrierbar, so ist durch

$$\text{work}(v, \gamma) := \int_J v(\gamma(t)) \cdot T_\gamma(t) dt$$

die im Vektorfeld v längs γ verrichtete Arbeit definiert. Man spricht auch vom *Arbeitsintegral*.

- (2) Gegeben sei eine 1-Kette $\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i$. Existieren die Arbeitsintegrale für die einzelnen Kurven in der Summe, so ist durch

$$\text{work}(v, \gamma) = \sum_{i=1}^n \text{work}(v, \gamma_i)$$

die im Vektorfeld v längs γ verrichtete Arbeit definiert.

27.2.2 Bemerkungen

1. Diese Definition lässt sich ähnlich wie in Kapitel 17 durch eine Approximation mittels Polygonzügen plausibel machen. Es kommt hier noch zusätzlich der Begriff der Riemann'schen Summe ins Spiel. Wir führen dies hier nicht genauer aus, verweisen nur auf Erwe 2, S. 92.
2. Die Begriffsbildungen in der Literatur sind nicht ganz einheitlich. Das eingeführte Integral wird auch als *Linienintegral* (Blatter), gelegentlich als *Wegintegral* bezeichnet.
3. Es liegt die folgende physikalische Interpretation zugrunde: Ein (punktförmiger) Körper bzw. eine Ladung wird durch ein Kraftfeld (el. Feld) v längs einer Kurve γ bewegt. Das Kurvenintegral wird als „Physikalische Arbeit“ bezeichnet.
4. In der Funktionentheorie (Differentialrechnung für komplexe Zahlen) spielt ein weiteres noch einmal anders definiertes Kurvenintegral eine zentrale Rolle.

Die komplexe Zahlenebene \mathbb{C} wird über die Real- bzw. Imaginärteilbildung mit dem \mathbb{R}^2 identifiziert.

Ist $\gamma : J \rightarrow X$ eine Kurve in der offenen Teilmenge $X \subseteq \mathbb{C}$ und $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ eine (geeignete) komplexwertige Funktion auf X , so wird ihr „komplexes“ *Kurvenintegral* längs der Kurve γ durch die komplexe Zahl

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z) dz &:= \int_J f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &:= \int_J \text{Re}[f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)] dt + i \int_J \text{Im}[f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)] dt \end{aligned}$$

definiert. Hier ist also das Matrixprodukt durch komplexe Multiplikation ersetzt.

27.3 Konservative Vektorfelder

27.3.1 Definition: Gradientenfeld

Ist $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so heißt das Zeilenvektorfeld

$$\text{grad } f := (\partial_1 f, \dots, \partial_d f) : X \rightarrow \mathbb{R}^d$$

das zugehörige *Gradientenfeld*.

Die alternative Sprech- und Schreibweise ist physikalisch motiviert.

27.3.2 Satz und Definition: Konservative Vektorfelder

Die folgenden Aussagen über ein stetiges Vektorfeld $v : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ sind äquivalent:

- (A) (Def) Das Vektorfeld heißt *konservativ*.
 (B) Für zwei beliebige 1-Ketten γ und $\tilde{\gamma}$ in X mit gemeinsamem Anfangspunkt und gemeinsamem Endpunkt gilt:

$$\text{work}(v, \gamma) = \text{work}(v, \tilde{\gamma})$$

- (C) Für einen beliebigen Zyklus γ in X gilt:

$$\text{work}(v, \gamma) = 0.$$

- (D) Es existiert eine \mathcal{C}^1 -Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\text{grad } f = v.$$

Diese Funktion heißt dann *Potential* von v .

27.3.3 Beweis

(B) \Rightarrow (C): Es sei γ ein Zyklus mit Anfangs-gleich-Endpunkt x_0 . Dann ist auch die konstante Kurve

$$\tilde{\gamma} : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow X \\ t & \mapsto x_0 \end{cases}$$

ein Zyklus mit diesem Anfangs-gleich-Endpunkt x_0 . Die Tangentialvektoren $T_{\tilde{\gamma}}(t)$ sind Konstant-Null. Wegen (B) folgt

$$\text{work}(v, \gamma) = \text{work}(v, \tilde{\gamma}) = \int_{[0,1]} v(\tilde{\gamma}(t)) \cdot T_{\tilde{\gamma}}(t) dt = 0.$$

(C) \Rightarrow (B): Sind γ und $\tilde{\gamma}$ zwei 1-Ketten mit gemeinsamem Anfangspunkt und gemeinsamem Endpunkt, so ist $\gamma + \tilde{\gamma}^-$ ein Zyklus. Es folgt

$$0 = \text{work}(v, \gamma + \tilde{\gamma}^-) = \text{work}(v, \gamma) + \text{work}(v, \tilde{\gamma}^-) = \text{work}(v, \gamma) - \text{work}(v, \tilde{\gamma}).$$

(C) \Rightarrow (D): Siehe unten Beweis 27.3.5.

(D) \Rightarrow (C): Dies folgt aus Satz 27.3.6, siehe weiter unten, bei Anfangspunkt x gleich Endpunkt \tilde{x} .

27.3.4 Definitionen und Überlegungen: Wegweise zusammenhängende Mengen

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.

1. Zwei Punkte x und \tilde{x} in X heißen „verbindbar in X “, wenn es einen in X **gelegenen** Streckenzug gibt, der diese beiden Punkte verbindet.
2. Überlegung: Wegweiser Zusammenhang ist eine Äquivalenzrelation auf X .
3. Die Äquivalenzklassen bzgl. dieser Äquivalenzrelation heißen (*wegweise*) *Zusammenhangskomponenten*.
4. X heißt (*wegweise*) *zusammenhängend*, wenn es aus einer einzigen Zusammenhangskomponente besteht.
5. Eine offene und (*wegweise*) zusammenhängende Teilmenge des \mathbb{R}^d heißt ein *Gebiet*.

27.3.5 Beweis von (B) \Rightarrow (D)

(1) Es sei zunächst vorausgesetzt, dass X ein Gebiet ist. Fixiere einen Punkt $x_0 \in X$.

Der Trick ist, dass man f definiert durch

$$f : \begin{cases} X & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \text{work}(v, \gamma) \end{cases}$$

wobei γ irgendeine 1-Kette mit Anfangspunkt x_0 und Endpunkt x ist.

Eine solche 1-Kette existiert, da X ein Gebiet ist. Die Definition ist aufgrund von (B) von der konkreten Auswahl der 1-Kette γ unabhängig, also sinnvoll.

(2) Ist jetzt $y \in X$ irgendein fester Punkt, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(y) \subseteq X$. Für ein $z \in \mathbb{R}^d$ mit $\|z\| < \varepsilon$ sei dann

$$\sigma_z : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow X \\ t & \mapsto y + tz \end{cases}$$

die streckenförmige Kurve von y nach z .

(3) Es gilt dann

$$\begin{aligned} |f(y+z) - f(y) - v(y) \cdot z| &= |\text{work}(v, \sigma_z) - v(y) \cdot z| \\ &= \left| \int_0^1 v(y+tz) \cdot z \, dt - v(y) \cdot z \right| \\ \text{(Gemäß MWS Int 10.7.1 ex. } \tau \in [0, 1] \text{ mit)} &= |v(y+\tau z) \cdot z - v(y) \cdot z| \\ \text{(Cauchy-Schwarz Ungleichung)} &\leq \|v(y+\tau z) - v(y)\| \cdot \|z\| \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit geht der linke Faktor der letzten Zeile für $\|z\| \rightarrow 0$ gegen 0.

Damit ist die Definition 16.2.1 für die (mehrdimensionale) Ableitung erfüllt, es folgt:

$$v(y) = f'(y) = \text{grad } f(y).$$

(4) Ist X kein Gebiet, so liefern die Schritte (1) bis (3) für jede Zusammenhangskomponente X_j von X eine Funktion f_j . Definiere dann f durch Zusammensetzen

$$f : \begin{cases} X & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_j(x), \quad \text{wenn } x \in X_j. \end{cases}$$

Da die Zusammenhangskomponenten offen sind, „berühren“ sie sich nicht an ihren Rändern, deshalb ist mit den f_j auch die Funktion f eine C^1 -Funktion. (Das war etwas ungenau, lassen wir aber so stehen).

27.3.6 Satz

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

Ist γ eine 1-Kette mit Anfangspunkt x und Endpunkt \tilde{x} , so gilt

$$\text{work}(\text{grad } f, \gamma) = f(\tilde{x}) - f(x).$$

27.3.7 Beweis

(1) Wir setzen zunächst voraus, dass die 1-Kette aus einer einzigen stetig differenzierbaren Kurve $\gamma : J \rightarrow X$ besteht.

(2) Für die stetig differenzierbare Funktion

$$f \circ \gamma : \begin{cases} J & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto f(\gamma(t)) \end{cases}$$

gilt dann gemäß Kettenregel

$$(f \circ \gamma)'(t) = \text{grad } f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

(3) Deswegen gilt dann mit dem HDI

$$\begin{aligned} \text{work}(\text{grad } f, \gamma) &= \int_J \text{grad } f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\min J}^{\max J} (f \circ \gamma)'(t) dt \\ &= (f \circ \gamma)(\max J) - (f \circ \gamma)(\min J) = f(\tilde{x}) - f(x). \end{aligned}$$

(4) Ist jetzt γ allgemeiner eine 1-Kette mit $\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i$, so können wir die bisherigen Überlegungen auf die einzelnen γ_i anwenden. Es folgt (mit der Notation aus der Definition 27.1):

$$\text{work}(\text{grad } f, \gamma) = \sum_{i=1}^n \text{work}(\text{grad } f, \gamma_i) = \sum_{i=1}^n [f(\tilde{x}_i) - f(x_i)] \stackrel{(*)}{=} f(\tilde{x}) - f(x),$$

wobei x_i jeweils Anfangspunkt und \tilde{x}_i jeweils Endpunkt der Kurve γ_i ist.

Zu (*): Für einen Punkt $x_i = \tilde{x}_j$, an dem zwei Kurven γ_i und γ_j der 1-Kette verbunden sind, heben sich die zugehörigen Summanden weg. Es bleiben nur die zwei Summanden für Anfangs- und Endpunkt der gesamten 1-Kette übrig.

27.3.8 Beispiel: Zentralfelder

Wir betrachten auf $X = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ein Zeilenvektorfeld der Form

$$v(x) = g(\|x\|) \cdot \frac{x}{\|x\|}, \quad \text{wobei } g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ stetig,}$$

ein so genanntes *Zentralfeld*.

Wir behaupten, dass v konservativ ist und beweisen dies durch Angabe eines Potentials. Dazu sei G eine Stammfunktion von g auf \mathbb{R}^+ und dann

$$f : \begin{cases} X & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto G(\|x\|) \end{cases}$$

Wir berechnen eine partielle Ableitung von f

$$\partial_i f(x) = G'(\|x\|) \cdot \partial_i(\|x\|) = g(\|x\|) \cdot \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}} = g(\|x\|) \cdot \frac{x_i}{\|x\|}.$$

Damit ist

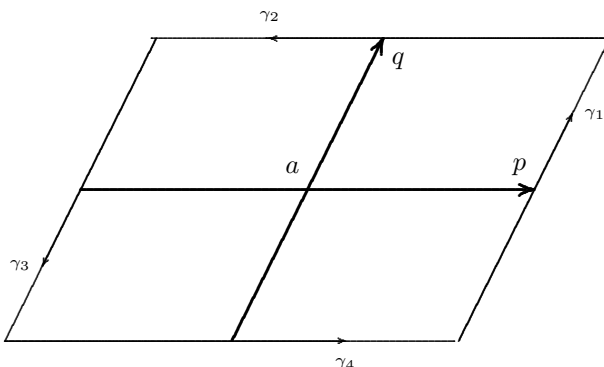
$$\text{grad } f(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_d f(x)) = g(\|x\|) \cdot \frac{x}{\|x\|} = v(x).$$

27.4 Das Arbeitsintegral bei Linearisierung

Es sei wieder $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $v : X \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times d}$ ein Zeilenvektorfeld.

Wir betrachten einen Punkt $a \in X$ und zwei Vektoren p, q , die (nach Parallelverschiebung) ein Parallelogramm mit a als Mittelpunkt aufspannen.

27.4.1 Graphik



27.4.2 Definition: Die Parallelogramm-1-Kette

Es sei $a \in X$ ein Punkt und $p, q \in \mathbb{R}^d$. Betrachte dafür die vier Kurven

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d \\ \gamma_1 : t \mapsto a + \frac{1}{2}(p - q) + tq \\ \gamma_2 : t \mapsto a + \frac{1}{2}(q + p) - tp \\ \gamma_3 : t \mapsto a - \frac{1}{2}(p - q) - tq \\ \gamma_4 : t \mapsto a - \frac{1}{2}(q + p) + tp \end{array} \right.$$

Die Bilder der Kurven bilden ein Parallelogramm, weswegen wir die daraus gebildete geschlossene 1-Kette mit

$$\pi_{a,p,q} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$$

bezeichnen.

27.4.3 Beispiel: Lineares Zeilenvektorfeld

Es sei $V \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und $v(x) = x \cdot V$ ein lineares Zeilenvektorfeld auf dem \mathbb{R}^d .

Wir berechnen die Arbeit entlang der Parallelogramm-1-Kette $\pi_{0,p,q}$:

$$\begin{aligned} \text{work}(v, \gamma_1) &= \int_0^1 v(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt = \int_0^1 \gamma_1(t) \cdot V \cdot \gamma_1'(t) dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(p - q) + tq \right]^T \cdot V \cdot \gamma_1'(t) dt \\ &= \frac{1}{2}(p - q)^T \cdot V \cdot q + \frac{1}{2}q \cdot V \cdot q = \frac{1}{2}p^T \cdot V \cdot q \end{aligned}$$

$$\text{work}(v, \gamma_2) = -\frac{1}{2}q^T \cdot V \cdot p$$

$$\text{work}(v, \gamma_3) = \frac{1}{2}p^T \cdot V \cdot q$$

$$\text{work}(v, \gamma_4) = -\frac{1}{2}p^T \cdot V \cdot q$$

und damit

$$\text{work}(v, \pi_{0,p,q}) = p^T \cdot V \cdot q - q^T \cdot V \cdot p$$

Die soeben berechnete Arbeit längs dem (p, q) -Parallelogramm ist eine schiefsymmetrische Bilinearform in den beiden Vektoren p und q .

27.4.4 Beispiel: Symmetrie von V

Ist die Matrix V aus dem letzten Beispiel symmetrisch, also $V^T = V$, so ist

$$\text{work}(v, \pi_{a,p,q}) = p^T \cdot V \cdot q - q^T \cdot V^T \cdot p = p^T \cdot V \cdot q - \underbrace{(p^T \cdot V \cdot q)^T}_{\text{Zahl}} = 0$$

Ist die Matrix V aus dem letzten Beispiel antisymmetrisch, also $V^T = -V$, so ist

$$\text{work}(v, \pi_{a,p,q}) = p^T \cdot V \cdot q + q^T \cdot V^T \cdot p = p^T \cdot V \cdot q + \underbrace{(p^T \cdot V \cdot q)^T}_{\text{Zahl}} = 2p^T \cdot V \cdot q.$$

Das ist ein Hinweis darauf, dass für die Nicht-Konservativität eines linearen Vektorfeldes der antisymmetrische Anteil der definierenden Matrix maßgeblich ist.

Die Auseinandersetzung mit dieser Idee mündet schließlich in einen tieferen Satz über den Zusammenhang von Arbeitsintegral und antisymmetrischem Anteil des Vektorfeldes.

27.4.5 Linearisierung eines Zeilenvektorfeldes

Es sei $v : X \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times d}$ ein Zeilenvektorfeld und $a \in X$ eine Stelle.

Ihm kann ein \mathcal{C}^1 -Zeilenvektorfeld

$$\mathcal{L}_a v : \begin{cases} X & \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times d} \\ x & \mapsto (x - a) \cdot v'(a) \end{cases}$$

zugeordnet werden, es heißt das bei a *linearisierte* Zeilenvektorfeld.

27.4.6 Satz: Vergleich der Arbeitsintegrale bei Linearisierung

Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $a \in X$ und $v : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein \mathcal{C}^1 -Zeilenvektorfeld.

Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle

$$p, q \in U_\delta(0) \subseteq \mathbb{R}^d \quad \text{mit} \quad \text{Spur}(\pi_{a,p,q}) \subseteq X$$

gilt:

$$|\text{work}(v, \pi_{a,p,q}) - \text{work}(\mathcal{L}_a v, \pi_{a,p,q})| \leq \varepsilon \|p\| \cdot \|q\|.$$

27.4.7 Beweis

(1) O.B.d.A. sei $a = 0$. Es ist dann gemäß Beispiel 27.4.3

$$\text{work}(\mathcal{L}_0 v, \pi_{a,p,q}) = p^T \cdot v'(0) \cdot q - q^T \cdot v'(0) \cdot p.$$

(2) Betrachte die Kurve γ_1 der Kette $\pi_{a,p,q}$. Dann gibt es ein $\tau \in [0, 1]$, so dass

$$\begin{aligned} & \left| \text{work}(v, \gamma_1) - \frac{1}{2} p^T \cdot v'(0) \cdot q \right| \\ &= \left| \int_0^1 v\left(\frac{1}{2}(p - q)^T + tq^T\right) \cdot q \, dt - \frac{1}{2} p^T \cdot v'(0) \cdot q \right| \\ &= \left| \left[v\left(\frac{1}{2}(p - q)^T + \tau q^T\right) - \frac{1}{2} p^T \cdot v'(0) \right] \cdot q \right| \\ &= \left| \left[v\left(\left(\tau - \frac{1}{2}\right)q^T + \frac{1}{2}p^T\right) - v\left(\left(\tau - \frac{1}{2}\right)q^T\right) - \frac{1}{2}p^T \cdot v'\left(\left(\tau - \frac{1}{2}\right)q^T\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}p^T \cdot \left(v'\left(\left(\tau - \frac{1}{2}\right)q^T\right) - v'(0)\right) \right] \cdot q \right| \\ &\leq \left[\left\| v\left(\left(\tau - \frac{1}{2}\right)q^T + \frac{1}{2}p^T\right) - v\left(\left(\tau - \frac{1}{2}\right)q^T\right) - \frac{1}{2}p^T \cdot v'\left(\left(\tau - \frac{1}{2}\right)q^T\right) \right\| \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \|p^T\| \cdot \left\| v'\left(\left(\tau - \frac{1}{2}\right)q^T\right) - v'(0) \right\| \right] \cdot \|q\| \\ &\leq \varepsilon_1 \|p\| \cdot \|q\|, \end{aligned}$$

falls nur $\|p\| \leq \delta_1$ für ein geeignetes $\delta_1 > 0$. Aufaddition der vier Arbeitsanteile bei Beachtung der Dreiecksungleichung liefert die Behauptung. (Das ist ungenau formuliert, aber richtig)

28 Der Satz von Green

28.1 Die Rotation als Funktion

28.1.1 Vereinbarung In diesem Kapitel sei $d = 2$, d.h. wir setzen uns mit offenen Teilmengen $X \subseteq \mathbb{R}^2$ auseinander.

28.1.2 Satz und Definition: Rotation als Funktion

Es sei $v : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein C^1 -Vektorfeld auf der offenen Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^2$.

Die folgenden Aussagen über eine Funktion $X \rightarrow \mathbb{R}$ sind äquivalent:

- (A) Die Funktion heißt (*infinitesimale*) *Rotation* des Vektorfeldes v . Formelschreibweise: $\text{rot } v : X \rightarrow \mathbb{R}$.
- (B) Es ist für alle $p, q \in \mathbb{R}^2$ (vgl. Definition 26.2.3)

$$\text{Rot } v(x, p, q) = \text{rot } v(x) \cdot \det(p, q).$$

- (C) Es ist

$$\text{rot } v(x_1, x_2) = \partial_1 v_2(x_1, x_2) - \partial_2 v_1(x_1, x_2).$$

28.1.3 Beweis Für jedes $x \in X$ ist $\text{Rot}(a, \cdot, \cdot)$ eine alternierende bilineare Abbildung auf \mathbb{R}^2 und deswegen gemäß Satz 26.2.5 ein Vielfaches der Determinante. Deshalb ist in (B) $\text{rot } v(x)$ für jedes $x \in X$ als Zahl wohldefiniert.

Die Äquivalenz (B) \Leftrightarrow (C) erschließt sich daraus, dass für $p = e_1$ und $q = e_2$ gilt (siehe Abschnitt 26.2.2):

$$\begin{aligned} \text{rot } v(x) &= \text{rot } v(x) \cdot \det(e_1, e_2) = \text{Rot } v(x, e_1, e_2) \\ &= e_1^T \cdot v'(x) \cdot e_2 - e_2^T \cdot v'(x) \cdot e_1 \\ &= \partial_1 v_2(x_1, x_2) - \partial_2 v_1(x_1, x_2). \end{aligned}$$

28.2 Die verschiedenen Versionen des Satzes von Green

28.2.1 Satz von Green für kompakte Träger

Es sei Q ein (O.B.D.A. achsenparalleles) kompaktes Rechteck. Es sei weiter $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein C^1 -Vektorfeld mit Träger in Q° . Dann gilt

$$\int_Q \operatorname{rot} v(x) \, dx = 0.$$

28.2.2 Beweis Er besteht in der folgenden Kette von Gleichungen:

$$\begin{aligned} \int_Q \operatorname{rot} v(x) \, dx &= \int_Q [\partial_1 v_2(x) - \partial_2 v_1(x)] \, dx \\ \text{(Fubini)} &= \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \partial_1 v_2(x_1, x_2) \, dx_1 dx_2 - \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \partial_2 v_1(x_1, x_2) \, dx_2 dx_1 \\ \text{(HDI)} &= \int_{a_2}^{b_2} [v_2(b_1, x_2) - v_2(a_1, x_2)] \, dx_2 - \int_{a_1}^{b_1} [v_1(x_1, b_2) - v_1(x_1, a_2)] \, dx_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

28.2.3 C^1 -deformierte Quader

Wir nennen eine kompakte Teilmenge $\tilde{Q} \subseteq \mathbb{R}^2$ einen C^1 -deformierten Quader, wenn es sich um einen Quader handelt, bei dem die „Unterseite“ durch eine Kurve ersetzt ist, genauer:

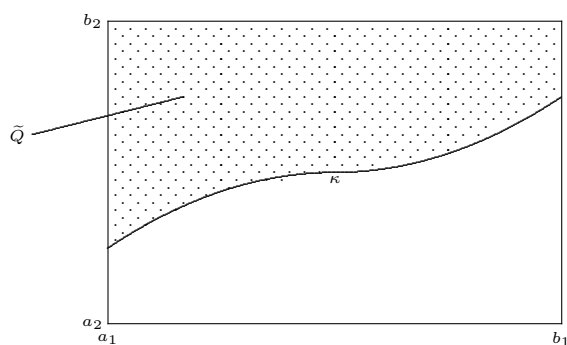
Es gibt einen (O.B.d.A. achsenparallelen) Quader $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subseteq \mathbb{R}^2$,
und eine stetig differenzierbare Kurve der Form

$$\kappa : \begin{cases} [a_1, b_1] & \rightarrow Q \\ x_1 & \mapsto (x_1, \kappa_2(x_1)), \end{cases}$$

so dass

$$\tilde{Q} = \{(x_1, x_2) \in Q \mid \kappa_2(x_1) \leq x_2 \leq b_2\}.$$

Die Daten eines C^1 -deformierten Quaders werden als Tripel (\tilde{Q}, Q, κ) zusammengefasst.



28.2.4 Satz von Green für C^1 -deformierte Quader

Es sei (\tilde{Q}, Q, κ) ein C^1 -deformierter Quader wie oben.

Es sei weiter $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein C^1 -Vektorfeld mit Träger in Q° . Dann gilt

$$\int_{\tilde{Q}} \operatorname{rot} v(x) \, dx = \operatorname{work}(v, \kappa) = \int_{[a_1, b_1]} v(\kappa(t)) \cdot T_\kappa(t) \, dt.$$

28.2.5 Beweis Er besteht in der folgenden Kette von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \int_{\tilde{Q}} \operatorname{rot} v \, dx &= \int_{\tilde{Q}} [\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1] \, dx \\
 \text{(Fubini)} &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{\kappa_2(x_1)}^{b_2} [\partial_1 v_2(x_1, x_2) - \partial_2 v_1(x_1, x_2)] \, dx_2 dx_1 \\
 &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{\kappa_2(x_1)}^{b_2} \partial_1 v_2(x_1, x_2) \, dx_2 dx_1 - \int_{a_1}^{b_1} \int_{\kappa_2(x_1)}^{b_2} \partial_2 v_1(x_1, x_2) \, dx_2 dx_1 \\
 \text{(Kettenregel, HDI)} &= \int_{a_1}^{b_1} \left[\partial_1 \left(\int_{\kappa_2(x_1)}^{b_2} v_2(x_1, x_2) \, dx_2 \right) + v_2(x_1, \kappa_2(x_1)) \kappa_2'(x_1) - \underbrace{v_2(x_1, b_2)}_{=0} \right] dx_1 \\
 &\quad - \int_{a_1}^{b_1} \left[\underbrace{v_1(x_1, b_2)}_{=0} - v_1(x_1, \kappa_2(x_1)) \right] dx_1 \\
 \text{(Vertauschung der Int-Reihenfolge)} &= \int_{\kappa_2(x_1)}^{b_2} \left[\underbrace{v_2(b_1, x_2)}_{=0} - \underbrace{v_2(a_1, x_2)}_{=0} \right] dx_2 + \int_{a_1}^{b_1} v_2(x_1, \kappa_2(x_1)) \kappa_2'(x_1) \, dx_1 \\
 &\quad + \int_{a_1}^{b_1} v_1(x_1, \kappa_2(x_1)) \, dx_1 \\
 &= \int_{a_1}^{b_1} v(x_1, \kappa_2(x_1)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \kappa_2'(x_1) \end{pmatrix} dx_1 \\
 &= \int_{a_1}^{b_1} v(\kappa(x_1)) \cdot \kappa'(x_1) \, dx_1.
 \end{aligned}$$

28.2.6 Definition: Glatt berandetes Kompaktum

Eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *glatt berandet*, wenn ihr topologischer Rand durch die Spur einer 1-Kette gegeben ist. Genauer muss die folgende Situation vorliegen:

Es existiert eine 1-Kette $\sum_{i=1}^n \gamma_i$, so dass die Spuren paarweise disjunkt sind, genauer

$$\operatorname{im}(\gamma_i) \cap \operatorname{im}(\gamma_j) = \emptyset, \quad \text{falls } i \neq j, \quad \text{abgesehen von Anfangs- und Endpunkten,}$$

und ihre Vereinigung gleich dem topologischen Rand von K ist

$$\partial K = \bigcup_{i=1}^n \operatorname{im}(\gamma_i).$$

Zu jedem $k \in \partial K$ gibt es einen \mathcal{C}^1 -deformierten Quader $(\tilde{Q}_k, Q_k, \kappa_k)$, so dass

$$\begin{aligned}
 k \in \operatorname{im}(\kappa_k) \cap Q_k^\circ &\subseteq \bigcup_{i=1}^n \operatorname{im}(\gamma_i) \quad (*) \\
 K \cap Q_k &= \tilde{Q}_k.
 \end{aligned}$$

Es ist üblich, für den Randzyklus die mathematisch weniger einwandfreie Schreibweise

$$\partial K = \sum_{i=1}^n \gamma_i$$

zu benutzen.

28.2.7 Satz von Green für glatt berandete Kompakta

Es sei K ein glatt berandetes Kompaktum mit dem Randzyklus ∂K .

Weiter sei v Vektorfeld, das auf einer offenen U_K von K definiert und stetig differenzierbar ist. Dann gilt

$$\int_K \operatorname{rot} v(x) \, dx = \operatorname{work}(v, \partial K)$$

28.2.8 Beweis

(1) Zu jedem $k \in K$ gibt es ein Rechteck Q_k mit $Q_k \subseteq U_K$, so dass

$$k \in \begin{cases} Q_k^\circ \subseteq K, & \text{falls } k \in K^\circ \\ \text{im}(\kappa_k) \cap Q_k^\circ \subseteq \bigcup_{i=1}^n \text{im}(\gamma_i), & \text{falls } k \in \partial K. \end{cases}$$

Die Menge aller dieser Rechtecke $(Q_k)_{k \in K}$ bildet eine offene Überdeckung von K ,

$$K \subseteq \bigcup_{k \in K} Q_k.$$

(2) Dann gibt es gemäß Satz 21.1.1 eine C^∞ -Zerlegung der Eins, das sind endlich viele C^∞ -Funktionen

$$\psi_j : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow [0, 1] \\ x & \mapsto \psi_j(x), \end{cases} \quad j \in M = \{1, \dots, m\}$$

mit folgenden Eigenschaften

Zu jedem $j \in M$ gibt es ein $k_j \in K$, so dass $\text{supp } \psi_j \subseteq Q_{k_j}^\circ$.

Es ist $\sum_{j \in M} \psi_j = 1$ auf K .

(3) Es sei weiter

$$M_{\text{Rd}} := \{j \in M \mid k_j \in \partial K\},$$

die Teilmenge der Indices in M , die zu Randrechtecken Q_{k_j} gehören.

(4) Damit können wir schließen:

$$\begin{aligned} \text{work}(v, \partial K) &= \text{work}\left(v \cdot \sum_{j \in M} \psi_j, \partial K\right) \\ &= \sum_{j \in M} \text{work}(v \cdot \psi_j, \partial K) \\ (v \cdot \psi_j &\equiv 0 \text{ auf } \partial K, \text{ falls } j \notin M_{\text{Rd}}) &= \sum_{j \in M_{\text{Rd}}} \text{work}(v \cdot \psi_j, \partial K) \\ (\text{Bedingung } (*) &\text{ in Def 31.3.6}) &= \sum_{j \in M_{\text{Rd}}} \text{work}(v \cdot \psi_j, \kappa_{j_j}) \\ (\text{Satz 28.2.4}) &= \sum_{j \in M_{\text{Rd}}} \int_{K_{j_j}} \text{rot}(v \cdot \psi_j) dx \\ (\text{Satz 28.2.1}) &= \sum_{j \in M} \int_{K_{j_j}} \text{rot}(v \cdot \psi_j) dx \\ (v \cdot \psi_j &\equiv 0 \text{ auf } K \setminus \bar{Q}_{j_j}) &= \sum_{j \in M} \int_K \text{rot}(v \cdot \psi_j) dx \\ &= \int_K \text{rot}\left(v \cdot \sum_{j \in M} \psi_j\right) dx \\ &= \int_K \text{rot } v dx \end{aligned}$$

28.2.9 Verallgemeinerung

Der Satz von Green lässt sich für noch allgemeinere Kompakta verallgemeinern. Der Rand muss nicht unbedingt eine glatte Kurve sein, er kann auch durch eine geschlossene 1-Kette realisiert werden.

Eine Möglichkeit, diese Verallgemeinerung anzugehen, besteht darin, bei obigen Definitionen die Begriffe „ C^1 -deformiert“ und „glatt berandet“ durch „stückweise C^1 “ zu ersetzen.

Eine andere Möglichkeit ist, so genannte „zulässige Kompakta“ mittels glatt berandeter Kompakta zu approximieren.

28.3 Geschlossene und exakte Vektorfelder

28.3.1 Überlegung

Es sei X offen und das C^1 -Zeilenvektorfeld $v : X \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times d}$ konservativ, d.h. es existiert eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $v = \text{grad } f$.

Weiter sei $K \subseteq X$ ein glatt berandetes Kompaktum. Dann gilt mit Satz 27.3.2

$$\int_K \text{rot } v(x) dx = \text{work}(v, \partial K) = 0$$

Tatsächlich lässt sich hier direkt erschließen mittels der folgenden Einsicht.

28.3.2 Satz: Konservative Vektorfelder sind rotationsfrei

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^2$ und $v : X \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$ ein C^1 -Zeilenvektorfeld.

Dann gilt :

(i) Für eine C^2 Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\text{rot}(\text{grad } f) = 0.$$

(ii) Ist das C^1 -Zeilenvektorfeld $v : X \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times d}$ konservativ, d.h. $v = \text{grad } f$ für geeignetes f , so verschwindet seine Rotation:

$$\text{rot } v = 0.$$

28.3.3 Beweis

Wir rechnen die Aussage (i) einfach nach:

$$\text{rot}(\text{grad } f) = \text{rot}(\partial_1 f, \partial_2 f) = \partial_2 \partial_1 f - \partial_1 \partial_2 f = 0.$$

Wesentlich dabei ist, dass die zweiten Ableitungen stetig sind und deshalb die Differentiationsreihenfolge unerheblich ist.

Die Aussage (ii) ist nur eine Umformulierung der ersten Aussage (i).

28.3.4 „Umkehrung“ des Satzes von Green für den Fall, dass die beiden Seiten der Gleichung Null sind.

Für ein C^1 -Zeilenvektorfeld $v : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(A) Es ist $\text{rot } v(x) = 0$ für alle $x \in X$.

(B) Es ist $\text{work}(v, \partial K) = 0$ für alle Rechtecke oder glatt berandeten Kompakta $K \subseteq X$.

28.3.5 Beweis

Die Implikation (A) \Rightarrow (B) ist eine direkte Konsequenz des Satzes von Green.

Wäre $\text{rot } v$ an einer Stelle $a \in X$ ungleich Null, so gibt es eine offene Umgebung U mit $a \in U \subseteq X$, so dass $\text{rot } v$ auf U konstantes Vorzeichen hat. Ist dann K ein Rechteck in dieser Umgebung, so wäre gemäß Satz von Green

$$\text{work}(v, \partial K) = \int_K \text{rot } v(x) dx \neq 0,$$

das ist (B) \Rightarrow (A).

28.3.6 Zusammenfassung und Frage

Die wesentlichen Aussagen über ein \mathcal{C}^1 -Zeilenvektorfeld v in der offenen Menge $X \subseteq \mathbb{R}^2$ lassen sich stichwortartig in einem Diagramm zusammenfassen:

$$\begin{array}{ccccc}
 v \text{ heißt exakt} & \stackrel{\text{def}}{\iff} & \exists f \text{ mit } v = \text{grad } f & \stackrel{27.3.2}{\iff} & \text{work}(v, \gamma) = 0, \text{ wenn } \gamma \text{ geschlossen} \\
 & & \downarrow 28.3.2 & & \downarrow \\
 v \text{ heißt geschlossen} & \stackrel{\text{def}}{\iff} & \text{rot } v = 0 & \stackrel{28.3.4}{\iff} & \text{work}(v, \partial K) = 0, \text{ wenn } K \subseteq X
 \end{array}$$

Es stellt sich die Frage, ob die beiden Abwärts-Implikationen auch umgekehrt werden können.

NEIN, im allgemeinen nicht.

JA, wenn die offene Menge X „keine Löcher“ enthält. Diese Eigenschaft kann mit den Begriffen „einfach zusammenhängend“ oder „sternförmig“ genauer erfasst werden.

29 Hyperflächen im \mathbb{R}^d

29.1 Einstieg

29.1.1 Definition: Hyperfläche Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Wir betrachten im folgenden $(d - 1)$ -Flächen

$$\Phi : \begin{cases} K \rightarrow X \\ u \mapsto \Phi(u) \end{cases}$$

mit kompaktem $K \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ und dazugehörige $(d - 1)$ -Ketten

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \Phi_i.$$

Siehe zur Erinnerung die Definitionen 26.1.1 und 26.1.3.

Wir wollen beides (nicht ganz genau) *Hyperfläche* nennen.

Ist $d = 3$, so handelt es sich um 2-dimensionale Flächen im \mathbb{R}^3 .

29.1.2 Definition: Tangentialvektoren

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Auf eine Hyperfläche $\Phi : K \rightarrow X$ bezogen definieren wir die (stetigen) Vektorfelder

$$T_{k,\Phi} : \begin{cases} K_{\text{offen}} \rightarrow \mathbb{R}^d \\ u \mapsto \begin{pmatrix} \partial_k \Phi^1(u) \\ \partial_k \Phi^2(u) \\ \vdots \\ \partial_k \Phi^r(u) \\ \vdots \\ \partial_k \Phi^d(u) \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{für } k = 1, \dots, d - 1.$$

29.1.3 Definition: Normalenvektor

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Auf eine Hyperfläche $\Phi : K \rightarrow X$ bezogen definieren wir das (stetige) Vektorfeld

$$N_\Phi : \begin{cases} K_{\text{offen}} \rightarrow \mathbb{R}^d \\ u \mapsto \begin{pmatrix} + \det \Phi'^{23\dots d}(u) \\ - \det \Phi'^{13\dots d}(u) \\ \vdots \\ (-1)^{r+1} \det \Phi'^{1\dots \widehat{r}\dots d}(u) \\ \vdots \\ (-1)^{n+1} \det \Phi'^{1\dots d-1}(u) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\Phi'^{1\dots \widehat{r}\dots d} = \Phi'^{1\dots \widehat{r}\dots d'}$ ist dabei die Jacobi-Matrix von Φ mit gestrichener r -ter Zeile bzw. die quadratische Jacobi-Matrix der Abbildung Φ bei gestrichener r -ter Zeile.

Die ersteren Vektoren heißen naheliegender *Tangentialvektoren*, da die Vektoren

$$\Phi(u) + T_{k,\Phi}(u)$$

geometrisch tangential im Punkt $\Phi(u)$ an der Bildfläche $\Phi(K)$ anliegen. Sie spannen den $(n - 1)$ -dimensionalen *Tangentialraum* $T_\Phi(u)$ auf.

29.1.4 Vereinbarung

Es sei ab jetzt der Raum \mathbb{R}^d mit dem euklidischen Skalarprodukt ausgestattet. Der folgende Satz legitimiert die Bezeichnung *Normalenvektor* für $N_\Phi(u)$:

29.1.5 Satz

Für $u \in K_{\text{offen}}$ gilt:

- (i) $\langle T_{k,\Phi}(u), N_{\Phi}(u) \rangle = 0, \quad k = 1, \dots, d-1.$
- (ii) $\det \begin{pmatrix} N_{\Phi}(u) & T_{1,\Phi}(u) & \cdots & T_{d-1,\Phi}(u) \end{pmatrix} = \|N_{\Phi}(u)\|^2 \geq 0.$

29.1.6 Beweis

Für $u \in K_{\text{offen}}$ und $k = 1, \dots, d-1$ gilt

$$\langle T_{k,\Phi}(u), N_{\Phi}(u) \rangle = \det \begin{pmatrix} \partial_k \Phi^1 & \partial_1 \Phi^1 & \cdots & \partial_{d-1} \Phi^1 \\ \partial_k \Phi^2 & \partial_1 \Phi^2 & \cdots & \partial_{d-1} \Phi^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_k \Phi^d & \partial_1 \Phi^d & \cdots & \partial_{d-1} \Phi^d \end{pmatrix} (u) = 0.$$

Die erste Gleichheit resultiert aus der Entwicklung der Determinanten nach der ersten Spalte, die zweite daraus, dass die Matrix zwei gleiche Spaltenvektoren enthält.

Es ist weiter

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} N_{\Phi}^1 & \partial_1 \Phi^1 & \cdots & \partial_{d-1} \Phi^1 \\ N_{\Phi}^2 & \partial_1 \Phi^2 & \cdots & \partial_{d-1} \Phi^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{\Phi}^d & \partial_1 \Phi^d & \cdots & \partial_{d-1} \Phi^d \end{pmatrix} (u) &= \sum_{r=1}^d (-1)^{1+r} N_{\Phi}^r(u) \cdot \det \Phi^{1 \dots \hat{r} \dots d}(u) \\ &= \langle N_{\Phi}(u), N_{\Phi}(u) \rangle = \|N_{\Phi}(u)\|^2. \end{aligned}$$

29.2 Das Hyperflächenintegral

29.2.1 Der ε -Zylinder

Um eine Begriffsbildung plausibel zu machen, nehmen wir jetzt an, dass das Normalenvektorfeld N_Φ auf ganz K definiert ist und nicht verschwindet und dass der „ ε -Zylinder“ über der Fläche Φ , dies ist die Abbildung

$$\Phi_{\text{cyl}} : \begin{cases} [0, \varepsilon] \times K & \rightarrow \mathbb{R}^d \\ \begin{pmatrix} v \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{d-1} \end{pmatrix} & \mapsto \Phi(u) + v \cdot \frac{N_\Phi(u)}{\|N_\Phi(u)\|}, \end{cases}$$

injektiv ist. Für die Jacobi-Determinante dieser Abbildung gilt dann

$$\begin{aligned} & \det \Phi'_{\text{cyl}}(v, u) \\ &= \det \left(\begin{array}{cccc} \frac{N_\Phi(u)}{\|N_\Phi(u)\|} & \partial_1[\Phi(u) + v \cdot \frac{N_\Phi(u)}{\|N_\Phi(u)\|}] & \cdots & \partial_{d-1}[\Phi(u) + v \cdot \frac{N_\Phi(u)}{\|N_\Phi(u)\|}] \end{array} \right) \\ &= \det \left(\begin{array}{cccc} \frac{N_\Phi(u)}{\|N_\Phi(u)\|} & \partial_1 \Phi(u) & \cdots & \partial_{d-1} \Phi(u) \end{array} \right) + v \cdot g(v, u) \\ &= \|N_\Phi(u)\| + v \cdot g(v, u). \end{aligned}$$

wobei g eine stetige Funktion auf $[0, \varepsilon] \times K$ ist.

29.2.2 Zylinder-Fortsetzung einer Funktion

Ist jetzt $f : \Phi(K) \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, so kann sie mittels

$$f_{\text{cyl}} := f \circ \text{pr}_u \circ \Phi_{\text{cyl}}^{-1}$$

jeweils entlang der Normalfasern konstant auf den Zylinder $\Phi_{\text{cyl}}([0, \varepsilon] \times K)$ fortgesetzt werden. pr_u ist die kanonische Projektion $[0, \varepsilon] \times K \rightarrow K$, $(v, u) \mapsto u$.

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \int_{\Phi_{\text{cyl}}([0, \varepsilon] \times K)} f_{\text{cyl}}(x) \, dx &= \int_{\Phi_{\text{cyl}}([0, \varepsilon] \times K)} (f \circ \text{pr}_u \circ \Phi_{\text{cyl}}^{-1})(x) \, dx \\ (\text{Transformation durch } \Phi_{\text{cyl}}) &= \int_{[0, \varepsilon] \times K} f(\Phi(u)) \cdot \left(\|N_\Phi(u)\| + v \cdot g(v, u) \right) \, du \, dv \\ &= \varepsilon \cdot \int_K f(\Phi(u)) \cdot \|N_\Phi(u)\| \, du + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Das Verhalten dieser Beziehung beim Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ legt die ersten beiden Teile der folgenden Definition nahe.

29.2.3 Definition: Hyperflächenintegral

Es sei $\Phi : K \rightarrow X$ eine Hyperfläche.

- (1) Es sei $f : \Phi(K) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist der Integrand rechts integrierbar, so ist durch

$$\int_{\Phi} f(x) dx := \int_K \|N_{\Phi}(u)\| \cdot f(\Phi(u)) du.$$

das *Hyperflächenintegral* von f über der Fläche Φ definiert.

- (2) Ist $\|N_{\Phi}\|$ über K integrierbar, so ist der *Hyperflächeninhalt* von $\Phi(K)$ definiert als das Hyperflächenintegral der Konstant-Eins-Funktion:

$$\text{area}_{d-1}(\Phi) := \int_{\Phi} 1 dx = \int_K \|N_{\Phi}(u)\| du.$$

- (3) Es sei $v : \Phi(K) \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times d}$ ein Vektorfeld. Ist der Integrand auf der rechten Seite integrierbar, so ist durch

$$\text{flow}(v, \Phi) := \int_K v(\Phi(u)) \cdot N_{\Phi}(u) du$$

der *Fluss des Vektorfelds v durch die Hyperfläche Φ* definiert.

29.2.4 Bemerkungen

1. Die Abbildung N_{Φ} ist auf K_{offen} definiert und stetig, also ist sie fast überall auf K definiert.
2. Verwechsle das Hyperflächenintegral nicht mit dem Integral $\int_{\Phi(K)} f(x) dx$ einer integrierbaren Funktion über der **Menge** $\Phi(K)$. $\Phi(K)$ ist als Bild der Nullmenge $\{0\} \times K \subseteq \mathbb{R}^d$ unter der \mathcal{C}^1 -Funktion f_{cyl} (zwischen gleich-dimensionalen Mengen) wieder eine Nullmenge (vgl. Satz 23.3.7).
3. Es drängt sich die Frage auf, ob auch für $(d-\ell)$ -Flächen einer Kodimension $\ell \geq 2$ ein Integrations- und Oberflächenbegriff eingeführt werden kann. Ein Aufgreifen dieser Frage führt zu dem Begriff des metrischen Tensors, der eine fundamentale Rolle in der „Riemann’schen Geometrie“ spielt. Wir wollen ihn hier nicht näher behandeln.

29.2.5 Beispiel

Eine Kurve $\gamma : J \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^2$ ist zugleich eine Hyperfläche im \mathbb{R}^2 .

Für $t \in J_{\text{offen}}$ ist

$$\|T_{\gamma}(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \gamma'_2(t) \\ -\gamma'_1(t) \end{pmatrix} \right\| = \|N_{\gamma}(t)\|.$$

Deshalb stimmen die für Kurven bzw. für Hyperflächen definierten Begriffe zur Integration einer Funktion jeweils überein.

29.3 Flächen im \mathbb{R}^3

29.3.1 Vorbemerkung Eine Hyperfläche im \mathbb{R}^3 ist ja einfach eine 2-Fläche oder 2-Kette im \mathbb{R}^3 . Eine solche Abbildung heißt einfach nur *Fläche* und das zugehörige Hyperflächenintegral einfach *Flächenintegral*.

29.3.2 Satz: Normalenvektor und Flächeninhalt im \mathbb{R}^3

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $\Phi : K \rightarrow X$ eine 2-Fläche.

(i) Für das in 29.1.3 definierte Normalenvektorfeld N_Φ gilt

$$N_\Phi(u) = \partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u) = \begin{pmatrix} \partial_1 \Phi^2 \cdot \partial_2 \Phi^3 - \partial_2 \Phi^2 \cdot \partial_1 \Phi^3 \\ \partial_1 \Phi^3 \cdot \partial_2 \Phi^1 - \partial_2 \Phi^3 \cdot \partial_1 \Phi^1 \\ \partial_1 \Phi^1 \cdot \partial_2 \Phi^2 - \partial_2 \Phi^1 \cdot \partial_1 \Phi^2 \end{pmatrix} (u)$$

Es handelt sich also um das Vektorprodukt der beiden Spalten in der Jacobimatrix

$$\Phi'(u) = \begin{pmatrix} \partial_1 \Phi^1 & \partial_2 \Phi^1 \\ \partial_1 \Phi^2 & \partial_2 \Phi^2 \\ \partial_1 \Phi^3 & \partial_2 \Phi^3 \end{pmatrix} (u).$$

von Φ an der Stelle u .

(ii) Demzufolge gilt für den Flächeninhalt der 2-Fläche

$$\text{area}_2(\Phi) := \int_K \|N_\Phi\|(u) \, du = \int_K \left\| \begin{pmatrix} \partial_1 \Phi^2 \cdot \partial_2 \Phi^3 - \partial_2 \Phi^2 \cdot \partial_1 \Phi^3 \\ \partial_1 \Phi^3 \cdot \partial_2 \Phi^1 - \partial_2 \Phi^3 \cdot \partial_1 \Phi^1 \\ \partial_1 \Phi^1 \cdot \partial_2 \Phi^2 - \partial_2 \Phi^1 \cdot \partial_1 \Phi^2 \end{pmatrix} \right\| (u) \, du$$

29.3.3 Beispiel

Es sei B die Einheitskreisscheibe im \mathbb{R}^2 . Durch

$$\Phi : \begin{cases} B & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u_1, u_2) & \mapsto \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sqrt{1-u_1^2-u_2^2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

ist die Käseglockenfläche im \mathbb{R}^3 gegeben.

Die Ableitung auf $B_{\text{offen}} = B^\circ$ ist

$$\Phi'(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-u_1}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}} & \frac{-u_2}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}} \end{pmatrix},$$

deshalb

$$N_\Phi(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-u_1}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-u_2}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_1}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}} \\ \frac{u_2}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

und dann

$$\|N_\Phi(u)\|^2 = \frac{u_1^2}{1-u_1^2-u_2^2} + \frac{u_2^2}{1-u_1^2-u_2^2} + 1 = \frac{1}{1-u_1^2-u_2^2}.$$

Mit Hilfe von Polarkoordinaten (siehe Kapitel 21.3.7) berechnen wir

$$\begin{aligned} \text{area}_2(\Phi) &= \int_B \|N_\Phi(u)\| \, du = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \cdot \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \, d\varphi \, dr \\ &= 2\pi \cdot \left[-\sqrt{1-r^2} \right]_0^1 = 2\pi. \end{aligned}$$

Die Oberfläche S^2 der Einheitskugel im \mathbb{R}^3 kann dann durch eine 2-Kette mit zwei Käseglockenflächen

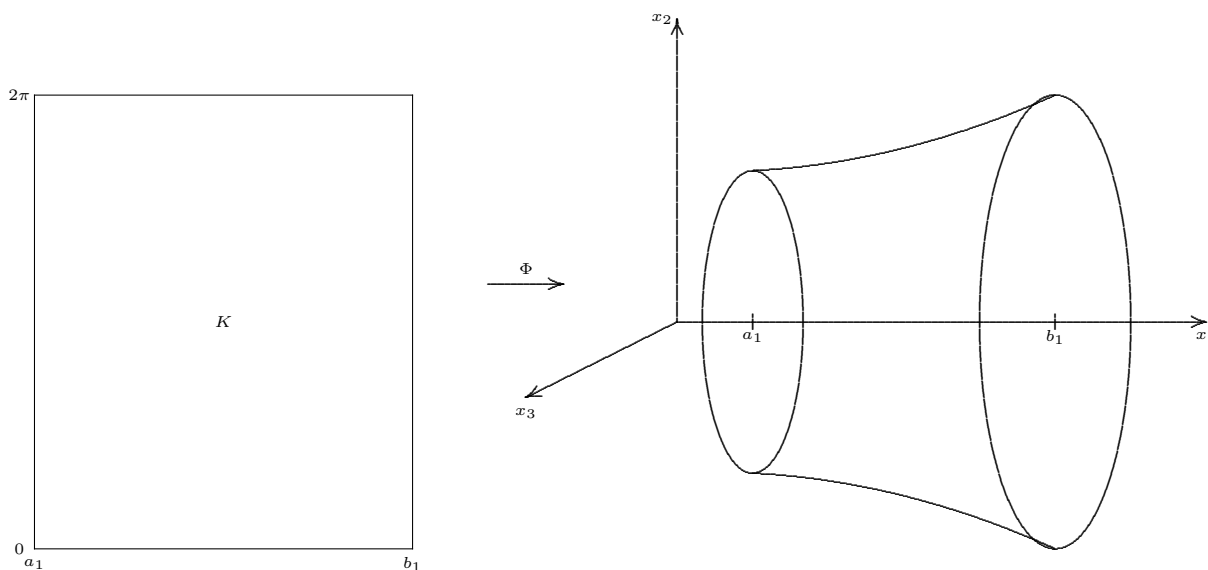
$$\Phi_{S^2} = \Phi_{\text{oben}} + \Phi_{\text{unten}}$$

realisiert werden. Es folgt

$$\text{area}_2(\Phi_{S^2}) = \text{area}_2(\Phi_{\text{oben}}) + \text{area}_2(\Phi_{\text{unten}}) = 4\pi.$$

29.4 Rotationsflächen im \mathbb{R}^3

29.4.1 Situation



Es sei

$$r : \begin{cases} [a_1, b_1] & \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ u_1 & \mapsto r(u_1) \end{cases}$$

eine stetig differenzierbare Funktion, sie gibt in Abhängigkeit von der Achs-Variable u_1 den Radius $r(u_1)$ der Rotationsfläche an.

Das Rechteck $K = [a_1, b_1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ wird per Abbildung Φ um die x_1 -Achse im \mathbb{R}^3 gewickelt und dabei gemäß der Radiusfunktion r gedehnt.

Die Abbildung Φ ist

$$\Phi : \begin{cases} K & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u_1, u_2) & \mapsto \begin{pmatrix} u_1 \\ r(u_1) \cdot \cos(u_2) \\ r(u_1) \cdot \sin(u_2) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Es ist dann weiter

$$\Phi'(u) = \begin{pmatrix} \partial_1 \Phi^1 & \partial_2 \Phi^1 \\ \partial_1 \Phi^2 & \partial_2 \Phi^2 \\ \partial_1 \Phi^3 & \partial_2 \Phi^3 \end{pmatrix} (u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r'(u_1) \cdot \cos(u_2) & -r'(u_1) \cdot \sin(u_2) \\ r'(u_1) \cdot \sin(u_2) & -r'(u_1) \cdot \cos(u_2) \end{pmatrix}$$

und deshalb

$$N_{\Phi}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ r'(u_1) \cdot \cos(u_2) \\ r'(u_1) \cdot \sin(u_2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -r'(u_1) \cdot \sin(u_2) \\ -r'(u_1) \cdot \cos(u_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r'(u_1) \cdot r(u_1) \\ -r(u_1) \cdot \cos(u_2) \\ -r(u_1) \cdot \sin(u_2) \end{pmatrix},$$

schließlich

$$\|N_{\Phi}(u)\|^2 = [r'(u_1)r(u_1)]^2 + r(u_1)^2 \cos^2(u_2) + r(u_1)^2 \sin^2(u_2) = [r'(u_1)^2 + 1] r(u_1)^2$$

Damit ist der Flächeninhalt gegeben durch

$$\text{area}_2(\Phi) = \int_K \sqrt{r'(u_1)^2 + 1} \cdot r(u_1) \, du = 2\pi \cdot \int_{a_1}^{b_1} \sqrt{r'(u_1)^2 + 1} \cdot r(u_1) \, du_1.$$

29.4.2 Konkretes Beispiel: Zylinder

Die Oberfläche eines Zylinders ist durch $r : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $r \equiv R$ gegeben. Es ergibt sich als Flächeninhalt wegen $r' \equiv 0$

$$\text{area}_2(\Phi) = 2\pi \cdot \int_0^h \sqrt{r'(u_1)^2 + 1} \cdot r(u_1) du_1 = 2\pi Rh$$

29.4.3 Konkretes Beispiel: Kugel

Die Oberfläche einer Kugel ist durch die Radiusfunktion

$$r : \begin{cases} [-1, +1] & \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ u_1 & \mapsto \sqrt{1 - u_1^2} \end{cases}$$

gegeben. Wegen

$$\begin{aligned} r'(u_1) &= \frac{-u_1}{\sqrt{1-u_1^2}} \\ r'(u_1)^2 + 1 &= \frac{u_1^2}{1-u_1^2} + 1 = \frac{1}{1-u_1^2} \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{area}_2(\Phi) &= 2\pi \cdot \int_{-1}^{+1} \sqrt{r'(u_1)^2 + 1} \cdot r(u_1) du_1 \\ &= 2\pi \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-u_1^2}}{\sqrt{1-u_1^2}} du_1 = 4\pi. \end{aligned}$$

29.4.4 Konkretes Beispiel: Torus

Die Oberfläche eines Torus modellieren wir durch die 2-Kette $\Phi = \Phi_+ + \Phi_-$ mit den beiden Radiusfunktionen

$$r_{\pm} : \begin{cases} [-R, +R] & \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ u_1 & \mapsto S \pm \sqrt{R^2 - u_1^2} \end{cases}$$

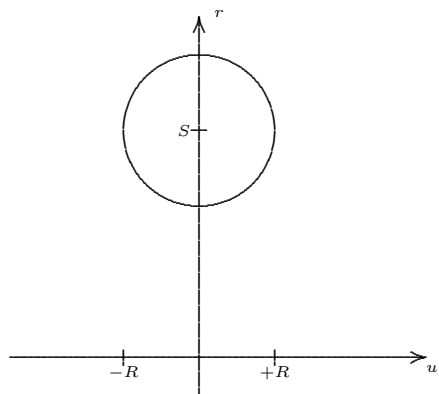
Eine Berechnung wie in 29.4.3 liefert

$$r'_{\pm}(u_1)^2 + 1 = \frac{R^2}{R^2 - u_1^2}$$

und dann

$$\begin{aligned} \text{area}_2(\Phi) &= \text{area}_2(\Phi_+) + \text{area}_2(\Phi_-) \\ &= 2\pi \int_{-R}^{+R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - u_1^2}} (S + \sqrt{R^2 - u_1^2}) du_1 + 2\pi \int_{-R}^{+R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - u_1^2}} (S - \sqrt{R^2 - u_1^2}) du_1 \\ &= 4\pi \int_{-R}^{+R} \frac{RS}{\sqrt{R^2 - u_1^2}} du_1 \\ &= 4\pi \int_{-1}^{+1} \frac{RS}{\sqrt{1 - u_1^2}} du_1 \\ &= 4\pi RS [\arcsin u_1]_{-1}^{+1} = 4\pi^2 RS \end{aligned}$$

Man muss also den Umfang $2\pi S$ des „Seelkreises“ mit dem Umfang $2\pi R$ des Querschnittkreises multiplizieren.



29.4.5 Vermeintliches Prinzip von Cavalieri

Man könnte auf die Idee kommen, die Oberfläche eines Rotationskörpers dadurch zu berechnen, dass man den aktuellen Kreisumfang $U(u_1) = 2\pi r(u_1)$ längs dem Intervall $[a_1, b_1]$ integriert. Dabei würde man das falsche Ergebnis

$$\text{area}_2(\Phi) \stackrel{\text{falsch}}{=} 2\pi \cdot \int_{a_1}^{b_1} r(u_1)^2 du_1.$$

erhalten.

30 Der Satz von Stokes

30.1 Die Rotation als Vektorfeld

30.1.1 Ein weiterer Satz aus der linearen Algebra Es sei $\varrho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine alternierende Bilinearform. Dann gibt es genau einen Vektor $r \in \mathbb{R}^3$, so dass

$$\varrho(p, q) = \det(p, q, r) \quad \text{für alle } p, q \in \mathbb{R}^3.$$

30.1.2 Beweis

(1) Wir betrachten für einen festen Zeilenvektor $a \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ die Funktion

$$\varphi_a : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (p, q, s) & \mapsto \varrho(p, q) \cdot a \cdot s + \varrho(q, s) \cdot a \cdot p + \varrho(s, p) \cdot a \cdot q \end{cases}$$

(2) Sie ist alternierend und trilinear, gemäß Satz 26.2.5 gibt es eine Zahl α_a , so dass

$$\varphi_a(p, q, s) = \alpha_a \cdot \det(p, q, s).$$

(3) Es entsteht so eine Linearform $a \mapsto \alpha_a$, es gibt also einen Vektor $r \in \mathbb{R}^3$ mit $\alpha_a = a \cdot r$.

(4) Eingesetzt ergibt das

$$\varrho(p, q) \cdot a \cdot s + \varrho(q, s) \cdot a \cdot p + \varrho(s, p) \cdot a \cdot q = \alpha_a \cdot \det(p, q, s) = a \cdot r \cdot \det(p, q, s)$$

(5) In dieser Gleichung setzen wir

$$a^T = s = p \times q$$

und erhalten zunächst

$$\begin{aligned} &= (p \times q)^T \cdot r \cdot [(p \times q)^T \cdot (p \times q)] \\ &= (p \times q)^T \cdot r \cdot \det(p, q, p \times q) \\ &= \varrho(p, q) \cdot (p \times q)^T \cdot (p \times q) + \varrho(q, p \times q) \cdot (p \times q)^T \cdot p + \varrho(p \times q, p) \cdot (p \times q)^T \cdot q \\ &= \varrho(p, q) \cdot (p \times q)^T \cdot (p \times q) \end{aligned}$$

(6) Sind p, q linear unabhängig, so ist $(p \times q)^T \cdot (p \times q) \neq 0$ und wir erhalten

$$(p \times q)^T \cdot r = \varrho(p, q).$$

Sind p, q linear abhängig, so sind beide Seiten dieser Gleichung eh Null.

(7) Gäbe es zwei Vektoren r, \tilde{r} mit der Eigenschaft, so wäre

$$(p \times q)^T \cdot (r - \tilde{r}) = 0$$

für alle $p, q \in \mathbb{R}^3$. Da das Vektorprodukt surjektiv ist, muss $r - \tilde{r} = 0$ sein.

30.1.3 Satz und Definition: Rotation im \mathbb{R}^3

Es sei $v : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld auf der offenen Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^3$.

Die folgenden Aussagen über ein Vektorfeld $X \rightarrow \mathbb{R}^3$ sind äquivalent:

(A) Das Vektorfeld heißt (*infinitesimale*) *Rotation* $\text{rot } v : X \rightarrow \mathbb{R}^3$.

(B) Es ist für alle $p, q \in \mathbb{R}^3$

$$\text{Rot } v(x, p, q) = \det(\text{rot } v(x), p, q).$$

(C) Es ist

$$\text{rot } v(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} (x_1, x_2, x_3).$$

30.1.4 Beweis Für jedes feste $a \in X$ ist $\text{Rot}(a, \cdot, \cdot)$ eine alternierende bilineare Abbildung auf \mathbb{R}^3 , weshalb der Vektor $\text{rot } v(a)$ gemäß Satz 30.1.1 mit der angegebenen Bedingung eindeutig existiert.

Die Äquivalenz (B) \Leftrightarrow (C) erschließt sich daraus, dass für $p = e_2$ und $q = e_3$ gilt: (siehe Abschnitt 26.2.2)

$$\begin{aligned} [\text{rot } v(x)]_1 &= \text{rot } v(x) \cdot e_1 = \text{rot } v(x) \cdot (e_2 \times e_3) \\ &= \det(\text{rot } v(x), e_2, e_3) \\ &= \text{Rot } v(x, e_2, e_3) \\ &= e_2^T \cdot v'(x) \cdot e_3 - e_3^T \cdot v'(x) \cdot e_2 \\ &= \partial_2 v_3(x_1, x_2, x_3) - \partial_3 v_2(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Siehe dazu wieder Abschnitt 26.2.2. Für die anderen beiden Komponenten von $\text{rot } v$ verfährt man analog bei zyklischer Vertauschung der Indices 1, 2, 3.

30.2 Vorwärtsschieben und Zurückziehen bei 2-Flächen

30.2.1 2-Flächen

Es sei im folgenden $X \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und Φ eine 2-Fläche (vgl. 26.1.1)

$$\Phi \left\{ \begin{array}{l} K \rightarrow X \\ (u_1, u_2) \mapsto \begin{pmatrix} \Phi^1(u_1, u_2) \\ \Phi^2(u_1, u_2) \\ \Phi^3(u_1, u_2) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

K habe die Eigenschaften, die in den Versionen des Satzes von Green aufgeführt waren: K ist glatt berandet oder zulässig mit Randzyklus ∂K .

30.2.2 Definition: „Vorwärtsschieben“ des Randes

Wir definieren als Rand der 2-Fläche Φ

$$\partial\Phi := \Phi \circ \partial K.$$

Da also der Randzyklus von K im \mathbb{R}^2 entlang der Abbildung Φ auf einen Zyklus im \mathbb{R}^3 übertragen wird, bezeichnet man diesen Vorgang als „Vorwärtsschieben“ (engl. pushforward).

Beachte, dass diese Gleichung keineswegs bedeutet, dass $\Phi(\partial_{\text{top}} K) = \partial_{\text{top}}(\Phi(K))$. Der topologische Rand der Bildmenge $\Phi(K)$ im \mathbb{R}^3 ist nicht gleich der Bildmenge des topologischen Rands von K im \mathbb{R}^2 .

Ist dann $\Phi = \Phi_1 + \dots + \Phi_n$ eine 2-Kette mit 2-Flächen, so lassen sich die obigen Überlegungen übertragen. Als Rand von Φ wird die formale Summe der einzelnen Randzykeln definiert.

$$\begin{aligned} \partial\Phi &= \partial\Phi_1 + \dots + \partial\Phi_n = \Phi(\partial K_1) + \dots + \Phi(\partial K_n) \\ &= \Phi \circ \gamma_1 + \dots + \Phi \circ \gamma_n \end{aligned}$$

30.2.3 Graphik

30.2.4 Definition: Zurückziehen eines Vektorfeldes Es sei $v : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld auf X und $\Phi : K \rightarrow X$ eine 2-Fläche.

Das von X auf K zurückgezogene Zeilenvektorfeld Φ^*v ist definiert durch

$$\Phi^*v \left\{ \begin{array}{l} K \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_1, u_2) \mapsto \Phi^*v(u_1, u_2) \end{array} \right.$$

mit der Bedingung, dass

$$\Phi^*v(u_1, u_2) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v(\Phi(u_1, u_2)) \cdot \Phi'(u_1, u_2) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

für alle $(u_1, u_2) \in K$ und alle $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Dieser Vorgang, dass das Vektorfeld vom $X \subseteq \mathbb{R}^3$ auf $K \subseteq \mathbb{R}^2$ entlang Φ übertragen wird, heißt *Zurückziehen* (engl. pullback) des Vektorfeldes.

30.2.5 Arbeit beim Zurückziehen eines Vektorfeldes

Es sei $v : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld auf X und $\Phi : K \rightarrow X$ eine 2-Fläche. Dann gilt für die Arbeit

$$\text{work}(v, \partial\Phi) = \text{work}(\Phi^*v, \partial K).$$

30.2.6 Beweis

Es genügt, anstelle von ∂K irgendeine Kurve $\gamma : J \rightarrow K$ zu betrachten. Dann ist

$$\begin{aligned} \text{work}(\Phi^*v, \gamma) &= \int_J \Phi^*v(\gamma(t)) \cdot T_\gamma(t) \, dt = \int_J v(\Phi(\gamma(t))) \cdot \Phi'(\gamma(t)) \cdot T_\gamma(t) \, dt \\ &= \int_J v(\Phi(\gamma(t))) \cdot \Phi'(\gamma(t)) \cdot T_{\Phi \circ \gamma}(t) \, dt \\ &= \text{work}(v, \Phi \circ \gamma) \end{aligned}$$

Ist dann γ der Randzyklus von K , so lässt er sich mit Kurven zusammensetzen, es folgt

$$\begin{aligned} \text{work}(\Phi^*v, \partial K) &= \sum_{i=1}^n \text{work}(\Phi^*v, \Phi \circ \gamma_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{work}(v, \Phi \circ \gamma_i) = \text{work}(v, \partial\Phi). \end{aligned}$$

30.2.7 Die Rotation beim Zurückziehen eines Vektorfeldes

Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^d$, $v : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein C^1 -Vektorfeld. und $\Phi : K \rightarrow X$ eine 2-Fläche.

Dann gilt für die Rotationen in \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \Phi^* v(u_1, u_2) &= \operatorname{Rot} v(\Phi(u_1, u_2), \partial_1 \Phi(u_1, u_2), \partial_2 \Phi(u_1, u_2)) \\ &= \operatorname{rot} v(\Phi(u_1, u_2)) \cdot N_\Phi(u_1, u_2). \end{aligned}$$

30.2.8 Beweis

(1) Wir bemerken zunächst, dass für $\ell = 1$ oder $\ell = 2$

$$\begin{aligned} [\Phi^* v]_\ell(u_1, u_2) &= \Phi^* v(u_1, u_2) \cdot e_\ell = v(\Phi(u_1, u_2)) \cdot \Phi'(u_1, u_2) \cdot e_\ell \\ &= v(\Phi(u_1, u_2)) \cdot \partial_\ell \begin{pmatrix} \partial_\ell \Phi_1 \\ \partial_\ell \Phi_2 \\ \partial_\ell \Phi_3 \end{pmatrix} (u_1, u_2) \\ &= v(\Phi(u_1, u_2)) \cdot \partial_\ell \Phi(u_1, u_2). \end{aligned}$$

(2) Dann rechnet man

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \Phi^* v(u_1, u_2) \\ &= \partial_1 [\Phi^* v]_2(u_1, u_2) - \partial_2 [\Phi^* v]_1(u_1, u_2) \\ &= \partial_1 [v(\Phi(u_1, u_2)) \cdot \partial_2 \Phi(u_1, u_2)] - \partial_2 [v(\Phi(u_1, u_2)) \cdot \partial_1 \Phi(u_1, u_2)] \\ &\quad \text{(Produktregel)} \\ &= \partial_1 [v(\Phi(u_1, u_2)) \cdot \partial_2 \Phi(u_1, u_2)] - \partial_2 [v(\Phi(u_1, u_2)) \cdot \partial_1 \Phi(u_1, u_2)] \\ &= \partial_1 v(\Phi(u_1, u_2)) \cdot \partial_2 \Phi(u_1, u_2) + v(\Phi(u_1, u_2)) \cdot \partial_1 \partial_2 \Phi(u_1, u_2) \\ &\quad - \partial_2 v(\Phi(u_1, u_2)) \cdot \partial_1 \Phi(u_1, u_2) - v(\Phi(u_1, u_2)) \cdot \partial_2 \partial_1 \Phi(u_1, u_2) \\ &= [\partial_1 v^T(\Phi(u_1, u_2))]^T \cdot \partial_2 \Phi(u_1, u_2) - [\partial_2 v^T(\Phi(u_1, u_2))]^T \cdot \partial_1 \Phi(u_1, u_2) \\ &= \quad \text{(Kettenregel)} \\ &= \partial_1 (v^T \circ \Phi)(u_1, u_2) \cdot \Phi'(u_1, u_2)]^T \cdot \partial_2 \Phi(u_1, u_2) \\ &\quad - \partial_2 (v^T \circ \Phi)(u_1, u_2) \cdot \Phi'(u_1, u_2)]^T \cdot \partial_1 \Phi(u_1, u_2) \\ &= \partial_1 \Phi(u_1, u_2)^T \cdot v'(\Phi(u_1, u_2)) \cdot \partial_2 \Phi(u_1, u_2) \\ &\quad - \partial_2 \Phi(u_1, u_2)^T \cdot v'(\Phi(u_1, u_2)) \cdot \partial_1 \Phi(u_1, u_2) \\ &\quad \text{(Def 26.2.3)} \\ &= \operatorname{Rot} v(\Phi(u_1, u_2), \partial_1 \Phi(u_1, u_2), \partial_2 \Phi(u_1, u_2)) \\ &= \det(\operatorname{rot} v(\Phi(u_1, u_2), \partial_1 \Phi(u_1, u_2), \partial_2 \Phi(u_1, u_2))) \\ &= \operatorname{rot} v(\Phi(u_1, u_2)) \cdot N_\Phi(u_1, u_2). \end{aligned}$$

30.3 Der klassische Satz von Stokes

30.3.1 Satz von Stokes

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $v : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein \mathcal{C}^1 -Zeilenvektorfeld.

Weiter sei Φ eine 2-Kette und $\partial\Phi$ ihr Rand-Zyklus. Dann gilt

$$\text{work}(v, \partial\Phi) = \text{flow}(\text{rot } v, \Phi).$$

30.3.2 Beweis O.B.d.A. sei Φ nur eine einzelne 2-Fläche.

Dann ist

$$\begin{aligned} & \text{work}(v, \partial\Phi) \\ & \quad \text{(Arbeit beim Zurückziehen eines Vektorfeldes 30.2.5)} \\ = & \text{work}(\Phi^*v, \partial K) \\ & \quad \text{(Satz von Green)} \\ = & \int_K \text{rot } \Phi^*v(u_1, u_2) d(u_1, u_2) \\ & \quad \text{(Rotation beim Zurückziehen eines Vektorfeldes 30.2.7)} \\ = & \int_K \text{rot } v(\Phi(u_1, u_2)) \cdot N_\Phi(u_1, u_2) d(u_1, u_2) \\ & \quad \text{(Definition Fluss 29.2.3)} \\ = & \text{flow}(\text{rot } v, \Phi). \end{aligned}$$

30.4 Geschlossene und exakte Vektorfelder

Der im Kontext des Satzes von Green aufgestellte Satz 28.3.2 ist auch im Fall $d = 3$ gültig.

30.4.1 Satz: Konservative Vektorfelder sind rotationsfrei

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^3$ und $v : X \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 3}$ ein \mathcal{C}^1 -Zeilenvektorfeld.

Dann gelten die zwei Formulierungen der gleichen Tatsache:

- (i) Für eine \mathcal{C}^2 -Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0.$$

- (ii) Ist das \mathcal{C}^1 -Zeilenvektorfeld $v : X \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 3}$ konservativ, d.h. $v = \operatorname{grad} f$ für geeignetes f , so verschwindet sein Rotationsvektorfeld:

$$\operatorname{rot} v = 0.$$

30.4.2 Beweis

Wir rechnen die Aussage (i) einfach nach:

$$[\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)]_3 = [\operatorname{rot}(\partial_1 f, \partial_2 f)]_3 = \partial_2 \partial_1 f - \partial_1 \partial_2 f = 0.$$

Wesentlich dabei ist, dass die zweiten Ableitungen stetig sind und deshalb die Differentiationsreihenfolge unerheblich ist.

Analog gilt dies wieder bei zyklischer Vertauschung der Indices.

Die anderen Überlegungen aus Kapitel 28.3 gelten analog.

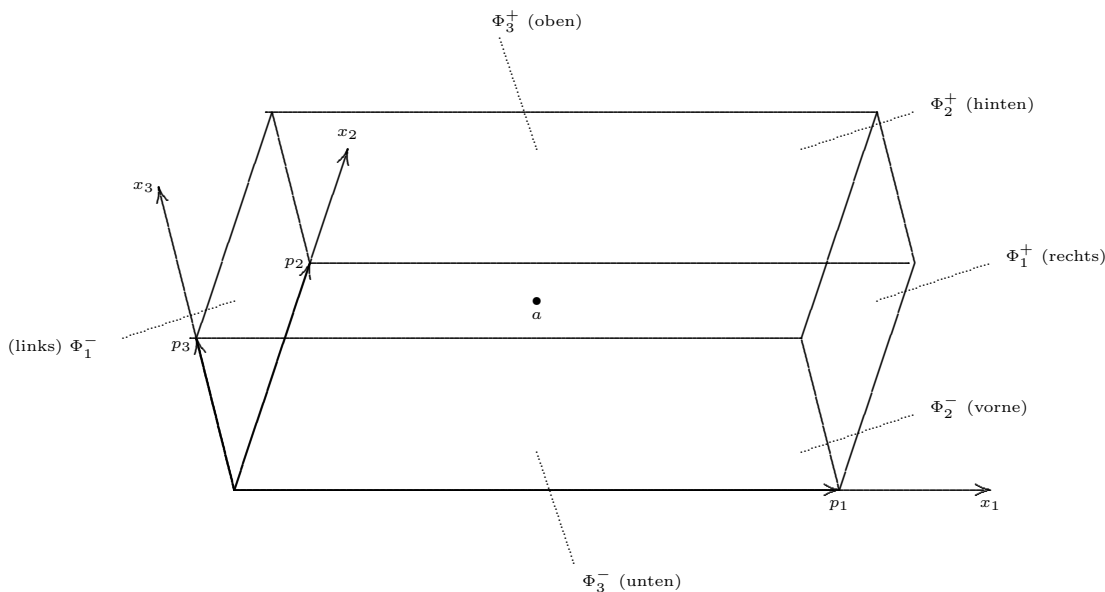
31 Der Satz von Gauß

31.1 Die Divergenz als Trilinearform

In diesem Kapitel sei $X \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $v : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld.

Wir betrachten einen Punkt $a \in X$ und drei Vektoren p_1, p_2, p_3 die (nach Parallelverschiebung) ein Parallel-Epiped mit a als Mittelpunkt aufspannen.

31.1.1 Graphik



31.1.2 Definition: Die Oberflächen-2-Kette

Es sei

$$\Phi = \Phi_{a,p_1,p_2,p_3} = \Phi_1^+ + \Phi_1^- + \Phi_2^+ + \Phi_2^- + \Phi_3^+ + \Phi_3^-$$

die 2-Kette, die die Oberfläche des Parallel-Epipeds um $a \in X$ so parametrisiert:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_i : [0, 1]^2 \rightarrow X \\ \Phi_1^+ : (u_1, u_2) \mapsto a + \frac{1}{2}(+p_1 - p_2 - p_3) + u_1 p_2 + u_2 p_3 \\ \Phi_1^- : (u_1, u_2) \mapsto a + \frac{1}{2}(-p_1 + p_2 + p_3) - u_1 p_3 - u_2 p_2 \\ \Phi_2^+ : (u_1, u_2) \mapsto a + \frac{1}{2}(-p_1 + p_2 - p_3) + u_1 p_3 + u_2 p_1 \\ \Phi_2^- : (u_1, u_2) \mapsto a + \frac{1}{2}(+p_1 - p_2 + p_3) - u_1 p_1 - u_2 p_3 \\ \Phi_3^+ : (u_1, u_2) \mapsto a + \frac{1}{2}(-p_1 - p_2 + p_3) + u_1 p_1 + u_2 p_2 \\ \Phi_3^- : (u_1, u_2) \mapsto a + \frac{1}{2}(+p_1 + p_2 - p_3) - u_1 p_2 - u_2 p_1 \end{array} \right.$$

31.1.3 Die Normalenvektoren

Es ist leicht nachzurechnen, dass die Normalenvektoren für die 2-Flächen konstant sind und die folgende

Form haben

$$\begin{aligned} N_{\Phi_1^+} &= \partial_1 \Phi_1^+(u_1, u_2) \times \partial_2 \Phi_1^+(u_1, u_2) = p_2 \times p_3 \\ N_{\Phi_1^-} &= \partial_1 \Phi_1^-(u_1, u_2) \times \partial_2 \Phi_1^-(u_1, u_2) = p_3 \times p_2 \\ N_{\Phi_2^+} &= \partial_1 \Phi_2^+(u_1, u_2) \times \partial_2 \Phi_2^+(u_1, u_2) = p_3 \times p_1 \\ N_{\Phi_2^-} &= \partial_1 \Phi_2^-(u_1, u_2) \times \partial_2 \Phi_2^-(u_1, u_2) = p_1 \times p_3 \\ N_{\Phi_3^+} &= \partial_1 \Phi_3^+(u_1, u_2) \times \partial_2 \Phi_3^+(u_1, u_2) = p_1 \times p_2 \\ N_{\Phi_3^-} &= \partial_1 \Phi_3^-(u_1, u_2) \times \partial_2 \Phi_3^-(u_1, u_2) = p_2 \times p_1 \end{aligned}$$

Anschaulich: Alle Normalenvektoren zeigen nach außen.

31.1.4 Beispiel: Lineares Zeilenvektorfeld

Wir betrachten ein lineares Zeilenvektorfeld in X

$$v : \begin{cases} X & \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 3} \\ x & \mapsto x^T \cdot V \end{cases}$$

und berechnen den Fluß durch die 2-Fläche Φ_1^+

$$\begin{aligned} \text{flow}(v, \Phi_1^+) &= \int_{[0,1]^2} [\tfrac{1}{2}(+p_1 - p_2 - p_3) + u_1 p_2 + u_2 p_3]^T \cdot V \cdot N_{\Phi_1^+}(u_1, u_2) d(u_1, u_2) \\ &= \tfrac{1}{2}(+p_1 - p_2 - p_3)^T \cdot V \cdot (p_2 \times p_3) + \tfrac{1}{2} p_2^T \cdot V \cdot (p_2 \times p_3) + \tfrac{1}{2} p_3^T \cdot V \cdot (p_2 \times p_3) \\ &= \tfrac{1}{2} p_1^T \cdot V \cdot (p_2 \times p_3) \end{aligned}$$

dann ähnlich für die 2-Fläche Φ_1^-

$$\begin{aligned} \text{flow}(v, \Phi_1^-) &= \int_{[0,1]^2} [\tfrac{1}{2}(-p_1 + p_2 + p_3) - u_1 p_2 - u_2 p_3]^T \cdot V \cdot N_{\Phi_1^-}(u_1, u_2) d(u_1, u_2) \\ &= \tfrac{1}{2}(-p_1 + p_2 + p_3)^T \cdot V \cdot (p_3 \times p_2) - \tfrac{1}{2} p_3^T \cdot V \cdot (p_3 \times p_2) - \tfrac{1}{2} p_2^T \cdot V \cdot (p_3 \times p_2) \\ &= \tfrac{1}{2} p_1^T \cdot V \cdot (p_2 \times p_3) \end{aligned}$$

Analoge Berechnungen für die anderen 2-Flächen liefern dann den Fluß durch die gesamte Oberfläche Φ

$$\text{flow}(v, \Phi) = p_1^T \cdot V \cdot (p_2 \times p_3) + p_2^T \cdot V \cdot (p_3 \times p_1) + p_3^T \cdot V \cdot (p_1 \times p_2).$$

31.1.5 Beispiel: Nicht-Diagonal-Elemente von V

Sind die Diagonal-Elemente in der Matrix V aus dem letzten Beispiel gleich Null, so gilt

$$\text{flow}(v, \Phi) = p_1^T \cdot V \cdot (p_2 \times p_3) + p_2^T \cdot V \cdot (p_3 \times p_1) + p_3^T \cdot V \cdot (p_1 \times p_2).$$

Ist die Matrix V aus dem letzten Beispiel antisymmetrisch, also $V^T = -V$, so ist

$$\text{flow}(v, \Phi) = p_1^T \cdot V \cdot (p_2 \times p_3) + p_2^T \cdot V \cdot (p_3 \times p_1) + p_3^T \cdot V \cdot (p_1 \times p_2).$$

Das ist ein Hinweis darauf, dass für den Fluss eines linearen Vektorfeldes der Diagonal-Anteil der definierenden Matrix maßgeblich ist.

Die Auseinandersetzung mit dieser Idee mündet schließlich in den Satz von Gauß über den Zusammenhang von Fluss und Diagonal-Anteil des Vektorfeldes.

31.1.6 Satz: Vergleich der Arbeitsintegrale bei Linearisierung

Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $a \in X$ und $v : X \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 3}$ ein C^1 -Zeilenvektorfeld.

Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle

$$p_1, p_2, p_3 \in U_\delta(0) \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \text{Spur}(\Phi_{a,p_1,p_2,p_3}) \subseteq X$$

gilt:

$$|\text{flow}(v, \Phi_{a,p_1,p_2,p_3}) - \text{flow}(\mathcal{L}_a v, \Phi_{a,p_1,p_2,p_3})| \leq \varepsilon \|p_1\| \cdot \|p_2\| \cdot \|p_3\|.$$

31.1.7 Beweis

(0) O.B.d.A. sei $a = 0$, setze zur Abkürzung $\Phi = \Phi_{0,p_1,p_2,p_3}$.

(1) Es ist gemäß Beispiel 31.1.4

$$\text{flow}(\mathcal{L}_0 v, \Phi) = p_1^T \cdot v'(0) \cdot (p_2 \times p_3) + p_2^T \cdot v'(0) \cdot (p_3 \times p_1) + p_3^T \cdot v'(0) \cdot (p_1 \times p_2).$$

(2) Betrachte die 2-Fläche Φ_1^+ in der 2-Kette Φ . Dann gibt es ein $\tau \in [0, 1]$, so dass

$$\begin{aligned} & |\text{flow}(v, \Phi_1^+) - \text{flow}(\mathcal{L}_a v, \Phi_1^+)| \\ &= \left| \int_0^1 v\left(\frac{1}{2}(p - q)^T + tq^T\right) \cdot (p_2 \times p_3) dt - \frac{1}{2}p_1^T \cdot v'(0) \cdot (p_2 \times p_3) \right| \\ &= \left| v\left(\frac{1}{2}(p_1 - (p_2 \times p_3))^T + \tau(p_2 \times p_3)^T\right) - \frac{1}{2}p_1^T \cdot v'(0) \right| \cdot (p_2 \times p_3)| \\ &= \left| v\left(\left(\tau - \frac{1}{2}\right)(p_2 \times p_3)^T + \frac{1}{2}p_1^T\right) - v\left(\left(\tau - \frac{1}{2}\right)(p_2 \times p_3)^T\right) - \frac{1}{2}p_1^T \cdot v'\left(\left(\tau - \frac{1}{2}\right)(p_2 \times p_3)^T\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}p_1^T \cdot (v'\left(\left(\tau - \frac{1}{2}\right)(p_2 \times p_3)^T\right) - (v'(0))) \right| \cdot (p_2 \times p_3)| \\ &\leq \left[\left\| v\left(\left(\tau - \frac{1}{2}\right)(p_2 \times p_3)^T + \frac{1}{2}p_1^T\right) - v\left(\left(\tau - \frac{1}{2}\right)(p_2 \times p_3)^T\right) - \frac{1}{2}p_1^T \cdot v'\left(\left(\tau - \frac{1}{2}\right)(p_2 \times p_3)^T\right) \right\| \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\|p_1^T\| \cdot \left\| v'\left(\left(\tau - \frac{1}{2}\right)(p_2 \times p_3)^T\right) - (v'(0)) \right\| \right] \cdot \|p_2 \times p_3\| \\ &\leq \varepsilon_1^+ \|p_1^T\| \cdot \|p_2 \times p_3\| \\ &\leq \varepsilon_1^+ \|p_1\| \cdot \|p_2\| \cdot \|p_3\| \end{aligned}$$

zu vorgegebenem ε_1^+ , falls nur $\|p\| \leq \delta_1^+$ für ein geeignetes $\delta_1^+ > 0$. Aufaddition der sechs Fluss-Anteile bei Beachtung der Dreiecksungleichung liefert die Behauptung. (Das ist ungenau formuliert, aber richtig)

31.2 Die Divergenz als Funktion

31.2.1 Satz und Definition: Divergenz

Es sei $v : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein C^1 -Vektorfeld auf der offenen Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^3$.

Die folgenden Aussagen über eine Funktion $X \rightarrow \mathbb{R}$ sind äquivalent:

(A) Die Funktion heißt *Divergenz* des Vektorfeldes v . Formelschreibweise: $\operatorname{div} v : X \rightarrow \mathbb{R}$.

(B) Es ist für alle $x \in X$ und $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^3$ (vgl. 26.2.4)

$$\operatorname{Div} v(x, p_1, p_2, p_3) = \operatorname{div} v(x) \cdot \det(p_1, p_2, p_3).$$

(C) Es ist

$$\operatorname{div} v(x_1, x_2, x_3) = \partial_1 v_1(x_1, x_2, x_3) + \partial_2 v_2(x_1, x_2, x_3) + \partial_3 v_3(x_1, x_2, x_3).$$

31.2.2 Beweis Die Divergenz-Form in (B) ist trilinear und alternierend, deshalb gibt es gemäß Satz 26.2.5 eine Funktion $\operatorname{div} v : X \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} v(x, p_1, p_2, p_3) &= p_1^T \cdot v'(x) \cdot (p_2 \times p_3) + p_2^T \cdot v'(x) \cdot (p_3 \times p_1) + p_3^T \cdot v'(x) \cdot (p_1 \times p_2) \\ &= \operatorname{div} v(x) \cdot \det(p_1, p_2, p_3). \end{aligned}$$

Die Äquivalenz (B) \Leftrightarrow (C) erschließt sich daraus, dass für $p_i = e_i$, $i = 1, 2, 3$ gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v(x) &= \operatorname{div} v(x) \cdot \det(e_1, e_2, e_3) = \operatorname{Div} v(x, e_1, e_2, e_3) \\ &= e_1^T \cdot v'(x) \cdot (e_2 \times e_3) + e_2^T \cdot v'(x) \cdot (e_3 \times e_1) + e_3^T \cdot v'(x) \cdot (e_1 \times e_2) \\ &= e_1^T \cdot v'(x) \cdot e_1 + e_2^T \cdot v'(x) \cdot e_2 + e_3^T \cdot v'(x) \cdot e_3 \\ &= \partial_1 v_1(x_1, x_2, x_3) + \partial_2 v_2(x_1, x_2, x_3) + \partial_3 v_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

31.3 Die verschiedenen Versionen des Satzes von Gauß

31.3.1 Satz von Gauß für kompakte Träger

Es sei $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ ein (O.B.d.A. achsenparalleler) kompakter Quader im \mathbb{R}^3 und $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein C^1 -Vektorfeld mit Träger in Q° . Dann gilt

$$\int_Q \operatorname{div} v(x) \, dx = 0.$$

31.3.2 Beweis Er besteht in der folgenden Kette von Gleichungen:

$$\begin{aligned} \int_Q \operatorname{div} v(x) \, dx &= \int_Q [\partial_1 v_1(x) + \partial_2 v_2(x) + \partial_3 v_3(x)] \, dx \\ \text{(Fubini)} &= \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \partial_1 v_1(x_1, x_2, x_3) \, dx_1 dx_2 \, dx_3 \\ &\quad + \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} \partial_2 v_2(x_1, x_2, x_3) \, dx_2 dx_3 \, dx_1 \\ &\quad + \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_3}^{b_3} \partial_3 v_3(x_1, x_2, x_3) \, dx_3 dx_1 \, dx_2 \\ \text{(HDI)} &= \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} [v_1(b_1, x_2, x_3) - v_1(a_1, x_2, x_3)] \, dx_2 \, dx_3 \\ &\quad + \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_3}^{b_3} [v_2(b_1, x_2, x_3) - v_2(a_1, x_2, x_3)] \, dx_3 \, dx_1 \\ &\quad + \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} [v_3(b_1, x_2, x_3) - v_3(a_1, x_2, x_3)] \, dx_1 \, dx_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

31.3.3 C^1 -deformierte Quader

Wir nennen eine kompakte Teilmenge $\tilde{Q} \subseteq \mathbb{R}^3$ einen C^1 -deformierten Quader, wenn es sich um einen Quader handelt, bei dem die „Unterseite“ durch eine 2-Fläche ersetzt ist, genauer:

Es gibt einen (O.B.d.A. achsenparallelen) Quader $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \mathbb{R}^3$,

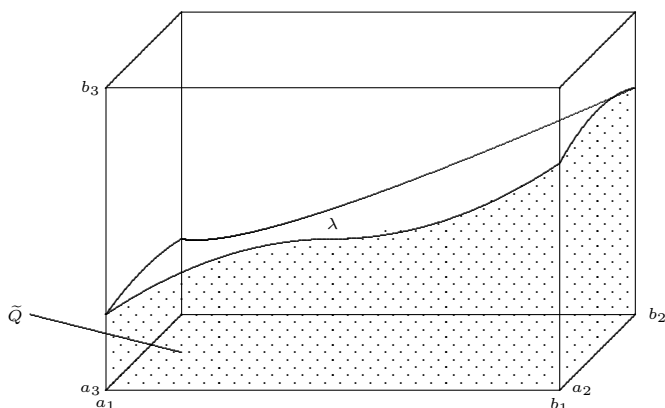
und eine stetig differenzierbare 2-Fläche der Form

$$\lambda : \begin{cases} [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] & \rightarrow Q \\ (x_1, x_2) & \mapsto (x_1, x_2, \lambda_3(x_1, x_2)), \end{cases}$$

so dass

$$\tilde{Q} = \{(x_1, x_2, x_3) \in Q \mid a_3 \leq x_3 \leq \lambda_3(x_1, x_2)\}.$$

Die Daten eines C^1 -deformierten Quaders werden als Tripel (\tilde{Q}, Q, λ) zusammengefasst.



31.3.4 Satz von Gauß für C^1 -deformierte Quader

Es sei (\tilde{Q}, Q, λ) ein C^1 -deformierter Quader wie oben.

Es sei weiter $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein C^1 -Vektorfeld mit Träger in Q° . Dann gilt

$$\int_{\tilde{Q}} \operatorname{div} v(x) \, dx = \operatorname{flow}(v, \lambda) = \int_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} v(\lambda(u)) \cdot N_\lambda(u) \, du.$$

31.3.5 Beweis

Man beachte zunächst, dass mit 29.3.2 gilt:

$$\begin{aligned} N_\lambda(u) &= \partial_1 \lambda(u) \times \partial_2 \lambda(u) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1 \lambda_2 \cdot \partial_2 \lambda_3 - \partial_2 \lambda_2 \cdot \partial_1 \lambda_3 \\ \partial_1 \lambda_3 \cdot \partial_2 \lambda_1 - \partial_2 \lambda_3 \cdot \partial_1 \lambda_1 \\ \partial_1 \lambda_1 \cdot \partial_2 \lambda_2 - \partial_2 \lambda_1 \cdot \partial_1 \lambda_2 \end{pmatrix} (u) = \begin{pmatrix} -\partial_1 \lambda_3 \\ -\partial_2 \lambda_3 \\ 1 \end{pmatrix} (u) \end{aligned}$$

Der Beweis besteht dann in der folgenden Kette von Gleichungen:

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{Q}} \operatorname{div} v(x) \, dx \\ &= \int_{\tilde{Q}} [\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3](x) \, dx \\ & \quad \text{(Fubini)} \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{\lambda_3(x_1, x_2)} [\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3](x) \, dx_3 dx_2 dx_1 \\ & \quad \text{(Kettenregel, HDI)} \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \left[\partial_1 \int_{a_3}^{\lambda_3(x_1, x_2)} v_1(x) \, dx_3 - v_1(x_1, x_2, \lambda_3(x_1, x_2)) \partial_1 \lambda_3(x_1, x_2) \right. \\ & \quad \left. + \underbrace{v_1(x_1, x_2, b_3)}_{=0} \right] dx_2 dx_1 \\ & \quad + \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \left[\partial_2 \int_{a_3}^{\lambda_3(x_1, x_2)} v_2(x) \, dx_3 - v_2(x_1, x_2, \lambda_3(x_1, x_2)) \partial_2 \lambda_3(x_1, x_2) \right. \\ & \quad \left. + \underbrace{v_2(x_1, x_2, b_3)}_{=0} \right] dx_2 dx_1 \\ & \quad + \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} [v_3(x_1, x_2, \lambda_3(x_1, x_2)) - \underbrace{v_3(x_1, x_2, a_3)}_{=0}] dx_2 dx_1 \\ & \quad \text{(Vertauschung der Integrationsreihenfolge)} \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{\lambda_3(x_1, x_2)} \left[\underbrace{v_1(b_1, x_2, x_3)}_{=0} - \underbrace{v_1(a_1, x_2, x_3)}_{=0} \right] dx_3 dx_2 \\ & \quad - \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} v_1(x_1, x_2, \lambda_3(x_1, x_2)) \partial_1 \lambda_3(x_1, x_2) \, dx_2 dx_1 \\ & \quad + \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_3}^{\lambda_3(x_1, x_2)} \left[\underbrace{v_2(b_1, x_2, x_3)}_{=0} - \underbrace{v_2(a_1, x_2, x_3)}_{=0} \right] dx_3 dx_1 \\ & \quad - \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} v_2(x_1, x_2, \lambda_3(x_1, x_2)) \partial_2 \lambda_3(x_1, x_2) \, dx_2 dx_1 \\ & \quad + \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} v_3(x_1, x_2, \lambda_3(x_1, x_2)) \, dx_2 dx_1 \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} v(\lambda(x_1, x_2)) \cdot N_\lambda(u) \, du. \end{aligned}$$

31.3.6 Definition: Glatt berandetes Kompaktum

Eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt *glatt berandet*, wenn ihr topologischer Rand durch eine 2-Fläche gegeben ist. Genauer muss die folgende Situation vorliegen:

Es existiert eine 2-Kette $\sum_{i=1}^n \Phi_i$, so dass die Spuren paarweise disjunkt sind, genauer

$$\text{im}(\Phi_i) \cap \text{im}(\Phi_j) = \emptyset, \quad \text{falls } i \neq j, \quad \text{abgesehen von Randpunkten,}$$

und ihre Vereinigung gleich dem topologischen Rand von K ist

$$\partial K = \bigcup_{i=1}^n \text{im}(\Phi_i).$$

Zu jedem $k \in \partial K$ gibt es einen \mathcal{C}^1 -deformierten Quader $(\tilde{Q}_k, Q_k, \lambda_k)$, so dass

$$\begin{aligned} k \in \text{im}(\lambda_k) \cap Q_k^\circ &\subseteq \bigcup_{i=1}^n \text{im}(\Phi_i) & (*) \\ K \cap Q_k &= \tilde{Q}_k. \end{aligned}$$

Es ist üblich, für den Randzyklus die mathematisch weniger einwandfreie Schreibweise

$$\partial K = \sum_{i=1}^n \Phi_i$$

zu benutzen.

31.3.7 Satz von Gauß für glatt berandete Kompakta

Es sei K ein glatt berandetes Kompaktum mit dem Randzyklus ∂K .

Weiter sei v Vektorfeld, das auf einer offenen U_K von K definiert und stetig differenzierbar ist. Dann gilt

$$\int_K \text{div } v(x) \, dx = \text{flow}(v, \partial K).$$

31.3.8 Beweis

(1) Zu jedem $k \in K$ gibt es ein Quader Q_k mit $Q_k \subseteq U_K$, so dass

$$k \in \begin{cases} Q_k^\circ \subseteq K, & \text{falls } k \in K^\circ \\ \text{im}(\lambda_k) \cap Q_k^\circ \subseteq \bigcup_{i=1}^n \text{im}(\Phi_i), & \text{falls } k \in \partial K. \end{cases}$$

Die Menge aller dieser Quader $(Q_k)_{k \in K}$ bildet eine offene Überdeckung von K ,

$$K \subseteq \bigcup_{k \in K} Q_k.$$

(2) Dann gibt es gemäß Satz 21.1.1 eine \mathcal{C}^∞ -Zerlegung der Eins, das sind endlich viele \mathcal{C}^∞ -Funktionen

$$\psi_j : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow [0, 1] \\ x & \mapsto \psi_j(x), \end{cases} \quad j \in M = \{1, \dots, m\}$$

mit folgenden Eigenschaften

Zu jedem $j \in M$ gibt es ein $k_j \in K$, so dass $\text{supp } \psi_j \subseteq Q_{k_j}^\circ$.

Es ist $\sum_{j \in M} \psi_j = 1$ auf K .

(3) Es sei weiter

$$M_{\text{Rd}} := \{j \in M \mid k_j \in \partial K\},$$

die Teilmenge der Indices in M , die zu Randrechtecken Q_{k_j} gehören.

(4) Damit können wir schließen:

$$\begin{aligned} \text{flow}(v, \partial K) &= \text{flow}\left(v \cdot \sum_{j \in M} \psi_j, \partial K\right) \\ &= \sum_{j \in M} \text{flow}(v \cdot \psi_j, \partial K) \\ (v \cdot \psi_j \equiv 0 \text{ auf } \partial K, \text{ falls } j \notin M_{\text{Rd}}) &= \sum_{j \in M_{\text{Rd}}} \text{flow}(v \cdot \psi_j, \partial K) \\ (\text{Bedingung } (*) \text{ in Def 31.3.6}) &= \sum_{j \in M_{\text{Rd}}} \text{flow}(v \cdot \psi_j, \lambda_{j_j}) \\ (\text{Satz 31.3.4}) &= \sum_{j \in M_{\text{Rd}}} \int_{K_{j_j}} \text{div}(v \cdot \psi_j) \, dx \\ (\text{Satz 31.3.1}) &= \sum_{j \in M} \int_{K_{j_j}} \text{div}(v \cdot \psi_j) \, dx \\ (v \cdot \psi_j \equiv 0 \text{ auf } K \setminus \bar{Q}_{j_j}) &= \sum_{j \in M} \int_K \text{div}(v \cdot \psi_j) \, dx \\ &= \int_K \text{div}\left(v \cdot \sum_{j \in M} \psi_j\right) \, dx \\ &= \int_K \text{div } v \, dx \end{aligned}$$

31.3.9 Verallgemeinerung

Der Satz von Gauß lässt sich für noch allgemeinere Kompakta verallgemeinern. Der Rand muss nicht unbedingt eine glatte Fläche sein, er kann auch durch eine geschlossene 2-Kette realisiert werden.

Eine Möglichkeit, diese Verallgemeinerung anzugehen, besteht darin, bei obigen Definitionen die Begriffe „ \mathcal{C}^1 -deformiert“ und „glatt berandet“ durch „stückweise \mathcal{C}^1 “ zu ersetzen.

Eine andere Möglichkeit ist, so genannte „zulässige Kompakta“ mittels glatt berandeter Kompakta zu approximieren.