Skript zur Vorlesung

Didaktik der Arithmetik und Algebra

Dieses Skript enthält in kompakter, manchmal nur stichpunktartig aufzählender Form, die wesentlichen didaktischen, fachlichen, schulpraktischen Grundlagen, wie sie in der Vorlesung ,,Didaktik der Arithmetik und Algebra" vorgestellt werden. Nicht alle Abschnitte aus diesem Skript werden in der Vorlesung behandelt.

Es ist zum Gebrauch neben der Vorlesung gedacht und erhebt nicht den Anspruch, ,,in sich selbst verständlich" oder vollständig zu sein.

S. Hilger

Ein Literaturverzeichnis befindet sich am Ende des Textes.

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlen und Zahlbereichserweiterungen$^{\ominus}$

1.1 Überblick

1.1.1 Überblick: Grundschule (Primarstufe)

Schüler/innen erleben im Laufe ihres mathematischen Werdegangs immer wieder Erweiterungen der ihnen vertrauten Zahlbereiche. Innerhalb der bayerischen Grundschule sind diese

Jgst.	1	2	3	4
GS	0..20	0..100	0..1 000	0..1 000 000

1.1.2 Überblick: Sekundarstufen

Jgst.	5		6		7	9	11_{MTG}
MS	$\mathbb{N}_0 (\leq 10^{12})$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}_0^+$	$\mathbb{Q}$		$\sqrt{\mathbb{Q}}$	
RS	$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}_0^+$	$\mathbb{Q}$		$\mathbb{R}$	
GYM / gegenwärtig	$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}_0^+$	$\mathbb{Q}$		$\mathbb{R}$	
GYM / früher	$\mathbb{N}_0$		$\mathbb{Q}_0^+$		$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$

1.1.3 Übergang: $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{Q}$

Bezüglich des Übergangs vom Zahlbereich der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$ zum Zahlbereich der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ gibt es grundsätzlich zwei alternative Wege, die in dem folgenden Diagramm angegeben sind:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}_0^+ \arrow[dr] & \\
\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbb{Q} \\
 & \mathbb{Z} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Für die obere Reihenfolge spricht:

- Bruchzahlen sind lebensnäher, anschaulicher (Pestalozzi) und konkreter (Piaget) als negative Zahlen. Beispielsweise lässt sich das Rechengesetz

  $$(-1) \cdot (-1) \quad = \quad +1$$

  kaum mit Alltagserfahrungen oder konkreten geometrischen

- Der Zahlbegriff ist eng an die Vorstellung von Größen (Maßzahlaspekt) geknüpft. Hier treten vor allem Bruchteile und nicht so sehr negative Zahlen in Erscheinung.

- Die geometrisch orientierte griechische Mathematik kannte — sehr fein ausgearbeitet — den Bruchzahlbegriff. Negative Zahlen sind eine viel jüngere Erfindung.

- Bereits in der Grundschule werden einfachste Bruchteile thematisiert, bis vor kurzem kannte der HS–Lehrplan nicht den Begriff der negativen Zahl.

- Nicht zuletzt spricht eine gut akzeptierte Unterrichtstradition für den oberen Weg.

In Bezug auf die untere derzeit realisierte Reihenfolge ist zu sagen:

- Für das alles dominierende Wirtschaftsleben sind in Bezug auf Geld- und Warenaustausch, Bilanzierung und Kreditvergabe grundlegenden Einsichten und Fertigkeiten über negative Zahlen von höchster Relevanz. Dies kann angesichts von Ratenkauf, Handyverträgen, ,,Geld pumpen" auch für Schüler/innen sehr konkret werden.

- Sie ist fachmathematisch natürlicher und besser verankert, da sie die in der Algebra vorgegebenen kanonischen Strukturerweiterungen

  $$\text{Halbring} \quad \to \quad \text{Ring} \quad \to \quad \text{Körper}$$

  widerspiegelt.

1.1.4 Äußere Kontextfelder für Zahlbereichserweitungen

Das Umfeld für die Zahlbereichserweitungen (hinsichtlich Motivation für die Einführung, Verständnis, Veranschaulichung, Übung) bilden die folgenden Kontextfelder:

- Sachwelt. Mathematisierung von Situationen aus Natur, Alltag, Technik, Freizeit oder anderen Schulfächern wie Physik, Informatik, Geographie, Musik, Biologie, Chemie, Werken, Sport.
- Geometrie. Zahlbereiche und das Rechnen mit Zahlen treten bei der Verwendung des Zahlenstrahls und von Koordinatensystemen auf.
- Rechnen mit Längen, Flächen, Volumina, Winkeln.
- Kombinatorik, elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1.1.5 Innere Kontextfelder bei Zahlbereichserweitungen

Die Zahlbereichserweiterungen sind jeweils begleitet von der Einführung der entsprechend möglichen mathematischen Strukturen:

- lineare Ordnungen: Kleiner $<$, größer $>$, kleiner-oder-gleich $\leq$, größer-oder-gleich $\geq$,
- rechnerischen Strukturen: Addition $+$, Subtraktion $-$, Multiplikation $\cdot$, Division $:$.
- mengen–topologischen Eigenschaften: Grenzwertbildung, Dichtheit, Ableitung, Integral (Selbstverständlich nicht in MS).

1.1.6 Hankel'sche Permanenzprinzip

Ausgangspunkt für Zahlbereichserweiterungen ist, dass neue Zahlen und Rechenarten für ,,vermeintlich unlösbare" Probleme (Gleichungen) gefunden werden müssen.

Wissenschaftlich steckt hier das (Hermann Hankel, 1839 – 1873) dahinter, das — in heutige Sprechweise übersetzt — etwa das folgende zum Inhalt hat:

> Bei einer Zahlbereichserweiterung muss der alte Zahlbereich (kanonisch) in dem neuen enthalten sein. Die Rechen- und Ordnungs-Strukturen des alten Zahlbereichs **sollen** mit denen im neuen verträglich sein.

Beispiele:

- Bei der Erweiterung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$ soll die Ordnungsstruktur weiter mit der Addition ,,verträglich" sein: Dies führt auf das Gesetz

  $$-m < -n \quad \text{falls} \quad m, n \in \mathbb{N}, m > n.$$

- Bei der Erweiterung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$ soll das Distributivgesetz gewahrt bleiben. Dies führt — unausweichlich — auf das Gesetz ,,minus mal minus gleich plus".

- Bei der Erweiterung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Q}$ sollen die Potenzgesetze weiter gelten. Deshalb muss

  $$a^0 = 1 \quad \text{oder } a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

  sein.

- Bei der Erweiterung von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ kann die mit Addition und Multiplikation verträgliche Ordnungsstruktur nicht bewahrt werden. Deshalb wäre eine Ersetzung des Wortes ,,sollen" durch ,,müssen" in der obigen Formulierung zu stark einengend.

Dieses Prinzip ist kein innermathematisches oder gar beweisbares Prinzip, es stellt vielmehr eine meta–mathematische Vorgehens–Empfehlung für die Erweiterung von Strukturen bereit. Man kann hier auch von einem heuristischen oder einem induktiven Vorgehen sprechen.

1.2 Die Zahlaspekte

Ein bereits die Grundschulmathematik durchziehendes übergeordnetes Unterrichtsprinzip ist das der „Variation der Zahlaspekte": Die verschiedenen Aspekte der Verwendung von natürlichen Zahlen in der Alltagswelt sollen ständig die Erarbeitung der Zahlbereiche begleiten.

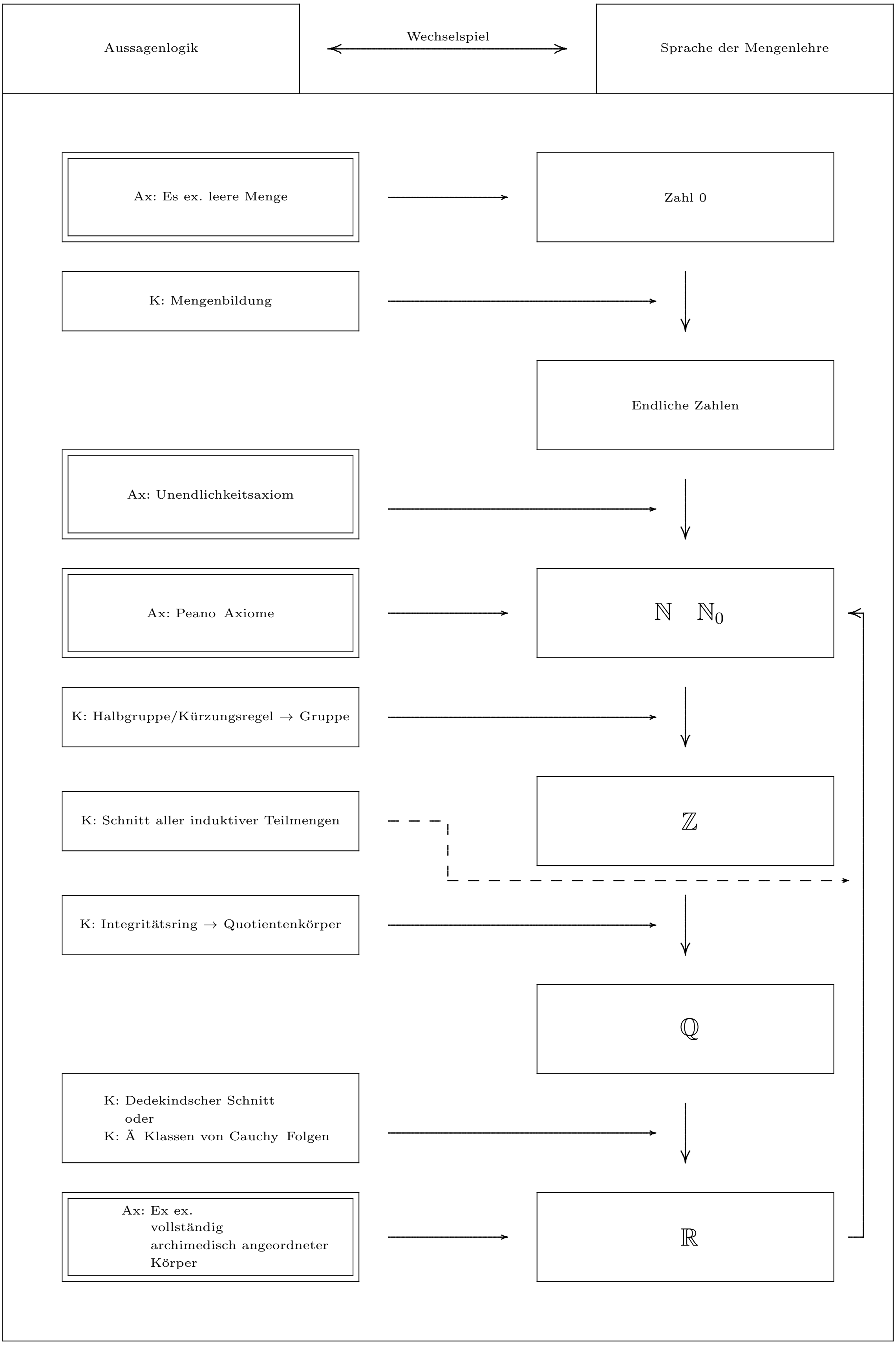
Zahlaspekt	Beschreibung	Beispiele
Kardinalzahl	Mächtigkeit, Anzahl der Elemente einer Menge	Beim Hochsprung gab es **acht** Teilnehmer.
Ordinalzahl	Rangplatz in einer (linear) geordneten Menge.	Der Athlet aus Bulgarien wurde **Dritter**.
Zählzahl	Durch Zuordnung eines Rangplatzes wird die Anzahl bestimmt.	Eine Zählung ergab, dass aus Kamerun nur **12** Teilnehmer angereist waren.
Rechenzahl statisch	unterliegt Verknüpfungen und ihren Regeln.	Es traten **13** Teams beim Staffellauf an, insgesamt also **52** Sportler.
Rechenzahl operativ (Operator)	zur Beschreibung einer regelgemäßen Veränderung von Zahlen.	Am dritten Wettkampftag wehte der Wind **dreimal** so stark wie am ersten.
Maßzahl	zur Angabe von Größenwerten	Der Rekord im Dreisprung liegt bei **18,53** m.
Kodierungszahl	Ziffern werden als Symbole (ohne besonderen Bedeutungsgehalt) benutzt.	Der Sieger im Stabhochsprung trägt die Startnummer **527**.

1.3 Lernziele — Überblick

Im Kontext der verschiedenen Zahlbereiche lassen sich die folgenden Lernziele abstecken:

- Kenntnis der verschiedenen Zahlbereiche und ihrer spezifischen Besonderheiten,
- Einsicht in die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen.
- Vertrautheit mit Zahldarstellung und –sprechweise, insbesondere auch für sehr große Zahlen.
- Bewusstsein, dass das Dezimal–Positions–System einer Konvention entspringt. Dies kann man durch Aufzeigen von Alternativen umsetzen: Römisches Zahlsystem, Dualsystem, andere Systeme der Zahldarstellung.
- Vertrautheit mit dem rechnerischen Operieren in den Zahlbereichen. Einsicht und Einschleifen in Bezug auf
  - Anordnung, Zahlenstrahl
  - Grundrechenarten auf verschiedenen Ebenen: Gedächtnis (Einmaleins– und Einspluseinssätze), Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliches Rechnen, Benutzung des Taschenrechners oder PCs.
  - Rechengesetze (Hier anders bezeichnet: Rechenvorteile).
  - Verknüpfungen: Klammersetzung, (Potenz vor) Punkt vor Strich.
  - Verwendung von Fachbegriffen (Siehe Anhang, S. 266).
- Fertigkeiten und Bewusstsein in Bezug auf die Mathematisierung von Sachsituationen durch Zahlen (Sachrechnen, Größen in den (Natur–)Wissenschaften).
- Fertigkeiten und Bewusstsein in Bezug auf die Mathematisierung von geometrischen Situationen durch Zahlen Zahlenstrahl, Koordinatensysteme.
- Fertigkeiten und Bewusstsein in Bezug auf die Mathematisierung von kombinatorischen Situationen durch Zahlen (elementarer Wahrscheinlichkeitsbegriff).
- Zunehmender Einblick in abstraktere Konzepte, die die Mathematik der Zahlbereiche umgeben: Aussagenlogik, Mengenlehre, Variable und Terme, Gleichungen und Ungleichungen, Funktionen.

1.4 Überblick: Axiomatik bzw. Konstruktion der Zahlbereiche



2 Die natürlichen Zahlen$^{\ominus}$

Am Anfang der Gymnasial- bzw. Realschulmathematik steht die Menge der natürlichen Zahlen. Die in der Grundschule erworbenen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten sollen vereinheitlicht und neu formiert werden.

Ein — gegenüber der Grundschulmathematik — neu auftretendes Lernziel ist das Bewusstsein darüber, dass die Menge der natürlichen Zahlen unendlich ist.

Ü: Inwieweit ist dieses Lernziel in Lehrplänen, Schulbüchern, in der Unterrichtspraxis herausgearbeitet?

2.1 Die Peano–Axiome

Die Peano–Axiome legen die Eigenschaften der natürlichen Zahlen — ebenfalls in der Sprache und in dem System der Mengenlehre — beschreibend fest.

> Deskriptiv statt konstruktiv.

Die Frage der Existenz einer solchen Menge bleibt also unbeantwortet.

Eine Menge $\mathbb{N}$ heißt *Menge der natürlichen Zahlen*, wenn eine Abbildung $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (Nachfolger–Abbildung) existiert mit folgenden Eigenschaften:

- P1 Die Abbildung ν ist nicht surjektiv, das heißt, es existiert (mindestens) eine Zahl — bezeichnet mit 1 — in $\mathbb{N}$ mit $\nu(x) \neq 1$.
- P2 Die Abbildung ν ist injektiv, das heißt, für alle $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x \neq y$ gilt: $\nu(x) \neq \nu(y)$.
- P3 Gilt für eine Teilmenge $A' \subseteq \mathbb{N}$

$$1 \in A' \text{ und } \Big(x \in A' \Longrightarrow \nu(x) \in A'\Big),$$

so gilt $A' = \mathbb{N}$.

Ist $\mathcal{A}(n)$ eine Aussageform über den natürlichen Zahlen, so kann man die Teilmenge von $\mathbb{N}$

$$A' := \{\, x \in \mathbb{N} \,|\, \mathcal{A}(x) \text{ ist wahr } \}$$

definieren. Auf diese Weise wandelt sich das Axiom P3 in das Prinzip der vollständigen Induktion:

> Gilt $\mathcal{A}(1)$ und die Implikation $\mathcal{A}(x) \Longrightarrow \mathcal{A}(\nu(x))$ für alle x in $\mathbb{N}$, so ist $\mathcal{A}(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Das weitere Programm für den Mathematiker besteht nun darin, auf der Grundlage dieser Axiome alle Strukturen auf $\mathbb{N}$ (Grundrechenarten, Ordnung, Teilbarkeit) zu definieren und Gesetze zu beweisen.

2.2 Der Kardinalzahlaspekt

2.2.1 Vorhaben

Auf der Grundlage der Axiome der Mengenlehre sollen die natürlichen Zahlen konstruiert werden. Darüber hinaus ist es Programm der wissenschaftlichen Mathematik, alle ,,mathematischen Objekte" (Punkte im Raum, Relationen, Funktionen, Folgen, Verknüpfungen, Operationen,. . .) als Mengen im Rahmen der Axiomatik einzuführen.

2.2.2 Was ist innerhalb der Mengenlehre eine natürliche Zahl?

Entwicklungspsychologisch: Die Bildung der Zahl ist der Abstraktionsprozess von den Gegenständen. Nur ihre Anzahl soll ein Begriff sein. Im Beispiel auf den Punkt gebracht:

> 3 ist der Inbegriff aller drei–elementigen ,,denkbaren" Mengen.

2.2.3 Zahlen sind Mengen

> Eine bestimmte Zahl ist nicht identisch mit einer Kollektion von so viel Elementen, wie diese Zahl beträgt. Die Zahl 3 ist nicht identisch mit dem Trio Brown, Jones und Robinson. Die Zahl 3 ist etwas, das alle Trios gemeinsam haben und sie von anderen Kollektionen unterscheidet.
>
> Bertrand Russell (1872 – 1970), 1930.

2.3 Konstruktion der natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen

2.3.1 Vorgegeben sind die Axiome der Mengenlehre (die hier nicht genauer präsentiert und analysiert werden sollen). Sie legen fest, wie Mengen gebildet werden dürfen. Die Idee ist — nur informell unmathematisch — in den folgenden Punkten beschrieben.

2.3.2 Mengenlehre

- Es existiert die leere Menge. Sie enthält keine Elemente.
- Es können Teilmengen gebildet werden.
- Mengen können vereinigt, geschnitten,... werden.
- Aus (beliebig) vielen vorgegebenen Mengen kann eine Menge gebildet werden, die diese als Elemente enthält.

2.3.3 Gleichmächtigkeit

Mengen heißen gleichmächtig, wenn eine bijektive Abbildung von der einen in die andere existiert.

Beachte, dass eine Menge zu einer echten Teilmenge gleichmächtig sein kann. Beispiel: $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$.

Die endlichen Mengen sind genau die Mengen, die keine gleichmächtigen echten Teilmengen haben.

Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Mengen (dies ist eigentlich ein hochproblematischer Begriff ($\to$ Russell'sche Antinomie), wir wollen das aber hier so hinnehmen).

2.3.4 Kardinalzahl

Jede Äquivalenzklasse heißt Kardinalzahl. Eine Kardinalzahl ist also die Gesamtheit aller denkbaren gleichmächtigen Mengen.

Jede Menge in einer Kardinalzahl heißt Repräsentant dieser Kardinalzahl.

Frage der Existenz: Gibt es überhaupt Kardinalzahlen, gibt es endliche Kardinalzahlen (das sind die, die endliche Mengen enthalten).

2.3.5 Endliche Kardinalzahlen

0 ist die Kardinalzahl, die die leere Menge $\varnothing$ enthält.

1 ist die Kardinalzahl, die die Menge $\{\varnothing\}$ enthält.

2 ist die Kardinalzahl, die die Menge $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ enthält.

3 ist die Kardinalzahl, die die Menge $\Big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\Big\}$ enthält.

und so weiter.

2.3.6 Die Menge $\mathbb{N}$

Die Menge dieser endlichen Kardinalzahlen ist die Menge der natürlichen Zahlen.

2.4 Der Ordinalzahlaspekt

2.4.1 Der Begriff in der Fachmathematik

- Eine Relation $\leq$ auf einer Menge A heißt *Wohlordnung*, wenn jede nichtleere Teilmenge $A' \subseteq A$ ein kleinstes Element $a \in A$ besitzt. Die Eigenschaft *Kleinstes Element* bedeutet, dass für alle $b \in A$ gilt: $a \leq b$.

- Eine Menge zusammen mit einer Wohlordnung heißt Ordinalzahl.

- Satz:

  Jede Wohlordnung ist eine lineare Ordnung (Vergleiche Anhang: Relationen).

  Bei endlichen Mengen ist jede lineare Ordnung eine Wohlordnung.

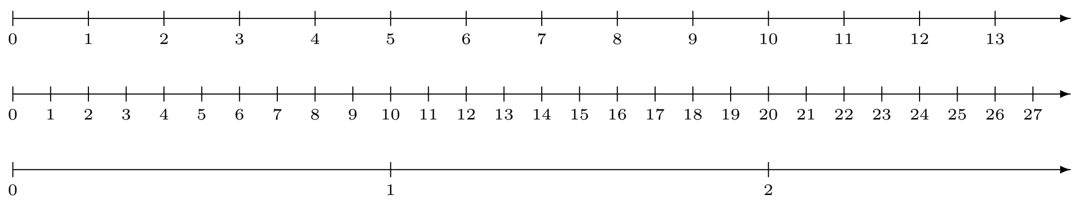
  Bei endlichen Mengen besteht eine eineindeutige Zuordnung von Kardinalzahlen zu Ordinalzahlen.

2.4.2 Strenge und nicht–strenge Relation

Beziehung zwischen $\leq$ und $<$. Die nicht strenge Relation ist in der GS–Mathematik unbekannt. Der Umgang mit ihr bereitet anfangs Schwierigkeiten. (Zitat: Bei zwei Zahlen ist doch immer klar: Entweder sind sie gleich oder die eine ist echt kleiner.)
Die $\leq$–Relation entfaltet ja ihre Wirkung erst beim Umgang mit Variablen und Termen.

2.4.3 Der Zahlenstrahl

Der Ordinalzahlaspekt findet in der Schulmathematik seinen Niederschlag in der Zahlenstrahldarstellung.



- Darstellung im Buch (30 cm lang), an der Tafel (1 m lang), an der Seitenwand (10 m lang).

- Variation durch Herausnehmen eins Abschnittes (B: 72 . . . 82 auf 10 cm),

- Variation durch kleinere Einheiten, (B: 0 . . . 1000 auf 10 cm),

- Variation durch Herauszoomen eines Abschnittes (72 000 . . . 82 000 auf 10 cm).

- Die Zahlen werden *äquidistant* (= jeweils in gleichem Abstand) angeordnet.

- Die Länge zwischen zwei benachbarten natürlichen Zahlen wird als *Einheit* bezeichnet. In den Beispielen oben sind die Einheiten also 1 cm, 0, 5 cm, 5 cm. Beachte, dass die Einheiten im Buch, Heft, Arbeitsblatt und an der Tafel, Projektion verschieden sind.

- Der *Maßstab* ist

  $$\text{Einheit} \; : 1$$

  Beim obersten Beispiel ist also der Maßstab $1\,\text{cm} : 1$.

- Eine natürliche Zahl n ist *kleiner* als eine andere m, symbolisch

  $$n < m,$$

  wenn n auf dem Zahlenstrahl links von m (nicht so gut: ,,vor m") angeordnet ist. Umgekehrt sagt man, dass m *größer* als n ist. Dies entspricht unserer Schreibrichtungsgewohnheit.

- Auch Zahlenstrahlen mit vertikaler Richtung (von unten nach oben) können benutzt werden (Propädeutik des Gitternetzes (= Koordinatensystems).

2.4.4 Didaktische Bedeutung des Zahlenstrahls

- Veranschaulichung: Der Zahlenstrahl bildet eine ,,ikonische" Repräsentation der Zahlen. (Vgl. Bruner'sche Repräsentationsebenen im intermodalen Transfer.

- Grundlage für die Einführung von größeren Zahlbereichen, insbesondere $\mathbb{Z}$.

- Handeln am Zahlenstrahl: Repräsentation von Addition und Subtraktion durch Aneinanderlegen von Pfeilen. Genauer wird dies beschrieben in Kapitel 10.3.

- Bezug zu Größen: Längen, Kilometersteinen, Stockwerken.

- Problem: Der Begriff ,,Zahl" wird stark an das Vorhandensein einer Ordnung gebunden. So empfinden Schüler der Oberstufe die komplexen Zahlen im Vergleich mit den reellen Zahlen als unnatürlich, da diese nicht (auf der Zahlengeraden) angeordnet werden können.

3 Rechnen mit natürlichen Zahlen$^{\ominus}$

M5 1.3

3.1 Operationen und Operatoren

3.1.1 Definition des Begriffs

Es sei M eine Menge (z.B. ein Zahlbereich). Eine Abbildung f der Form

$$f : \begin{cases} M \times M & \to & M \\ (x, y) & \mapsto & z \end{cases}$$

heißt *Operation* oder *Verknüpfung* auf M. Wir schreiben allgemein: $x * y = f(x, y)$.

Beispiele: Addition, Multiplikation, Division, Potenzierung, ggT, kgV, min, max, Mittelwert, Schnitt– oder Vereinigungsmenge,

$$(x, y) \mapsto x + y + xy, \qquad (x, y) \mapsto 2 \sin x + 3 \cos y.$$

Es sei nun f eine Operation auf M und $a \in M$ beliebig, aber fest, gewählt. Die Abbildung

$$f_a : \begin{cases} M & \to & M \\ x & \mapsto & f(a, x) \end{cases}$$

heißt *Operator* (zur Zahl a bzgl. der Operation f). Die Elemente $x \in M$ heißen in diesem Zusammenhang dann *Operanden*. Sinnfällig kann der Operator auch als $f_a = a *$ geschrieben werden.

- Unterscheide (fachlich und didaktisch) zwischen der Zahl a und dem Operator f_a.
- In gewisser Weise kann die Zahl a als das statische, der zugehörige Operator f_a als der dynamische Aspekt des mathematischen Objekts $a \in M$ aufgefasst werden.
- Je nach Kontext wird der Operator auch als die rechtsseitige Anwendung der Operation definiert:

  $$f_a(x) \;=\; x * a.$$

  Man schreibt dann $f_a = \; * a$. Dies tritt im Zusammenhang mit der Pfeilschreibweise für Operationen auf:

  $$x \xrightarrow{*a} x * a.$$

- Operationen und Operatoren sind nicht nur dem Namen nach wesentliche Bestandteile der Fachmathematik: Operationen von Gruppen auf Mengen.
- Umsetzung beim Schultaschenrechner: Der Operator $3\,*$ wird durch Betätigung der Tasten `3` $\times \times$ programmiert. Nach Eingabe eines Operanden wird er durch die =–Taste abgerufen. (Es steckt also die rechtsseitige Auffassung dahinter.)

3.1.2 Veranschaulichungen des Operatoraspekts

- Mengen– (oder Venn–)diagramm.
- Tabelle
- Maschinenmodell (eher in der Grundschulmathematik)
- Ablaufdiagramm, im Beispiel

$$8 \xrightarrow{\cdot 3} 24$$

3.1.3 Didaktische Aspekte des Operatormodells

- Propädeutik des Abbildungsbegriffs.
- Betonung des prozesshaften, dynamischen Charakters von mathematischen Objekten ($\rightarrow$ Handlungsorientierung).
- Günstig im Hinblick auf
  - Umkehroperation: (B) Einführung der Division von Bruchzahlen oder von negativen Zahlen.
  - Mehrfachoperationen: (B) Hintereinanderausführung, „Ersatzoperation" (vgl. bspw. GS–Arbeitsheft „Nussknacker" 1, S. 79).
- Dienes'sches Prinzip der Variation der Veranschaulichung (Funktion: Festigung, Wiederholung, Hilfestellung).
- Problem: Es existieren zwei Parallelkonzepte: Zahl und Operator. Das kann zu erheblicher Verwirrung und Verwischung der Begriffsbildungen führen. Wie sonst auch muss sich zumindest die Lehrerin / der Lehrer der Problematik bewusst sein und die Sprechweisen beherrschen.
- Der Unterschied Zahl – Operator tritt auch in dem Problemkreis „Negative Zahlen" auf: in dem Symbol -5 ist das Minuszeichen einerseits das zur Zahl gehörige Vorzeichen (Zahlkonzept), andererseits ein Rechenzeichen (Operatorkonzept).

3.2 Exkurs: Zwei Alternativen beim Subtraktionsverfahren

Für das schriftliche Subtrahieren gibt es verschiedene Alternativen, die im wesentlichen durch die vier Felder in der folgenden Tabelle charakterisiert sind:

↓ ZÜ-Methode \ Grundauffassung →	Abziehen	Ergänzen
Gleichsinniges Verändern von Minuend und Subtrahend (Erweitern)		(Süddeutsches) Ergänzungsverfahren
Umbündeln innerhalb des Minuenden (Borgen)	(Norddeutsches) Abziehverfahren	

An dem Beispiel $372 - 125$ beschreiben wir die beiden in der Tabelle benannten und im derzeitigen Lehrplan der Grundschule erwähnten Verfahren.

3.2.1 Ergänzungsverfahren

Das Ergänzungsverfahren war seit 25.3.1958 gemäß Beschluß der Kultusministerkonferenz (KMK) in ganz Deutschland verbindlich vorgeschrieben.
Die dem ganzen Verfahren eigentlich zugrundeliegenden Rechengesetze sind der folgenden Gleichungskette zu entnehmen:

$$\begin{aligned} 372 - 125 &\overset{\text{EB}}{=} (300 + 70 + 2) - (100 + 20 + 5) \\ &\overset{\text{AG,KG}}{=} (300 - 100) + (70 - 20) + (2 - 5) \\ &\overset{\text{DG}}{=} (3 - 1) \cdot 100 + (7 - 2) \cdot 10 + (2 - 5) \\ &\overset{\text{UB/GlV}}{=} (3 - 1) \cdot 100 + (7 - 3) \cdot 10 + (12 - 5) \\ &\overset{\text{ZR}}{=} 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 7 \\ &\overset{\text{B}}{=} 247 \end{aligned}$$

Die Endform des schriftlichen Verfahrens ist:

```
  372
- 125
   1
-----
  247
```

3.2.2 Das Abziehverfahren

Es geschieht eine fortschreitende Entbündelung im Minuenden.

Das Verfahren und die zugrundeliegenden Rechengesetze werden wieder in der Gleichungskette offenbar:

$$\begin{aligned} 372 - 125 &\overset{\text{EB}}{=} (300 + 70 + 2) - (100 + 20 + 5) \\ &\overset{\text{AG,KG}}{=} (300 - 100) + (70 - 20) + (2 - 5) \\ &\overset{\text{DG}}{=} (3 - 1) \cdot 100 + (7 - 2) \cdot 10 + (2 - 5) \\ &\overset{\text{UB}}{=} (3 - 1) \cdot 100 + (6 - 2) \cdot 10 + (12 - 5) \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{ZR}}{=} 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 7$$
$$\stackrel{\text{B}}{=} 247$$

Für die Endform des schriftlichen Verfahrens gibt es mehrere Möglichkeiten:

```
   6             1             .
  372           372           372
- 125         - 125         - 125
-----         -----         -----
  247           247           247
```

Bei der ersten Version wird die um Eins verminderte neue Ziffer notiert. Der Lehrplan sieht die erste Version vor, zusätzlich wird — hier nicht dargestellt — die alte Ziffer (hier: `7`) gestrichen. Dies ist von Vorteil bei mehrfachem Entbündeln (siehe unten), ein Nachteil bildet die Tatsache, dass das Durchstreichen auch bei der Fehlerkorrektur angewandt wird oder dass die durchgestrichene Ziffer nicht mehr erkennbar ist, was bei einer Kontrolle der Daten oder der Rechnung ungünstig ist.

Anstelle eines Ersetzens der Ziffern könnte man auch die abzuziehende `1` — eventuell auch nur durch einen Punkt symbolisiert — angeben. Die Position der Eins bzw. des Punktes unterhalb wäre sinnvoll, führt aber zu Notationsschwierigkeiten.

Ein gewichtiges Problem tritt auf, wenn

- die Ziffer Null im Minuenden auftritt oder
- bei mehreren Subtrahenden zu kleine Ziffern im Minuenden auftreten.

und deshalb fortschreitend umgebündelt werden muss. Dies wird an dem folgenden Beispiel, bei dem auch gleich die zugehörige Verfahrensweise angegeben ist, deutlich:

```
  69
  705
- 417
------
  288
```

(Die „Zahl" `70` ist dabei durchzustreichen).

Diese Sonderfälle werfen auch die Problematik der Entscheidung über das richtige Verfahren wieder auf, da durch sie eine Einsicht in das Verfahren wieder in Frage gestellt ist. Andererseits wird die Idee eines Algorithmus als eines schnellen universell einsetzbaren „automatisierten" Verfahrens in Frage gestellt.

3.2.3 Gegenüberstellung der beiden Verfahren

Name	Abziehverfahren	Ergänzungsverfahren (Erweiterungstechnik)
„Heimatregion"	norddeutsch	süddeutsch (Österreich)
Auffassung von Subtraktion als …	Verminderung (Standardauffassung bei der Subtraktion, Repräsentation mit konkretem Material möglich)	Ergänzung (Präsent im Alltag beim Zahlvorgang: Rückgeld)
Behandlung des Zehnerüberschreitung	Umbündelung im Minuenden	Gleichsinnige Veränderung von Minuend und Subtrahend
Einsicht:	leichter	schwerer
Handhabung:	schwerer	leichter
Problemsituationen:	Fortschreitende Umbündelung, Mehrere Subtrahenden, Die Merkziffer tritt zu Beginn, nicht am Ende der gedanklichen Subtraktion auf. Schwierigkeiten später bei der schriftlichen Division. Verwechslung mit Korrektur–Durchstreichen	Eine Verwechslung von Addition und Subtraktion tritt eher auf
Aktueller Stand	Im neuen BayLP festgelegt.	

3.3 Runden

3.3.1 Einstieg (in die Unterrichtseinheit)

Herr Haar nimmt alles ganz genau:

- Sein Auto wiegt 1 288 365 g
- Er ist 1763 mm groß.
- Er verdient im Jahr 4 102 586 Ct.
- Er arbeitet in einer Woche 135 278 s.
- In seinem Garten pflückt er 8 736 Johannisbeeren.

Oft ist es sinnlos oder unmöglich, Zahlen oder Größen ganz präzise anzugeben. Man muss auf– oder abrunden.

3.3.2 Die 5/4–Rundungsregel

Eine Zahl wird bzgl. der X–Stelle (X = Z,H,T,ZT,HT,...) auf die nächst–benachbarte reine X–Zahl $\begin{cases}\text{aufgerundet}\\\text{abgerundet}\end{cases}$, wenn an der $\frac{X}{10}$–Stellenposition (d.h. rechts von der X–Stellenposition) eine der Ziffern $\begin{cases}9,8,7,6,\mathbf{5}\\0,1,2,3,\mathbf{4}\end{cases}$ auftritt.

3.3.3 Hinweise

- Der mathematische Gehalt eines Rundungsergebnisses besteht darin, dass es eine bestimmte Schreibweise für ein Intervall darstellt. So steht beispielsweise die nach einer T–Rundung auftretende Zahl 7 000 für das Zahlenintervall $[6\,500, 7\,499[$.
- Um die Tatsache, dass es sich bei einer Zahl (z.B. 7 000) um ein Rundungsergebnis handelt, werden andere Arten der Darstellung benutzt:
  - Ausschreiben der Stufenzahl: 7 Tausend
  - Abkürzung der Stufenzahl: 7 T,   7 Tsd.
  - Wissenschaftiche Zahldarstellung $7 \cdot 10^3$
  - Bei Größen: $7\,000 \in = 7$ TEU, $7\,000\,\mathrm{g} = 7\,\mathrm{kg}$, $7\,000\,\mathrm{kg} = 7\,\mathrm{t}$.
- Dem Runden kommt in der weiteren Schullaufbahn (bei der Benutzung von Dezimalbrüchen und beim Rechnen in den Naturwissenschaften) eine zunehmend wichtige Bedeutung zu.

3.3.4 Warum Runden?

- Wenn Zahlen zur Beschreibung der „Welt" verwendet werden, ist man an dem geeigneten Informationsgehalt interessiert.
- Gerundete Zahlen kann man leichter im Gedächtnis behalten, sie leichter anderen mitteilen.
- Gerundete Zahlen liegen dem Überschlagsrechnen zugrunde.
- Das alte Paradigma über die Mathematik als die „exakteste" Wissenschaft begünstigt Negativ-Einstellungen. Der freie, flexible und kreative Umgang mit Zahlen sollte angestrebt werden.
- Messergebnisse (Naturwissenschaften, Volkswirtschaft, Empirische Forschung) sind prinzipiell gar nicht durch exakte (reelle) Zahlen angebbar.
- Kann man die Bildungsstandards mit diesen Gesichtspunkten verbinden?
- Im Geschäftsleben und im betriebswirtschaftlichen Rechnungswesen ist es kontraproduktiv, zu viel zu runden.
- Runden bei der Notenbildung?

3.3.5 Beispiele

- Infolge internationaler Festlegungen von Entfernungs- und Zeitmessung hat die Lichtgeschwindigkeit den exakten Wert

$$c \quad = \quad 299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

- Da die Kreiszahl π unendlich viele Nachkommastellen ohne Wiederholung hat, kann sie prinzipiell nur als gerundeter Wert angegeben werden.

$$\pi \quad \approx \quad 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211 7\ldots$$

- Meine auf ganze Milliarden gerundete Handy-Nummer ist 015 000 000 000.

3.3.6 Besonderheiten beim Rechnen mit Rundungsergebnissen

- Ein zweimaliges Runden bzgl. verschiedener Stufen führt zu einem anderen Ergebnis, als wenn man gleich bzgl. der größeren dieser Stufenzahlen rundet.

$$\begin{array}{lll} 24\,758 & \overset{\mathrm{T}}{\rightsquigarrow} 25\,000 & \overset{\mathrm{ZT}}{\rightsquigarrow} 30\,000. \\ 24\,758 & & \overset{\mathrm{ZT}}{\rightsquigarrow} 20\,000. \end{array}$$

- Das Rechnen mit Rundungsergebnissen unterliegt ganz eigenen Gesetzen. Wie die Beispiele

$$\begin{aligned} 6\,382 + 2\,453 &= 8\,835 \overset{\text{T}}{\rightsquigarrow} 9\,000 \\ 6\,382 + 2\,453 &\overset{\text{T}}{\rightsquigarrow} 6\,000 + 2\,000 = 8\,000, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 150 \cdot 150 &= 22\,500 \overset{\text{H}}{\rightsquigarrow} 22\,500, \\ 150 \cdot 150 &\overset{\text{H}}{\rightsquigarrow} 200 \cdot 200 = 40\,000 \end{aligned}$$

  zeigen, sind Rundungs- und Rechenoperationen nicht einfach vertauschbar.

3.4 Überschlagsrechnen

- Angesichts der zunehmenden Bedeutung des Taschenrechners kommt dem begleitend–reflektierten Überschlagsrechnen eine größere Bedeutung zu. Die Notwendigkeit dazu ist für Schüler schwer einsichtig: Der Taschenrechner ist exakt, das Überschlagsrechnen ist „grob bis fehlerhaft".

- Das obige Beispiel der Rundung und Multiplikation zeigt, dass das Überschlagsrechnen auch Tücken hat. Insbesondere beim überschlagsmäßigen Multiplizieren kann man nicht erwarten, das (richtige) gerundete Ergebnis zu erhalten. Man erhält im allgemeinen nur die richtige Größenordnung.

- Grundsätzlich sollten die Operanden bei einer Addition oder Multiplikation gegensinnig, bei einer Subtraktion oder Division gleichsinnig gerundet werden. In dem Beispiel oben also:

$$150 \cdot 150 \overset{\text{H}}{\rightsquigarrow} 100 \cdot 200 = 20\,000.$$

- Das Überschlagsrechnen erfordert insbesondere ein Beherrschen des Rechnens mit Stufenzahlen ($100 \cdot 100 = 10\,000$), das heißt ein Rechnen mit den Endnull–Anzahlen. Hier treten typische Fehler auf:

$$6 \cdot 7 = 42 \quad \Longrightarrow \quad 60 \cdot 70 = 420, \qquad\qquad 125\,000 : 5\,000 = 25\,000.$$

- Das Überschlagsrechnen entspricht grundsätzlich nicht der sonst stark strapazierten Attribuierung der Mathematik als exakt. Dies führt auch dazu, dass Schüler und Schülerinnen das Runden eher zu vorsichtig handhaben oder als „unmathematisch" ansehen.

- Das Überschlagsrechnen ist bei der Division durch mehrstellige Divisoren hilfreich.

3.5 Schätzen

Im Unterkapitel 1.2 wurde dargelegt, dass Zahlen in der Wirklichkeit unter verschiedensten Aspekten auftreten.

3.5.1 Zahlerfassung

Die Erfassung einer in der Wirklichkeit auftretenden Zahl durch eine mathematische Zahl

$$\begin{array}{c}\text{Zahl}\\ \text{in der Wirklichkeit}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{c}\text{Zahl}\\ \text{in der Mathematik}\end{array}$$

geschieht mittels

- Zählen (Kardinal-/Ordinal-/Zählzahlaspekt)
- Messen (Maßzahlaspekt) oder
- überschlagsmäßigem Bestimmen (Rechenzahlaspekt).

3.5.2 Problem

Diese Erfassung könnte sehr aufwändig oder unmöglich werden, da

- die Zahlen groß werden,
- genügend genaue Messgeräte nicht zur Verfügung stehen oder
- die Zahl gar nicht zugänglich ist.

3.5.3 Lösung

Man behilft sich mit dem Schätzen: Es wird nicht die exakte Zahl erfasst, sondern ihre relevanten Eigenschaften:

- ein Zahlenintervall, in dem sie enthalten ist,
- die Größenordnung.

Die Tatsache, dass geschätzt wurde, wird dann sprachlich durch Worte wie

etwa, ungefähr, circa, bis auf XY genau, schätzungsweise, um

zum Ausdruck gebracht.

3.5.4 Beispiele

- Im Maßkrug ist ungefähr 1 Liter Bier drin.
- Für die Renovierung der 87 m^2-Wohnung werden so um $3\,\frac{1}{2}$ Eimer Silikatfarbe gebraucht.
- In unserer Heimatgalaxie, der Milchstraße, gibt es etwa hundert Milliarden Sterne.
- Ich habe neulich mein Handy gewogen. Nachdem ich 30 Apps heruntergeladen hatte, war es ein Gramm schwerer.
- Mein Koffer für die USA-Reise hat um die 20 kg.
- In der Herde, in der ich neulich mit meinem Mini feststeckte, waren bestimmt 150 Schafe.
- Haben Sie schon eine Milliarde ♡-Schläge erlebt?
- Wenn im Backrezept 200 g Zucker steht, dann schütt' ich den halt gefühlsmäßig einige Sekunden aus der Packung.

3.6 Schaubilder

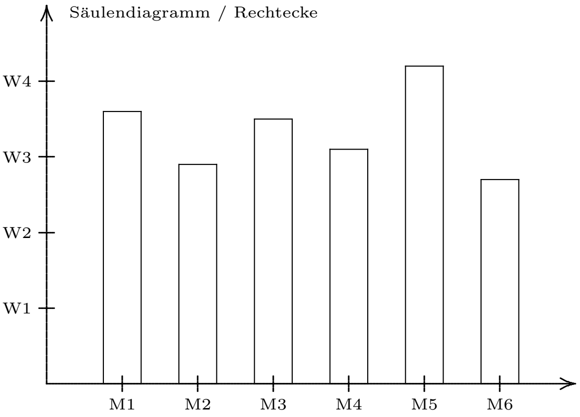
Zahlen, vor allem große Zahlen, kann man überblickartig in Schaubildern darstellen.

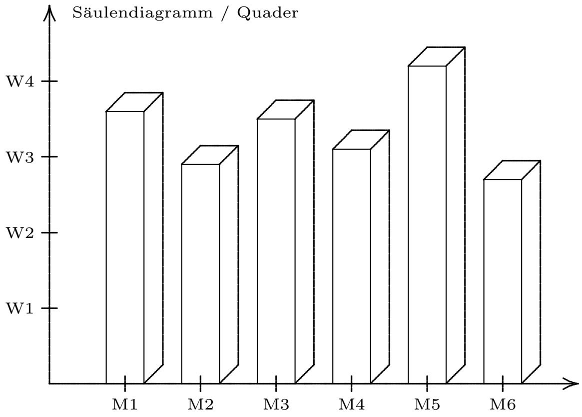
- Säulendiagramme
  - Die Daten werden durch vertikal stehende Rechtecke dargestellt. Auf der Rechtswertachse sind die Merkmale aufgelistet, auf der Hochwertachse sind die Werte gekennzeichnet.
  - Anstelle der Rechtecke können auch Linien, Quader bzw. Zylinder in perspektivischer Darstellung benutzt werden.
- Balkendiagramme
  - Die Daten werden durch horizontal liegende Rechtecke dargestellt. Auf der Hochwertachse sind die Merkmale gekennzeichnet, auf der Rechtswertachse sind die Werte angetragen.
  - Anstelle der Rechtecke können auch Strecken (Striche) oder Quader bzw. Zylinder in perspektivischer Darstellung benutzt werden.
- Kreisdiagramm oder Tortendiagramm
- Liniendiagramm: Die den Merkmalen und Werten zugeordneten Punkte werden durch geradlinige oder geeignet krummlinige Kurven verbunden.
- Zusätzlich: Die Diagramme werden durch bildhafte Elemente (Icons, Piktogramme) angereichert.

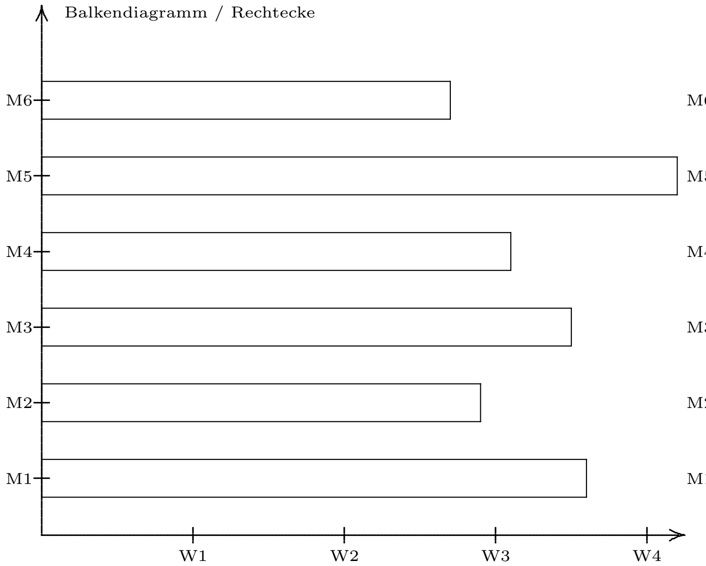
3.6.1 Beispiel

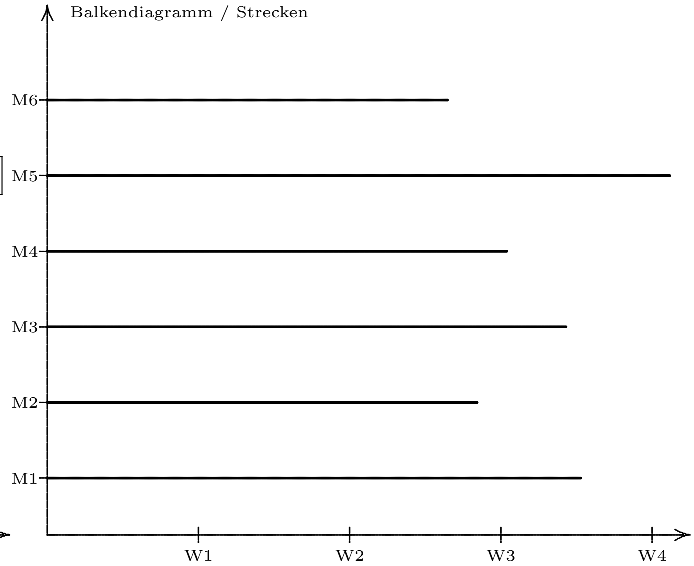
Ein primitives Beispiel, das den Schaubildern auf der nächsten Seite zugrundeliegen könnte, ist eine Umfrage über Lieblingszahlen.

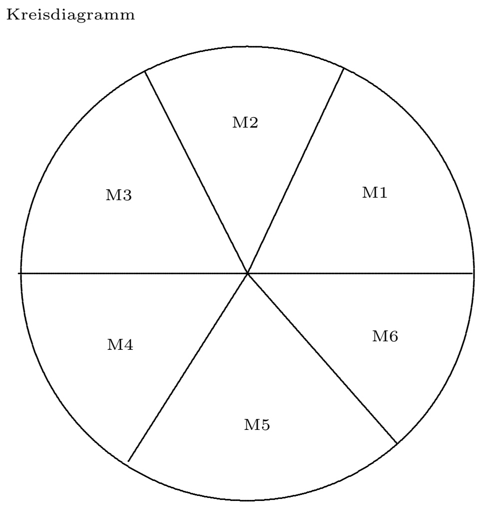
- Das Merkmal M1 bedeutet ,,Lieblingszahl 1”.
- Der Wert W1 gibt an, wieviele mit dem Merkmal 1, also ,,Lieblingszahl 1” geantwortet haben.
- entsprechend für die anderen Zahlen $2 \ldots 6$.

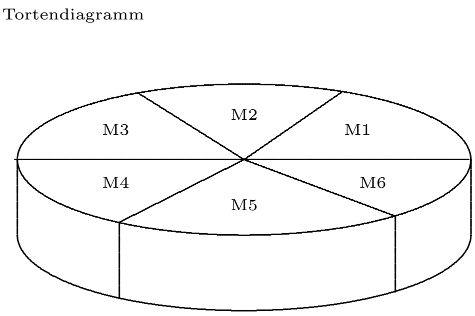


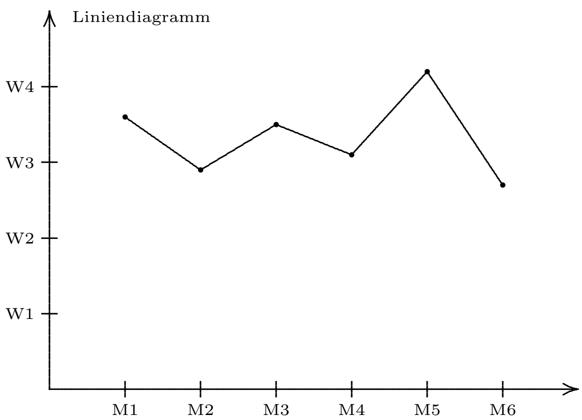












M? : Abgefragtes Merkmal

W? : Ermittelter Wert

4 Teilbarkeit — die kleine Zahlentheorie$^{\ominus}$

Hier begegnen die Schüler zum ersten Mal einem mathematischen Konzept, das im Alltag nicht ständig präsent ist. Ein Teil der Schüler empfindet die Algorithmen und Gesetze als überraschend, sie spüren in diesem Teilgebiet ein wenig von der ,,Schönheit der Mathematik". Deshalb geht davon eine vergleichsweise hohe intrinsische Motivation aus.

Voraussetzungen: Die unendliche Menge $\mathbb{N}_0$ der natürlichen Zahlen mit der totalen Ordnung $\leq$ und den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$.

4.1 Teilbarkeit

M5 1.3

4.1.1 Definitionen

Eine Zahl $m \in \mathbb{N}_0$ heißt *Teiler* der Zahl $n \in \mathbb{N}_0$, wenn es ein $k \in \mathbb{N}_0$ gibt mit

$$k \cdot m = n.$$

n heißt dann auch *Vielfaches* von m und k *Komplementärteiler*.

Man schreibt und spricht

$$m \mid n \quad \text{oder} \quad m \sqsubseteq n \qquad\qquad m \text{ teilt } n \quad \text{oder} \quad m \text{ ist Teiler von } n$$

Wir haben in der Definition für alle drei beteiligten Zahlen in Kauf genommen, dass sie Null sein können. Bei der Formulierung von Sätzen zur Teilbarkeit muss man hinsichtlich dieses Sonderfalls Vorsicht walten lassen. Beispielsweise ist die Implikation $m \mid n \implies m \leq n$ für den Fall $n = 0$ nicht richtig.

Eine Definition der Teilbarkeit über ,,ohne Rest teilbar" o.ä. ist nicht so vorteilhaft. Sowohl bei bestimmten Sonderfällen (bei Auftreten der von 0) als auch beim mathematischen Argumentieren gerät man leicht in Schwierigkeiten.

4.1.2 Die Teilbarkeitsrelation

Die Teilbarkeitsrelation ist die durch

$$R_{|} \;=\; R_{\sqsubseteq} \;=\; \left\{(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \,\middle|\, m \mid n\right\}$$

gegebene Teilmenge von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Die gespiegelte Relation

$$R_{\sqsupseteq} \;=\; \left\{(n,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \,\middle|\, m \mid n\right\}$$

heißt *Vielfachenrelation*.

Die höhermathematische Notation mit den eckigen Relationszeichen läßt bereits eine gewisse Dualität zwischen den Begriffen Teilbarkeit und Vielfachheit vermuten. Diese Dualität wird in der mathematischen Verbandstheorie (vgl. unten) aufgearbeitet.

4.1.3 Teiler- und Vielfachenmenge

Für eine feste Zahl n werden definiert die *Teiler*- und *Vielfachenmengen*

$$\mathcal{T}_n := \left\{ m \in \mathbb{N}_0 \middle| m \mid n \right\} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{V}_n := \left\{ m \in \mathbb{N}_0 \middle| n \mid m \right\}$$

Ein erster Unterschied hinsichtlich der oben angesprochenen Dualität ergibt sich in der Feststellung, dass

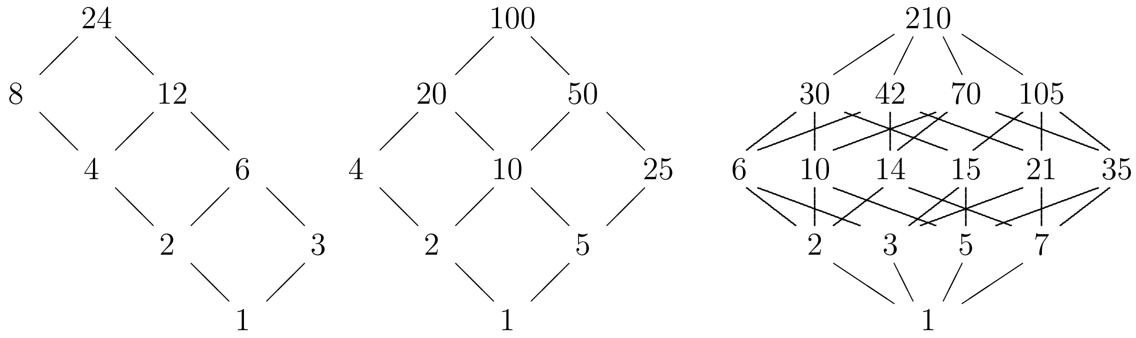
$$|\mathcal{T}_n| < \infty \qquad \text{und} \qquad |\mathcal{V}_n| = \infty \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

4.1.4 Satz: Eigenschaften der Teilbarkeit

1. Die Teilbarkeitsrelation ist eine Halbordnung, d.h. sie ist
   - reflexiv: $n \mid n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$,
   - antisymmetrisch: Aus $m \mid n$ und $n \mid m$ folgt $m = n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$,
   - transitiv: Aus $\ell \mid m$ und $m \mid n$ folgt $\ell \mid n$ für alle $\ell, m, n \in \mathbb{N}_0$.
2. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
   $$n \mid 0, \qquad 0 \mid n \implies n = 0.$$
3. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
   $$1 \mid n, \qquad n \mid 1 \implies n = 1.$$
4. (Verträglichkeit mit algebraischen Strukturen)
   Für alle $m, m_1, m_2, n_1, n_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ gilt
   $$m \mid n_1 \quad \text{und} \quad m \mid n_2 \quad \implies \quad m \mid n_1 + n_2$$
   und
   $$m_1 \mid n_1 \quad \text{und} \quad m_2 \mid n_2 \quad \implies \quad m_1 \cdot m_2 \mid n_1 \cdot n_2.$$
5. Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$ gilt:
   $$m \mid n \implies m \leq n.$$

4.1.5 Hasse-Diagramme

Ganz allgemein können Halbordnungen auf endlichen Mengen in sogenannten Hasse–Diagrammen dargestellt werden: Besteht die Relation $m \mid n$, so wird im Diagramm m unterhalb von n angeordnet und, falls nicht noch ein ℓ mit $m \mid \ell \mid n$ existiert, ein Strich von m nach n gezogen.



Anregung:

- Welche Gestalt hat das Hasse–Diagramm einer Primzahl, Primzahlpotenz, Quadratzahl?
- Inwiefern ist ein Hasse–Diagramm punktsymmetrisch? Warum ist es nicht achsensymmetrisch?

4.2 Primzahlen

M5 1.3

4.2.1 Begriffe

Eine Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ heißt *Primzahl*, wenn sie genau zwei (verschiedene) Teiler hat.

- Die Menge aller Primzahlen wird mit $\mathbb{P}$ bezeichnet.
- In der obigen Definition ist die Null als ,,keine Primzahl" erfasst, was aber nicht so klar einsichtig ist.
- In den Definitionen ist die Grundmenge $\mathbb{N}_0$, obwohl im Nachhinein klar wird, dass 0 keine Primzahl ist. Dies geschieht also aus ,,Gleichmäßigkeitsgründen": Man sollte nicht jedes Mal überlegen müssen, ob die Grundmenge $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$ ist.
- Die Primzahldefinition mutet etwas umständlich an. Anschaulicher ist die ,,klassische Definition":

  > Eine Zahl in $\mathbb{N}_0$ heißt Primzahl, wenn sie nur 1 und sich selbst als Teiler hat.

  Die Zahl 1 muss als Primzahl explizit ausgeschlossen werden, da sie dieser Definition genügt, aber aus Zweckmäßigkeitsgründen nicht als solche gelten soll.

4.2.2 Satz: Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung

Jede natürliche Zahl $n > 2$ ist auf genau eine Weise (abgesehen von der Reihenfolge der Faktoren) als ein Produkt von Primzahlen darstellbar.

$$n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_\ell^{m_\ell} \quad \text{mit} \quad p_1, p_2, \ldots, p_\ell \in \mathbb{P}, \quad m_1, m_2, \ldots, m_\ell \in \mathbb{N}.$$

4.2.3 Beweis

Das bekannte Argument

$$\text{Primzahl } p \text{ teilt Produkt } a \cdot b \quad \Longrightarrow \quad p \text{ teilt einen der Faktoren } a \text{ oder } b$$

darf hier nicht verwendet werden; es beruht gerade auf diesem Satz.

Wir führen den Beweis durch Induktion über n.

Induktionsanfang $n = 2$: Diese Zahl besitzt eine eindeutige Primfaktorzerlegung (PFZ): $2 = 2$

Induktionsschluß $n \to n+1$: Hier dürfen wir als Induktionsvoraussetzung (IndV) die Tatsache benutzen, dass jede natürliche Zahl $\leq n$ eine eindeutige PFZ besitzt.

1. Fall: $n+1$ ist eine Primzahl, in diesem Fall ist die PFZ gerade $n+1 = n+1$; da $n+1$ keine Teiler besitzt, ist die PFZ eindeutig.

2. Fall: $n+1$ ist keine Primzahl. Dann gibt es zwei Zahlen $k, l \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq k, l \leq n$, so dass $n+1 = k \cdot l$. Nach IndV besitzen k und l PFZen, also besitzt auch $n+1$ eine.

Es bleibt noch zu beweisen, dass die PFZ auch eindeutig ist: Dazu nehmen wir an, es gäbe zwei verschiedene PFZen für $n+1$, d.h. wir können schreiben:

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_s = n+1 = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_t \qquad (*)$$

mit Primzahlen p_i, q_j; wobei irgendeiner der Faktoren p_i — sagen wir p_k, $k \in \{1, \ldots, s\}$ fest — nicht unter den Faktoren q_j vorkommt.
Entscheidend ist jetzt die Gleichung

$$p_k \cdot (\frac{n+1}{p_k} - q_2 \cdot \ldots \cdot q_t) \;=\; (q_1 - p_k) \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_t,$$

deren Richtigkeit durch Ausmultiplizieren festgestellt werden kann. Der Betrag des Produkts auf der rechten Seite der Gleichung ist kleiner als $n+1$, besitzt somit gemäß IndV eine eindeutige PFZ. Es gilt also

$$p_k \cdot (\frac{n+1}{p_k} - q_2 \cdot \ldots \cdot q_t) \;=\; \underbrace{r_1 \cdot \ldots \cdot r_n}_{q_1 - p_k} \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_t,$$

wobei $r_1, \ldots, r_n$ Primzahlen sind.

p_k und q_1 sind verschiedene Primzahlen, woraus folgt, dass $p_k \not| \, (q_1 - p_k)$. Das bedeutet, dass die Primzahl p_k nicht als Faktor unter den $r_1, \ldots, r_n$ sein kann, sie muß also in dem Produkt $q_2 \cdot \ldots \cdot q_t$ auftreten. Das steht aber im Widerspruch zu der Annahme $(*)$.

Beachte, dass der obige Satz entscheidend in die Argumentation beim Standardbeweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ eingeht.

4.2.4 Satz: Euklid

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

4.2.5 Beweis

Wir nehmen an, es gäbe nur r verschiedene Primzahlen

$$p_1, p_2, \ldots\ldots, p_r.$$

Wir bilden die Zahl

$$n \;=\; p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$$

Dann kann die Zahl $n+1$ keine Primzahl sein, sie besitzt also eine PFZ, in der eine der Primzahlen p_i — sagen wir p_k — vorkommen muß. Somit kommt p_k in den PFZen von n und von $n+1$ vor. Das ist ein Widerspruch und wir müssen unsere eingangs gemachte Annahme verwerfen.

< Episode Wagenschein >

4.2.6 Satz: Einfacher Primzahltest

Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann Primzahl, wenn sie keinen Primteiler (= Teiler, der eine Primzahl ist) p mit $p^2 \leq n$ besitzt.

Das heißt, um eine natürliche Zahl auf ihre Primeigenschaft hin zu überprüfen, muß man sie nicht durch alle kleineren Zahlen teilen. Es genügt die Division durch alle Primzahlen $p \leq \sqrt{n}$.

4.2.7 Beweis

(1. Richtung) n sei Primzahl; dann besitzt n keine echten Primteiler p, schon gar keine mit $p^2 \leq n$.
(2. Richtung) n sei keine Primzahl $\Longrightarrow$ n besitzt dann eine PFZ mit zwei oder mehr Faktoren. Das Quadrat eines dieser Faktoren muß $\leq n$ sein.

4.2.8 Beispiel Ist 797 eine Primzahl?

$$\left.\begin{array}{r} 2 \nmid 797 \\ 3 \nmid 797 \\ 5 \nmid 797 \\ 7 \nmid 797 \\ 11 \nmid 797 \\ 13 \nmid 797 \\ 17 \nmid 797 \\ 19 \nmid 797 \\ 23 \nmid 797 \\ 29^2 = 841 > 797 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad 797 \text{ ist Primzahl}$$

In der Schule lässt sich der Beweis anhand von mehreren Beispielen sehr plausibel machen:

$$\begin{array}{rcl} 35 & = & 5 \cdot 7 \\ 143 & = & 11 \cdot 13 \\ 6 & = & 2 \cdot 3 \\ 49 & = & 7 \cdot 7 \\ 24 & = & 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \end{array}$$

Quadriert man den kleinsten Primteiler, so muss das Produkt kleiner oder gleich der gegebenen Zahl sein (Es schwebt — unausgesprochen oder oft ausgesprochen — der Begriff der Wurzel im Raum).

4.2.9 Das Sieb des Eratosthenes

Die Zahlen von $1 \ldots\ldots n$ (Hier: $n = 504$) werden nacheinander aufgeschrieben.

1. Die 1 wird weggestrichen.
2. Dann sucht man nacheinander die Primzahlen $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ heraus und
   - markiert jeweils diese Primzahl p und
   - streicht dann die Echt–Vielfachen $k \cdot p$, $k \geq 2$, dieser Primzahl p weg.
3. Dieses Verfahren wird beendet, sobald das Quadrat p^2 der aktuellen Primzahl die Maximalzahl n überschritten hat (Dies ist gleichbedeutend mit $p > \sqrt{n}$).

Es bleiben dann nur Primzahlen übrig. (Beachte, dass sie nicht alle bei der Markierung aus Schritt 2 erfasst werden.)

Günstig ist eine Rechteck–Anordnung (beispielsweise der Breite 12), da dann die zu streichenden Zahlen auf Geraden angeordnet sind.

Das Verfahren hat gegenüber dem ,,Einfachen Primzahltest" den Vorteil, dass alle Primzahlen in einer gegebenen Menge herausgefunden werden. Für das Testen einer einzigen gegebenen Zahl n ist es zu aufwändig.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144
145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156
157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168
169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192
193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204
205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216
217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228
229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252
253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264
265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276
277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288
289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312
313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324
325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336
337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348
349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360
361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372
373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384
385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396
397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408
409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420
421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432
433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444
445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456
457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468
469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480
481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492
493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504

4.2.10 Exkurs: Das GIMPS Projekt

Am GIMPS–Projekt (Great Internet Mersenne Prime Search) beteiligen sich rund 130 000 Freiwillige in aller Welt, die ihren Computer während der ungenutzten Zeit mit der Suche nach Mersenne'schen Primzahlen beschäftigen. *Mersenne'sche Primzahlen* haben die Form

$$2^p - 1, \qquad \text{mit } p \in \mathbb{P}.$$

Zusammengenommen ist die Rechenleistung des Netzes ungefähr so hoch, wie die der derzeit besten Supercomputer. Dabei versorgt ein zentraler Server, Primenet, alle Beteiligten mit potenziellen Primzahl–Kandidaten, die es zu überprüfen gilt.

Es konnten bisher die folgenden Erfolge verbucht werden:

Nr	Nachweis	$p =$	Ziffernzahl
39	14.11.2001	13.466.917	ca. 4 Mio.
40	2003/04	20.996.011	ca. 6 Mio.
41	07.06.2004	24.036.583	ca. 7,2 Mio.
42	18.02.2005	25.964.951	ca. 7,8 Mio.
43	15.12.2005	30.402.457	9.152.052
44	04.09.2006	32.582.657	9.808.358

Aktuelle Informationen finden Sie auf `http://www.mersenne.org/`

4.3 Der größte gemeinsame Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache

M5 1.3

Die Kenntnisse und Fertigkeiten im Zusammenhang mit diesen Begriffen spielen eine große Rolle in der Bruchrechnung der 6. Jahrgangsstufe.

4.3.1 Begriffe

Für endlich viele natürliche Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_\ell$ (ungleich Null!) heißt die

- größte Zahl in der Menge $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{n_1} \cap \mathcal{T}_{n_2} \cap \ldots \cap \mathcal{T}_{n_\ell}$ der größte gemeinsame Teiler von $n_1, n_2, \ldots, n_\ell$.

  Bezeichnung: $\mathrm{ggT}(n_1, n_2, \ldots, n_\ell)$.

  Die Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_\ell$ heißen *teilerfremd*, wenn $\mathrm{ggT}(n_1, n_2, \ldots, n_\ell) = 1$.

- kleinste Zahl in der Menge $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{n_1} \cap \mathcal{V}_{n_2} \cap \ldots \cap \mathcal{V}_{n_\ell}$ das kleinste gemeinsame Vielfache von $n_1, n_2, \ldots, n_\ell$.

  Bezeichnung: $\mathrm{kgV}(n_1, n_2, \ldots, n_\ell)$.

4.3.2 Der Euklidische Algorithmus

Mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus kann der ggT zweier Zahlen ohne Primfaktorzerlegung berechnet werden. Man führt, wie im folgenden Beispiel fortlaufend Divisionen mit Rest durch bis der Rest Null auftritt.

Es soll der ggT von 2226 und 588 berechnet werden.

$$\begin{array}{rcl} 2226:588 &=& 3 \text{ R } 462 \qquad \text{bzw.} \quad 2226 = 3 \cdot 588 + 462 \\ 588:462 &=& 1 \text{ R } 126 \\ 462:126 &=& 3 \text{ R } \ \ 84 \\ 126:\ \ 84 &=& 1 \text{ R } \boxed{42} \\ 84:\ \ 42 &=& 2 \text{ R } \ \ \ 0 \end{array}$$

Tritt der Rest Null ein, so ist der Algorithmus abzubrechen. Der Rest bei der Division unmittelbar vorher ist der gesuchte ggT (im Beispiel: 42).

4.3.3 Satz: Berechnung von ggT und kgV mittels PFZ

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $\{p_1, p_2, \ldots, p_\ell\}$ die Menge aller Primfaktoren aus den Zerlegungen von m oder n. Es sei

$$\begin{aligned} m &= p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_\ell^{r_\ell}, \\ n &= p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_\ell^{s_\ell}. \end{aligned}$$

(Es gilt $r_i = 0$ bzw. $s_i = 0$, falls p_i nicht in der PFZ von m bzw. n vorkommt.)

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(m,n) &= p_1^{\min\{r_1,s_1\}} \cdot p_2^{\min\{r_2,s_2\}} \cdot \ldots \cdot p_\ell^{\min\{r_\ell,s_\ell\}}, \\ \mathrm{kgV}(m,n) &= p_1^{\max\{r_1,s_1\}} \cdot p_2^{\max\{r_2,s_2\}} \cdot \ldots \cdot p_\ell^{\max\{r_\ell,s_\ell\}}. \end{aligned}$$

Der Satz kann problemlos für die Berechnung von ggT und kgV für mehr als zwei Argumente verallgemeinert werden.

4.3.4 Folgerung

Eine interessante, weil gar nicht so selbstverständliche, Folgerung ergibt sich hier: Für zwei Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathrm{ggT}(m,n) \cdot \mathrm{kgV}(m,n) \;=\; m \cdot n.$$

Es gilt nämlich für die Exponenten der Primfaktoren p_i auf beiden Seiten $\min(r_i, s_i) + \max(r_i, s_i) \;=\; r_i + s_i$.

4.3.5 Schulpraxis

Für die schulpraktische Umsetzung des sich aus dem Satz ergebenden Algorithmus kann man — beispielsweise — wie folgt vorgehen:

1. Primfaktorzerlegung einer Zahl.

72	36	18	9	3	1
2	2	2	3	3	

Der zugehörige Algorithmus lautet

S1 Schreibe die vorgegebene Zahl in der ersten Zeile links an!

S2 Suche einen (wahlweise: den kleinsten) Primteiler und schreibe ihn unterhalb in der zweiten Zeile an!

S3 Dividiere und schreibe den Quotienten in der ersten Zeile in die nächste Spalte!

S4 Wenn der Quotient nicht 1 ist, fahre mit Schritt 2 fort!
Wenn der Quotient 1 ist, steht die PFZ in der zweiten Zeile!

Wegen der (sonst eigentlich nicht so üblichen) horizontalen Anordnung wirkt die Bruchidee in den einzelnen Spalten.

2. Berechnung von ggT und kgV. Schreibe die PFZen untereinander. Dabei ist es sehr günstig, wenn gleiche Primfaktoren genau untereinander stehen. Im Beispiel:

$$\begin{array}{rl}
72 = & 2^3 \cdot 3^2 \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
420 = & 2^2 \cdot 3 \;\; \cdot 5 \;\; \cdot 7 \;\; \cdot \\
156 = & 2^2 \cdot 3 \;\; \cdot \quad \cdot \quad \cdot 13 \\
\hline
\mathrm{ggT} = & 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 13^0 = 12 \\
\\
\hline
\mathrm{kgV} = & 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 13^1 = 32760
\end{array}$$

Berechnung des ggT: Für jede vorkommende Primzahlpotenz wird der minimale Exponent (die kleinste Hochzahl) ausgewählt. Wenn ein Primfaktor dabei ist, der in einer der PFZen nicht vorkommt, so bedeutet das, dass er auch im ggT nicht vorkommt. (Er kann dann gleich weggelassen werden; Die Hochzahl Null stellt sich in der fünften Klasse als noch sehr abstrakt dar.)

Berechnung des kgV: Für jede vorkommende Primzahlpotenz wird der maximale Exponent (die größte Hochzahl) ausgewählt. Wenn ein Primfaktor dabei ist, der in einer der PFZen nicht vorkommt, so spielt das keine Rolle, es wird dann einfach die größte Hochzahl aus den anderen Zeilen ermittelt.

Die Kenntnis des Algorithmus bedeutet nicht, dass andere kognitive Leistungen (Kopfrechnen, Intuition, Gedächtnis, Beherrschung der Einmaleins–Sätze) ausgeklammert werden sollen, ganz im Gegenteil: Bei der Bruchrechnung sollte man sich nicht ständig mit der Ausführung dieses Algorithmus aufhalten müssen. Die Beispiele sind dann aber auch meist mit kleineren Zahlen (im Nenner) konstruiert.

4.4 Kontextfelder für ggT und kgV

4.4.1 Größter gemeinsamer Teiler

- Auslegung eines Rechtecks durch quadratische Platten.
- Eine Sorte Briefmarken für zwei verschiedene Frankierungen.

4.4.2 Kleinstes gemeinsames Vielfaches

- Koinzidenzsituationen
  - Gegenüberstehen von Rädern oder Zahnrädern,
  - Aufeinanderschichtung von unterschiedlich hohen Steinen
  - Runden beim Autorennen.
- Bildung von Hauptnennern zum Vergleichen, Addieren, Subtrahieren von Brüchen.

4.5 Exkurs: Verbandstheorie

4.5.1 ggT und kgV als Verknüpfungen

Die Abbildungen

$$\mathrm{ggT}\begin{cases} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (m,n) & \mapsto & \mathrm{ggT}(m,n) \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{kgV}\begin{cases} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (m,n) & \mapsto & \mathrm{kgV}(m,n) \end{cases}$$

sind Verknüpfungen auf $\mathbb{N}$ (wie andere Grundrechenarten auch).

4.5.2 Rechengesetze

Mit einer etwas anderen Schreibweise

$$m \sqcap n \;:=\; \mathrm{ggT}(m,n) \qquad \text{und} \qquad m \sqcup n \;:=\; \mathrm{kgV}(m,n)$$

lassen sich die Rechengesetze sinnfälliger aufschreiben:

Für alle $k, m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

- Assoziativgesetze

$$\begin{aligned} (k \sqcap m) \sqcap n &= k \sqcap (m \sqcap n) =: k \sqcap m \sqcap n \\ (k \sqcup m) \sqcup n &= k \sqcup (m \sqcup n) =: k \sqcup m \sqcup n \end{aligned}$$

- Kommutativgesetze

$$\begin{aligned} k \sqcap m &= m \sqcap k \\ k \sqcup m &= m \sqcup k \end{aligned}$$

- Absorptionsgesetze

$$\begin{aligned} k \sqcap (k \sqcup m) &= k \\ k \sqcup (k \sqcap m) &= k \end{aligned}$$

  (Man sagt: m wird absorbiert.)

- Distributivgesetze

$$\begin{aligned} k \sqcap (m \sqcup n) &= (k \sqcap m) \sqcup (k \sqcap n) \\ k \sqcup (m \sqcap n) &= (k \sqcup m) \sqcap (k \sqcup n) \end{aligned}$$

4.5.3 Bemerkung

Eine beliebige Menge M mit zwei Verknüpfungen $\sqcap$ und $\sqcup$, in denen diese Gesetze erfüllt sind, heißt *distributiver Verband*.

Andere Beispiele für distributive Verbände sind die

- Potenzmenge einer Menge mit $\cap$ und $\cup$ als Verknüpfungen
- eine beliebige (halb-)geordnete Menge mit min und max als Verknüpfungen.

4.6 Teilbarkeitsregeln

M5 1.3

Grundlegend für die fachliche Aufarbeitung der Teilbarkeitsregeln ist der folgende Satz.

4.6.1 Satz: Teilbarkeit und Linearkombinationen

Es seien die folgenden Zahlen vorgegeben:

Der Teiler: Eine natürliche Zahl $m \geq 2$.

Mehrere natürliche Zahlen $n_1, \ldots, n_\ell$.

Die Koeffizienten: Genauso viele ganze Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$.

WENN m die Zahlen $n_1, \ldots, n_\ell$ teilt,
DANN teilt m auch die Linearkombination $\alpha_1 n_1 + \ldots + \alpha_\ell n_\ell$.

4.6.2 Beweis

Er besteht im wesentlichen im Distributivgesetz. Die Voraussetzung bedeutet, dass natürliche Zahlen $k_1, \ldots, k_\ell$ existieren, so dass

$$n_1 = k_1 \cdot m, \qquad \ldots\ldots \qquad n_\ell = k_\ell \cdot m.$$

Dann gilt aber auch

$$\alpha_1 n_1 + \ldots + \alpha_\ell n_\ell = \alpha_1 k_1 \cdot m + \ldots + \alpha_\ell k_\ell \cdot m \stackrel{\text{DG}}{=} (\alpha_1 k_1 + \ldots + \alpha_\ell k_\ell) \cdot m.$$

Also ist m Teiler der Linearkombination.

4.6.3 Satz: Teilbarkeit und Differenz

Es seien $m, n, \widetilde{n}$ drei natürliche Zahlen.

Teilt m die Differenz $n - \widetilde{n}$, so teilt m die Zahl n genau dann, wenn m die Zahl $\widetilde{n}$ teilt.

Symbolische Formulierung:

$$m|(n - \widetilde{n}) \qquad \Longrightarrow \qquad \Big(m|n \iff m|\widetilde{n}\Big).$$

4.6.4 Beweis

Wenn die natürliche Zahl m Teiler von $(n - \widetilde{n})$ und n ist,
dann teilt sie auch die Linearkombination $\widetilde{n} = n - (n - \widetilde{n})$.

Wenn die natürliche Zahl m Teiler von $(n - \widetilde{n})$ und $\widetilde{n}$ ist,
dann teilt sie auch die Linearkombination $n = (n - \widetilde{n}) + \widetilde{n}$.

4.6.5 Anwendung dieses Satzes

Will man testen, ob eine Zahl m Teiler einer anderen Zahl n ist, so ermittelt man (aus n) eine geeignete neue Zahl $\widetilde{n}$, die man auf Teilbarkeit durch m testet.

Die obige ,,Genau-dann-wenn-Aussage" liefert dann das Ergebnis.

4.6.6 Satz: Endziffernregel $\boxed{2^p \cdot 5^q}$

Die Zahl m habe die Primfaktorzerlegung $m = 2^p \cdot 5^q$. Es sei $r = \max\{p, q\}$.

Eine natürliche Zahl n hat m genau dann als Teiler, wenn die aus den letzten r Ziffern von n gebildete Zahl $\widetilde{n}$ die Zahl m als Teiler hat.

Symbolische Formulierung:

$$m \mid \underbrace{a_{s-1} \dots a_r \dots a_0}_{=n} \quad \Longleftrightarrow \quad m \mid \underbrace{a_r \dots a_0}_{=\widetilde{n}}.$$

4.6.7 Beweis

Wegen

$$m \;=\; 2^p \cdot 5^q \quad \text{und} \quad 2^r \cdot 5^r \;=\; 10^r$$

ist klar, dass m die Stufenzahl 10^r teilt.

Wegen

$$n - \widetilde{n} \;=\; \underbrace{a_{s-1} \dots a_{r+1} a_r \dots a_0}_{=n} - \underbrace{a_r \dots a_0}_{=\widetilde{n}} \;=\; \underbrace{a_{s-1} \dots a_{r+1} \cdot 10^r}_{=n-\widetilde{n}}$$

ist m ein Teiler von von $n - \widetilde{n}$. Man muss nur noch den Satz 4.6.3 anwenden.

4.6.8 Kommentar

Der Satz und sein Beweis können in die Situation ,,beliebige b-Darstellung" übertragen werden. Besitzt m eine PFZ mit Primzahlen, die alle Teiler der Basis b sind, so gilt die obige Endziffernregel entsprechend.

4.6.9 Satz: Quersummenregel $\boxed{\text{3 oder 9}}$

Es sei m eine der beiden Zahlen 3 oder 9.

Eine natürliche Zahl n hat m genau dann als Teiler, wenn die aus n gebildete Quersumme $\widetilde{n}$ die Zahl m als Teiler hat.

Symbolische Formulierung:

$$m \mid \underbrace{a_{s-1} \dots a_0}_{=n} \quad \Longleftrightarrow \quad m \mid \underbrace{(a_{s-1} + \dots + a_0)}_{=\widetilde{n}}.$$

4.6.10 Beweis

Vorüberlegung: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ hat die Zahl

$$10^k - 1 \overset{\text{(geoSum)}}{=} 9 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} 10^j \;=\; \underbrace{99 \dots 99}_{k \text{ Stellen}} \;=\; 9 \cdot \underbrace{11 \dots 11}_{k \text{ Stellen}}$$

die Zahl m als Teiler. Deswegen besitzt auch

$$\begin{aligned} n - \widetilde{n} \;&=\; \underbrace{(a_{s-1} \cdot 10^{s-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0)}_{=n} - \underbrace{(a_{s-1} + \dots + a_1 + a_0)}_{=\widetilde{n}} \\ &=\; a_{s-1} \cdot (10^{s-1} - 1) + \dots + a_1 \cdot (10^1 - 1) \end{aligned}$$

m als Teiler. Man muss nur noch den Satz 4.6.3 anwenden.

4.6.11 Kommentar

Der Satz und sein Beweis können in die Situation ,,beliebige b-Darstellung" übertragen werden. Ist m Teiler der Zahl $b-1$, so gilt die obige Quersummenregel entsprechend.

4.6.12 Definition: Wechselsumme

Hat eine natürliche Zahl die Zifferndarstellung

$$n \;=\; a_{s-1}\dots a_1a_0,$$

so nennt man die Zahl

$$(-1)^{s-1}a_{s-1}+\dots-a_1+a_0$$

(Wechselndes Vorzeichen + und −) die *Wechselsumme* von n.

4.6.13 Satz: Wechselsummenregel $\boxed{11}$

Eine natürliche Zahl n hat 11 genau dann als Teiler, wenn die aus n gebildete Wechselsumme $\widetilde{n}$ die Zahl 11 als Teiler hat.

Symbolische Formulierung:

$$11 \mid \underbrace{a_{s-1}\dots a_0}_{=n} \quad\Longleftrightarrow\quad 11 \mid \big(\underbrace{(-1)^{s-1}a_{s-1}+\dots-a_1+a_0}_{=\widetilde{n}}\big).$$

4.6.14 Beweis

Vorüberlegung: Für jedes $k\in\mathbb{N}$ haben die beiden Zahlen

$$10^{2k}-1 \overset{\text{(geoSum)}}{=} 99\cdot\sum_{j=0}^{k-1}100^j = \underbrace{99\dots99}_{2k\text{ Stellen}} = 99\cdot\underbrace{101\dots01}_{2k-1\text{ Stellen}}$$

$$10^{2k+1}+1 \overset{\text{(geoSum)}}{=} 11\cdot\Big[90\cdot\sum_{j=0}^{k-1}100^j+1\Big] = 1\underbrace{00\dots00}_{2k\text{ Nullen}}1 = 11\cdot\underbrace{9090\dots9091}_{2k\text{ Stellen}}$$

die Zahl 11 als Teiler.

Dann hat die Zahl

$$\begin{aligned}
& n-\widetilde{n}\\
= \;& \big(\underbrace{a_{s-1}\cdot 10^{s-1}+\dots+a_1\cdot 10^1+a_0}_{=n}\big)-\big(\underbrace{(-1)^{s-1}\cdot a_{s-1}+\dots-a_1+a_0}_{=\widetilde{n}}\big)\\
\overset{s\text{ ungerade}}{=} \;& [a_{s-1}(10^{s-1}-1)+\dots+a_2\cdot(100-1)]+[a_{s-2}(10^{s-2}+1)+\dots+a_1\cdot(10+1)]\\
\overset{s\text{ gerade}}{=} \;& [a_{s-2}(10^{s-2}-1)+\dots+a_2\cdot(100-1)]+[a_{s-1}(10^{s-1}+1)+\dots+a_1\cdot(10+1)]
\end{aligned}$$

die Zahl 11 als Teiler. Man muss nur noch den Satz 4.6.3 anwenden.

4.6.15 Kommentar

Der Satz und sein Beweis können in die Situation ,,beliebige b-Darstellung" übertragen werden. Ist m Teiler der Zahl $b+1$, so gilt die obige Wechselsummenregel entsprechend.

4.6.16 Frage

Warum ist die Spiegelzahl einer durch 33 teilbaren Zahl wieder durch 33 teilbar?

4.6.17 Wie kann man eine Zahl auf 7er–Teilbarkeit testen?

Leider ist die Regel etwas komplizierter als die Regeln für die Teilbarkeit einer Zahl durch 10,100,1000, ...,2,4,8,...,5,25,125,..., 3,9 oder 11.

Günstig ist es, wenn man einen kleinen Notizzettel zu Hilfe nimmt.

Schreibe die Anfangs–Zahl n auf!

Bilde eine neue Zahl n_t mit weniger Stellen nach der folgenden Regel:

1. Streiche die Einerziffer einfach weg!
2. Ziehe dann diese Einerziffer ab!
3. Ziehe diese Einerziffer noch einmal ab!

Führe diesen Dreierschritt mehrmals so lange aus, bis eine zweistellige Zahl entstanden ist. Wir nennen diese Zahl dann die End–Zahl.

Wenn die End–Zahl durch 7 teilbar ist, dann ist auch die Anfangs–Zahl durch 7 teilbar. Wenn die End–Zahl nicht durch 7 teilbar ist, dann ist auch die Anfangs–Zahl nicht durch 7 teilbar.

Dafür sollte man die zweistelligen 7er–Zahlen kennen:

0 7 14 21 28 35 42 49 56 63 70 77 84 91 98.

Beispiel: Ist die Zahl 259 durch 7 teilbar?

$$259 \xrightarrow{1} 25 \xrightarrow{2} 16 \xrightarrow{3} 7$$

Die Zahl 259 ist also durch 7 teilbar.

Beispiele: Ist die Zahl 25606 durch 7 teilbar?

$$\begin{array}{rcrcrcr} 25606 & \xrightarrow{1} & 2560 & \xrightarrow{2} & 2554 & \xrightarrow{3} & 2548 \\ 2548 & \xrightarrow{1} & 254 & \xrightarrow{2} & 246 & \xrightarrow{3} & 238 \\ 238 & \xrightarrow{1} & 23 & \xrightarrow{2} & 15 & \xrightarrow{3} & 7 \end{array}$$

Die End–Zahl ist eine 7, also ist die Anfangs–Zahl durch 7 teilbar.

Beispiel: Ist die Zahl 36935 durch 7 teilbar?

$$\begin{array}{rcrcrcr} 36935 & \xrightarrow{1} & 3693 & \xrightarrow{2} & 3688 & \xrightarrow{3} & 3683 \\ 3683 & \xrightarrow{1} & 368 & \xrightarrow{2} & 365 & \xrightarrow{3} & 362 \\ 362 & \xrightarrow{1} & 36 & \xrightarrow{2} & 34 & \xrightarrow{3} & 32 \end{array}$$

Da 32 nicht durch 7 teilbar ist, ist 36935 auch nicht durch 7 teilbar.

Ist 4 048 247 durch 7 teilbar?

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4048247 & \xrightarrow{1} & 404824 & \xrightarrow{2} & 404817 & \xrightarrow{3} & 404810 \\ 404810 & \xrightarrow{1} & 40481 & \xrightarrow{2} & 40481 & \xrightarrow{3} & 40481 \\ 40481 & \xrightarrow{1} & 4048 & \xrightarrow{2} & 4047 & \xrightarrow{3} & 4046 \\ 4046 & \xrightarrow{1} & 404 & \xrightarrow{2} & 398 & \xrightarrow{3} & 392 \\ 392 & \xrightarrow{1} & 39 & \xrightarrow{2} & 37 & \xrightarrow{3} & 35 \end{array}$$

Die End–Zahl ist durch 7 teilbar, also ist auch die Anfangszahl 4 048 247 durch 7 teilbar.

5 Gewöhnliche Brüche und Bruchzahlen

5.1 Einführung

LP+ M6 LB 1

5.1.1 Vorbemerkung

Im folgenden werden Auszüge aus einem Unterrichtskonzept dargestellt.

Beachten Sie, dass die Ebenen der

- inhaltlichen Abfolge
- Vorschläge für Tafelanschriften, Hefteinträge,
- didaktischen Hinweise,
- schulpraktischen Umsetzung

nicht streng getrennt erscheinen. Es wird auch nicht herausgehoben, wo die Grenzen zwischen

- Alltagssprache,
- Schülergemäßer Fachsprache,
- Didaktischer Umgebungs–Fachsprache,
- Mathematisch–wissenschaftlicher Fachsprache

liegen.

Festigungs- und Übungsphasen, Hausaufgaben sind ausgeklammert. Viele weitere Elemente der Unterrichtsgestaltung bleiben unberücksichtigt.

5.2 Ausgangspunkt: Das Ganze

5.2.1 Das Ganze

LP+ M6 LB 1

Ausgangspunkt für die Einführung in die Bruchzahlen ist der Begriff des *Ganzen*.

Kennzeichnend für den Begriff des Ganzen ist, dass es

- nach außen klar abgegrenzt ist, als Einheit wahrgenommen wird,
- nach innen geeignet teilbar oder beliebig teilbar ist.

Mathematisch wird das Ganze grundsätzlich durch die Zahl EINS repräsentiert, die im Rahmen der Bruchzahltheorie verschiedene Darstellungen hat:

$$1 \;=\; \frac{1}{1} \;=\; 1{,}0 \;=\; 100\% \;=\; 1000\,‰.$$

Im Alltagsleben tritt der Begriff des Ganzen — meist unausgesprochen — in vielfältigen konkreten Situationen auf. Weiter unten finden sich zahlreiche Beispiele.

5.2.2 Kritik zu „Mehrere Ganze"

In Lehrplänen, Schulbüchern und in der Mathematikdidaktik tritt im Zusammenhang mit dieser Grundlegung der Bruchrechnung oft das zusätzliche Konzept „mehrere Ganze" auf. Dies ist der Begriffsverwirrung geschuldet, dass mit „ganz" auch die Eigenschaft von – eben nicht gebrochenen – Zahlen bezeichnet wird.

Dies ist aus meiner Sicht ungünstig. Es sollte das Konzept des „einen fest gegebenen Ganzen" als eindeutiger Bezug für die Bruchteile durchgehalten werden.

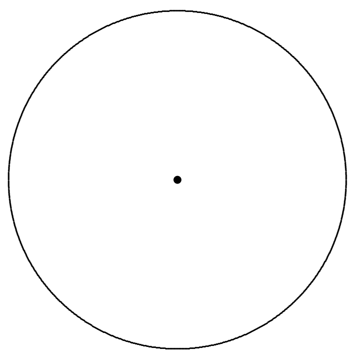
Ist beispielsweise von „Zwei Drittel von 24 Kartoffeln" die Rede, so sind die 24 Kartoffeln (in einem Sack oder in einer Kiste) als das ganze aufzufassen — und nicht eine einzelne Kartoffel.

5.2.3 Kreisförmige Dinge

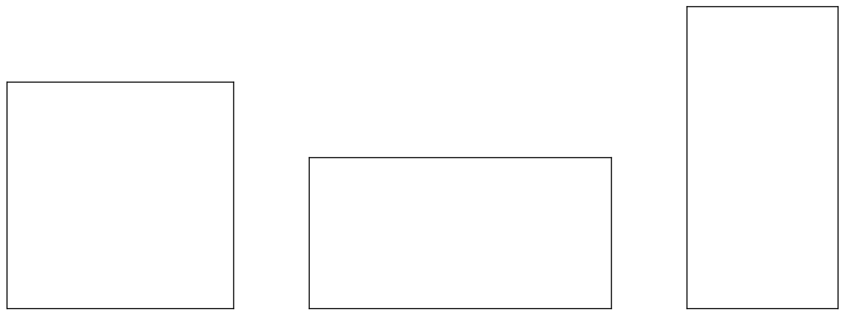
- Kuchen, Torte, Pfannkuchen.

  Ein Tortenteiler ist eine aus Edelstahl oder Plastik gefertigte „Schablone" für den Konditoreibedarf. Er wird auf die Torte oder den Kuchen gesetzt und „spurt" die Stücke–Unterteilung. Typisch sind 12er- oder 16er-Teilung oder 8er-Teilung.

- Pizza, Omelette
- Laib Brot, Laib Käse
- „Oblaten sind kaum teilbar"
- Tischplatte, kreisförmiger Platz
- Didaktisches Material
- (Kugelförmige Dinge wie Äpfel,



5.2.4 Quadratische oder rechteckige Gebilde



- Tafel Schokolade, Kuchen auf dem Backblech,
- Blatt Papier,
- Tischplatte, Tischtuch
- Zimmerfläche, Zimmerwand
- Holzbrett, Metallplatte
- Gartenbeet, Pflasterfläche, Hausfläche, Grundstück

5.2.5 Strecken, Längliche Rechtecke

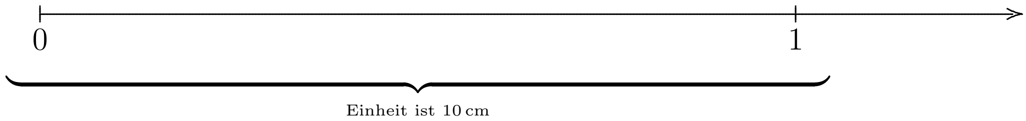
- Maßbänder, Geschenkband, Paketschnur
- Stoffbahn, Tapete, Zeitungsdruckpapier
- Wegstrecke (Schulweg, Wanderung, Autofahrt)
- Sport: Wettkampfstrecke bei Laufen, Langlauf, Schwimmen, Radfahren, Rallye
- Alltag: Schokoriegel, Baumstamm, Hackbraten
- Didaktisches Material: Papierstreifen, Magnetstreifen, Cuisenaire–Stäbchen, Steckwürfel.

5.2.6 Räumliche Formen, Dinge

- Kugelförmige Dinge sind gut — gedanklich — teilbar, aber nicht so gut graphisch darstellbar.
- Äpfel, Melonen

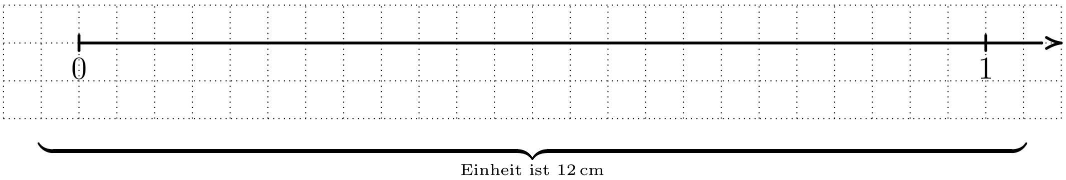
5.2.7 Zahlenstrahl

Der Abschnitt zwischen 0 und 1 repräsentiert das Ganze. Ein Bruchteil wird als Entfernung zur Null eingetragen.



Die Länge der Strecke von 0 nach 1 heißt *Einheit*.

Es ist günstig, die Einheit gemäß der Nenner der darzustellenden Brüche auszuwählen. Beispielsweise ist für die Darstellung von Dritteln, Vierteln, Sechsteln ein Zahlenstrahl mit Einheit 12 cm günstiger als einer mit Einheit 10 cm.



5.2.8 Mengen, Volumina, Gewichte, Hohlmaße

- Flasche Wasser/Getränk, Fass Bier/Wein
- Packung Butter (vgl. Unterteilung auf der Verpackung), Packung Mehl, Packung Zucker, Becher Joghurt
- Mengen bei Kochzutaten: Kochrezepte enthalten oft Angaben in Bruchteilen von einem Ganzen. ,,Halber Teelöffel"
- Messbecher
- Sack Kartoffeln, Netz Mandarinen, Schachtel Pralinen, Tüte Gummibärchen

5.2.9 Zeitspannen

- Der ganze Tag, das ganze Jahr, die ganze Stunde
- Die ganze Schulstunde, die ganze Fahrtdauer, das ganze Konzert,
- Ganze Länge eines Kinofilms oder einer Fernsehsendung
- Die ganze Note als Notenwert $\boxed{\text{W}}$

5.3 Stammbrüche

5.3.1 Beispiele

In Anlehnung an den Sprachgebrauch im Alltag/Grundschule werden Sachsituationen beschrieben, in denen einfache Bruchteile auftreten:

- In einem 50–Meter–Becken findet ein 200 m Freistil–Wettkampf statt.
  Welchen Teil der Strecke hat ein Schwimmer nach der letzten Wende noch vor sich?
- Ein ganzer Zwetschgenkuchen ist in 12 Stücke unterteilt. Peter kauft 4 Stück davon.
  Welchen Teil des Kuchens kauft Peter?
- Welcher Teil des Tages ist um 12 Uhr vergangen?

5.3.2 Einführung der Stammbrüche

Zur Angabe von Teilen eines Ganzen reichen die bekannten natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ nicht mehr aus. Es müssen neue Zahlen — mit Zahlwörtern und Zahlschreibweisen — eingeführt werden. Man spricht dabei von *Stammbrüchen* oder einfachen Bruchteilen:

Hälfte	Drittel	Viertel	...	Hundertstel	...
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...	$\frac{1}{100}$	...

5.3.3 Bearbeitung von Sachsituationen mit Stammbrüchen

- Ein Viertel von 200 m:

$$\frac{1}{4} \text{ von } 200\,\mathrm{m} \;=\; 200\,\mathrm{m} : 4 \;=\; 50\,\mathrm{m}.$$

- Die Hälfte von 80 Kartoffeln:

$$\frac{1}{2} \text{ von } 80 \text{ K} \;=\; 80 \text{ K} : 2 \;=\; 40 \text{ K} .$$

- Ein Hundertstel von 850 €:

$$\frac{1}{100} \text{ von } 850\,€ \;=\; 850\,€ : 100 \;=\; 8{,}50\,€.$$

Beachte, dass die Mathematisierung des Wörtchens ,,von" als Multiplikation hier nicht erfolgen kann.

5.4 Zusammengesetzte Brüche

LP+ M6 LB 1

5.4.1 Beispiel

Petra bekommt beim Besuch ihrer Tante eine Tafel Schokolade. Sie soll sie zuhause mit ihren drei Geschwistern gerecht teilen. Welcher Teil der Schokolade bleibt übrig, wenn Petra ihren Anteil gleich aufisst?

5.4.2 Einführung der Brüche

Da die Stammbrüche zur Beschreibung nicht mehr ausreichen, führen wir *(zusammengesetzte) Brüche* ein:

$$\frac{3}{4} \qquad \frac{2}{3} \qquad \frac{5}{2} \qquad \frac{73}{100}.$$

Z
A
U
N

- Der Strich in der Mitte heißt *Bruchstrich*, oberhalb steht der *Zähler*, unterhalb der *Nenner*.
- Beachte, dass die Zahl 0 als Nenner keinen Sinn ergibt. Im Zähler kann aber ohne weiteres eine 0 stehen.
- Frage: Soll der Bruchstrich mit dem Lineal gezogen werden?

5.4.3 Veranschaulichung

von zusammengesetzten Brüchen an den verschiedenen Modellen des Ganzen. Beachte erneut, dass die Mathematisierung des Wörtchens ,,von" als Multiplikation hier nicht erfolgen kann.

5.4.4 Bearbeitung von Sachsituationen mit zusammengesetzten Brüchen

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4} \text{ von } 24\,\text{Stück} &= (24\,\text{Stück} : 4) \cdot 3 = 6\,\text{Stück} \cdot 3 = 18\,\text{Stück} \\
\frac{3}{5} \text{ von } 800\,€ &= (800\,€ : 5) \cdot 3 = 160\,€ \cdot 3 = 480\,€ \\
\frac{4}{3} \text{ von } 24\,\text{h} &= (24\,\text{h} : 3) \cdot 4 = 8\,\text{h} \cdot 2 = 32\,\text{h} \\
\frac{78}{125} \text{ von } 10\,000\,\text{m}^2 &= (10\,000\,\text{m}^2 : 125) \cdot 78 = 80\,\text{m}^2 \cdot 78 = 6240\,\text{m}^2 \\
\frac{7}{7} \text{ von } 91\,\text{kg} &= (91\,\text{kg} : 7) \cdot 7 = 13\,\text{kg} \cdot 7 = 91\,\text{kg} \\
\frac{6}{3} \text{ von } 12\,\ell &= (12\,\ell : 3) \cdot 6 = 4\,\ell \cdot 6 = 24\,\ell
\end{aligned}$$

5.4.5 Scheinbrüche

In den letzten beiden Beispielen treten so genannte *Scheinbrüche* auf. Das sind Brüche, bei denen der Zähler ein Vielfaches des Nenners ist.

- Ist bei einem Bruch der Zähler gleich dem Nenner, so bedeutet er **ein Ganzes**.

$$\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \ldots\ldots = \frac{n}{n} = 1.$$

- Ist bei einem Bruch der Zähler $2, 3, \ldots, n$ mal so groß wie der Nenner, so bedeutet er $2, 3, \ldots, n$ **mal das Ganze**.

$$\frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \ldots\ldots = \frac{3n}{n} = 3.$$

Weitere Beispiele sind

$$\frac{8}{2} = 4\,; \qquad \frac{9}{3} = 3\,; \qquad \frac{91}{13} = 7\,; \qquad \frac{111}{37} = 3\,.$$

5.5 Ermitteln des Gesamten

5.5.1 Beispiel

Ralf gibt für sein neues Fahrrad $\frac{4}{5}$ seines Taschengeldes aus, das sind 180 €.
Wie groß war sein Gesamt–Vermögen?

„Lösung über den Stammbruch":

$\frac{4}{5}$ vom Vermögen sind 180 €

$\frac{1}{5}$ vom Vermögen sind 45 €

$\frac{5}{5}$ vom Vermögen sind 225 €

Kurzrechnung:

$$(180\,€ : 4) \cdot 5 = 45\,€ \cdot 5 = 225\,€.$$

Das ganze Vermögen von Ralf betrug 225 €.

5.5.2 Beispiel

Familie Reger gibt $\frac{2}{7}$ des Einkommens, nämlich 600 €, für die Miete aus. Wie groß ist das Einkommen?

„Lösung über den Stammbruch":

$\frac{2}{7}$ vom Einkommen sind 600 €

$\frac{1}{7}$ vom Einkommen sind 300 €

$\frac{7}{7}$ vom Einkommen sind 2 100 €

Kurzrechnung:

$$(600\,€ : 2) \cdot 7 = 300\,€ \cdot 7 = 2100\,€.$$

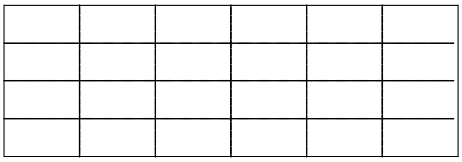
Das ganze Einkommen der Familie Reger beläuft sich auf 2100 €.

5.6 Erweitern und Kürzen

LP+ M6 LB 1

5.6.1 Beispiel

Zwei Tafeln Schokolade werden ausgeteilt:



- Richard bekommt 3 von 6 Längsrippen, also $\frac{3}{6}$ einer Tafel.
- Judith bekommt 2 von 4 Querrippen, also $\frac{2}{4}$ einer Tafel.
- Max bekommt 12 von 24 Stückchen, also $\frac{12}{24}$ einer Tafel.
- Martha bekommt eine halbe Tafel.

Alle bekommen das gleiche, also ist:

$$\frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

5.6.2 Erweitern und Kürzen

Man sieht, dass man unterschiedliche Schreibweisen für den gleichen Bruchteil dadurch erhält, dass man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert oder durch die gleiche Zahl dividiert.

- *Erweitern* eines Bruchs bedeutet:

  Zähler und Nenner werden mit derselben Zahl (ungleich 0) multipliziert.

- *Kürzen* eines Bruchs bedeutet:

  Zähler und Nenner werden durch dieselbe Zahl (ungleich 0) dividiert.

- Bei beiden Verfahren ändert sich die Schreibweise des Bruchs, nicht aber der Wert.

Eine oft anzutreffende ungünstige Sprechweise ist, dass beim Erweitern und Kürzen ein Bruch mit einer Zahl multipliziert bzw. durch sie dividiert wird.

5.6.3 ggT und kgV

Beim Kürzen und Erweitern von Brüchen, später beim Ordnen und bei den Grundrechenarten können auch ggT und insbesondere kgV (Hauptnenner) eingesetzt werden.

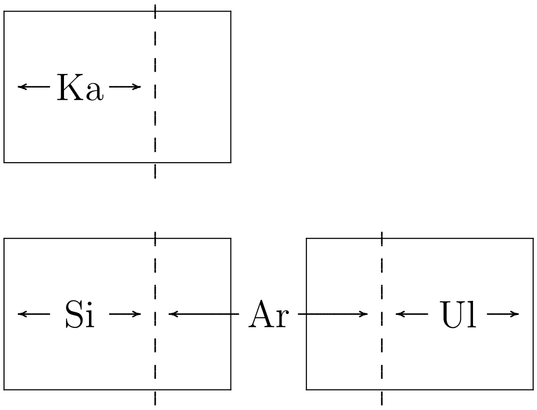
Dies erfordert eine vorangehende Einführung und intensive Auseinandersetzung mit diesen „Operatoren der Teilbarkeitslehre".

In den Lehrplänen von Gymnasium und Realschule ist dies kaum mehr, in dem der Mittelschule von vornherein nicht vorgesehen.

5.7 Brüche als Quotienten

5.7.1 Beispiel

Onkel Kevin kommt zu Besuch und bringt drei Tafeln Schokolade mit.
Karl erhält von der ersten Tafel $\frac{2}{3}$, Die beiden anderen Tafeln werden gerecht zwischen Sigrid, Arthur und Ulla aufgeteilt.



$$\frac{2}{3}$$

$$2 : 3$$

Jedes Kind erhält gleich viel. Daraus lässt sich sehen:

$$\frac{2}{3} = 2 : 3$$

5.7.2 Allgemeiner gilt

$$\frac{a}{b} = a : b \qquad \text{für} \quad a \in \mathbb{N}_0, \quad b \in \mathbb{N}.$$

5.7.3 Ausdeutung innerhalb des Operatorkonzepts

Wir haben einen Bruch eingeführt als ,,Vielfaches eines Teils an einem Ganzen". Mit Bezug auf das obige Beispiel kann man dies innerhalb des Operatorkonzepts (vgl. Kapitel 7.2) so darstellen:

$$1 \quad \xrightarrow{:3} \quad \frac{1}{3} \quad \xrightarrow{\cdot 2} \quad \frac{2}{3}$$

Der Zugang zu Brüchen über ,,Bruch als Division ganzer Zahlen" lässt sich dann so darstellen

$$1 \quad \xrightarrow{\cdot 2} \quad 2 \quad \xrightarrow{:3} \quad \frac{2}{3}.$$

Die Gleichheit $2 : 3 = \frac{2}{3}$ beruht also auf der Vertauschbarkeit der beiden Operatoren

$$\xrightarrow{:3} \qquad \text{und} \qquad \xrightarrow{\cdot 2}$$

in den beiden Diagrammen.

5.7.4 Beobachtung im Lehrplan

Während sich im Lehrplan der Hauptschule 2008 gleich zum Einstieg in die Bruch-Zahlbereichserweiterung der Hinweis ,,Bruch als Quotient ($\frac{a}{b} = a : b$)" findet, ist dieser im Lehrplan$^+$ 2016 der Mittelschule nicht mehr zu finden.

5.8 Bruch und Bruchzahl

Weiter unten in Abschnitt 7.1.1 über das Äquivalenzklassenkonzept werden wir die Beziehung zwischen den beiden Begriffen „Bruch und Bruchzahl" fachmathematisch genauer klären.

5.8.1 Schulische Sprechweisen Da man in der Schulpraxis dieses Konzept natürlich nicht heranziehen kann, ergeben sich immer Unsicherheiten bzgl. der Abgrenzung dieser beiden Begriffe. Ein Vorschlag zu schulischen Sprechweisen ist:

- Eine Bruchzahl ist der gemeinsame Wert aller Brüche, die durch Erweitern oder Kürzen ineinander umgewandelt werden können oder

oder

- Eine Bruchzahl ist der gemeinsame Wert aller Brüche, die auf dem Zahlenstrahl an der gleichen Stelle stehen (vgl. unten).

Umgekehrt kann man sagen:

- Ein Bruch ist eine spezielle Schreibweise für eine Bruchzahl.

5.8.2 Frage Eine Frage, die den ganzen Problemkreis im Kern erschließt, ist:

Sind die beiden Brüche $\frac{4}{14}$ und $\frac{6}{21}$ gleich?

Vorschlag zur Lösung:

- Man sollte den Begriff „Gleichheit von Brüchen" ganz vermeiden.
- $\frac{4}{14}$ und $\frac{6}{21}$ sind Brüche mit verschiedenen Zählern bzw. Nennern.
- $\frac{4}{14}$ und $\frac{6}{21}$ sind Brüche mit gleichem Wert. Sie stellen die gleiche Bruchzahl dar.

5.8.3 Vorschlag für die schulische Umsetzung

An einem Zahlenstrahl mit Einheit 12 cm (vgl. S. 52) werden nacheinander die Brüche

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{3}{6} \qquad\qquad \frac{3}{4} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{9}{12} \qquad\qquad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{3}{9}$$

eingetragen.

Es fällt auf, dass an einem Punkt des Zahlenstrahls Brüche mit verschiedenen Zählern und Nennern stehen. Man sagt, dass sie den gleichen *Wert* haben. Dieser gemeinsame Wert heißt *Bruchzahl*. Umgekehrt gibt es für eine Bruchzahl verschiedene Schreibweisen.

5.8.4 Beispiele

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{435\,783}{871\,566}.$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{74}{111}$$

$$\frac{5}{4} = \frac{10}{8} = \frac{15}{12}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{123\,456}{123\,456} = 1$$

$$\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{1\,962\,963}{654\,321} = 3$$

5.9 Die Menge der Bruchzahlen

5.9.1 Menge $\mathbb{Q}$

Wir haben inzwischen festgestellt, dass es unendlich viele Bruchzahlen gibt, die den Punkten des Zahlenstrahls entsprechen. Anders als die natürlichen Zahlen füllen die Bruchzahlen den Zahlenstrahl dicht aus.

Die Menge aller Bruchzahlen wird von den Mathematikern mit dem Symbol $\mathbb{Q}$ bezeichnet. Etwas abstrakter heißen die Zahlen in dieser Menge auch die *rationalen Zahlen.*

Die Menge der nicht–negativen rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}_0^+$ (für Quotient) bezeichnet. Dieses Symbol tritt verstärkt im Realschul–Kontext auf.

5.9.2 Natürliche Zahlen sind spezielle Bruchzahlen

Da sich natürliche Zahlen als Scheinbrüche schreiben lassen (vgl. Abschnitt 5.4.5), sind sie auch Bruchzahlen.

Das bedeutet, dass die Menge der natürlichen Zahlen eine Teilmenge der Menge der nicht–negativen Bruchzahlen ist:

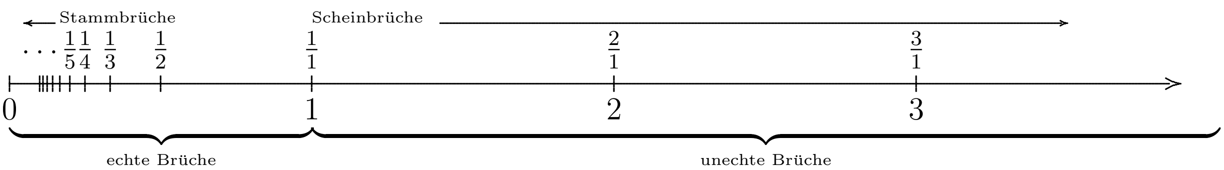
$$\underbrace{\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0}_{\text{bisher}} \subset \mathbb{Q}_0^+ \subset \mathbb{Q}.$$

5.9.3 Echte und unechte Brüche

Brüche, bei denen der Zähler kleiner ist als der Nenner, heißen *echte Brüche*

Brüche, bei denen der Zähler größer ist als der Nenner, heißen *unechte Brüche*

5.9.4 Diagramm



(Es empfiehlt sich dabei Vier–Farbgebung.)

5.9.5 Negative Bruchzahlen

Auf der Negativ–Seite der Zahlengeraden gibt es auch Bruchzahlen. Sie werden wie die ganzen negativen Zahlen auch durch ein Minus–Zeichen (auf der Höhe des Bruchstrichs) gekennzeichnet.

$$-\frac{1}{2}, \qquad -\frac{7}{12}, \qquad -\frac{12}{12}, \qquad -\frac{36}{6}.$$

5.9.6 Lösung einer multiplikativen Gleichung

Die Gleichung

$$7 \cdot x = 11$$

lässt sich nicht mit ganzen Zahlen lösen, da 7 kein Teiler von 11 ist.

Sie besitzt aber eine Lösung in der Menge der Bruchzahlen:

$$\begin{aligned} x &= 11 : 7 \qquad \text{(Division ist Umkehroperation)} \\ x &= \frac{11}{7} \end{aligned}$$

> Merke: Eine Gleichung der Form
>
> $$b \cdot x = a \qquad \text{oder} \qquad x \cdot b = a$$
>
> mit $a, b \in \mathbb{N}_0$, $b \neq 0$, besitzt in $\mathbb{Q}$ die Lösung $x = \frac{a}{b}$.

6 Rechnen mit Brüchen

6.1 Vergleich von Brüchen

LP 6.1

6.1.1 Beispiel

Onkel Heini bringt Marzipanriegel mit. Ansgar erhält $\frac{5}{12}$, Ruth $\frac{3}{8}$ des Riegels.
Wer freut sich mehr?

6.1.2 Spezielle Beispiele

Bevor die allgemeine Regel erarbeitet wird, sollte zunächst über einfachere Beispiele an die Bruchteilvorstellung angeknüpft werden. Das heißt, man betrachtet zunächst die Spezialfälle

gleiche Nenner		Stammbrüche		gleiche Zähler
$\frac{3}{7} < \frac{5}{7}$	$\to$	$\frac{1}{13} > \frac{1}{17}$	$\to$	$\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$

6.1.3 Merke

Von zwei Brüchen mit gleichen Nennern ist derjenige der größere, dessen Zähler größer ist.

Von zwei Brüchen mit gleichen Zählern ist derjenige der größere, dessen Nenner kleiner ist.

6.1.4 Nächster Schritt

Ein nächster Schritt besteht darin, ein ,,bahnenderes" Beispiel als das der obigen Situation zu betrachten:

$$\frac{3}{7} \qquad \frac{5}{14}.$$

Es drängt sich — vielleicht — die Idee auf, den Bruch mit Nenner 7 in einen Bruch mit Nenner 14 zu erweitern. Dann fällt die Entscheidung leicht:

$$\frac{3}{7} = \frac{6}{14}; \qquad \frac{6}{14} > \frac{5}{14}, \qquad \text{deshalb} \qquad \frac{3}{7} > \frac{5}{14}.$$

Der Vergleich kann also durchgeführt werden, wenn vorher die beteiligten Brüche auf einen gemeinsamen Nenner erweitert werden.

Bei der Anwendung sollte nicht das strenge Abarbeiten der Teilschritte, sondern der lebendige Umgang mit dem ,,multiplikativen Netz" (1×1–Sätze, Teilermengen, Kopfrechnen) der natürlichen Zahlen maßgeblich sein.

6.1.5 Allgemeines Verfahren: Erweitern auf gemeinsamen Nenner

- Evtl. können zunächst die beteiligten Brüche gekürzt werden.
- Suche einen *gemeinsamen Nenner*, das ist ein Vielfaches aller beteiligten Nenner. Dafür kommen in Frage ...

  - evtl. einer der Nenner, wenn er Vielfaches der anderen ist,
  - das Produkt aller Nenner oder
  - der *Hauptnenner*, das heißt das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Nenner.

- Erweitere alle Brüche auf diesen *gemeinsamen Nenner*.

Es sei noch darauf hin gewiesen, dass zwei Brüche mit gleichen (verschiedenen) Nennern *gleichnamig* (*ungleichnamig*) heißen.

6.2 Addition und Subtraktion von Brüchen

LP 6.2

6.2.1 Vorbemerkung

Warum wird die Addition vor der Multiplikation eingeführt?

- Eigentlich war der Anlass für die Einführung der Bruchzahlen die Unvollständigkeit der Menge der natürlichen Zahlen bezüglich der multiplikativen Inversen. Also ist eigentlich zunächst die Multiplikation die ,,natürliche Struktur" auf $\mathbb{N}$.
- Die Multiplikation mit einer natürlichen Zahl als erstem Faktor (Vervielfachung) kann als fortgesetzte Addition aufgefasst werden. Man könnte also die Rechengesetze für die Multiplikation aus denen der Addition herleiten.

$\frac{5}{7} + \frac{4}{11} = \frac{1}{2}$?

- Würde die Multiplikation zuerst eingeführt, so verfestigt sich ganz stark die Fehlvorstellung, dass das Rechnen mit Brüchen ein ,,Rechnen mit Zähler und Nenner getrennt" bedeutet. Diese Vorstellung lässt sich bei der anschliessenden Einführung der Addition nicht mehr so leicht beseitigen.

6.2.2 Beispiele

Von einer ganzen Tafel Schokolade isst Gerlinde zunächst $\frac{3}{8}$, später noch einmal $\frac{1}{3}$. Welchen Bruchteil der Tafel hat sie dann insgesamt gegessen?

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{3} = ?$$

Die Vermutung, dass die Zähler und Nenner getrennt addiert werden, stellt sich bei Vorlage des einfachen und anschaulichen Beispiels

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \overset{\leadsto}{=} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

als falsch heraus. Ein anderes Gegenbeispiel besteht darin, dass ein gezwölftelter Kuchen aufgeteilt ist:

$$\frac{3}{12} + \frac{7}{12} + \frac{2}{12} \overset{\leadsto}{=} \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

6.2.3 Allgemeines Verfahren

Das letzte Beispiel legt bereits ein Vorgehen nahe, das beim Vergleich von Brüchen schon angewandt wurde. Da die Situation bei gleichen Nennern anschaulich und einfach geklärt werden kann, sollten bei den beteiligten Summanden gleiche Nenner hergestellt werden.

- Brüche mit gleichen Nennern werden addiert/subtrahiert, in dem man die Zähler addiert/subtrahiert und die Nenner beibehält:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c} \qquad \text{für } a,b,c \in \mathbb{N}_0,\ c \neq 0.$$

- Brüche mit verschiedenen Nennern werden vor dem Addieren/Subtrahieren auf einen gemeinsamen Nenner erweitert (vgl. Abschnitt 6.1.5.)

6.3 Gemischte Zahlen

6.3.1 Beispiel

Frau Zahner kauft $2\,\frac{3}{4}$ kg Gold. Diese Zahl bedeutet

$$2\,\tfrac{3}{4} \;=\; 2+\tfrac{3}{4} \;=\; (2+\tfrac{3}{4})$$

(Eine Klammer sollte gesetzt werden, wenn die Zahl Teil eines größeren Terms ist).

6.3.2 Definition

Zahlen, die als Summe aus natürlichen Zahlen und Brüchen — unter Weglassung des Plus–Zeichens — geschrieben werden, heißen *gemischte Zahlen.* Die beiden Anteile kann man *Ganzzahlanteil* und *Bruchanteil* der gemischten Zahl nennen.

6.3.3 Kommentare

- Die Gemischten Zahlen kommen dem Alltags–Bedürfnis näher, Zahlen ,,ihre Größe anzusehen". Der Ordinalzahlaspekt tritt besser hervor als bei gewöhnlichen Brüchen.
- Bei einer negativen gemischten Zahl bezieht sich das Minus–Zeichen auf beide Anteile:

$$-2\,\tfrac{3}{4} \;=\; -(2+\tfrac{3}{4}), \qquad \text{nicht etwa:} \quad -\,2\,\tfrac{3}{4} \;=\; -2+\frac{3}{4}.$$

- Beachte, dass — später beim Termrechnen — das Einsetzen von Ganzzahl und Bruch in einen Produktterm (ohne Malpunkt) Doppeldeutungen hervorbringen könnte:

$$T(a;b) \;:=\; ab, \qquad T(2\,;\tfrac{3}{4}) \;=\; 2\,\tfrac{3}{4}.$$

  Dies wird dadurch vermieden, dass zwischen zwei Zahlfaktoren eines Produkts immer ein Malpunkt stehen soll.

6.3.4 Umwandlung einer gemischten Zahl in einen unechten Bruch

Ist die Auffassung von einer gemischten Zahl als Summe vertraut, so bereitet ihre Umwandlung in einen unechten Bruch eigentlich keine besonderen Probleme:

$$2\,\tfrac{3}{4} \;=\; 2+\tfrac{3}{4} \;=\; \tfrac{2}{1}+\tfrac{3}{4} \;=\; \tfrac{8}{4}+\tfrac{3}{4} \;=\; \tfrac{11}{4}.$$

Allgemein könnte man dieses Vorgehen in eine Merkformel überführen: Es ist

$$a\,\tfrac{b}{c} \;=\; \tfrac{a\cdot c+b}{c} \qquad \text{für alle} \quad a,b,c\in\mathbb{N},\; c\neq 0.$$

Ob eine solche Regel in den Schulunterricht Eingang findet, hängt ab von Schultyp, Jahrgangsstufe, individueller und kollektiver Leistungs- bzw. Abstraktionsfähigkeit ab.

6.3.5 Umwandlung eines unechten Bruchs in eine gemischte Zahl

Beispiel: Matthias Mattik geht zum Bäcker und verlangt $\frac{13}{4}$ kg Brot. Die Verkäuferin ist in der Berufsschule gut ausgebildet worden und verkauft ihm $3\,\frac{1}{4}$ kg Brot.

$$\frac{13}{4} \;=\; \frac{12}{4} + \frac{1}{4} \;=\; 3 + \frac{1}{4} \;=\; 3\,\frac{1}{4}.$$

Der richtigen Zerlegung des Zählers liegt die Division mit Rest zugrunde:

$$13 : 4 \;=\; 3\ \mathrm{R}1$$

Es entstehen 3 ,,Ganze" und ein ,,Rest" 1, der noch weiter durch 4 geteilt werden muss.

6.3.6 Notation bei Division mit Rest

Mathematisch korrekt und in Bezug auf die obige Umwandlung klarer müsste die Division mit Rest eigentlich als

$$13 : 4 \;=\; 3 + 1 : 4$$

geschrieben werden. Der Ausdruck 3 R1 ist eigentlich ungenau und sogar widersprüchlich.

Beispielsweise ist

$$10 : 3 \;=\; 3\ \mathrm{R}1, \qquad 16 : 5 \;=\; 3\ \mathrm{R}1, \qquad \text{aber} \quad \frac{10}{3} \;\neq\; \frac{16}{5}.$$

Das Verständnis der Umwandlung wird eher dadurch gefördert, dass die beteiligten Zahlen nicht zu groß werden. Die Division mit Rest sollte mit Hilfe der 1×1–Sätze und Kopfrechnen möglich sein. Nur in Ausnahmefällen sollte die voll–schriftliche Ausführung nötig werden.

6.3.7 Addition gemischter Zahlen

Sachsituation: Fritz kauft für seine Fische Futter. Er mischt $5\,\frac{3}{8}$ kg von Sorte 1 mit $2\,\frac{2}{3}$ kg von Sorte 2 zusammen.

$$5\,\tfrac{3}{8} + 2\,\tfrac{2}{3} \quad = \quad ?$$

Zur Berechnung gibt es im wesentlichen zwei Methoden:

- „Umweg über Brüche"
  1. Wandle die beiden gemischten Zahlen in unechte Brüche um:
     $$5\,\tfrac{3}{8} \;=\; \tfrac{43}{8}; \qquad 2\,\tfrac{2}{3} \;=\; \tfrac{8}{3}.$$
  2. Addiere — wie bisher — diese beiden Brüche:
     $$\tfrac{43}{8} + \tfrac{8}{3} \;=\; \tfrac{129}{24} + \tfrac{64}{24} \;=\; \tfrac{193}{24}.$$
  3. Wandle den entstehenden unechten Bruch in eine gemischte Zahl um:
     $$\tfrac{193}{24} \;=\; \tfrac{192}{24} + \tfrac{1}{24} \;=\; 8\,\tfrac{1}{24}.$$

  Zusammengefasst:
  $$5\,\tfrac{3}{8} + 2\,\tfrac{2}{3} \;=\; \tfrac{43}{8} + \tfrac{8}{3} \;=\; \tfrac{129}{24} + \tfrac{64}{24} \;=\; \tfrac{193}{24} \;=\; 8\,\tfrac{1}{24}.$$

- „Ganzzahlanteil und Bruchanteil getrennt"
  1. Ganzzahlanteil und Bruchanteil werden getrennt addiert:
     $$5\,\tfrac{3}{8} + 2\,\tfrac{2}{3} \;=\; (5+2) + (\tfrac{3}{8} + \tfrac{2}{3}) \;=\; 7 + \tfrac{25}{24} \;=\; 7\,\tfrac{25}{24}.$$
  2. Entsteht als Summe der beiden Bruchanteile ein unechter Bruch, so wird daraus der Ganzzahlanteil in den Ganzzahlanteil der Gesamtsumme (gemäß Assoziativgesetz) verschoben:
     $$7\,\tfrac{25}{24} \;=\; 7 + (1 + \tfrac{1}{24}) \;\overset{\text{AG}}{=}\; (7+1) + \tfrac{1}{24} \;=\; 8 + \tfrac{1}{24} \;=\; 8\,\tfrac{1}{24}.$$

6.3.8 Subtraktion gemischter Zahlen

Für die Subtraktion stehen im Prinzip ebenfalls die beiden obigen Methoden zur Verfügung. Bei Anwendung der Methode 2 muss unter Umständen ein Verschieben $(*)$ von Ganzzahlanteilen vor der eigentlichen Subtraktion erfolgen.

Beispiel:

$$5\,\tfrac{1}{4} - 2\,\tfrac{3}{8} \;=\; (5-2) + (\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{8}) \;\overset{(*)}{=}\; (4-2) + (\tfrac{5}{4} - \tfrac{3}{8}) \;=\; 2 + \tfrac{7}{8} \;=\; 2\,\tfrac{7}{8}.$$

Wenn die negativen Zahlen bereits eingeführt sind, bietet sich auch folgender (gedanklicher) Ablauf an:

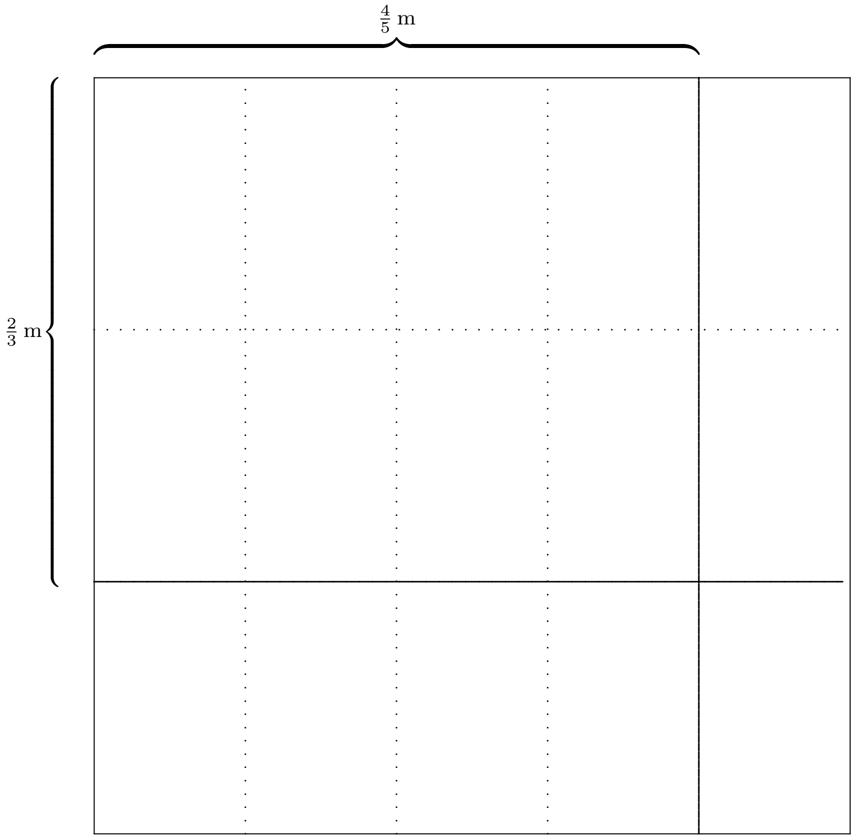
$$5\,\tfrac{1}{4} - 2\,\tfrac{3}{8} \;=\; (5-2) + (\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{8}) \;=\; 3 + (-\tfrac{1}{8}) \;=\; 2\,\tfrac{7}{8}.$$

6.4 Multiplikation von Brüchen

LP 6.2

6.4.1 Beispiel: Das Karton-Quadrat

Von einem großen quadratischen Stück Karton mit Seitenlänge 1 m werden erst $\frac{4}{5}$ abgetrennt. Von dem verbleibenden Stück werden dann nochmal $\frac{2}{3}$ abgeschnitten. Welchen Flächeninhalt hat das entstehende Kartonrechteck?



6.4.2 Berechnung der Rechtecksfläche

Wir können diese Fläche A auf zwei Arten bestimmen:

$\boxed{1}$ Die Formel für die Fläche eines Rechtecks besagt, dass

$$A = \frac{4}{5}\,\mathrm{m} \cdot \frac{2}{3}\,\mathrm{m} = \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}\right)\mathrm{m}^2.$$

$\boxed{2}$ Anfangs hat der quadratische Karton eine Fläche von $1\,\mathrm{m}^2$. Ein Abzählen der Teilrechtecke gemäß der obigen Skizze zeigt, dass das Kartonrechteck gerade aus 8 von 15 Teilrechtecken besteht, also

$$A = \tfrac{8}{15}\,\mathrm{m}^2.$$

Wenn man jetzt die beiden Terme vergleicht, so kann man schließen, dass

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}.$$

6.4.3 „Induktiver Schluss"

Von diesem Beispiel aus schließt man:

> Zwei Bruchzahlen werden multipliziert, indem man die beiden Zähler und die beiden Nenner getrennt multipliziert:
>
> $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \;=\; \frac{a \cdot c}{d \cdot b} \qquad \text{für } a, b, c, d \in \mathbb{N}_0, \quad b \neq 0,\ d \neq 0.$$

6.4.4 Erst Kürzen, dann Multiplizieren!

Beispiel: Vergleiche die beiden folgenden Berechnungen eines Produkts von Brüchen.

$$\frac{7}{36} \cdot \frac{24}{49} \;=\; \frac{168}{1764} \overset{\text{K84}}{=} \frac{2}{21}. \qquad \text{(Puh!)}$$
$$\frac{7}{36} \cdot \frac{24}{49} \;=\; \frac{7 \cdot 24}{36 \cdot 49} \overset{\text{K7,K12}}{=} \frac{2}{21}. \qquad \text{(Aah!)}$$

Es stellt sich heraus, dass die zweite Methode, bei der vor der eigentlichen Multiplikation gekürzt wird, wesentlich weniger Rechenarbeit erfordert. Deshalb:

> Erst Kürzen, dann Multiplizieren! (EKDM)

- Das Kürzel EKDM kann gleich als Korrekturanmerkung benutzt werden.
- Häufig kommt es vor, dass Lehrer(innen) bei fehlendem EKDM — auch bei richtigem Ergebnis — Punkte abziehen. Dies stellt m.E. eine Einschränkung der Freiheit im Umgang mit Mathematik dar. Der erhöhte Zeitbedarf und die erhöhte Fehleranfälligkeit beim Kürzen im Nachhinein bedeutet ja sowieso schon einen Nachteil.

6.5 Die Sachsituation ,,Bruchteil von"

LP 6.2

6.5.1 ,,von = mal"?

Als Einstiegs-Sachsituation bei der Einführung der Bruchmultiplikation wäre die Idee alltagsnäher und ansprechender, anstelle eines langweiligen Stücks Karton beispielsweise eine Tafel Schokolade (mit 3×5 Stücken) zweimal zu brechen.

Es tritt dabei aber das Problem auf, dass die Sprechweise

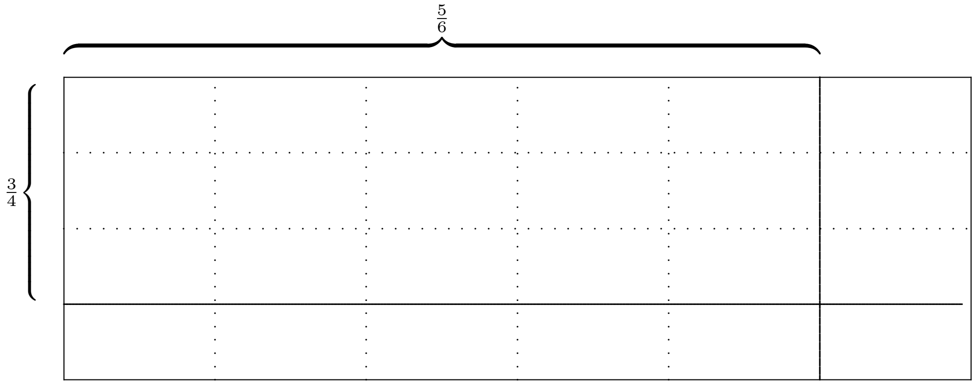
Zwei Drittel **von** vier Fünftel einer Tafel Schokolade

nicht einfach — wie selbstverständlich — in den mathematischen Ausdruck

$$\frac{2}{3} \bullet \frac{4}{5}$$

übersetzt werden kann. Die Mathematisierung der Sachsituation ,,Bruchteil von" als ,,Bruchzahl mal" erfolgt erst im Nachhinein auf der Grundlage des dann bekannten Gesetzes von der Bruchmultiplikation, beispielsweise wie folgt:

6.5.2 Beispiel Onkel Günter bringt Heinz eine Tafel Schokolade (mit 24 Stück) mit. Heinz bricht davon $\frac{5}{6}$ ab, isst dann von dem abgebrochenen Stück $\frac{3}{4}$.



- Kompakt ausgedrückt: Heinz isst $\boldsymbol{\frac{3}{4}}$ **von** $\boldsymbol{\frac{5}{6}}$ der ganzen Tafel Schokolade.
- Heinz zählt die Stückchen beim Aufessen und stellt so fest, dass er $\boldsymbol{\frac{15}{24}}$ der Tafel isst.
- Heinz weiß, dass es einen rechnerischen Zusammenhang zwischen diesen drei Brüchen gibt, den der Bruchmultiplikation:

$$\boldsymbol{\frac{3}{4} \text{ mal } \frac{5}{6} = \frac{15}{24}}.$$

- Daraus schließt Heinz, dass die Sachsituation bzw. Sprechweise

  ,,Bruchteil **von**"

  in die mathematische Operation

  ,,Bruchteil **mal**"

  übersetzt wird.

6.5.3 Exkurs: Mathematisierung

Etwas abstrakter ausgedrückt, lässt sich die obige Feststellung auch dadurch ausdrücken, dass das bestimmte Sachsituationen beschreibende Wörtchen ,,von" durch die Operation ,,mal" mathematisiert wird.

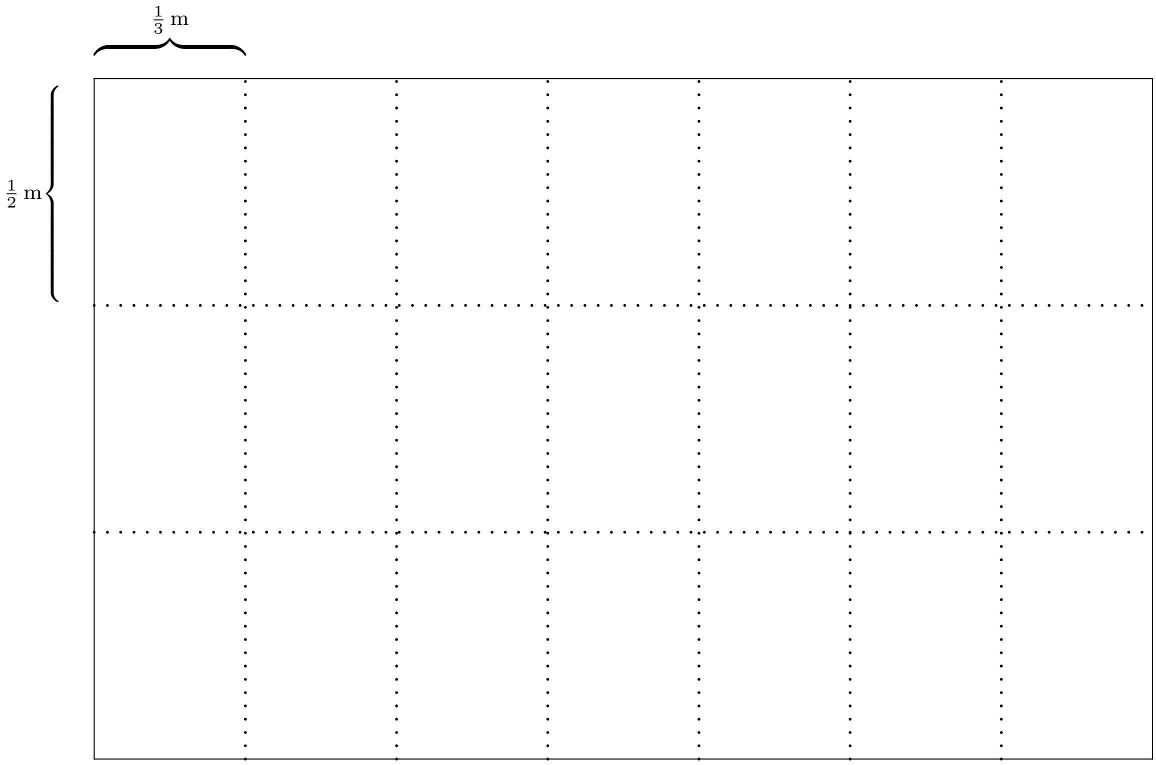
Beachte, dass das Wörtchen ,,von" gelegentlich in einer Weise benutzt wird, die nicht durch das Multiplizieren mathematisiert wird:

> Geben Sie mir bitte $\frac{3}{4}$ kg Käse von diesem $3\,\frac{1}{2}$ kg Käselaib!

6.6 Multiplikation von gemischten Zahlen

6.6.1 Beispiel

Sachsituation: Eine Tischplatte ist $2\,\frac{1}{3}$ m lang und $1\,\frac{1}{2}$ m breit. Wie groß ist ihre Fläche?



6.6.2 Berechnung der Rechtecksfläche

Die Fläche des Teilrechtecks lässt sich wieder auf zwei Arten bestimmen:

$\boxed{1}$ Die Formel für die Fläche eines Rechtecks besagt, dass

$$A \;=\; 2\,\tfrac{1}{3}\,\mathrm{m}\cdot 1\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{m} \;=\; (2\,\tfrac{1}{3}\cdot 1\,\tfrac{1}{2})\,\mathrm{m}^2.$$

$\boxed{2}$ Ein Abzählen der Teilrechtecke gemäß der obigen Skizze zeigt

$$A \;=\; \tfrac{21}{6}\,\mathrm{m}^2 \;=\; 3\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{m}^2.$$

Zusammengefasst gilt also:

$$2\,\tfrac{1}{3}\cdot 1\,\tfrac{1}{2} \;=\; 3\,\tfrac{1}{2}.$$

Damit stellt sich heraus, dass die bei der Addition bzw. Subtraktion erfolgreiche Methode ,,Ganzzahlanteil und Bruchanteil getrennt”

$$2\,\tfrac{1}{3}\cdot 1\,\tfrac{1}{2} \;\overset{\leftrightsquigarrow}{=}\; 2\,\tfrac{1}{6}$$

auf das falsche Ergebnis führt.

6.6.3 Umwandeln

Wendet man die Methode ,,Umwandeln in unechte Brüche" an, so klappt's:

$$2\,\tfrac{1}{3} \cdot 1\,\tfrac{1}{2} \;=\; \tfrac{7}{3} \cdot \tfrac{3}{2} \;=\; \tfrac{21}{6} \;=\; 3\,\tfrac{1}{2}.$$

Gemischte Zahlen werden vor dem Multiplizieren in unechte Brüche umgewandelt.

6.6.4 Anwendung des Distributivgesetzes

Hinweis: Die — durchaus korrekte — Anwendung des Distributivgesetzes gemäß

$$\begin{aligned} 2\,\tfrac{1}{3} \cdot 1\,\tfrac{1}{2} &= (2 + \tfrac{1}{3}) \cdot (1 + \tfrac{1}{2}) \;=\; 2 \cdot 1 + 2 \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \cdot 1 + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \\ &= 2 + 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} \;=\; 3\,\tfrac{3}{6} \;=\; 3\,\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

wäre — vor allem bei etwas größeren Zahlen — unübersichtlich und fehleranfällig.

6.7 Division von Brüchen

6.7.1 Vorbereitung

Es werden Kürzen und Erweitern wiederholt.

LP 6.2

6.7.2 Sachsituation Die klassische Sachsituation für das Dividieren ist das „gerechte Aufteilen". Will man das der Einführung der Bruchdivision zugrundelegen, so müssen „teilbare Größen" verwendet werden, beispielsweise Hohlmaße.

6.7.3 Aufteilen einer Flüssigkeit

Es werden $2\,\frac{1}{2}\ell$ Milch in $\frac{2}{3}\ell$-Gläser abgefüllt. Wie viele Gläser erhält man?

Im Experiment oder durch sorgfältiges Überlegen mit dem Distributivgesetz ermittelt man

$$2\,\frac{1}{2}\,\ell : \frac{2}{3}\,\ell \quad = \quad 3\,\frac{3}{4}$$

Schreibweise mit unechten Brüchen

$$\frac{5}{2} : \frac{2}{3} \quad = \quad \frac{15}{4}$$

Weitere Beispiele sind in der Tabelle aufgelistet:

Fülle ↓ Liter Wein ...	in ↓-Liter–Karaffen um.	Wieviele Karaffen braucht man dafür?
$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{15}{4} = 3\,\frac{3}{4}$
12	3	$4 = \frac{4}{1}$
1	$\frac{1}{5}$	$5 = \frac{5}{1}$
2	$\frac{2}{3}$	$3 = \frac{3}{1}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$2 = \frac{2}{1}$
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2} = 1\,\frac{1}{2}$
2	$\frac{3}{4}$	$\frac{8}{3} = 2\,\frac{2}{3}$
5	$\frac{3}{2}$	$\frac{10}{3} = 3\,\frac{1}{3}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3} = 1\,\frac{2}{3}$

Man überlege anhand dieser Beispiele, wie die drei Zahlen (Dividend, Divisor und Quotient) zusammenhängen könnten.

6.7.4 Induktive Erkenntnis

Aus den Beispielen lässt sich eine Regelmäßigkeit ablesen, die wie folgt zu formulieren ist:

Namen: Vertauscht man Zähler und Nenner eines Bruchs, so entsteht sein *Kehrbruch*.

Für die Division zweier Brüche gilt dann die folgende Merkregel:

$$\text{Bruch} \; : \; \text{Bruch} \; = \; \text{Bruch} \; \cdot \; \text{Kehrbruch}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}, \qquad a, b, c, d, \in \mathbb{N}_0, \quad b, c, d \neq 0.$$

6.7.5 Erarbeitung über den Kehrbruch

Alternativ kann man zunächst den Kehrbruch einer rationalen Zahl ermitteln mit Hilfe der Beobachtung, dass

$$\text{Bruch} \cdot \text{Kehrbruch} = 1.$$

ist. Es stellt sich dabei heraus, dass der Kehrbruch einer negativen Zahl gleich dem negativen Kehrwert des Absolutbetrags ist.

Merke: Der Kehrwert einer rationalen Zahl $a \neq 0$ hat

- das gleiche Vorzeichen wie a,
- den gleichen Betrag wie der Kehrwert des Betrags von a.

Die Vorzeichenregel für die Division ergibt sich dann mit der aus der Bruchrechnung bekannten Tatsache, dass die Division das gleiche ist wie die Multiplikation mit dem Kehrbruch.

6.7.6 Doppelbrüche

Wir wissen ja inzwischen, dass

- Brüche dividiert werden können,
- das Divisionszeichen durch den Bruchstrich ersetzt werden kann.

Dies führt auf die Idee, auch mit *Doppelbrüchen*

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

zu rechnen. Der Bruchstrich in der Mitte heißt dabei Hauptbruchstrich.

Doppelbrüche können leicht vereinfacht werden:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Dieses Vorgehen kann man in verschiedenen Formulierungen festhalten.

- Die Außenglieder eines Doppelbruchs geraten in den Zähler, die Innenglieder in den Nenner.
- Der Nenner des Zählers gerät in den Nenner.
- Der Nenner des Nenners gerät in den Zähler.

Wie immer wesentlich ist das Einüben des Doppelbruchrechnens auf der Grundlage eines Wechselspiels von

- Anwendung dieser nüchternen Regeln   und
- Abgleich mit lebendigen Vorstellungen über die Bruchmodelle.

6.7.7 Nachschlag

Mit Hilfe der ,,Doppelbruch-Theorie” lässt sich die Regel für das Dividieren zweier Brüche (erneut) begründen, wie hier an einem Beispiel erläutert:

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} \;=\; \frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{5}} \;=\; \frac{\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{3}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3}} \;=\; \frac{\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{3}}{\frac{15}{15}} \;=\; \frac{\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{3}}{1} \;=\; \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{3}$$

Zur Erarbeitung der Regel ist dieser Zugang aber nicht geeignet.

6.8 Typische Fehler und Schwierigkeiten

6.8.1 Generell

Wenn lebendige Vorstellungen verblassen und Schüler/innen versuchen, die Bruchrechnung anhand von Formeln und Algorithmen durchzuführen, treten leicht die verschiedensten Fehler auf.

Im folgenden sind gängige Fehler beschrieben.

1. Zahl-Zahl-Auffassung wirkt zu stark.

   Brüche werden zu stark als Zahlenpaare aufgefasst. Es wird getrennt mit Zähler und Nenner gerechnet.

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{7} + \tfrac{3}{4} &\overset{\leadsto}{=} \tfrac{5}{11} \\ \tfrac{5}{9} - \tfrac{2}{3} &\overset{\leadsto}{=} \tfrac{3}{6} \\ \tfrac{8}{9} : \tfrac{2}{3} &\overset{\leadsto}{=} \tfrac{4}{3} \\ \tfrac{3}{7} &\overset{\leadsto}{<} \tfrac{4}{11} \\ \tfrac{x}{u+v} &\overset{\leadsto}{=} \tfrac{x}{u} + \tfrac{x}{v}. \end{aligned}$$

2. Die bei Addition und Subtraktion eingeübte Idee des Operierens mit Zählern bei gleichnamigen Brüchen wirkt zu stark

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{7} \cdot \tfrac{3}{7} &\overset{\leadsto}{=} \tfrac{6}{7} \\ \tfrac{6}{7} : \tfrac{2}{7} &\overset{\leadsto}{=} \tfrac{3}{7} \end{aligned}$$

   Es besteht u.U. die Auffassung, dass auch vor dem Multiplizieren und Dividieren die Nenner gleichnamig gemacht werden müssen.

3. Einbettung $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{3} &\overset{\leadsto}{=} 3 \\ 5 \cdot \tfrac{2}{3} &\overset{\leadsto}{=} \tfrac{10}{15} \end{aligned}$$

4. Die Null im Nenner wird akzeptiert.

$$\tfrac{5}{0} \cdot \tfrac{2}{3} \overset{\leadsto}{=} \tfrac{10}{0}.$$

5. Ein Bruch mit Zähler Null wird als sinnlos („verboten") empfunden.

$$\tfrac{0}{5} \overset{\leadsto}{=} ?$$

6. Fehler beim Kürzen. Verwechseln von Dividieren und Kürzen. Vergessen der Division in Zähler oder Nenner. Versehentlich wird der Kürzungsfaktor in Zähler oder Nenner eingetragen.

$$\frac{15}{5} \quad \overset{\leftrightsquigarrow}{=} \quad \frac{3}{5}$$

$$\frac{24}{15} \quad \overset{\leftrightsquigarrow}{=} \quad \frac{8}{3}$$

7. Fehler beim Erweitern. Verwechseln von Multiplizieren und Erweitern. Vergessen der Multiplikation in Zähler oder Nenner. Versehentlich wird der Erweiterungsfaktor in Zähler oder Nenner eingetragen.

$$\frac{17}{25} \quad \overset{\leftrightsquigarrow}{=} \quad \frac{17}{100}$$

$$\frac{4}{125} \quad \overset{\leftrightsquigarrow}{=} \quad \frac{8}{1000}$$

8. Es wird nicht berücksichtigt, dass der Bruchstrich die Terme in Zähler und Nenner klammert,

$$4 \cdot \frac{5+3}{7} \quad \overset{\leftrightsquigarrow}{=} \quad \frac{4 \cdot 5+3}{7}$$

$$-\frac{21+5}{13} \quad \overset{\leftrightsquigarrow}{=} \quad \frac{-21+5}{13}$$

9. Umwandeln von gemischten Zahlen.

$$2\,\frac{3}{4} \quad \overset{\leftrightsquigarrow}{=} \quad \frac{5}{4}$$

10. Rechnen mit gemischten Zahlen, getrennt nach Ganzzahl- und Bruchanteil.

$$1\,\frac{1}{2} \cdot 1\,\frac{1}{2} \quad \overset{\leftrightsquigarrow}{=} \quad 1\,\frac{1}{4}$$

11. Interpretation des Wörtchens ,,von” bei Sachsituationen

    Geben Sei mir einen halben von diesen drei Laib Brot.

    Geben Sie mir die Hälfte von diesen drei Laib Brot.

7 Alternative und Abstraktere Konzepte zum Bruchzahlbegriff

Die Notwendigkeit der Einführung der Bruchzahlen kann fachmathematisch durch einen „Mangel" motiviert werden, der bezüglich der verschiedenen Zugänge zum Bruchbegriff wie folgt formuliert werden kann.

- In der Menge der natürlichen Zahlen (inkl. Null) $\mathbb{N}_0$ (bzw. $\mathbb{Z}$, dieser Fall wird im weiteren nicht ausgeführt) besitzt die Gleichung $7 \cdot x = 2$ keine Lösung.
- Der Term $2 : 7$ kann in $\mathbb{N}_0$ nicht berechnet werden.
- Der Operator $: 7$ kann nicht auf die Zahl 2 angewandt werden.

7.1 Bruchzahlen als Äquivalenzklassen

7.1.1 Einführung

Dieses Konzept ist orientiert an der Grundlagenmathematik. Auf der Grundlage der natürlichen Zahlen und mit den Mitteln der Mengenlehre werden Bruchzahlen „kreiert". In den 60/70er Jahren gab es starke Strömungen in der Didaktik, dieses Konzept — elementarisiert — in der Schule umzusetzen (New Maths, Griesel).

Vorteile:

- Das Wesen der Bruchzahlen wird grundlagenmathematisch, d.h. mengentheoretisch, genau geklärt.
- Das Konzept beinhaltet eine grosse begriffliche Klarheit bezüglich der Begriffe Bruch und Bruchzahl.

Insofern hat es eine Bedeutung als Hintergrundinformation für den Lehrenden.

Nachteil: Das Konzept ist stark formal–abstrakt und anwendungsfern, damit ungeeignet für einen Unterricht von Kindern der 6. Jahrgangsstufe aller Schularten. Sie haben eine entsprechende Entwicklungsphase der abstrakten Operationen (Piaget) noch nicht erreicht.

Es müssen neue Zahlen „geschöpft" werden. Mathematisch–wissenschaftlich bedeutet dies, es müssen solche Zahlen, Zahlbereiche und Strukturen — als Mengen — mit den Mitteln der Mengenlehre und im Rahmen ihrer Axiomatik konstruiert werden.

7.1.2 Schrittfolge zur Konstruktion von Bruchzahlen als Äquivalenzklassen

$\boxed{\text{A}}$ Ausgangspunkt ist die Menge $\mathbb{N}_0$ der natürlichen Zahlen mit Null.

$\boxed{\text{B}}$ Bilde das *Kartesische Produkt* der beiden Mengen $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}$

$$\mathcal{B} \;=\; \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \;=\; \{(m,n) | m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Elemente dieser Menge $\mathcal{B}$ sind Zahlenpaare (m, n), die in diesem Zusammenhang *Brüche* heißen. Die erste Koordinate heißt *Zähler*, die zweite Koordinate *Nenner*.

Beispiele für Brüche sind

$$(3,2) \quad (2,1) \quad (6,3) \quad (0,4) \quad (739,291) \qquad \text{nicht aber: } (3,0) \quad (0,0)$$

Beachte, dass in einem kartesischen Produkt zwei Zahlenpaare genau dann gleich sind, wenn sie in beiden Koordinaten übereinstimmen.

$$(m,n) = (k,\ell) \quad \Longleftrightarrow \quad m = k \quad \text{und} \quad n = \ell.$$

$\boxed{\text{R}}$ Auf der Menge aller Brüche $\mathcal{B}$ wird eine *Relation* (= „System von Zweierbeziehungen") definiert.

Zwei Brüche (m,n) und (k,ℓ) werden *äquivalent* genannt, wenn

$$(m,n) \sim (k,\ell) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} m \cdot \ell = n \cdot k,$$

wenn also „Außenprodukt = Innenprodukt" ist.

Diese Definition könnte man viel anschaulicher auch durch die Gleichung $m : n = k : \ell$ („quotientengleich") vollziehen. Beachte aber, dass die in dieser Gleichung auftretenden Terme innerhalb der bis jetzt bekannten Menge $\mathbb{N}_0$ im allgemeinen überhaupt nicht definiert sind.

Beispiele und Nichtbeispiele:

$$(2,3) \sim (4,6) \qquad (111,51) \sim (74,34) \qquad (0,5) \sim (0,62) \qquad (1,1) \sim (7,7)$$
$$(1,2) \not\sim (1,3) \qquad (4,9) \not\sim (2,3)$$

$\boxed{\text{Ä}}$ In Abschnitt 7.1.3 zeigen wir die folgenden Eigenschaften für die Bruch–Äquivalenz:

a) Die Relation $\sim$ ist *reflexiv*. Das heißt:

   Jeder Bruch steht zu sich selbst in Relation:

   $$(m,n) \sim (m,n) \qquad \text{für alle } (m,n) \in \mathcal{B}.$$

b) Die Relation $\sim$ ist *symmetrisch*. Das heißt:

   Wenn ein (erster) Bruch zu einem anderen (zweiten) in Relation steht, dann steht auch der zweite zum ersten in Relation:

   $$(m,n) \sim (k,\ell) \implies (k,\ell) \sim (m,n) \qquad \text{für alle } (m,n),(k,\ell) \in \mathcal{B}.$$

c) Die Relation $\sim$ ist *transitiv*. Das heißt:

   Wenn ein (erster) Bruch zu einem anderen (zweiten) in Relation steht und dieser zweite zu einem dritten, dann steht auch der erste zum dritten in Relation:

   $$(m,n) \sim (k,\ell) \text{ und } (k,\ell) \sim (p,q) \implies (m,n) \sim (p,q)$$
   $$\text{für alle } (m,n),(k,\ell),(p,q) \in \mathcal{B}.$$

Diese drei Eigenschaften könnte man nach allen Regeln der mathematischen Kunst beweisen. Das ist rechnerisch gar nicht schwer, nur die Abstraktheit ist sehr ungewohnt.

d) Wenn eine Relation alle diese drei Eigenschaften aufweist, so heißt sie *Äquivalenzrelation.* Äquivalenzrelationen haben eine immense Bedeutung in der gesamten Mathematik, da mit ihrer Hilfe Äquivalenzklassen sinnvoll gebildet werden können.

$\boxed{\text{K}}$ Eine Teilmenge K von $\mathcal{B}$ heißt ganz allgemein **Äquivalenzklasse** bzgl. einer Äquivalenzrelation $\sim$, wenn

- je zwei beliebige Brüche in K zueinander in Relation stehen:

$$(m,n),(k,\ell) \in K \quad \Longrightarrow \quad (m,n) \sim (k,\ell) \qquad \text{für alle } (m,n),(k,\ell) \in \mathcal{B}.$$

- ein beliebiger Bruch in K und ein beliebiger Bruch außerhalb K nicht in Relation stehen:

$$(m,n) \in K, (k,\ell) \notin K \quad \Longrightarrow \quad (m,n) \not\sim (k,\ell) \qquad \text{für alle } (m,n),(k,\ell) \in \mathcal{B}.$$

Für einen beliebigen Bruch $(m,n) \in \mathcal{B}$ gibt es genau eine Äquivalenzklasse, die diesen Bruch enthält. Sie wird mit $[(m,n)]$ oder — hier speziell — mit $\frac{m}{n}$ bezeichnet.

$$\frac{m}{n} \;:=\; [(m,n)] \;:=\; \{(a,b) \in \mathcal{B} | (a,b) \sim (m,n)\} \subseteq \mathcal{B}$$

Man nennt die Äquivalenzklasse dann auch *Bruchzahl.*

Beispiele:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \;&=\; [(1,2)] \;=\; \{(1,2);(2,4);(3,6);(4,8);\ldots\ldots\}\\ \frac{14}{35} \;&=\; [(14,35)] \;=\; \{(2,5);(4,10);(6,15);(8,20);\ldots\ldots\}\end{aligned}$$

Es gilt dann gemäß Konstruktion:

$$\frac{m}{n} = \frac{k}{\ell} \quad \Longleftrightarrow \quad m \cdot \ell = n \cdot k.$$

$\boxed{\text{Q}}$ Alle Bruchzahlen werden in einer Menge zusammengefasst:

$$\mathbb{Q}_0^+ \;:=\; \left\{\frac{m}{n}\,\middle|\, m \in \mathbb{N}_0,\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Sie heißt in der Mathematik die *Menge der (nicht-negativen) rationalen Zahlen.*

$\boxed{\text{N}}$ Die Ausgangsmenge $\mathbb{N}_0$ kann in $\mathbb{Q}_0^+$ durch die Identifizierung

$$m \;=\; \frac{m}{1}$$

wiedergefunden werden. Sie wird so zu einer Teilmenge:

$$\mathbb{N}_0 \;\subseteq\; \mathbb{Q}_0^+.$$

$\boxed{\text{H}}$ Es werden dann die von $\mathbb{N}$ bekannten Rechen–Strukturen auf die neue Menge der rationalen Zahlen ausgeweitet. Dabei sollen — gemäß dem *Hankel'schen Permanenzprinzip* — möglichst die Rechengesetze ihre Gültigkeit behalten.

a) Lineare Ordnung

$$\frac{m}{n} \le \frac{k}{\ell} \overset{\text{def}}{\iff} m \cdot \ell \le k \cdot n.$$

b) Addition

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{\ell} := \frac{m \cdot \ell + k \cdot n}{n \cdot \ell}$$

c) Subtraktion

$$\frac{m}{n} - \frac{k}{\ell} := \frac{m \cdot \ell - k \cdot n}{n \cdot \ell}$$

d) Multiplikation

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{\ell} := \frac{m \cdot k}{n \cdot \ell}$$

e) Division

$$\frac{m}{n} : \frac{k}{\ell} := \frac{m \cdot \ell}{k \cdot n}, \quad k \neq 0.$$

7.1.3 Beweis

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{B}$.

(1) Wegen $a \cdot b = a \cdot b$ gilt $(a,b) \sim (a,b)$, also Reflexivität.

(2) Es gelte $(a,b) \sim (c,d)$. Dann gilt

$$a \cdot d = c \cdot b \quad \Longrightarrow \quad c \cdot b = a \cdot d \quad \Longrightarrow \quad (c,d) \sim (a,b)$$

und damit Symmetrie.

(3) Zum Beweis der Transitivität schreiben wir eine Kette von Folgerungen auf

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} (a,b) \sim (c,d) \\ (c,d) \sim (e,f) \end{array} \right. \\
\Longrightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{l} a \cdot d = c \cdot b \\ c \cdot f = e \cdot d \end{array} \right. \\
\Longrightarrow \quad & a \cdot d \cdot c \cdot f = c \cdot b \cdot e \cdot d \\
\Longrightarrow \quad & a \cdot f \cdot (c \cdot d) = b \cdot e \cdot (c \cdot d) \\
\overset{\text{Ei/M}}{\Longrightarrow} \quad & a \cdot f = b \cdot e \\
\Longrightarrow \quad & (a,b) \sim (e,f).
\end{aligned}$$

7.2 Das Operatorkonzept

7.2.1 Einführung

Ein Bruch wird als ,,Zahlumwandler" eingeführt.

Beispielsweise wird der Bruch $\frac{2}{3}$ als Multiplikations–Operator

$$\square \xrightarrow{\cdot\frac{2}{3}} \square$$

definiert — und zwar so als Verkettung von zwei Operatoren:

$$\square \xrightarrow{:3} \square \xrightarrow{\cdot 2} \square \qquad \text{oder}$$
$$\square \xrightarrow{\cdot 2} \square \xrightarrow{:3} \square$$

definiert. Setzt man 3er–Vielfache auf der linken Seite ein, so kommt immer das gleiche auf der rechten Seite heraus. Daraus schließt man, dass die beiden Operatoren gleich sind.

7.2.2 Beispiele

- Kürzen: Die beiden Operatoren

  $$\square \xrightarrow{\cdot\frac{2}{3}} \square$$
  $$\square \xrightarrow{\cdot\frac{4}{6}} \square$$

  sind definiert als

  $$\square \xrightarrow{:3} \square \xrightarrow{\cdot 2} \square \qquad \text{bzw.}$$
  $$\square \xrightarrow{:6} \square \xrightarrow{\cdot 4} \square$$

  Es stellt sich dabei heraus, dass die beiden Operatoren gleich sind, da sie bei Anwendung auf eine Zahl immer das gleiche Ergebnis hervorbringen. Demzufolge sind die beiden Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{6}$ gleich.

- Multiplikation: Ausgangspunkt ist die Darstellung der Multiplikation als Nacheinanderausführung zweier Operatoren

  $$\square \xrightarrow{\cdot\frac{2}{3}} \square \xrightarrow{\cdot\frac{4}{5}} \square$$

  Diese Operatorkette wird gemäß Definition ersetzt durch

  $$\square \xrightarrow{:3} \square \xrightarrow{\cdot 2} \square \xrightarrow{:5} \square \xrightarrow{\cdot 4} \square$$

  Gemäß Kommutativgesetz und Assoziativgesetz wird die Operatorkette umgestellt

  $$\square \xrightarrow{:3} \square \xrightarrow{:5} \square \xrightarrow{\cdot 2} \square \xrightarrow{\cdot 4} \square$$

und zusammengefasst

$$\Box \quad \xrightarrow{:15} \quad \Box \quad \xrightarrow{\cdot 8} \quad \Box$$

und dann wieder gemäß Definition dargestellt

$$\Box \quad \xrightarrow{\cdot \frac{8}{15}} \quad \Box$$

Demzufolge ist

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

- Division: Ausgangspunkt ist ein Operator, der die Division durch einen Bruch darstellt:

  $$\Box \quad \xrightarrow{:\frac{2}{3}} \quad \Box$$

  Zu diesem Operator gehört der Umkehroperator

  $$\Box \quad \xleftarrow{\cdot \frac{2}{3}} \quad \Box$$

  den wir definitionsgemäß als Verkettung darstellen können

  $$\Box \quad \xleftarrow{\cdot 2} \quad \Box \quad \xleftarrow{:3} \quad \Box$$

  Davon der Umkehroperator ist

  $$\Box \quad \xrightarrow{:2} \quad \Box \quad \xrightarrow{\cdot 3} \quad \Box$$

  den wir wieder als Bruch–Multiplikationsoperator darstellen können:

  $$\Box \quad \xrightarrow{\cdot \frac{3}{2}} \quad \Box$$

  Nachdem dieser Operator der Umkehroperator vom Umkehroperator vom Ausgangsoperator ist, muss er mit diesem übereinstimmen:

  $$\left(\Box \quad \xrightarrow{:\frac{2}{3}} \quad \Box\right) \qquad = \qquad \left(\Box \quad \xrightarrow{\cdot \frac{3}{2}} \quad \Box\right)$$

Die Division durch einen Bruch ist gleich der Multiplikation mit dem Kehrbruch.

7.2.3 Vorteile und Nachteile

VORTEILE:

- Die Idee des Erweiterns und Kürzens lässt sich gut vermitteln.
- Das Gesetz der Bruchmultiplikation lässt sich gut einsichtig machen.
- Das Gesetz für die Division von Brüchen lässt sich geschmeidig herleiten.
- Der spätere Funktionsbegriff wird vorbereitet (Nicht so sehr HS–relevant).

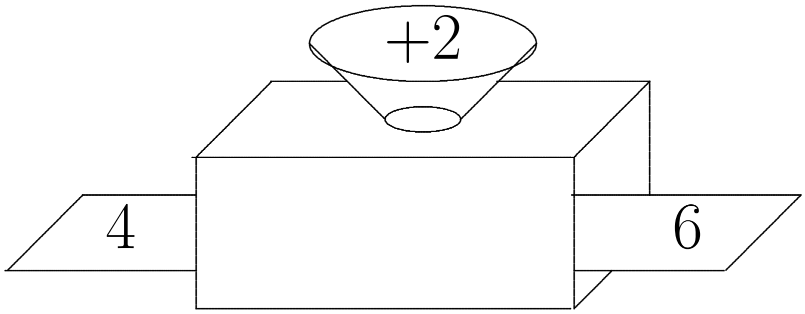
NACHTEILE:

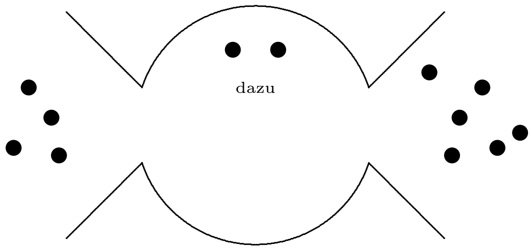
- Das Operatorkonzept lässt sich nicht geschmeidig für die Erarbeitung der gesamten Bruchrechnung (Lineare Ordnung, Addition, Subtraktion) heranziehen.
- Die Abgrenzung bzw. Gleichsetzung von Zahl und Operator ist einerseits aufwändig, andererseits verwirrend.
- Das Operatorkonzept muss miterlernt werden.
- Abstrakt.

Das Operatorkonzept wird nicht so sehr als durchgängiges Konzept für die gesamte Erschließung der Bruchrechnung verwendet, sondern eher zu ,,lokalem Argumentieren" herangezogen.

7.2.4 Exkurs: Graphische Realisierung von Operatoren

Der Operator +2 wird auf den Operanden 4 angewandt.





$$\boxed{4} \longrightarrow +2 \longrightarrow \boxed{6}$$

$$4 \xrightarrow{\quad +2 \quad} 6$$

+2	
4	
7	
0	
	8
	2
	10

7.3 Das Gleichungskonzept

7.3.1 Einführung

Die Bruchzahl $\frac{m}{n}$ wird künstlich als Lösung der Gleichung

$$n \cdot x = m, \qquad m \in \mathbb{N}_0, \quad n \in \mathbb{N}$$

eingeführt.

Es lassen sich dann auf der Grundlage der Regeln für Äquivalenzumformungen von Gleichungen die Rechengesetze für das Bruchrechnen ableiten.

7.3.2 Beispiel

Die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 14 \cdot x &= 10 \\ 21 \cdot x &= 15 \end{aligned}$$

sind — im Sinne der Gleichungslehre — äquivalent. Demzufolge stellen die (künstlichen) Lösungen $\frac{10}{14}$ und $\frac{15}{21}$ die gleiche Bruchzahl dar.

7.3.3 Nachteile

- Der Akt der Einführung von Zahlen als Lösungen von unlösbaren Gleichungen ist fern der Schülerrealität. Dies ist künstlich und für den Schüler nicht nachvollziehbar.
- Für die Ableitung von Rechengesetzen sind Kenntnisse der Gleichungslehre notwendig.

8 Dezimalbrüche

LP+ M6 LB 1

8.1 Einführung

Dezimalbrüche stellen lediglich eine andere Schreibweise für Brüche dar. Es handelt sich bei

> Gewöhnlichen Brüchen — gemischten Zahlen — Dezimalbrüchen — Prozentsätzen — Promillsätzen

nur um andere Schreibweisen für rationale Zahlen, nicht um Elemente eines jeweils neuen Zahlbereichs.

8.1.1 Auftreten in Grundschule

Dezimalbrüche treten schon in der Grundschule als Maßzahlen von Größenwerten (besonders: Geldwerten) auf. Sie werden aber lediglich als besondere abkürzende ,,Komma–Schreibweise" im Zusammenhang mit gemischten Einheiten verstanden.

$$1,25\,€ \;=\; 1\,€\,25\,\mathrm{Ct}, \qquad 2,5\,\mathrm{m} \;=\; 2\,\mathrm{m}\,50\,\mathrm{cm}, \qquad 1,5\,\ell \;=\; 1\,\tfrac{1}{2}\,\ell$$

Man kann daran in einer ,,beispielgebundenen" Einführung anknüpfen.

8.2 Abbrechende Dezimalbrüche

8.2.1 Definition (Syntaktische Sichtweise)

Ein Ausdruck der Form

$$g_{n-1} \dots g_1 g_0 \, , z_1 \, z_2 \; \dots \; z_q$$

mit Ziffern aus $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ heißt *(abbrechender) Dezimalbruch.*

8.2.2 Definition (Semantische Sichtweise)

Eine nicht-negative rationale Zahl der Form

$$g_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + g_1 \cdot 10 + g_0 \; + \; z_1 \cdot 10^{-1} + z_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + z_k \cdot 10^k$$

mit Zahlen aus $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ wird abkürzend als Abfolge von Ziffern

$$g_{n-1} \dots g_1 g_0 \, , z_1 \, z_2 \; \dots \; z_k$$

geschrieben. Man spricht dann von einem *(abbrechenden) Dezimalbruch.*

8.2.3 Kommentare

- Der Begriff ,,syntaktisch" bedeutet allgemein, dass die Symbole der Darstellung (hier: Ziffern) im Mittelpunkt stehen, während ,,semantisch" bedeutet, dass es um die Objekte (hier: Zahlen) geht.
- Anstelle von Dezimalbruch sind auch die Sprechweisen ,,Dezimalbruchzahl, Dezimalzahl, Kommazahl" anzutreffen.
- Die n–stellige ganze Zahl $g = g_{n-1} \dots g_1 g_0$ (vor bzw. links von Komma) heißt der *Ganzzahlanteil* des Dezimalbruchs.
- Die q Ziffern $z_1, z_2, \dots, z_q$ heißen die *Nachkommaziffern* (an den Nachkommastellen) des Dezimalbruchs.
- Wir werden später sehen, dass es auch ,,nicht-abbrechende" Dezimalbrüche gibt. In der Schule werden abbrechende Dezimalbrüche als *endlich* bezeichnet.

8.2.4 Äquivalente Darstellungen

Aus der Definition ist klar, dass es verschiedene Dezimalbruch-Schreibweisen für die gleiche rationale Zahl geben kann. Beispielsweise ist

$$0,25 \quad = \quad 0,250 \quad = \quad 0,2500 \quad = \quad 0,25000 \ldots$$

Das Hinzufügen oder Wegstreichen von *Endnullen* wird gelegentlich auch *Erweitern* und *Kürzen* genannt.

8.2.5 Umwandlung von abbrechenden Dezimalbrüchen in gewöhnliche Brüche

Ist ein abbrechender Dezimalbruch vorgegeben, so erhält man den zugehörigen gewöhnlichen Bruch gemäß der Formel

$$\begin{aligned} g\,,z_1\,z_2\,\ldots\,z_q &= g + \frac{z_1}{10} + \frac{z_2}{100} + \ldots + \frac{z_q}{10^q} \\ &= g + \frac{z_1 \cdot 10^{q-1} + z_2 \cdot 10^{q-2} + \ldots + z_q}{10^q} \\ &= g + \frac{z_1\,z_2\,\ldots\,z_q}{10^q} \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der ersten Zeile stellt klar die Bedeutung der Nachkommaziffern beim Umwandeln heraus. Der Ausdruck in der dritten Zeile ist kompakter und deshalb für das konkrete Rechnen angenehmer.

8.2.6 Beispiele

$$\begin{aligned} 0,4 &= \tfrac{4}{10} = \tfrac{2}{5} \\ 0,25 &= \tfrac{25}{100} = \tfrac{1}{4} \\ 0,875 &= \tfrac{875}{1000} = \tfrac{7}{8} \\ 0,374569821 &= \tfrac{374.569.821}{1.000.000.000} \\ 3,06 &= 3 + \tfrac{6}{100} = \tfrac{306}{100} = \tfrac{153}{50} \end{aligned}$$

8.2.7 Umwandlung von gewöhnlichen Brüchen in abbrechende Dezimalbrüche

Die wesentliche Voraussetzung kann so als Merksatz formuliert werden:

> Merke: Ein gewöhnlicher Bruch kann in einen endlichen Dezimalbruch umgewandelt werden, wenn der Nenner — nach vollständigem Kürzen — nur die Zahlen 2 und 5 als Primfaktoren enthält.

Wir nehmen zusätzlich an, dass es sich um einen echten Bruch handelt. Ein unechter Bruch kann ja vorher in eine gemischte Zahl umgewandelt werden.

8.2.8 Das Verfahren

Der Bruch lässt sich so erweitern, dass im Nenner eine Stufenzahl steht:

$$\frac{m}{n} = \frac{\ell}{10^q}$$

Wegen $\frac{m}{n} < 1$ hat die natürliche Zahl ℓ höchstens q Stellen

$$\ell = z_1 \dots z_q$$

und wir erhalten den abbrechenden Dezimalbruch

$$\frac{m}{n} = \frac{\ell}{10^q} = 0, z_1 \dots z_q.$$

8.2.9 Beispiele

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{4} &= \tfrac{25}{100} = 0,25 \\
\tfrac{2}{5} &= \tfrac{4}{10} = 0,4 \\
\tfrac{83}{200} &= \tfrac{415}{1000} = 0,415 \\
\tfrac{239}{512} &= \tfrac{466\,796\,875}{1\,000\,000\,000} = 0,466\,796\,875 \\
\tfrac{17\,452}{1\,953\,125} &= \tfrac{8\,935\,424}{1\,000\,000\,000} = 0,008\,935\,424
\end{aligned}$$

8.3 Dezimalbrüche in der Schulpraxis

8.3.1 Stellenwertsystem

Beim Arbeiten mit Dezimalbrüchen muss ständig die Idee des Stellenwertsystems präsent sein. Im Beispiel:

HT	ZT	T		H	Z	E		z	h	t	zt	ht	m
4	8	7	.	3	8	9	,	8	6	4	5	4	3

- Diese konkrete Anschauung sollte durch den Umgang mit einfachen Beispielen gefördert werden. (Keine Zahlenakrobatik).
- Damit wird die Tatsache der Erweiterung der bisherigen Stellenwertnotation für natürliche Zahlen herausgestellt.
- Die Darstellungen Bruch – Dezimalbruch werden deutlicher als unterschiedlich erkannt. Der Fehler

  $$2\,\tfrac{1}{3} \;\overset{\leadsto}{=}\; 2,3$$

  — er ist besonders präsent bei der Ziffer 3 — wird dadurch ,,bekämpft".
- Die Bedeutung von Endnullen (belanglos für den Wert) wird deutlicher erkannt.
- Die Durchführung von Größenvergleichen oder additiven Operationen wird einsichtig.

8.3.2 Ziffernweises Sprechen

Die Nachkommastellen in einem Dezimalbruch sollen ziffernweise gesprochen werden:

$2,78$ zwei Komma sieben acht

Bei Einübung einer (falschen) Sprechweise als

Zwei Komma achtundsiebzig

können Fehlkonzepte viel leichter angelegt werden, die letztlich darin begründet sind, dass der Dezimalbruch als Paar von zwei natürlichen Zahlen (hier: 2 und 78) aufgefasst wird. Es kann dann zu Fehlern kommen, die weiter unten in Kapitel 8.9 beschrieben werden.

8.4 Rechnen mit abbrechenden Dezimalbrüchen

Ist die Grundeinsicht über die ,,Fortführung des dezimalen Stellenwertsystems" bei der Verwendung von Dezimalbrüchen ausgebildet, so lassen sich die Regeln für das Rechnen gut begründen.

Umgekehrt soll mit der operativen Durchdringung des Dezimalbruchrechnens auch die fundamentale Bedeutung des dezimalen Stellenwertsystems weiter aufgezeigt werden.

8.4.1 Addition und Subtraktion

Addition und Subtraktion erfolgen stellenweise von rechts nach links. Die Verarbeitung der Zehnerübergänge geschieht wie bei Addition und Subtraktion natürlicher Zahlen (JGS3).

Eine zusätzliche Schwierigkeit besteht darin, dass die Stellenzuordnung sicher berücksichtigt werden muss — insbesondere, wenn die Anzahlen der Nachkommastellen verschieden sind. Als Hilfestellung kann herangezogen werden:

- das Erweitern mit Endnullen, so dass beide beteiligte Zahlen die gleiche Anzahl der Nachkommastellen aufweisen.
- Summanden bzw. Minuend und Subtrahend werden — am Komma ausgerichtet — untereinander geschrieben.

Beispiele:

	1	3,	5	7	
+		4,	6	8	2
		1	1		
	1	8,	2	5	2

	3	2,	4	8
−		5,	9	6
	2	6,	5	2

bzw.

	3	2,	4	8
−		5,	9	6
		1	1	
	2	6,	5	2

Die Begründung besteht in der Anwendung des Distributivgesetzes auf die dezimale Entbündelung der beteiligten Zahlen.

Mit Hilfe des Operatoraspekts und des Distributivgesetzes können Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen auf Addition und Subtraktion von natürlichen Zahlen zurückgespielt werden. Bezogen auf die Beispiele geschieht dies so:

$$13,57 + 4,682 \xrightarrow{\cdot 1000} 13570 + 4682 = 18252 \xrightarrow{:1000} 18,252$$

$$32,48 - 5,96 \xrightarrow{\cdot 100} 3248 - 596 = 2652 \xrightarrow{:100} 26,52$$

8.4.2 Multiplikation

Die beiden Dezimalbrüche werden zunächst ohne Berücksichtigung der Kommata multipliziert. Dann wird im Produkt das Komma gemäß folgender Regel eingefügt:

$$\begin{aligned} &\text{Anzahl der Nachkommastellen im Produkt} \\ = \quad &\text{Anzahl der Nachkommastellen im 1. Faktor} \\ &+ \text{Anzahl der Nachkommastellen im 2. Faktor} \end{aligned}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} 4,823 \cdot 6,51 &= \tfrac{4823}{1000} \cdot \tfrac{651}{100} = \tfrac{4823 \cdot 651}{1000 \cdot 100} = \tfrac{3\,139\,773}{100\,000} = 31,397\,73 \\ 1,5 \cdot 1,5 &= \tfrac{15}{10} \cdot \tfrac{15}{10} = \tfrac{225}{100} = 2,25 \end{aligned}$$

Die Begründung besteht darin, dass die Multiplikation von Dezimalbrüchen mittels Stufenzahlmultiplikation und Assoziativgesetz der Multiplikation auf die Multiplikation von ganzen Zahlen zurückgespielt wird, im Beispiel

$$3,8 \cdot 4,52 \quad \xrightarrow{\cdot 10 \cdot 100} \quad 38 \cdot 452 \quad = \quad 17176 \quad \xrightarrow{:1000} \quad 17,176$$

8.4.3 Division: Erster Schritt

Sollen zwei abbrechende Dezimalbrüche dividiert werden, so besteht der erste Schritt darin, das Komma im Divisor durch Erweitern mit der passenden Stufenzahl zu ,,beseitigen". Der Wert des Quotienten bleibt dabei gleich.

Im Beispiel:

$$86,36 : 1,7 \overset{\text{E }10}{=} 863,6 : 17.$$

Anders ausgedrückt: Die Kommata in Dividend und Divisor werden um die gleiche Anzahl von Stellen nach rechts verschoben, bis das Komma im Divisor ,,verschwindet".

Tatsächlich könnte durch Erweiterung auch ein evtl. noch vorhandenes Komma im Dividenden beseitigt werden. Dies stellt jedoch keine nennenswerte Erleichterung bei der Durchführung des folgenden Schrittes dar.

8.4.4 Division: Zweiter Schritt

Es wird eine Division ohne Berücksichtigung des Kommas im Dividenden durchgeführt. Diese Division wird weiter unten in Abschnitt 8.5.7 dargelegt. Der Quotient ist i.a. kein abbrechender Dezimalbruch mehr, sondern ein periodischer Dezimalbruch.

8.4.5 Division: Dritter Schritt

Im Quotienten wird das Komma gemäß folgender Regel eingefügt:

$$\begin{aligned} & \text{Zahl der Nachkommastellen im Quotienten} \\ = \; & \text{Zahl der Nachkommastellen im Dividenden} \end{aligned}$$

Dieser dritte Schritt kann schon während des zweiten Schritts berücksichtigt werden: Wird bei der schriftlichen Division das Komma im Dividenden ,,überschritten", so wird das Komma im Quotienten gesetzt.

Beispiele:

$$\begin{aligned} 2,4 : 0,3 &= 24 : 3 = 8 \\ 16,8 : 0,07 &= 1680 : 7 = 240 \\ 9,38 : 1,4 &= 93,8 : 14 = 6,7 \end{aligned}$$

8.5 Periodische Dezimalbrüche

8.5.1 Definition (syntaktisch)

Ein Ausdruck der Form

$$g\,,\,\underbrace{z_1\,z_2\,\cdots\,z_q}_{\text{Vorperiode}}\,\underbrace{z_{q+1}\,z_{q+2}\,\cdots\,z_{q+p}}_{\text{Periode}}\,\underbrace{z_{q+p+1}\,z_{q+p+2}\,\cdots\,z_{q+2p}}_{\text{Periode}}\,\underbrace{z_{q+2p+1}\,z_{q+2p+2}\,\cdots\,z_{q+3p}}_{\text{Periode}}\,\cdots$$

$$=:\quad g\,,z_1\,z_2\,\cdots\,z_q\,\overline{z_{q+1}\,z_{q+2}\,\cdots\,z_{q+p}}$$

mit Ziffern $z_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ heißt *periodischer Dezimalbruch*, wenn die Ziffern in den Perioden übereinstimmen:

$$z_{q+\ell\cdot p+i} \quad = \quad z_{q+i} \qquad \text{für alle} \quad \ell \in \mathbb{N} \quad \text{und alle} \quad i = 1,\ldots,p.$$

8.5.2 Kommentare

- Nach einer *Vorperiode* der Länge $q \geq 0$ tritt die *Perioden* der Länge $p \geq 1$ unendlich nach rechts wiederholt auf.
- Ein periodischer Dezimalbruch wird abkürzend geschrieben mit einem ,,Überstrich" über der Periode. Man spricht das Wort ,,Periode" vorangestellt, da man sonst die Periode und Vorperiode nicht getrennt wahrnehmen kann:

  Fünf Sechstel gleich 0 Komma 8 Periode 3,

- Ein periodischer Dezimalbruch mit $q = 0$

  $$g\,,\,\underbrace{z_1\,z_2\,\cdots\,z_p}_{\text{Periode}}\,\underbrace{z_{p+1}\,z_{p+2}\,\cdots\,z_{2p}}_{\text{Periode}}\,\underbrace{z_{2p+1}\,z_{2p+2}\,\cdots\,z_{3p}}_{\text{Periode}}\,\cdots \quad = \quad g\,,\overline{z_1\,z_2\,\cdots\,z_p}$$

  heißt *reinperiodisch*.
- Ein periodischer Dezimalbruch mit Vorperiode (d.h. $q \geq 1$) heißt *gemischtperiodisch*.
- Die Längen von Vorperiode und Periode sind nicht eindeutig bestimmt:

  $$\begin{aligned} 0,7\overline{43} &= 0,74\overline{34} = 0,7\overline{4343} = 0,74343434343434343434343\ldots \\ 0,214\overline{285714} &= 0,21428\overline{571428} = 0,2142857142857142857142857142857142 8\ldots \end{aligned}$$

  Normalerweise wird darauf geachtet, dass Vorperiode und Periode möglichst kurz sind wie im Dezimalbruch ganz links.
- Ein periodischer Dezimalbruch mit der Periode $\overline{0}$ kann als der zugehörige Dezimalbruch ohne Periode angesehen werden.

  $$0,250000000000000000\ldots \quad = \quad 0,25\overline{0} \quad = \quad 0,25$$

  In der Schulpraxis werden periodische (= unendliche) und abbrechende (= endliche) Dezimalbrüchen als echt alternativ wahrgenommen.

8.5.3 Umwandlung von periodischen Dezimalbrüchen in gewöhnliche Brüche

Jeder periodische Dezimalbruch lässt sich durch die folgende Formel in einen gewöhnlichen Bruch umwandeln:

$$g, z_1\, z_2\, \ldots\, z_q\, \overline{z_{q+1}\, z_{q+2}\, \ldots\, z_{q+p}} \;=\; g + \frac{\overbrace{z_1\, \ldots\, z_q}^{\in\mathbb{N}_0}}{10^q} + \frac{\overbrace{z_{q+1}\, \ldots\, z_{q+p}}^{\in\mathbb{N}_0}}{10^q \cdot (10^p - 1)}$$

8.5.4 Begründung an Beispielen durch Differenztrick

$$\begin{array}{rcl}
10 \cdot 0,\overline{3} &=& 3,33333333333\ldots \\
-\, 0,\overline{3} &=& 0,33333333333\ldots \\ \hline
9 \cdot 0,\overline{3} &=& 3 \\
\iff \quad 0,\overline{3} &=& \frac{3}{9} = \frac{1}{3}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
1000000 \cdot 0,\overline{285714} &=& 285714,285714285714\ldots \\
-\, 0,\overline{285714} &=& 0,285714285714\ldots \\ \hline
999999 \cdot 0,\overline{285714} &=& 285714 \\
\iff \quad 0,\overline{285714} &=& \frac{285714}{999999} = \frac{2}{7}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
10 \cdot 0,8\overline{3} &=& 8,33333333333\ldots \\
-\, 0,8\overline{3} &=& 0,83333333333\ldots \\ \hline
9 \cdot 0,8\overline{3} &=& 7,5 \\
\iff \quad 0,8\overline{3} &=& \frac{7,5}{9} = \frac{5}{6}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
10 \cdot 0,2\overline{9} &=& 2,99999999999\ldots \\
-\, 0,2\overline{9} &=& 0,29999999999\ldots \\ \hline
9 \cdot 0,2\overline{9} &=& 2,7 \\
\iff \quad 0,2\overline{9} &=& \frac{2,7}{9} = \frac{3}{10}
\end{array}$$

8.5.5 Beweis $^{\ominus}$ der Formel für den Periodenanteil.

$$\begin{aligned}
& 0,00\ldots0\,\overline{z_{q+1}\, z_{q+2}\, \cdots\, z_{q+p}} \\
=\; & 0,00\ldots0\,\underbrace{z_{q+1}\, z_{q+2}\, \cdots\, z_{q+p}}_{\text{Periode}}\,\underbrace{z_{q+p+1}\, z_{q+p+2}\, \cdots\, z_{q+2p}}_{\text{Periode}}\,\underbrace{z_{q+2p+1}\, z_{q+2p+2}\, \cdots\, z_{q+3p}}_{\text{Periode}}\cdots \\
=\; & \frac{z_{q+1}}{10^{q+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \ldots\right) + \\
& \frac{z_{q+2}}{10^{q+2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \ldots\right) + \\
& \qquad \vdots \\
& \frac{z_{q+p}}{10^{q+p}} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \ldots\right) \\
=\; & \left(\frac{z_{q+1}}{10^{q+1}} + \frac{z_{q+2}}{10^{q+2}} + \ldots + \frac{z_{q+p}}{10^{q+p}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \ldots\right) \\
=\; & \left(\frac{z_{q+1} \cdot 10^{p-1} + z_{q+2} \cdot 10^{p-2} + \ldots + z_{q+p}}{10^{q+p}}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^p}} \\
=\; & \frac{z_{q+1}\, z_{q+2}\, \cdots\, z_{q+p}}{10^q (10^p - 1)}
\end{aligned}$$

8.5.6 Die Periode $\overline{9}$

H13 T2 A3

Der Fall der Periode $\overline{9} = 999999\ldots$ tritt in der Mathematik selten und im Alltagsleben nie auf. Nichtsdestoweniger sollte seine mathematische Bedeutung geklärt sein:

$$\begin{aligned} 4,23\overline{9} &= 4,2399999\ldots = 4,24 \\ 0,24\overline{9} &= 0,25 \\ 0,\overline{9} &= 1 \end{aligned}$$

Ein Dezimalbruch mit Periode $\overline{9}$ ist also nichts anders als ein abbrechender Dezimalbruch. Die Umwandlung erfolgt durch Weglassen der Periode und Erhöhen der letzten (rechten) Vorperiodenziffer um 1.

Begründung (kein mathematisch strenger Beweis) für $0,\overline{9} = 1$:

Variante 1: Beide Zahlen haben bei Division durch 9 das gleiche Ergebnis:

$$\begin{aligned} 1 : 9 &= 0,111\ldots\ldots \\ 0,999\ldots\ldots : 9 &= 0,111\ldots\ldots \end{aligned}$$

Variante 2: Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen a und b gibt es immer eine weitere rationale Zahl, die echt dazwischen liegt, beispielsweise den Mittelwert:

$$c = \tfrac{a+b}{2}$$

Zwischen die beiden Dezimalbrüche

$$0,999999999999\ldots \qquad \text{und} \qquad 1$$

passt aber kein weiterer Dezimalbruch. Also müssen die beiden Dezimalbrüche gleich sein.

Variante 3: (Fachmathematisch mit Hilfe der geometrischen Reihe)

$$0,\overline{9} = \tfrac{9}{10} + \tfrac{9}{100} + \ldots = 9 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{10}\right)^k = 9 \cdot \tfrac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \tfrac{9}{9} = 1.$$

8.5.7 Umwandlung von gewöhnlichen Brüchen in periodische Dezimalbrüche

Es sei $\frac{m}{n}$ ein beliebiger Bruch mit teilerfremden natürlichen Zahlen m, n.

In diesem Fall ermittelt man den zugehörigen Dezimalbruch mit Hilfe einer ,,Dezimalbruchentwicklung", das ist eine Abfolge von ,,Divisionen mit Rest" wie folgt:

	Beispiel $\frac{3}{14}$	Allgemein $\frac{m}{n}$
$k=0$	$3:14 = 0\ \mathrm{R}\ 3$,	$m:n = g\ \mathrm{R}\ r_0$,
$k=1$	$30:14 = 2\ \mathrm{R}\ 2$	$10\,r_0 : n = z_1\ \mathrm{R}\ r_1$
$k=2$	$20:14 = 1\ \mathrm{R}\ 6$	$10\,r_1 : n = z_2\ \mathrm{R}\ r_2$
$k=3$	$60:14 = 4\ \mathrm{R}\ 4$	$10\,r_2 : n = z_3\ \mathrm{R}\ r_3$
$k=4$	$40:14 = 2\ \mathrm{R}\ 12$	$10\,r_3 : n = z_4\ \mathrm{R}\ r_4$
$k=5$	$120:14 = 8\ \mathrm{R}\ 8$	$10\,r_4 : n = z_5\ \mathrm{R}\ r_5$
$k=6$	$80:14 = 5\ \mathrm{R}\ 10$	$10\,r_5 : n = z_6\ \mathrm{R}\ r_6$
$k=7$	$100:14 = 7\ \mathrm{R}\ 2$	$10\,r_6 : n = z_7\ \mathrm{R}\ r_7$
$k=8$	$20:14 = 1\ \mathrm{R}\ 6$	$10\,r_7 : n = z_8\ \mathrm{R}\ r_8$
$k=9$	$60:14 = 4\ \mathrm{R}\ 4$	$10\,r_8 : n = z_9\ \mathrm{R}\ r_9$
$k=10$	$40:14 = 2\ \mathrm{R}\ 12$	$10\,r_9 : n = z_{10}\ \mathrm{R}\ r_{10}$
$\vdots$	$\vdots\ \uparrow$	$\vdots\ \uparrow$

Die Ziffernfolge über dem Pfeil $\uparrow$ gibt den Dezimalbruch an.

8.5.8 Beobachtungen

Bei diesem Verfahren kann man die folgenden Beobachtungen festhalten:

- Die nacheinander auftretenden Reste $r_0, r_1, r_2, \ldots$ sind Zahlen in der Menge
  $$\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$
  Demzufolge sind die verzehnfachten Reste jeweils enthalten in der Menge
  $$\{0, 10, 20, \ldots, 10 \cdot (n-1)\}.$$
  Demzufolge sind die Ganzzahlergebnisse z_k bei den Divisionen mit Rest
  $$10\,r_{k-1} : n \quad = \quad z_k \,\mathrm{R}\, r_k \qquad\qquad \text{(in der k-ten Zeile)}$$
  Zahlen zwischen 0 und 9. Sie ergeben die Nachkommastellen des Dezimalbruchs.
- Tritt in dem Verfahren irgendwann — sagen wir in der q-ten Zeile — ein Rest $r_q = 0$ ein, so sind in den folgenden Zeilen alle Ganzzahlergebnisse und Reste gleich Null.
  $$z_{q+1} = r_{q+1} = 0 \qquad\qquad z_{q+2} = r_{q+2} = 0 \qquad\qquad \ldots\ldots$$
  Das heißt der Dezimalbruch ist abbrechend.

- Tritt der Fall $r_q = 0$ nie ein, so müssen alle Reste $r_0, r_1, r_2, \ldots$ in der Menge

  $$\{1, 2, \ldots, n-1\}$$

  enthalten sein. Das bedeutet aber, dass in der Abfolge aller Reste irgendein Rest ,,zum ersten Mal ein zweites Mal” auftreten muss:

  $$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & & & r_q & = & r_{q+p} & & \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 & \ldots\ldots & \underbrace{r_q}_{\text{1. Mal}} & \ldots\ldots & \underbrace{r_{q+p}}_{\text{2. Mal}} & \ldots\ldots \end{array}$$

  Da die Reste zwischen 1 und $n-1$ liegen, muss gelten

  $$q \leq n-1 \qquad p \leq n-1$$

  Man sieht aus dem obigen Verfahren, dass sich die Schritte nach Auftreten des gleichen Restes wiederholen. Genauer gesagt, das Verfahren stellt ab Schritt $q+p+1$ eine Wiederholung der Schritte $q+1, \ldots, q+p$ dar. Daraus folgt dann aber auch, dass sich die Ganzzahlergebnisse wiederholen:

  $$g\,,\ \underbrace{z_1\, z_2\ \cdots\ z_q}_{\text{Vorperiode}}\ \underbrace{z_{q+1}\, z_{q+2}\ \cdots\ z_{q+p}}_{\text{Periode}}\ \underbrace{z_{q+p+1}\, z_{q+p+2}\ \cdots\ z_{q+2p}}_{\text{Periode}}\ \underbrace{z_{q+2p+1}\, z_{q+2p+2}\ \cdots\ z_{q+3p}}_{\text{Periode}}\ \cdots$$

- Angenommen, der Dezimalbruch endet mit der Periode $\overline{9}$, d.h. es gilt

  $$z_{q+1} = z_{q+2} = \ldots\ldots = 9.$$

  Dann lauten die Divisionen mit Rest in den Zeilen $k = q+1$ und $k = q+2$:

  $$\begin{array}{rrcll} \text{Zeile } q+1: & 10\,r_q : n & = & 9\,\mathrm{R}\,r_{q+1} & \text{d.h.} \quad 10\,r_q = 9n + r_{q+1} \\ \text{Zeile } q+2: & 10\,r_{q+1} : n & = & 9\,\mathrm{R}\,r_{q+2} & \text{d.h.} \quad 10\,r_{q+1} = 9n + r_{q+2}. \end{array}$$

  Aufgrund der unendlichen Periode 9 gilt $r_{q+1} = r_{q+2}$. Dann lautet aber die letzte Gleichung

  $$10\,r_{q+1} = 9n + r_{q+1} \quad \Longleftrightarrow \quad r_{q+1} = n.$$

  Das ist aber ein Widerspruch zu $r_{q+1} \leq n-1$.

8.5.9 Zusammenfassung

Bei der Dezimalbruchentwicklung eines (vollständig gekürzten) gewöhnlichen Bruchs $\frac{m}{n}$ erhält man einen periodischen (oder abbrechenden) Dezimalbruch

$$g\,,\ z_1\, z_2\ \cdots\ z_q\ \overline{z_{q+1}\, z_{q+2}\ \cdots\ z_{q+p}}$$

mit Länge der Vorperiode $q \leq n-1$ und Länge der Periode $p \leq n-1$. Eine unendliche Periode $\overline{9}$ ist ausgeschlossen.

Beachte, dass die Längen q der Vorperiode und p der Periode nicht notwendig kleiner als die Basis 10 sein müssen, was man angesichts des Divisionsalgorithmus schnell–intuitiv vermuten könnte. Vgl. das Beispiel

$$\frac{2}{17} = 0{,}117\,647\,058\,823\,529\,4|11\,764\,705\,882\,352\,94$$

mit Periodenlänge 16.

8.5.10 Fälle

Die folgende Tabelle gibt noch einmal einen Überblick über die Fälle, die bei der Umwandlung zwischen den Schreibweisen als ,,Bruch" und ,,Dezimalbruch" auftreten können.

	Gewöhnlicher Bruch $\frac{m}{n}$ (gekürzt) PFZ des Nenners n	Dezimalbruch Periode	Dezimalbruch Begriff
$\boxed{\text{Z}}$	$n = 1$	reinperiodisch mit Periode $= \overline{0}$ oder $= \overline{9}$	ganze Zahl
$\boxed{\text{A}}$	$n \neq 1$ PFZ: Nur ,,2 oder 5" treten auf	gemischtperiodisch mit Periode $= \overline{0}$ oder $= \overline{9}$	abbrechend endlich
$\boxed{\text{R}}$	$n \neq 1$ PFZ: ,,Weder 2 noch 5" treten auf	reinperiodisch mit Periode $\neq \overline{0}$ und $\neq \overline{9}$	reinperiodisch unendlich
$\boxed{\text{G}}$	$n \neq 1$ PFZ: ,,Sowohl 2 oder 5 als auch eine andere Primzahl" treten auf	gemischtperiodisch mit Periode $\neq \overline{0}$ und $\neq \overline{9}$	gemischtperiodisch unendlich

8.5.11 Beispiele

$$\begin{aligned}
\tfrac{2}{3} &= 0,666666666666666666666666666666\ldots &&= 0,\overline{6}\\
\tfrac{2}{7} &= 0,285714285714285714285714285714 28\ldots &&= 0,\overline{285714}\\
\tfrac{5}{6} &= 0,833333333333333333333333333333\ldots &&= 0,8\overline{3}\\
\tfrac{3}{14} &= 0,214285714285714285285714285714 28\ldots &&= 0,2\overline{142857}\\
\tfrac{2}{9} &= 0,222222222222222222222222222222\ldots &&= 0,\overline{2}\\
\tfrac{2}{17} &= 0,117647058823529411764705882352 94\ldots &&= 0,\overline{1176470588235294}
\end{aligned}$$

8.6 Rechnen mit periodischen Dezimalbrüchen

8.6.1 Vergleich zweier periodischer Dezimalbrüche

Die (von links gesehen) erste Stelle, an der sich die Ziffern der beiden Dezimalbrüche unterscheiden, ist entscheidend. Die größere Ziffer gehört zum größeren Dezimalbruch.

Dies gilt damit auch für abbrechende Dezimalbrüche — und sogar für nicht-periodische Dezimalbrüche, siehe unten (Kapitel 8.10).

$$\begin{aligned} 0,537 &< 0,54 \\ 0,006 &< 0,06 < 0,60 \\ 1,\overline{25} &< 1,2\overline{5} \\ 4,75021\overline{4293} &< 4,75021\overline{486} \end{aligned}$$

8.6.2 Addition und Subtraktion

Zwei periodische Dezimalbrüche können nur bei Vorliegen spezieller Bedingungen — stellenweise — addiert bzw. subtrahiert werden.

Dies ist i. a. nur möglich, wenn

- die Längen der Vorperioden übereinstimmen,
- die Längen der Perioden übereinstimmen
- und dabei keine Zehnerübergänge erfolgen.

$$\begin{aligned} 0,\overline{3} + 0,\overline{4} &= 0,\overline{7} \\ 0,1\overline{65} + 0,7\overline{28} &= 0,8\overline{93} \\ 0,\overline{8} - 0,\overline{5} &= 0,\overline{3} \\ 0,492\overline{5783} - 0,105\overline{2871} &= 0,387\overline{2912} \end{aligned}$$

8.6.3 Vorsicht

$$\begin{aligned} 4,\overline{67} + 3,\overline{2} &\overset{\sim\sim}{=} 7,\overline{87} \\ 4,\overline{67} + 3,\overline{2} &\overset{\checkmark}{=} 4,\overline{67} + 3,\overline{22} = 7,\overline{89} \end{aligned}$$

8.6.4 Alle anderen Grundrechenarten insbesondere Multiplikation und Division können eigentlich nur mittels Umwandlung in gewöhnliche Brüche bewältigt werden.

$$\begin{aligned} 0,\overline{3} \cdot 0,\overline{3} &\overset{\sim\sim}{=} 0,\overline{9} \\ 0,\overline{3} \cdot 0,\overline{3} &\overset{\checkmark}{=} 0,\overline{1} \\ 4 \cdot 1,\overline{3} &\overset{\sim\sim}{=} 5,\overline{2} \\ 4 \cdot 1,\overline{3} &\overset{\checkmark}{=} 5,\overline{3} \end{aligned}$$

8.7 Das Runden von Dezimalbrüchen$^{\ominus}$

8.7.1 Die 5/4–Rundungsregel (fachlich–allgemeine Formulierung)

Ein Dezimalbruch wird bzgl. der X–Stelle (X = z,h,t,...) auf den nächstbenachbarten X–Dezimalbruch $\begin{cases}\text{aufgerundet}\\ \text{abgerundet}\end{cases}$, wenn an der $\frac{X}{10}$–Stellenposition (d.h. rechts von der X–Stellenposition) eine der Ziffern $\begin{cases}9,8,7,6,\mathbf{5}\\ 0,1,2,3,\mathbf{4}\end{cases}$ auftritt.

8.7.2 Die 5/4–Rundungsregel (Vorschlag für schülergemäße Formulierung)

Wenn Du einen Dezimalbruch auf h runden willst, so musst Du die Ziffer an der nächst–kleineren Stelle, also die an der t–Stelle, anschauen:

Ist diese Ziffer gleich 0,1,2,3 oder 4, so wird der Dezimalbruch auf den nächst**kleineren** **ab**gerundet.

Ist diese Ziffer gleich 5,6,7,8 oder 9, so wird der Dezimalbruch auf den nächst**größeren** h–Dezimalbruch **auf**gerundet.

Überlege, wie die Rundungsregel für das Runden auf z oder t lautet!

8.7.3 Beobachtungen

Es werden hier noch einige fachliche und didaktische Beobachtungen aufgelistet:

- Das eben beschriebene Rundungsverfahren wird auch als *Kaufmännisches Runden* bezeichnet.
- Der mathematische Gehalt eines Rundungsergebnisses besteht darin, dass es die Information für ein **Intervall**, eben nicht die über einen exakten Dezimalbruch, beinhaltet. So steht beispielsweise der nach einer h–Rundung auftretende ,,Dezimalbruch" $3,14$ für das Intervall

$$[3,135; 3,145[\quad = \quad \{x \in \mathbb{Q} | 3,135 \le x < 3,145\}.$$

- Meist wird der Rundungsprozess durch die Schreibweise mit dem $\approx$–Zeichen dargestellt:

$$3,1382 \approx 3,14 \qquad \text{oder} \qquad 3,1382 \overset{h}{\approx} 3,14$$

  Dies ist eigentlich ungünstig im Hinblick darauf, dass die beiden Seiten dieser ,,Etwa"–Gleichung nicht gleichberechtigt sind: Links steht eine Zahl, rechts ein Rundungsergebnis.

  Didaktisch günstiger wäre eine Operator–Schreibweise, etwa so:

$$3,1382 \overset{(h)}{\rightsquigarrow} 3,14.$$

- Ein zweimaliges Runden bzgl. verschiedener Stufe führt zu einem anderen Ergebnis, als wenn man gleich bzgl. der gröberen Stufe rundet Beispiel:

$$3,1482 \overset{(h)}{\rightsquigarrow} 3,15 \overset{(z)}{\rightsquigarrow} 3,2$$
$$3,1482 \overset{(z)}{\rightsquigarrow} 3,1$$

- Das Rechnen mit Rundungsergebnissen unterliegt ganz eigenen Gesetzen. Wie die Beispiele

$$\begin{aligned} 3,14+1,23 &= 4,37 \overset{(z)}{\rightsquigarrow} 4,4 \\ 3,14+1,23 &\overset{(z)}{\rightsquigarrow} 3,1+1,2 = 4,3 \\ 0,45 \cdot 0,55 &= 0,2475 \overset{(z)}{\rightsquigarrow} 0,2 \\ 0,45 \cdot 0,55 &\overset{(z)}{\rightsquigarrow} 0,5 \cdot 0,6 = 0,3 \end{aligned}$$

zeigen, erhält man abweichende Ergebnisse, je nachdem, ob man

  - zuerst rundet und dann rechnet oder
  - zuerst rechnet und dann rundet.

Rundungs- und Rechenoperationen sind nicht einfach vertauschbar.

Das Fehlen dieser Einsicht führt regelmäßig zu heftigen Unklarheiten bei der Erstellung von Zeugnisnoten: Kollege A rundet erst die mdl. und die schr. Gesamtnote, berechnet dann die Zeugnis–Gesamtnote, Kollegin B berechnet erst die Zeugnis–Gesamtnote und rundet dann. Beide wundern sich über kleine Abweichungen — die sich aber gelegentlich auf gewichtige Entscheidungen auswirken können.

- Beim Alltagsrechnen und Runden mit Dezimalbrüchen wird die Unterscheidung zwischen ,,exaktem" und ,,gerundetem" Dezimalbruch kaum beachtet. Verwirrend und unklar ist beispielsweise, dass $0,3$ als exakte Zahl oder als Rundungsergebnis auftritt

$$\begin{aligned} \frac{3}{10} &= 0,3 \\ \frac{1}{3} = 0,\overline{33} = 0,\overline{3} &\rightsquigarrow 0,3 \end{aligned}$$

und dann die Gleichheit

$$0,3 \overset{\rightsquigarrow}{=} \frac{1}{3}$$

— auch wegen der übereinstimmenden Ziffer 3 — mehr oder weniger bewusst akzeptiert wird.

- Runden und Abschneiden. Eine weitere Unsicherheit kommt dadurch zustande, dass anstelle des Rundens ein Abschneiden durchgeführt wird, beispielsweise so:

$$\frac{2}{3} = 0,\overline{6} = 0,666666\ldots \rightsquigarrow \begin{array}{ll} 0,67 & \text{(Kaufm. Runden)} \\ 0,66 & \text{(Abschneiden)} \end{array}$$

8.8 Gewöhnliche Brüche und Dezimalbrüche

8.8.1 Verzahnung

Bei der Erarbeitung der Dezimalbruchrechnung soll auf eine ständige Verzahnung mit der gewöhnlichen Bruchrechnung geachtet werden. Analogien und Diskrepanzen sollen thematisiert werden.

Analogien in der Wortwahl:

- Dezimalbruch, Dezimalbruchzahl mit verschiedenen Darstellungen
- Erweitern, Kürzen: Anhängen bzw. Weglassen von Endnullen.
- Gewöhnliche - und Dezimalbruchschreibweise sollen als zwei mögliche Darstellungen für rationale Zahlen verstanden werden. Man spreche von *Umwandlung* und nicht *Umrechnung* der Schreibweisen.
- Der Begriff der rationalen Zahl ist hilfreich beim Bestreben, eine Begriffs–Unterscheidung zwischen Bruch und Dezimalbruch nicht zu stark werden zu lassen.

8.8.2 Gegenüberstellung Brüche — Dezimalbrüche

	Gewöhnliche Brüche	Dezimalbrüche
Fachmathematik	Näher an der grundlegenden Idee: Konstruktion des Quotientenkörpers.	Setzt Darstellung natürlicher Zahlen im Dezimalsystem konsistent fort.
Welche Strukturen werden deutlich?	Multiplikation, Division, Invertierung, Potenzierung.	Lineare Ordnung (Zahlenstrahl) Addition, Subtraktion Runden
Verwendung Bedeutung im Alltag	Kleine Bruchteile (Hälfte, Zweidrittel, ...) Musik Prozentrechnung (B: Rückrechnung der MWSt)	Größenangaben aller Art (Geld, Längen, Gewichte, Nicht: Zeit) Wissenschaftliche Zahldarstellung Taschenrechner, Computer **... werden deutlich bevorzugt**
Übergang zu Irrationalen Zahlen (IZ).	Begriffsbildung tritt deutlicher hervor IZ $\neq$ Bruch	Zwangloserer Übergang mittels Intervallschachtelung: IZ = Nichtperiodischer Dezimalbruch

8.9 Typische Fehler und Schwierigkeiten

H13 T2 A2

- Die *Zahl–Paar* oder *Komma–trennt* genannte Fehlauffassung bedeutet, dass ein Dezimalbruch als Zusammenstellung von zwei ganzen Zahlen vor und nach dem Komma angesehen wird.

  Es wird beispielsweise wie folgt falsch argumentiert:

$$\begin{array}{rclcrcl} 2,9 & < & 2,78, & \text{da} & 9 & < & 78 \\ 2,78 & \neq & 2,780, & \text{da} & 78 & \neq & 780 \\ 2,78+5,4 & = & 7,82, & \text{da} & 78+4 & = & 82 \\ 2,78-1,3 & = & 1,75, & \text{da} & 78-3 & = & 75 \\ 2,5\cdot 4,3 & = & 8,15, & \text{da} & 5\cdot 3 & = & 15 \end{array}$$

  Dies kann auch durch eine zu stark an der ,,Maßzahlidee” orientierten Entwicklung des Dezimalbruch–Kurses — eben dann ungünstig — befördert werden.

- Mangelnde Berücksichtigung von Stellenpositionen oder Zwischennullen.

$$\begin{array}{rcll} 0,006 & \overset{\leadsto}{=} & \frac{6}{100} & \text{(Zwei Nachkommanullen entsprechen zwei Stufenzahlnullen)} \\ 1,5\,\text{kg} & \overset{\leadsto}{=} & 1\,\text{kg}\;5\,\text{g} & \text{(Die erste Nachkommastelle entspricht der nächstkleineren Einheit)} \\ 25,72\,\text{km} & \overset{\leadsto}{=} & 25\,\text{km}\;72\,\text{m} & \text{(Die Nachkommastellen gehören zur nächstkleineren Einheit)} \\ 9,1\,\text{m} & = & 9\,\text{m}\;1\,\text{cm} & \text{(Nächst-kleinere Einheit dm unbekannt)} \end{array}$$

- Mangelnde Berücksichtigung von Zwischennullen beim Addieren oder Subtrahieren

$$\begin{array}{rcl} 3,19+4,84 & \overset{\leadsto}{=} & 8,3 \\ 5,92-2,85 & \overset{\leadsto}{=} & 3,7 \end{array}$$

- Fehler beim Rechnen mit abbrechenden Dezimalbrüchen.

  F17 T3 A2

  - Addieren und Subtrahieren. Falsche Kommausrichtung, Nichtberücksichtigung von Endnullen, Rechtsbündige Angabe.
  - Multiplikation. Die Kommaregel wird falsch angewandt.

$$\begin{array}{rcll} 7,46\cdot 8,29 & \overset{\leadsto}{=} & 6184,34 & \text{(Zwei Nachkomastellen bleiben)} \\ 7,46\cdot 8,3 & \overset{\leadsto}{=} & 619,18 & \text{(Zwei Nachkomastellen, da } 2\cdot 1=2 \text{ oder } \max\{2;1\}=2\text{)} \end{array}$$

  - Division. Nach der Division wird das Komma wieder zurückverschoben.

$$89,6 : 2,8 \overset{\checkmark}{=} 896 : 28 \overset{\checkmark}{=} 32 \overset{\leadsto}{=} 3,2$$

- Verwechslung von Punkt (als Abtrennung bei großen Ganzzahlen) und Komma

$$983.762.912,932 \quad = \quad 983,762,912.932$$

  Weltweit sind beide Konventionen üblich. In den elektronischen Medien (inklusive Taschenrechner) wird anstelle des in Festland-Europa üblichen Kommas der in englisch-orientierten Ländern präsente Punkt als Abtrennung von Ganzzahlanteil und Bruchanteil verwendet. Wiki

- Rechnen mit periodischen Dezimalbrüchen. Vgl. Kapitel 8.3.2.

- Vermeintliche Komma-Symmetrie. Schülerfehler können in einer falschen Symmetrieauffassung begründet sein. Es wird eine gedankliche ,,Symmetrieachse" im Komma lokalisiert. Beispielsweise würde aufgrund der Tatsache, dass die vierte Stelle vor dem Komma die Tausender–Stelle ist, die vierte Stelle nach dem Komma fälschlich als die Tausendstel–Stelle angesehen.

  In Wirklichkeit ist die Symmetrieachse gedanklich in der Einer-Stelle ($1 = 10^0$) anzubringen.

$$50,05 \quad \overset{\leftrightsquigarrow}{=} \quad \text{5 Zehner plus 5 Zehntel}$$

$$0,006 \quad \overset{\leftrightsquigarrow}{=} \quad \tfrac{6}{100}$$ (Die dritte Vor- bzw. Nachkommastelle steht H bzw. h)

- Falsche Berücksichtigung der Stellenwert-Nullen.

  Beim Umwandeln Bruch $\leftrightarrow$ abbrechender Dezimalbruch werden die ,,Stellenwert-Nullen" nicht oder nicht ausreichend berücksichtigt.

$$\tfrac{7}{200} = \tfrac{35}{1000} \quad \overset{\leftrightsquigarrow}{=} \quad 0,35$$

$$0,0537 \quad \overset{\leftrightsquigarrow}{=} \quad \tfrac{537}{1000}$$

8.10 Rationale Zahlen als spezielle reelle Zahlen $^{\ominus}$

8.10.1 Reelle Zahlen

Wir legen zugrunde, dass die reellen Zahlen — wie ab JGS 9 — mit Hilfe von Intervallschachtelungen eingeführt sind.

8.10.2 Unendliche Dezimalbrüche

Ohne weitere Begründung halten wir fest:

Jede reelle Zahl r lässt sich als unendlicher Dezimalbruch

$$r \quad = \quad g_{n-1}\, g_{n-2}\, \ldots\, g_0 \,\mathbf{,}\, z_1\, z_2 \ldots\ldots$$

mit Ziffern $g_k, z_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ darstellen.

Diese Darstellung ist umkehrbar eindeutig, wenn man von den Dezimalbrüchen mit Periode $\overline{9}$ absieht.

8.10.3 Grenzwert

Fachmathematisch genauer müsste man sagen, dass die reelle Zahl Grenzwert einer Reihe mit Zehnerpotenzen ist.

$$\begin{aligned} r &= g_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + g_1 \cdot 10 + g_0 \; + \; \frac{z_1}{10} + \frac{z_2}{100} + \ldots\ldots \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} g_j \cdot 10^j + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{10^k} \end{aligned}$$

Man kann mit Hilfe des Majoranten-Kriteriums beweisen, dass die „Reihe" konvergiert.

8.10.4 Rationale Zahlen als spezielle reelle Zahlen

Wir können die Erkenntnisse, die wir bis jetzt über rationale Zahlen gewonnen haben, jetzt so zusammenfassen.

Für eine reelle Zahl r sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (Def) Die Zahl heißt rational.
- Die Zahl lässt sich als gewöhnlicher Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen: $r = \frac{m}{n}$.
- Die Zahl lässt sich als periodischer (oder abbrechender) Dezimalbruch darstellen.
- Die Zahl besitzt bzgl. jeder Basis $b \geq 2$ eine periodische b–Entwicklung.

8.10.5 Irrationale Zahlen

Umgekehrt kann man dann irrationale reelle Zahlen r durch die folgenden äquivalenten Aussagen charakterisieren.

- (Def) Die Zahl heißt irrational.
- Die Zahl lässt sich nicht als gewöhnlicher Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen.
- Die Zahl lässt sich als Dezimalbruch darstellen, der nicht periodisch ist.
- Die Zahl besitzt bzgl. jeder Basis $b \geq 2$ eine nicht-periodische b–Entwicklung.

8.10.6 Beispiele

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1,4142135623730950488016887242097\ldots \\ \pi &= 3,1415926535897932384626433832795 0\ldots \\ e &= 2,7182818284590452353602874713526 6\ldots \end{aligned}$$

9 Prozentrechnung$^{\ominus}$

LP+ M6 LB 6

9.1 Einstieg

Die Prozentrechnung ist durch die folgenden drei Aussagen gekennzeichnet:

- Sie ist mathematisch eine Spielart der Bruchrechnung. Auf der Grundlage der Definition

  $$1\% \quad = \quad \frac{1}{100}$$

  sind alle Gesetzmäßigkeiten der Prozentrechnung aus denen der Bruchrechnung ableitbar.

  Das Wort ,,Prozent" ist lateinischen Ursprungs und heißt auf (etwas antiquiert anmutendem) Deutsch ,,Für Hundert".

- In Bezug auf das bürgerliche und kaufmännische Alltagsleben wird die Bruchrechnung oft als Prozentrechnung betrieben, da dann die Begriffsbildungen und Sachsituationen (vermeintlich) lebensnäher und anschaulicher erscheinen.

- Da innerhalb der Prozentrechnung

  - die gehaltvolle Bruchrechnung und
  - die anspruchsvolle Begegnung mit Sachkontexten aller Art

  in Beziehung treten, wird sie im schulischen Kontext oft als schwierig oder gar unzugänglich empfunden.

9.2 Mathematische Situation

Mathematisch gesehen ist das Prozent einfach eine Bruchzahl:

$$1\% \quad = \quad \frac{1}{100} \quad = \quad 0,01.$$

Daraus ergeben sich andere mehr oder weniger gängige Bruchzahlen, die dann auch *Prozentsätze* heißen:

$$\begin{array}{rcccccc}
50\,\% & = & 50 \cdot \frac{1}{100} & = & \frac{50}{100} & = & \frac{1}{2} \\
20\,\% & = & 20 \cdot \frac{1}{100} & = & \frac{20}{100} & = & \frac{1}{5} \\
25\,\% & = & 25 \cdot \frac{1}{100} & = & \frac{25}{100} & = & \frac{1}{4} \\
100\,\% & = & 100 \cdot \frac{1}{100} & = & \frac{100}{100} & = & 1 \\
200\,\% & = & 200 \cdot \frac{1}{100} & = & \frac{200}{100} & = & 2 \\
19\,\% & = & 19 \cdot \frac{1}{100} & = & \frac{19}{100} & = & 0,19 \\
33\,\frac{1}{3}\,\% & = & 33\,\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{100} & = & \frac{33\,\frac{1}{3}}{100} & = & \frac{1}{3} \\
33\,\% & = & 33 \cdot \frac{1}{100} & = & \frac{33}{100} & = & 0,33 \\
66\,\frac{2}{3}\,\% & = & 66\,\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{100} & = & \frac{66\,\frac{2}{3}}{100} & = & \frac{2}{3} \\
66\,\% & = & 66 \cdot \frac{1}{100} & = & \frac{66}{100} & = & 0,66
\end{array}$$

Ein erstes Ziel im Unterricht ist es, eine Vertrautheit mit diesen alltäglichen Prozentsätzen herzustellen.

9.3 Kontextfelder der Prozentrechnung

Alltagsleben / Redensarten:

- Fifty — fifty
- Hundertprozentig habe ich gestern Deine Schere wieder in die Schublade zurückgelegt.
- „Sagrotan tötet $99,9\%$ aller Bakterien".

Wirtschaft im Alltag:

- Rabatt, Skonto
- Netto + Tara = Brutto (bei Gewichten)
- Netto / Brutto (bei Löhnen, Sozialprodukt)
- Zinsen auf Sparguthaben bzw. für Darlehen
- Preiserhöhung, Mieterhöhung
- Haushaltsführung: Anteil an Lebensmitteln, Miete, Nebenkosten, Versicherungen, Auto, Freizeit, ...

Volkswirtschaft:

- Arbeitslosigkeit,
- Wirtschaftswachstum
- Marktanteile
- Tariferhöhung
- Rente: Erhöhung, Beitragssatz
- Börse

Politik:

- Wahlergebnisse
- Haushalt von Bund, Ländern oder Gemeinden.
- „20 Prozent der Weltbevölkerung verbrauchen 80 Prozent der globalen Ressourcen"
- „5 Prozent der Weltbevölkerung verbrauchen 25 Prozent des globalen Erdöls"

Lebensmittel:

- Fettgehalt in Quark, Joghurt, Milch
- Zuckergehalt in Softdrinks, Fruchtsäften

- Salzgehalt
- Alkoholgehalt (Strohrum, Schnaps, Wein, Bier)
- Fruchsaftgehalt

Naturwissenschaften:

- CO_2–Gehalt in der Atmosphäre wird in "parts per million (ppm)" gemessen.
- Anteil von Säure oder Base in wässriger Lösung.
- Anteile bei Mischungen (Legierung, chemische Stoffe)

Physik:

- Wirkungsgrad von Maschinen, Geräten, Energiewandlern aller Art
- Steigung von „schiefen Ebenen"

Mathematik:

- Steigung einer Kurve (Straße) in Prozent
- Angabe von Wahrscheinlichkeiten

Denksport:

- Eine Melone mit Gewicht 1 kg enthält 99% Wasser. Nach einer Woche enthält sie — aufgrund von Verdunstung — nur noch 98% Wasser. Wie viel wiegt sie dann?

9.4 Die Grundgleichung der Prozentrechnung

9.4.1 Die Grundgleichung

Die grundlegende Sachsituation

$$19\% \text{ von } 120 \in \text{ ist } 22,80 \in$$

wird durch die abstrakte mathematische Aussage (Formel)

$$\boxed{\text{PS} \cdot \text{GW} = \text{PW}}$$

$$\text{Prozentsatz} \cdot \text{Grundwert} = \text{Prozentwert}$$

erfasst. Man könnte diese Gleichung die *Grundgleichung der Prozentrechnung* nennen.

Wie bei jedem multiplikativen Zusammenhang zwischen drei Größen gilt es, bei zwei bekannten Größen in dieser Gleichung die jeweils dritte zu ermitteln. Dabei gibt es verschiedene Lösungsansätze:

- Auflösen der Gleichung bzw. Formel mit Hilfe der Gleichungslehre
- Dreisatz–Überlegungen
- Vereinfachende Beispiele

9.4.2 Grundlegende Sachsituation: Berechnung des Prozentwerts

Konrad erhält für sein Sparbuch–Guthaben von 250 € 6% Zinsen. Welcher Betrag ist das?

1. Wende die Grundgleichung und dann Bruchrechnung an:

   $$6\% \text{ von } 250 \in \; = \; \tfrac{6}{100} \cdot 250 \in \; = \; \tfrac{6 \cdot 5}{2} \in \; = \; 15 \in.$$

2. Dreisatz bei fixiertem Grundwert sind Prozentsatz und Prozentwert direkt proportional.

GW fixiert	PS	$\sim$	PW
250 €	100%	$\rightsquigarrow$	250 €
	1%	$\rightsquigarrow$	2,50 €
	6%	$\rightsquigarrow$	15 €

   Der Pfeil kann als ,,entsprechen" gelesen werden.

3. Dreisatz bei fixiertem Prozentsatz

PS fixiert	GW	$\sim$	PW
6%	100 €	$\rightsquigarrow$	6 €
	200 €	$\rightsquigarrow$	12 €
	50 €	$\rightsquigarrow$	3 €
	250 €	$\rightsquigarrow$	15 €

$\mathcal{A}$: Konrad erhält 15 € Zinsen für sein Sparguthaben.

9.4.3 Grundlegende Sachsituation: Berechnung des Grundwertes

Konrad erhält bei einem Zinssatz von 4% für sein Sparbuch–Guthaben 30 € Zinsen. Wie hoch ist sein Sparbuch–Guthaben?

1. Löse die Grundgleichung geeignet auf

$$\boxed{\mathrm{GW} = \frac{\mathrm{PW}}{\mathrm{PS}}}$$

und wende dann Bruchrechnung an:

$$\frac{30\,€}{4\%} = \frac{30\,€}{\frac{4}{100}} = \frac{30\,€ \cdot 100}{4} = 750\,€.$$

2. Dreisatz bei fixiertem Prozentsatz.

PS fixiert	PW	$\sim$	GW
4%	4 €	$\rightsquigarrow$	100 €
	1 €	$\rightsquigarrow$	25 €
	10 €	$\rightsquigarrow$	250 €
	30 €	$\rightsquigarrow$	750 €

3. Dreisatz bei fixiertem Prozentwert.

PW fixiert	PW	$\overset{\text{ind.}}{\sim}$	GW
30 €	1%	$\rightsquigarrow$	3000 €
	2%	$\rightsquigarrow$	1500 €
	4%	$\rightsquigarrow$	750 €

$\mathcal{A}$: Konrad hat ein Sparguthaben von 750 €.

9.4.4 Grundlegende Sachsituation: Berechnung des Prozentsatzes

Konrad bekommt auf sein Sparguthaben von 500 € im Jahr 35 € Zinsen. Wie viel Prozent beträgt der Zinssatz?

1. Löse die Grundgleichung geeignet auf

$$\boxed{\mathrm{PS} = \frac{\mathrm{PW}}{\mathrm{GW}}}$$

und wende dann Bruchrechnung an:

$$\tfrac{35\,€}{500\,€} = \tfrac{7}{100} = 7\%.$$

2. Dreisatz bei fixiertem Grundwert.

GW fixiert	PW	$\sim$	PS
500 €	5 €	$\rightsquigarrow$	1% €
	35 €	$\rightsquigarrow$	7% €

3. Dreisatz bei fixiertem Prozentwert.

PW fixiert	GW	$\overset{\text{ind.}}{\sim}$	PS
35 €	3500 €	$\rightsquigarrow$	1% €
	500 €	$\rightsquigarrow$	7% €

$\mathcal{A}$: Konrad hat sein Sparguthaben bei einem Zinssatz von 7% angelegt.

9.5 Veränderung des Grundwerts

9.5.1 Einstieg

Innerhalb vieler Sachanwendungen der Prozentrechnung wird nicht nur der Prozentwert berechnet, sondern dieser zum Grundwert addiert oder von ihm subtrahiert. Dies schlägt sich in den folgenden Formulierungen nieder:

Ein Preis

- steigt um 120%,
- steigt auf 120%,
- sinkt um 40%,
- sinkt auf 40%.

9.5.2 Erhöhung des Grundwerts

Im Jahr 1993: Beim Kauf einer Funkstation zum Preis von 7300 DM muss Dieter die MWSt von 15% aufschlagen.

1. Schritt:

$$15\% \text{ von } 7300\,\mathrm{DM} \;=\; \tfrac{15}{100}\cdot 7300\,\mathrm{DM} \;=\; 1095\,\mathrm{DM}$$

2. Schritt:

$$7300\,\mathrm{DM} + 1095\,\mathrm{DM} \;=\; 8395\,\mathrm{DM}$$

Beide Schritte zusammengefasst:

$$\begin{aligned} & \quad 7300\,\mathrm{DM} \qquad + \qquad 1095\,\mathrm{DM} \\ = \;& 100\% \cdot 7300\,\mathrm{DM} + 19\% \cdot 7300\,\mathrm{DM} \\ = \;& 119\% \cdot 7300\,\mathrm{DM} \\ = \;& 8395\,\mathrm{DM} \end{aligned}$$

Aus diesem Beispiel ergeben sich die Formel(n) für den erhöhten Grundwert (HW):

$$\boxed{\mathrm{HW} \;=\; \mathrm{GW} + \mathrm{PW} \;=\; (100\% + \mathrm{PS}) \cdot \mathrm{GW}}$$

9.5.3 Erniedrigung des Grundwerts

Im Jahr 1993: Beim Kauf eines CD–Players zum Preis von 590 DM erhält Renate einen Rabatt von 6%. Wie hoch ist der Kaufpreis?

1. Schritt:

$$6\% \text{ von } 590\,\mathrm{DM} \;=\; \frac{6}{100}\cdot 590\,\mathrm{DM} \;=\; 35,40\,\mathrm{DM}$$

2. Schritt:

$$590\,\mathrm{DM} - 35,40\,\mathrm{DM} \;=\; 554,60\,\mathrm{DM}$$

Beide Schritte zusammengefasst:

$$\begin{aligned} & 590\,\mathrm{DM} \quad - \quad 35,40\,\mathrm{DM} \\ = \; & 100\% \cdot 590\,\mathrm{DM} - 6\% \cdot 590\,\mathrm{DM} \\ = \; & 94\% \cdot 590\,\mathrm{DM} \\ = \; & 554,60\,\mathrm{DM} \end{aligned}$$

Aus diesem Beispiel ergeben sich die Formeln für den erniedrigten Grundwert (NW):

$$\boxed{\mathrm{NW} \;=\; \mathrm{GW} - \mathrm{PW} \;=\; (100\% - \mathrm{PS}) \cdot \mathrm{GW}}$$

9.5.4 Erhöhter Grundwert gegeben

Konrad hat ein Jahr nach Eröffnung seines Sparbuchs ein Guthaben von 159 €. Der Zinssatz beträgt 6%. Wie viel hat Konrad ursprünglich eingezahlt?

Schrittweise Entwicklung der Lösungsidee:

- Der Grundwert (GW= Einzahlung) entspricht dem Prozentsatz 100%.
- Der Zinssatz beträgt 6% des alten Preises.
- Das jetzige Guthaben beträgt 106% des alten Preises, also

$$\begin{aligned} 159\,€ &= 106\% \text{ von GW} \\ 3\,€ &= 2\% \text{ von GW} \\ 150\,€ &= 100\% \text{ von GW} \end{aligned}$$

$\mathcal{A}$: Er hatte 150 € eingezahlt.

Lösung mit Hilfe der Formel. Aufgrund der Formel

$$\mathrm{HW} \;=\; (100\% + \mathrm{PS}) \cdot \mathrm{GW},$$

aus dem letzten Abschnitt gilt

$$\boxed{\mathrm{GW} \;=\; \mathrm{HW} : (100\% + \mathrm{PS})}$$

und damit

$$\mathrm{GW} \;=\; 159\,€ : 106\% \;=\; 159\,€ : \frac{106}{100} \;=\; 159\,€ \cdot \frac{100}{106} \;=\; 150\,€$$

$\boxed{\text{Ü}}$ Meine Rechnung für's Reifenwechseln vom 12.4.2013 weist 20,00 Euro inklusive MWSt auf. Was war der Nettobeitrag?

9.5.5 Erniedrigter Grundwert gegeben

In einem Bekleidungsgeschäft werden Mäntel mit einem Preisnachlass von 20% verkauft, sie kosten jetzt 128 € Wie viel kosteten die Mäntel vorher?

Schrittweise Entwicklung der Lösungsidee:

- Der Grundwert (GW= alter Preis) entspricht dem Prozentsatz 100%.
- Der Preisnachlass beträgt 20% des alten Preises.
- Der jetzige Preis beträgt 80% des alten Preises, also

$$\begin{aligned} 128\,€ &= 80\% \text{ von GW} \\ 16\,€ &= 10\% \text{ von GW} \\ 160\,€ &= 100\% \text{ von GW} \end{aligned}$$

$\mathcal{A}$: Ein Mantel kostete vorher 160 €.

Lösung mit Hilfe der Formel. Aufgrund der Formel

$$\text{NW} = (100\% - \text{PS}) \cdot \text{GW},$$

aus dem letzten Abschnitt gilt

$$\boxed{\text{GW} = \text{NW} : (100\% - \text{PS})}$$

und damit

$$\text{GW} = 128\,€ : 80\% = 128\,€ : \frac{80}{100} = 128\,€ \cdot \frac{100}{80} = 160\,€.$$

9.6 Mehrmalige Veränderung des Grundwerts

1. Ein Preis wird zweimal verändert, und zwar

$\boxed{+/+}$	zunächst um 10% erhöht, dann noch einmal um 10% erhöht,
$\boxed{+/-}$	zunächst um 10% erhöht, dann wieder um 10% gesenkt,
$\boxed{-/+}$	zunächst um 10% gesenkt, dann wieder um 10% erhöht,
$\boxed{-/-}$	zunächst um 10% gesenkt, dann noch einmal um 10% gesenkt.

   - Welcher End-Preis ergibt sich, wenn der Anfangspreis 100 €, 200 € oder 500 € ist?
   - Welche prozentuale Änderung ergibt sich insgesamt zwischen Anfangs- und End-Grundpreis?
   - Probieren Sie andere Prozentsätze aus!
   - Formulieren Sie geeignete — möglichst realistische — Sachsituationen dazu!

2. Ein MP3 Player kostet 40 €. Nach der CeBit–Computermesse in Hannover wird eine neue Version auf den Markt gebracht, deren Preis um 10% erhöht ist. Da der Absatz im Sommer stagniert, erfolgt eine Preissenkung um 10%.

3. Die Kantenlänge eines Würfels wird um 10% verlängert. Um wie viel Prozent verändert sich das Volumen?

4. Jemand mit Sonnenbrille schaut durch ein getöntes Fenster ins Freie. Das Fenster mindert den Lichteinfall um 10%, die Sonnenbrille ebenfalls. Wie groß ist die gesamte Lichtschwächung?

9.6.1 Die Zinseszinsformel

Fehlt hier!

9.6.2 Zinsberechnung

Beispiel: Karl zahlt 180 € auf sein Sparbuch ein. Die Bank zahlt 4% Zinsen (pro Jahr). Wie viel Geld kann Karl nach 200 Tagen abheben?

Für ein Jahr würde Karl den Zins

$$K \cdot \frac{p}{100} = 180\,€ \cdot \frac{4}{100} = 7{,}20\,€.$$

erhalten. Dann berechnen wir den Zins für den geringeren Zeitraum mittels Dreisatz

$$\begin{array}{rl} 360 \text{ Tage} & \rightsquigarrow \ 7{,}20\,€ \\ 1 \text{ Tag} & \rightsquigarrow \ 0{,}02\,€ \\ 200 \text{ Tage} & \rightsquigarrow \ 4{,}00\,€ \end{array}$$

Dies kann man in einer einzigen Formel zusammenfassen:

$$\boxed{Z = K \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{t}{360}} \qquad p \text{ in Prozent} \qquad t \text{ in Tagen}$$

Berechnung für obiges Beispiel:

$$Z = K \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{t}{360} = 180\,€ \cdot \frac{4}{100} \cdot \frac{200}{360} = 180\,€ \cdot \frac{2}{90} = 4\,€$$

Dabei sind

Kapital	K	eingezahltes oder entliehenes Geld	180 €
Zinssatz	p		4%
Laufzeit (in Tagen)	t	Zeit der Einzahlung bzw. Ausleihe	200
Zins	Z	Zinsbetrag, den man erhält oder bezahlt	?

Hier tritt eine Besonderheit in Bezug auf die Laufzeitberechnung im Kreditwesen auf:

$$\begin{array}{rcrcl} 1 \text{ Zinsjahr} & = & 12 \text{ Zinsmonate} & = & 360 \text{ Zinstage} \\ & & 1 \text{ Zinsmonat} & = & 30 \text{ Zinstage} \end{array}$$

10 Die ganzen Zahlen

M5 LB 2

10.1 Einführung

Die Notwendigkeit der Einführung der negativen Zahlen bei bekannter Menge $\mathbb{N}_0$ der natürlichen Zahlen (inkl. Null, fortan nicht erwähnt) kann inner–algebraisch durch einen ,,Mangel" nahegelegt werden, der — entsprechend den oben beschriebenen Strängen — wie folgt formuliert werden kann:

In der Menge der $\mathbb{N}_0$ gibt es einen Mangel:

- Der Term $27 - 59$ kann in $\mathbb{N}_0$ nicht berechnet werden.
- Die Gleichung $59 + x = 27$ besitzt keine Lösung in $\mathbb{N}_0$.
- Der Operator (die Funktion) -59 kann nicht auf die Zahl 27 angewandt werden.

Es müssen also neue Zahlen eingeführt werden.

10.2 Kontextfelder aus der Sachwelt

10.2.1 Repräsentation durch Geldwerte

Man spricht hier abkürzend auch vom Schuldenmodell.

Es wird ein Konto (Girokonto, Kundenkonto, Taschengeldkonto bei den Eltern,...) betrachtet. Wesentlich ist die ,,virtuelle Realisierung" durch Buchgeld, da nur dann negative Geldwerte auftreten können.

Die folgende Tabelle gibt dann die ,,Mathematisierung" an:

Geldwerte	Guthaben	Schulden
	Forderungen = künftige Zahlungseingänge	Verbindlichkeiten = künftige Zahlungsausgänge
Bankjargon	Haben	Soll
Alltagsjargon	Schwarze Zahlen	Rote Zahlen

werden modelliert durch

Math. Objekte	Positive Zahlen	Negative Zahlen
Vorzeichen	Plus $+$	Minus $-$

Innerhalb dieses Modells sind die

- Ordnungsstruktur,
- die additive Struktur (Addition/Subtraktion),
- die Vervielfachung (mit positiven Faktoren),

- die Division (im Sinne des Aufteilens bzw. Verteilens)

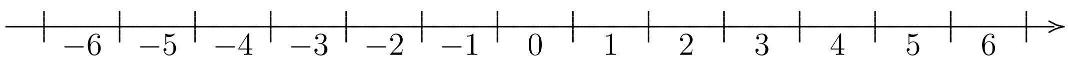
gut repräsentierbar.

Die Multiplikation zweier ganzer (insbesondere: negativer) Zahlen kann nicht durch die Multiplikation zweier Geldwerte repräsentiert werden.

10.2.2 Repräsentation durch Skalenwerte

Ganze, insbesondere negative Zahlen treten innerhalb der Alltagswelt vor allem als Skalenwerte auf. Der Begriff *Skalenbereiche* betont, dass es sich um linear geordnete Zahlbereiche handelt, die evtl. auch eine additive und Vervielfachungsstruktur aufweisen, nicht jedoch multiplikative Strukturen. Die wesentlichen Beispiele sind:

- Temperaturen: Hier ist der Begriff ,,minus" auch im Alltag präsent. Problem später: Addition und Subtraktion von Temperaturen gibt es nicht (Unterscheide Temperaturen und Temperturunterschiede).
- Höhenangaben in der Geographie: Über bzw. unter Normal Null (NN) bzw. Meeresspiegel. Die tiefste Landstelle der Welt ist in Israel: 353 u. NN.
- Wassertiefen, Tauchtiefen: Wird die Koordinatenachse mit der Null auf Wasserspiegelhöhe mit der Richtung nach oben festgelegt, so erscheinen die Tiefen negativ.
- Jahreszahlen: ,,Vor Christi Geburt" und ,,nach Christi Geburt". Ein Problem hier ist, dass Jahreszahlen Zeitintervalle und nicht Zeitpunkte beschreiben. Der Zeitraum 4 v.C. – 3 n.C. umfasst 8 Jahre, da es ein Jahr Null gibt.



- In der Physik (vor allem des GYM) treten langsam zunehmend (etwa ab der 10. Jgst.) immer mehr negative Größenwerte auf: Spannungen, Kräfte, Wegstrecken, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Stromstärken, el. Ladungen ...

10.3 Ausgangspunkt: Natürliche Zahlen und Zahlenstrahl

10.3.1 Der Zahlenstrahl

Wir gehen davon aus, dass den Schüler(inne)n der Zahlenraum und das Rechnen mit natürlichen Zahlen bekannt und vertraut sind.

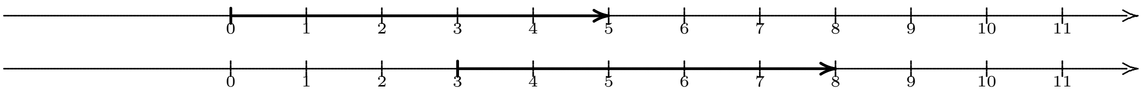
Im Mittelpunkt der Erschließung des Zahlenraums der ganzen Zahlen steht ihre Repräsentation am Zahlenstrahl. Dabei treten die folgenden Aspekte von Zahlen hervor:

- Ordinalzahlaspekt. Zahlen treten als Ordinalzahlen auf. Günstig anschaulich tritt dieser Aspekt durch die Darstellung von Zahlen am Zahlenstrahl hervor.
- Längenaspekt. Zahlen werden durch Längen von Strecken repräsentiert.
- Geometrischer Aspekt: Zahlen werden durch Vektoren (Äquivalenzklassen von Pfeilen mit gleicher Länge und gleicher Richtung) repräsentiert.

10.3.2 Pfeile

Die Repräsentation von natürlichen Zahlen und Rechenoperationen mit Hilfe von Marken und Pfeilen am Zahlenstrahl (= Zahlenhalbgerade) geschieht genauer wie folgt:

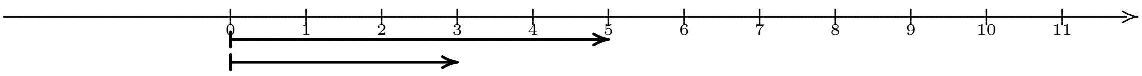
- **Rechts–weisende Pfeile** am Zahlenstrahl repräsentieren natürliche Zahlen. Bei festgelegter Einheit (meist 1 cm) legt die Länge des Pfeils die Zahl fest. Je nach Kontext ist der Pfeil mit Fußpunkt 0 ein ,,besonderer" Repräsentant der Zahl. (Der Vektorbegriff drängt sich hier auf, sollte aber wegen des Abstraktionsgrades und des Begriffsaufwands vermieden werden.)



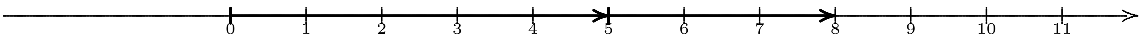
Die Pfeile repräsentieren die Zahl 5

- **Addition: Fußpunkt an Spitze** Die Addition wird dadurch repräsentiert, dass der Fußpunkt des 2. Summanden wird an Spitze des 1. Summanden gesetzt wird. Der ,,Ergebnis"–Pfeil ist dann durch die Spitze des Gesamtpfeils bei Fußpunkt Null charakterisiert.

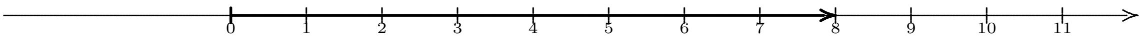
  Beispiel: $5 + 3 \;=\; 8$



Die Pfeile repräsentieren die beiden Summanden



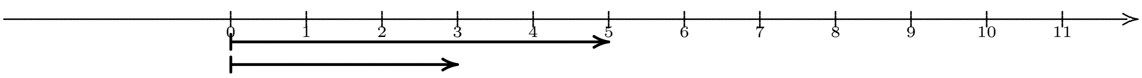
Fußpunkt an Spitze



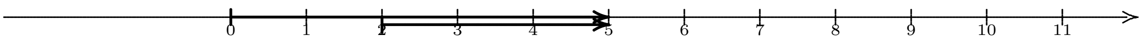
Die Summe

- **Subtraktion: Spitze an Spitze** Die Subtraktion wird repräsentiert dadurch, dass die Spitze des Subtrahenden an die Spitze des Minuenden gesetzt wird. Die Differenz wird dann durch den Pfeil mit Fußpunkt Null und Spitze gleich Fußpunkt des Subtrahenden dargestellt.

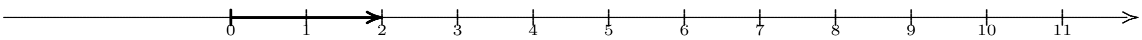
  Beispiel: $5 - 3 \;=\; 2$



Die Pfeile repräsentieren Minuend uns Subtrahend



Spitze an Spitze



Die Differenz

10.4 Einführung der ganzen Zahlen

LP 6.6

10.4.1 Einstieg über Geldwert-Modell

> Egon Leichtfuß überweist für seine neue Vee den Preis von 199 €, er hat aber nur 158 € auf dem Konto.

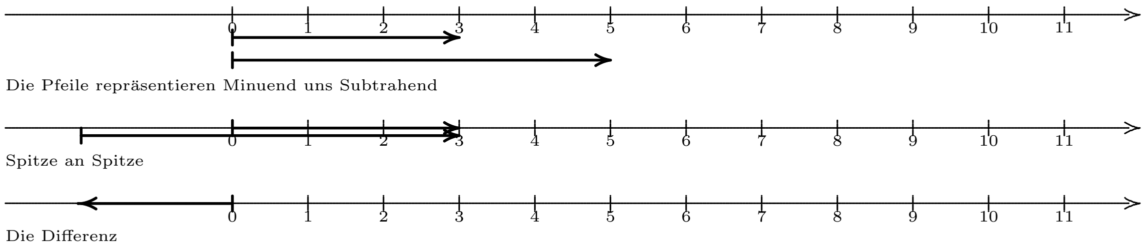
Für die Ausführung von Subtraktionen, bei denen der

> Subtrahend größer ist als der Minuend,

ist es zweckmäßig, den Zahlenstrahl über die Null hinaus nach links zur *Zahlengeraden* zu ergänzen.

10.4.2 Einstieg über Pfeil-Modell

Bei Subtraktion eines Subtrahenden, der größer ist als der Minuend, ist das Ergebnis ein links–weisender Pfeil.



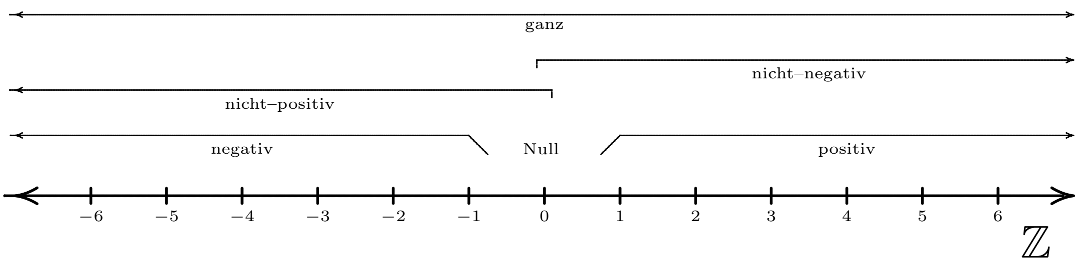
Dies ist Anlass, neue Zahlen einzuführen, die diesen nach links weisenden Pfeilen entsprechen.

10.4.3 Positive und negative Zahlen

Die auf diese Weise neu eingeführten Zahlen heißen *negative* Zahlen.

Die ursprünglichen (zu den rechts–weisenden Pfeilen gehörenden) Zahlen heißen dann auch *positiv.*

Eine Zahl, die nicht negativ (d.h. positiv oder Null) ist, heißt *nicht–negativ.* Entsprechend wird *nicht–positiv* definiert.



10.4.4 Schreib- und Sprechweise

Die Zahl, die durch einen links–weisenden Pfeil der Länge n repräsentiert wird, wird mit

$$-n$$

bezeichnet und als ,,Minus n" gesprochen. Dabei ist das Minuszeichen Bestandteil der Zahlschreibweise, es symbolisiert (noch) nicht einen Operator, der auf n angewandt wird.

Es wird zunächst zwischen Vorzeichen und Rechenzeichen unterschieden, eine dogmatisch–penible Unterscheidung lässt sich nicht leichtgängig durchhalten.

10.4.5 Fragwürdige Sprechweisen

- Die Zahl hat ein negatives Vorzeichen.
- Das ist eine Minus-Zahl.
- Null ist eine positive Zahl.

10.4.6 Menge der ganzen Zahlen

Die Menge aller Zahlen, die auf diese Weise auf der Zahlengeraden darstellbar sind, heißt die Menge der ganzen Zahlen. Sie wird mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet.

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \{\ldots\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\} \\ \mathbb{N} &\subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

10.5 Betrag und Gegenzahl

LP 6.6

10.5.1 Betrag

Der auf der Zahlengerade gemessene Abstand einer ganzen Zahl von der Zahl Null *Betrag* dieser Zahl.

Beispiele sind

$$|5| = 5, \qquad |-2| = 2, \qquad |0| = 0.$$

Der Absolutbetrag ist also immer positiv oder Null.

Konkrete Sachweltbezüge lassen sich nur schwer herstellen.

Mögliche Fehler beim (späteren) Rechnen mit Beträgen:

- $|3-5| \stackrel{?}{=} 3+5 = 8$
- $|3-5| \stackrel{?}{=} |3| - |5| = 3-5 = -2$
- $|-a| \stackrel{?}{=} a$ (Variable kommen erst später ins Spiel)

Vorsicht also mit Kurzformeln des Typs ,,Das Vorzeichen weglassen!" bzw. ,,Minuszeichen werden zu Pluszeichen".

Ist der Begriff der Gegenzahl schon bekannt, so kann der Absolutbetrag als abschnittsweise definierte Funktion dargestellt werden

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \text{ nicht–negativ,} \\ \text{Gegenzahl zu } a, & \text{falls } a \text{ negativ.} \end{cases}$$

10.5.2 Gegenzahl

Zwei verschiedene Zahlen, die auf der Zahlengeraden den gleichen Abstand zur Null haben, heißen *Gegenzahlen (zueinander)*. Die Null ist Gegenzahl zu sich selbst.

Alternativ:

Zwei Zahlen, die bezüglich der Null symmetrisch (Begriff ist bekannt aus der Grundschule) zueinander auf der Zahlengeraden liegen, heißen *Gegenzahlen (zueinander)*.

Hinweis: Man kann noch nicht die Multiplikation mit -1 zur Definition heranziehen.

10.6 Ordnungsstruktur

10.6.1 Einstieg über Geldwert-Modell

- Herr und Frau Posmeier sagen, dass sie auf dem Konto 800 ∈ HABEN.
- Das Ehepaar Negberger erzählt, dass ihr Konto einen Stand von 1500 ∈ aufweisen SOLL.
- Wer hat mehr?

Haben	Guthaben	positiv
Soll	Schulden	negativ

10.6.2 Definition der Ordnungsrelation

Eine ganze Zahl a heißt *größer* als eine andere ganze Zahl b

$$a > b,$$

wenn a auf der Zahlengeraden rechts von b liegt.

Bei einer vertikalen Ausrichtung der Zahlengeraden (beispielsweise im Koordinatensystem) liegt die kleinere Zahl unterhalb.

Fehler: $-3 < -5$.

Bereits bekannt ist der Umgang mit den Relationszeichen $\leq$ und $\geq$. Sie sollen hier ebenfalls (im Sinne des Spiralprinzips) wieder thematisiert werden.

10.7 Addition von ganzen Zahlen

LP 6.6

10.7.1 Einstieg über Geldwert-Modell

Fips hat 720 € auf seinem Konto. Er freut sich, dass demnächst 540 € Schulden dazukommen.

Die mathematische Modellierung dieser Sachsituation geschieht wie in der Tabelle angegeben

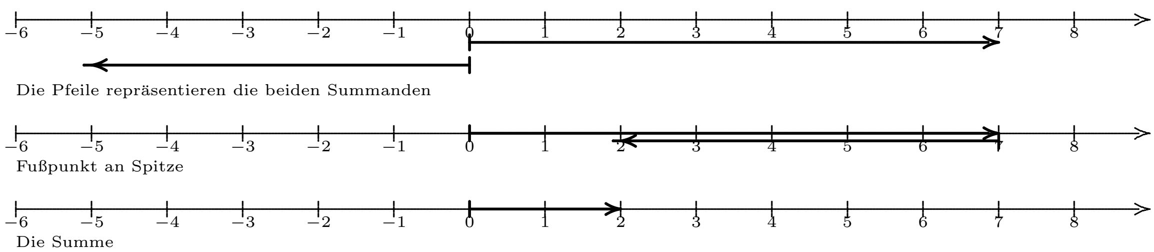
Sachsituation	Mathematik
Guthaben	Positive Zahl
Schulden	Negative Zahl
Dazukommen	Addieren

und führt damit auf die Aufgabe

$$720 + (-540) \ =$$

10.7.2 Interpretation an der Zahlengeraden

An der Zahlengeraden wird die Aufgabenstellung $7 + (-5)$ wie folgt repräsentiert:



Diese Betrachtungen können für alle vier Fälle von Vorzeichenkonstellationen

- Erster Summand positiv / Zweiter Summand positiv (bekannt)
- Erster Summand positiv / Zweiter Summand negativ (siehe oben)
- Erster Summand negativ / Zweiter Summand positiv
- Erster Summand negativ / Zweiter Summand negativ

durchgeführt werden. Sie führen schließlich zu einer Regel.

10.7.3 Zusammenfassende Regel, verbal

So werden zwei ganze Zahlen addiert:

- Bei gleichen Vorzeichen

  werden die Beträge addiert und dann

  der Summe das Vorzeichen der Summanden gegeben

- Bei verschiedenen Vorzeichen

  wird vom größeren Betrag der kleinere subtrahiert und dann
  der Differenz das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Betrag gegeben

10.7.4 Zusammenfassende Regel, formelhaft

Für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt

$$a + b \quad = \quad \begin{cases} +\left(\,|a| + |b|\,\right), & \text{wenn } a \geq 0 \text{ und } b \geq 0, \\ -\left(\,|a| + |b|\,\right), & \text{wenn } a \leq 0 \text{ und } b \leq 0, \\[6pt] +\left(\,|a| - |b|\,\right), & \text{wenn } |a| \geq |b| \text{ und } a \geq 0, \\ -\left(\,|a| - |b|\,\right), & \text{wenn } |a| \geq |b| \text{ und } a \leq 0, \\ +\left(\,|b| - |a|\,\right), & \text{wenn } |b| \geq |a| \text{ und } b \geq 0, \\ -\left(\,|b| - |a|\,\right), & \text{wenn } |b| \geq |a| \text{ und } b \leq 0. \end{cases}$$

Den Fall $a = 0$ oder $b = 0$ kann man als hier enthalten ansehen oder er wird extra thematisiert.

Wie sonst auch bei der Anwendung solcher Regeln wird anfangs die Regel im Wortlaut umgesetzt, später entsteht ein intuitiv einsichtiger Umgang mit dieser Rechensituation.

10.8 Subtraktion von ganzen Zahlen

LP 6.6

10.8.1 Einstieg über Geldwert-Modell Grips Holm hat 370 € Schulden (= Soll) auf seinem Konto. Er freut sich, dass es demnächst 280 € Schulden weniger werden.

Die mathematische Modellierung dieser Sachsituation geschieht wie in der Tabelle angegeben

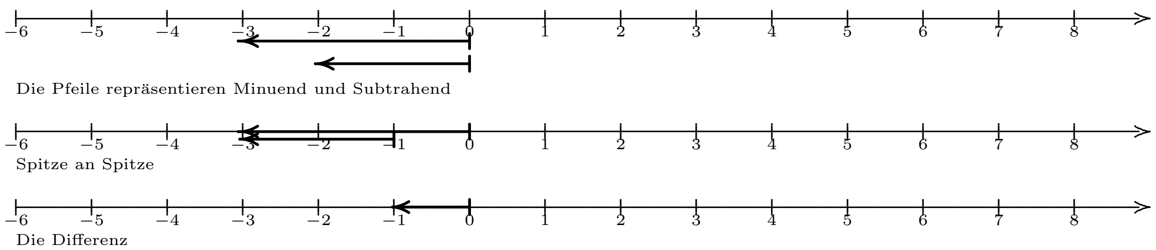
Sachsituation	Mathematik
(Guthaben	Positive Zahl)
Schulden	Negative Zahl
Weniger werden	Subtrahieren

und führt damit auf die Aufgabe

$$-370 - (-280) =$$

10.8.2 Interpretation an der Zahlengeraden

An der Zahlengeraden wird die Aufgabenstellung $-3 - (-2)$ wie folgt repräsentiert:



Diese Betrachtungen können für alle vier Fälle von Vorzeichenkonstellationen

- Minuend positiv / Subtrahend positiv (bekannt)
- Minuend positiv / Subtrahend negativ
- Minuend negativ / Subtrahend positiv
- Minuend negativ / Subtrahend negativ (siehe oben)

durchgeführt werden. Sie führen schließlich zu einer Regel.

10.8.3 Zusammenfassende Regel, verbal

Eine ganze Zahlen wird von einer anderen subtrahiert, indem man ihre Gegenzahl addiert.

10.8.4 Zusammenfassende Regel, formelhaft

Für zwei Zahlen $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned} a-(+n) &= a+(-n) \\ a-(-n) &= a+(+n) \end{aligned}$$

Den Fall $a = 0$ oder $n = 0$ kann man als hier enthalten ansehen oder er wird extra thematisiert.

10.8.5 Beispiel

Auf dem sonnennächsten Planeten Merkur herrscht tagsüber eine Temperatur von 420 °C, nachts ist sie −180 °C. Berechne den Temperaturunterschied **mit Hilfe einer Differenz**.

10.9 Zusammenschau und Vorteile bei Addition und Subtraktion

10.9.1 Regel bei Operatorauffassung

Bei Betonung der Operatorauffassung bei Addition und Subtraktion ganzer Zahlen ergibt sich eine Zusammenfassung der obigen Gesetze in einer Tabelle:

	Bei Addition einer	Bei Subtraktion einer
	Gehe auf der Zahlengeraden um den Betrag nach ...	
positiven Zahl:	rechts $\longrightarrow$	$\longleftarrow$ links
negativen Zahl:	$\longleftarrow$ links	rechts $\longrightarrow$

10.9.2 Rechenvorteile

Ganz allgemein ist es günstig, bei der Addition von ganzen Zahlen

- die betragsgrößere Zahl als Operanden und
- die betragskleinere Zahl als Operator

aufzufassen. Beispiele:

$$\begin{aligned} 12 + 4837 &\quad\to\quad 4837 + 12 \\ 23 + (-97) &\quad\to\quad (-97) + 23 \\ (-15)\ +\ 5297 &\quad\to\quad 5297 + (-15) \\ (-4)\ +\ (-9) &\quad\to\quad (-9)\ +\ (-4) \end{aligned}$$

Diesem Vorgehen liegt das Kommutativgesetz der Addition und die Operatorauffassung beim Addieren zugrunde.

Rechenvorteile ergeben sich auch bei Anwendung des Assoziativgesetzes

$$\begin{aligned} (33 + 58) + 42 &\quad\to\quad 33 + (58 + 42) \\ (33 + 58) + (-68) &\quad\to\quad 33 + ((58) + (-68)) \end{aligned}$$

10.10 Auflösung von Klammern$^{\ominus}$

10.10.1 Die Plusklammerregel

Beispiele:

$$\begin{array}{rcccl} 8+(-17+12) &=& 8+(-5) &=& 3 \\ 8-17+12 &=& -9+12 &=& 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} 3+(+5-7) &=& 3+(-2) &=& 1 \\ 3+5-7 &=& 8-7 &=& 1 \end{array}$$

Aus den Beispielen ist ersichtlich die ...

Plusklammerregel:

> Plusklammern (d.h. Klammern und Pluszeichen vor der Klammer) dürfen einfach weggelassen werden.
>
> Gegebenenfalls muss ein Pluszeichen vorher ergänzt werden.

10.10.2 Die Minusklammerregel

Beispiel:

$$\begin{array}{rcccl} 8-(-13) &=& 8+13 &=& 21 \\ 8+13 &=& &=& 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} 8-(-13+16) &=& 8-3 &=& 5 \\ 8+13-16 &=& &=& 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} 8-(+4-5) &=& 8-(-1) &=& 9 \\ 8-4+5 &=& &=& 9 \end{array}$$

($*$ Ergänze durch Farben und Pfeile $*$)

Aus den Beispielen ist ersichtlich die ...

Minusklammerregel:

> Minusklammern (d.h. Klammern und Minuszeichen vor der Klammer) dürfen weggelassen werden, wenn alle Vorzeichen in der Klammer geändert werden.
>
> Gegebenenfalls muss ein Pluszeichen vorher ergänzt werden.

Eine gelegentlich auftretende Fehlinterpretation der Minusklammerregel besteht darin, dass das Vorzeichen der Klammer als Vorzeichen des ersten Summanden gedeutet wird und demzufolge geändert wird:

$$\begin{array}{rcl} 8-(4-5) &\overset{\leftrightsquigarrow}{=}& 8+4+5 \\ 8-(4+5) &\overset{\leftrightsquigarrow}{=}& 8+4-5 \end{array}$$

10.11 Multiplikation ganzer Zahlen

LP 7.1

10.11.1 Die vier Fälle

Es werden nacheinander die vier Fälle von Vorzeichenkonstellationen betrachtet:

- 1. Faktor positiv / 2. Faktor positiv (bekannt)
- 1. Faktor positiv / 2. Faktor negativ
- 1. Faktor negativ / 2. Faktor positiv
- 1. Faktor negativ / 2. Faktor negativ

durchgeführt werden. Zusätzlich sollte auch die Zahl Null einbezogen werden.

a) Plus · plus. Dieser Fall ist aus dem Rechnen in $\mathbb{N}$ bekannt.

$$3 \cdot (+4) \quad = \quad 4 + 4 + 4 = 12 \qquad \text{(Fortgesetzte Addition)}$$

b) Plus · Minus:

Fips Luftikus sagt zum Gerichtsvollzieher: Sie brauchen nicht zu pfänden, mein Kontostand hat sich verdreifacht.

$$3 \cdot (-4) \quad = \quad (-4) + (-4) + (-4) = -12$$

c) Minus · Plus: Es soll das Kommutativgesetz gelten:

$$(-3) \cdot (+4) \stackrel{\text{KG}}{=} (+4) \cdot (-3) = -12$$

d) Minus · Minus: Es lässt sich ein ,,Bildungsgesetz” heranziehen:

$$\begin{aligned} (-3) \cdot 3 &= -9 \\ (-3) \cdot 2 &= -6 \\ (-3) \cdot 1 &= -3 \\ (-3) \cdot 0 &= 0 \\ (-3) \cdot (-1) &= ? \\ (-3) \cdot (-2) &= ? \end{aligned}$$

Die Ergebnisse +3 und +6 für die letzten beiden Zeilen drängen sich auf.

Eine stärker fachmathematisch orientierte Argumentation ist wie folgt: Es soll beim Rechnen mit ganzen Zahlen das Distributivgesetz gültig bleiben. Deshalb gilt — beispielsweise für die beiden negativen Zahlen -2 und -3

$$\begin{aligned} (-3) \cdot (-2) - 6 &= (-3) \cdot (-2) + (-6) = (-3) \cdot (-2) + (-3) \cdot (+2) \\ &\stackrel{\text{DG}}{=} (-3) \cdot [(-2) + (+2)] = (-3) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Das aber bedeutet, dass

$$(-3) \cdot (-2) = +6.$$

sein muss.

10.11.2 Zusammenfassende Regel, verbal

Zwei ganze Zahlen werden multipliziert, indem man

- ihre Beträge multipliziert und
- dem Produkt ein $\begin{cases} + \\ - \end{cases}$ als Vorzeichen gibt, wenn die beiden Faktoren $\begin{cases} \text{gleiche} \\ \text{verschiedene} \end{cases}$ Vorzeichen haben.

10.11.3 Zusammenfassende Regel, formelhaft

Für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt

$$a \cdot b \quad = \quad \begin{cases} +\,|a| \cdot |b|\,, & \text{wenn } a \text{ und } b \text{ gleiches Vorzeichen haben,} \\ -\,|a| \cdot |b|\,, & \text{wenn } a \text{ und } b \text{ verschiedene Vorzeichen haben.} \end{cases}$$

Den Fall $a = 0$ oder $b = 0$ kann man als hier enthalten ansehen oder er wird extra thematisiert.

10.11.4 So nicht.

Gelegentlich findet man eine Formulierung in etwa dieser Art:

$$\begin{aligned} (+a) \cdot (+b) &= +\,|a| \cdot |b| \\ (+a) \cdot (-b) &= -\,|a| \cdot |b| \\ (-a) \cdot (+b) &= -\,|a| \cdot |b| \\ (-a) \cdot (-b) &= +\,|a| \cdot |b| \end{aligned}$$

Dies ist richtig, wenn $a, b \geq 0$. Sind aber $a, b \in \mathbb{Z}$ oder werden a, b durch Variable oder Terme ersetzt, so sind diese Gleichungen falsch.

10.11.5 Weitere Bemerkungen

- Der Spezialfall der Multiplikation mit -1 ist sehr wichtig und in seiner Bedeutung nicht zu unterschätzen im Hinblick auf das spätere Rechnen mit Termen.

  Man kann ergänzend herausarbeiten, dass die Multiplikation einer Differenz mit -1 gleichbedeutend ist mit einer Vertauschung von Minuend und Subtrahend. Beispiele:

  $$\begin{aligned} (-1) \cdot (5 - 3) &= (-1) \cdot 2 = -2 = 3 - 5 \\ (-1) \cdot [(-2) - 5] &= (-1) \cdot (-7) = +7 = 5 - (-2) \end{aligned}$$

- Sollen ganze Zahlen schriftlich multipliziert werden, so rechnet man dabei nur mit den Beträgen. Das richtige Vorzeichen wird anschließend hinzugefügt.
- Genau genommen ist der Sonderfall „Multiplikation mit Null" in der oben formulierten Regel enthalten. Eventuell ist es aber günstiger, diesen Sonderfall in der Regel zu thematisieren, beispielsweise so:

  Das Produkt einer ganzen Zahl und der Zahl Null ist Null. In Formelschreibweise:

  $$a \cdot 0 = 0 \qquad \text{für alle} \quad a \in \mathbb{Z}.$$

10.11.6 Minus · Minus ergibt Plus

Die Regel für die Multiplikation zweier negativer Zahlen lässt sich leider nur schwer außermathematisch oder geometrisch fundieren.

Einen Zugang bietet die Tatsache, dass es sich beim Vorzeichenwechsel bzw. bei der Multiplikation mit -1 um eine Involution handelt, die mit der Multiplikation verträglich ist:

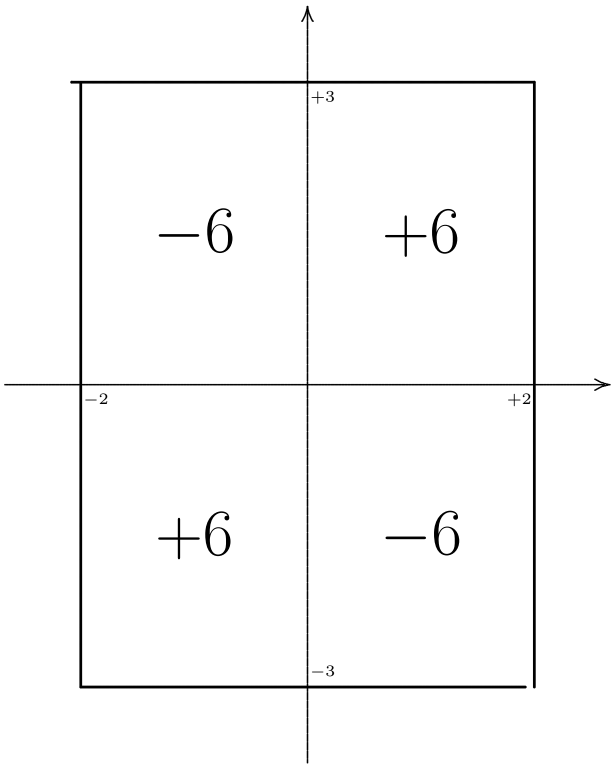
> Ändert sich in einem Produkt das Vorzeichen eines der Faktoren, so ändert sich auch das Vorzeichen des Produktwertes.

Diese Beobachtung, die im übrigen auch für Produkte mit mehr als zwei Faktoren gültig ist, kann man mit Hilfe von Anwendungen oder Analogien mehr oder weniger geeignet umsetzen:

- Analogie der doppelten Negation in der Aussagenlogik.
- Später: Das Ändern der Relationszeichen bei Multiplikation/Division von Ungleichungen mit negativen Zahlen.

10.11.7 Deutung im Koordinatensystem: Produkte als Rechtecksflächen

Produkte von ganzen Zahlen werden als vorzeichenbehaftete Rechtecksflächen gedeutet. (Emma Castelnuovo, 1968)



Es besteht dann der folgende Gedankengang:

- Bei der Berechnung der Fläche(-nmaßzahl) eines Rechtecks im 1. Quadranten eines Koordinatensystems stellt sich heraus, dass diese gleich dem Produkt von x-Koordinate und y-Koordinate der Seiten außerhalb der Achsen ist.

- Klappt man das Rechteck nach links oder nach unten um, so ergibt sich bei gleicher Vorgehensweise als (orientierte) Fläche eine negative Zahl.

  Interpretation: Beim Umklappen ändert die (orientierte) Fläche ihr Vorzeichen.

- Klappt man die Fläche ein weiteres Mal in den dritten Quadranten (links unten) um, so muss sich wieder das Vorzeichen ändern: Diese Fläche ist wieder positiv.

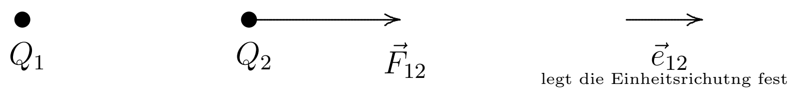
  Also ist das Produkt zweier negativer Koordinaten positiv.

10.11.8 Elektrische Kräfte

Eine Anwendung der Regel 10.11.6 tritt bei physikalischen Gesetzen über Kräfte auf, die sowohl anziehend als auch abstoßend sein können.

So lautet beispielsweise das Coulomb–Gesetz für die Kraft zwischen zwei el. Ladungen:

$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot r^2} \cdot \vec{e}_{12}$$



Wird eine der Ladungen durch die ,,Gegen-Ladung" ersetzt, so ändert sich auch das Vorzeichen der Kraft.

10.11.9 Magnetische Kräfte

Eine analoge Situation liegt für magnetische Kräfte vor. Magnetische Kräfte sind im Alltag bzw. im Experiment leichter zu beobachten, die mathematische Formulierung des zugehörigen Gesetzes ist deutlich anspruchsvoller.

Gerade wegen der unterschiedlichen Kraftrichtungen sind die verursachenden Größen (el. Ladungen bzw. el. Ströme) vorzeichenbehaftet.

Der Hinweis auf diese physikalischen Situationen kann nicht oder nur sehr bedingt (veranschaulichend – analogiebildend) in den Unterricht der unteren Jahrgangsstufen eingebracht werden. Er beinhaltet vielmehr eine später mögliche physikalisch begründete Einsicht in die Konsistenz der Multiplikation–Vorzeichen–Regeln.

10.12 Division ganzer Zahlen

LP 7.1

10.12.1 Einstieg

Die Regeln für die Division ergeben sich aus denen der Multiplikation, wenn man beachtet, dass es sich um die Umkehroperation handelt:

$$\begin{array}{rcrlrcr} 20 : \quad 5 & = & 4, & & & & \\ 20 : (-5) & = & -4, & \text{da} & (-4) \cdot (-5) & = & 20 \\ (-20) : \quad 5 & = & -4, & \text{da} & (-4) \cdot \quad 5 & = & -20 \\ (-20) : (-5) & = & 4, & \text{da} & 4 \cdot (-5) & = & -20 \end{array}$$

Aus diesem Beispiel kann man — induktiv — auf die allgemeine Regel schließen, die — analog zu der der Multiplikation — formuliert werden kann:

10.12.2 Zusammenfassende Regel, verbal

Eine ganze Zahl wird durch eine ganze Zahl ungleich Null dividiert, indem man

- ihre Beträge dividiert und
- dem Quotient ein $\begin{cases} + \\ - \end{cases}$ als Vorzeichen gibt, wenn Dividend und Divisor

$\begin{cases} \text{gleiche} \\ \text{verschiedene} \end{cases}$ Vorzeichen haben.

10.12.3 Zusammenfassende Regel, formelhaft

Für zwei Zahlen $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt

$$a : b \quad = \quad \begin{cases} +|a| : |b|\,, & \text{wenn } a \text{ und } b \text{ gleiches Vorzeichen haben,} \\ -|a| : |b|\,, & \text{wenn } a \text{ und } b \text{ verschiedene Vorzeichen haben.} \end{cases}$$

10.12.4 Bemerkungen

- Beachte die von den bisherigen Rechengesetzen her bekannte Tatsache, dass die Division durch Null **sinnlos** ist. (Die Formulierung als **Verbot** ist ungünstig.)
- Die Division von Null durch eine Zahl ungleich Null ist sehrwohl sinnvoll. Es gilt immer

  $$0 : a = 0.$$

- Weitere Spezialfälle:

  $$a : 1 \;=\; a, \qquad a : a \;=\; 1.$$

- Eine Division mit Rest ist bei negativen Zahlen nicht so gut möglich.
- Zusatz:
  - Die Multiplikation einer Zahl mit -1 und
  - die Division einer Zahl durch -1 und
  - Änderung des Vorzeichens einer Zahl

  bedeuten das gleiche.

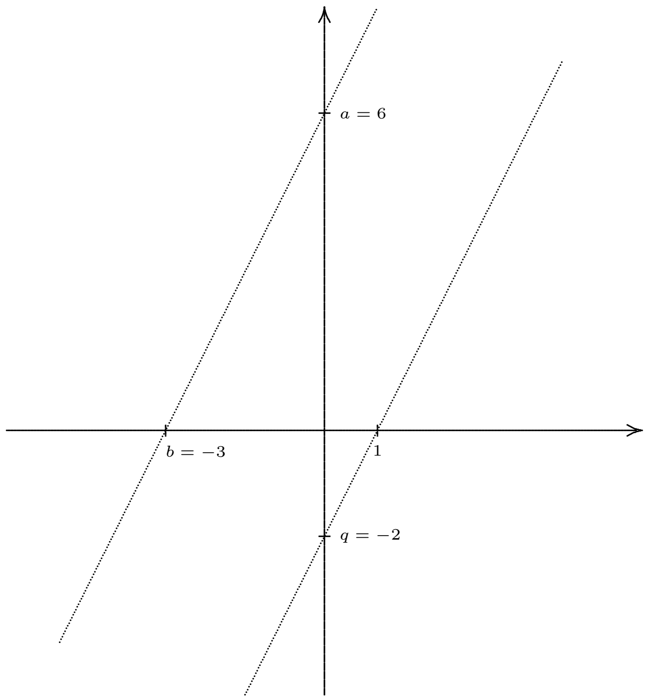
10.12.5 Deutung im Koordinatensystem: Quotienten als Geradensteigungen

Während bei der Multiplikation (vgl. Abschnitt 10.11.7) Produkte ganzer Zahlen als vorzeichenbehaftete Rechtecksflächen gedeutet werden, werden nun Quotienten als vorzeichenbehaftete Steigungen von Geraden interpretiert.

Am Beispiel

$$a : b \quad = \quad 6 : (-3)$$

wird aufgezeigt, wie zu verfahren ist.



$$6 : (-3) = -2$$

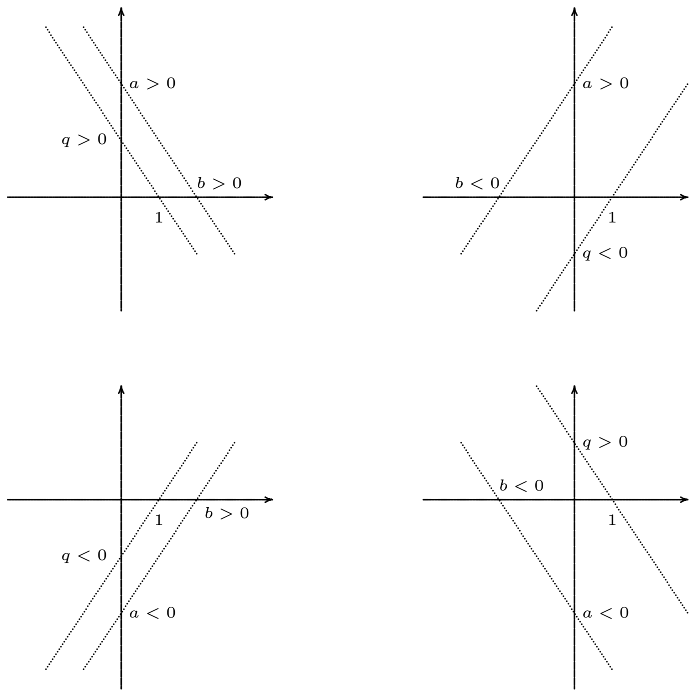
- Markiere den Dividenden a als Wert auf der Hochwertachse.
- Markiere den Divisor b als Stelle auf der Rechtswertachse.
- Zeichne die Gerade durch die beiden Punkte.
- Parallelverschiebe die Gerade, so dass sie an der Stelle 1 die Rechtswertachse schneidet.
- Lies den Wert q auf der Hochwertachse ab, bei dem die verschobene Gerade die Hochwertachse schneidet.

Begründung: Der Quotient wird als Steigung interpretiert. Da die Steigung einer Geraden bei Parallelverschiebung unverändert bleibt, gilt

$$a : b \quad = \quad q : 1,$$

also ist q der gesuchte Wert.

Aus dieser graphischen Deutung heraus können die Vorzeichenregeln erarbeitet werden.



Man überlege zusätzlich noch, wie sich die Fälle ,,$a = 0$” oder ,,$b = 0$” bei dieser Deutung auswirken.

10.13 Das Distributivgesetz$^{\ominus}$

10.13.1 Einstieg über eine Sachsituation

Agnes kauft für ihre Geburtstagsparty Take–Home–Süßigkeiten ein, es kommen 6 Freundinnen. Sie kauft für jede der sechs Freundinnen 2 Korn–Riegel, 5 Tütchen Eine–Welt–Gummibärchen, 4 zuckerfreie Lutscher, 2 HAselNUssTAfeln, 3 Lakritzspiralen.

Wie viele Teile sind dies insgesamt:

Beim Einkaufen rechnet sie:

$$6 \cdot 2 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 12 + 30 + 24 + 12 + 18 = 96$$

Beim Austeilen am Abend rechnet sie:

$$6 \cdot (2 + 5 + 4 + 2 + 3) = 6 \cdot 16 = 96.$$

10.13.2 Verschiedene Formulierungen

Für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{array}{rclcrcl}
a \cdot (b + c) & = & a \cdot b + a \cdot c & & & & \\
a \cdot (b - c) & = & a \cdot b - a \cdot c & & & & \\
(a + b) \cdot c & = & a \cdot c + b \cdot c & \qquad & (a + b) : c & = & a : c + b : c \\
(a - b) \cdot c & = & a \cdot c - b \cdot c & \qquad & (a - b) : c & = & a : c - b : c \\
 & & & & & & \text{Hier } c \neq 0
\end{array}$$

Letztlich sind alle Gesetze äquivalent.

10.14 Ganze Zahlen als Äquivalenzklassen$^{\ominus}$

F14 T1

Das Äquivalenzklassenmodell beschreibt, wie fachmathematisch mit den Mitteln der Mengenlehre und im Rahmen ihrer Axiomatik ganze Zahlen konstruiert werden.

$\boxed{\text{A}}$ Ausgangspunkt ist die Menge $\mathbb{N}_0$ der natürlichen Zahlen mit Null.

$\boxed{\text{B}}$ Bilde das *Kartesische Produkt* der beiden Mengen $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}_0$

$$\mathcal{Z} \quad = \quad \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 = \{(m,n) |\, m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

$\boxed{\text{R}}$ Auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ wird eine Relation definiert:

$$(m,n) \sim (k,\ell) \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} m + \ell = k + n.$$

Diese Definition könnte man viel anschaulicher auch durch die Gleichung

$$m - n = k - \ell \qquad \text{(differenzengleich)}$$

vollziehen. Beachte aber, dass die in dieser Gleichung auftretenden Terme wegen des oben beschriebenen Mangels m priori im allgemeinen nicht wohldefiniert sind.

Beispiele und Nichtbeispiele:

$$(5,2) \sim (7,4) \qquad (111,51) \sim (74,14) \qquad (0,5) \sim (7,12) \qquad (0,0) \sim (7,7)$$
$$(1,2) \not\sim (1,3) \qquad (4,9) \not\sim (2,3)$$

$\boxed{\text{Ä}}$ In Abschnitt 10.14.1 zeigen wir die folgenden Eigenschaften

a) Die Relation $\sim$ ist *reflexiv*. Das heißt:

Jedes Paar steht zu sich selbst in Relation:

$$(m,n) \sim (m,n) \qquad \text{für alle } (m,n) \in \mathcal{Z}.$$

b) Die Relation $\sim$ ist *symmetrisch*. Das heißt:

Wenn ein (erstes) Paar zu einem anderen (zweiten) in Relation steht, dann steht auch der zweite zum ersten in Relation:

$$(m,n) \sim (k,\ell) \implies (k,\ell) \sim (m,n) \qquad \text{für alle } (m,n),(k,\ell) \in \mathcal{Z}.$$

c) Die Relation $\sim$ ist *transitiv*. Das heißt:

Wenn ein (erstes) Paar zu einem anderen (zweiten) in Relation steht und dieses zweite zu einem dritten, dann steht auch das erste zum dritten in Relation:

$$(m,n) \sim (k,\ell) \text{ und } (k,\ell) \sim (p,q) \implies (m,n) \sim (p,q) \qquad \text{für alle } (m,n),(k,\ell),(p,q) \in \mathcal{Z}.$$

d) Wenn eine Relation alle diese drei Eigenschaften aufweist, so heißt sie *Äquivalenzrelation*. Äquivalenzrelationen haben eine immense Bedeutung in der gesamten Mathematik, da mit ihrer Hilfe Äquivalenzklassen sinnvoll gebildet werden können.

$\boxed{\text{K}}$ Eine Teilmenge K von $\mathcal{Z}$ heißt ganz allgemein **Äquivalenzklasse** bzgl. einer Äquivalenzrelation $\sim$, wenn

- je zwei beliebige Paare in K zueinander in Relation stehen:

$$(m,n),(k,\ell) \in K \quad \Longrightarrow \quad (m,n) \sim (k,\ell) \qquad \text{für alle } (m,n),(k,\ell) \in \mathcal{Z}.$$

- ein beliebiges Paar in K und ein beliebiges Paar außerhalb K nicht in Relation stehen:

$$(m,n) \in K, (k,\ell) \notin K \quad \Longrightarrow \quad (m,n) \not\sim (k,\ell) \qquad \text{für alle } (m,n),(k,\ell) \in \mathcal{Z}.$$

$\boxed{\text{Z}}$ Die ganzen Zahlen werden nun definiert als die Äquivalenzklassen $[(m,n)]$ dieser Äquivalenzrelation.

$$\mathbb{Z} := \{[(m,n)] \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) | \, m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}_0\}$$

$\boxed{\text{N}}$ Die Menge der (bisherigen) natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$ kann mittels der Identifizierung $m = [(m,0)]$ als Teilmenge der Menge der ganzen Zahlen aufgefasst werden. Also

$$\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}.$$

$\boxed{\text{H}}$ Dann werden die lineare Ordnung, die Addition und Multiplikation sowie die Multiplikation und Division unter Beachtung des Hankel'schen Permanenzprinzips auf die Menge $\mathbb{Z}$ fortgesetzt. Man muss bei den Definitionen sicherstellen, dass sie nicht von konkreten Vertretern innerhalb einer Äquivalenzklasse abhängen.

10.14.1 Beweis

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

(1) Wegen $a + b = a + b$ gilt $(a,b) \sim (a,b)$, also Reflexivität.

(2) Es gelte $(a,b) \sim (c,d)$. Dann gilt

$$a + d = c + b \quad \Longrightarrow \quad c + b = a + d \quad \Longrightarrow \quad (c,d) \sim (a,b)$$

und damit Symmetrie.

(3) Zum Beweis der Transitivität schreiben wir eine Kette von Folgerungen auf

$$\left\{ \begin{array}{l} (a,b) \sim (c,d) \\ (c,d) \sim (e,f) \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + d = c + b \\ c + f = e + d \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \quad a + d + c + f = c + b + e + d$$

$$\Longrightarrow \quad a + f + (c + d) = b + c + (c + d)$$

$$\overset{\text{Ei/A}}{\Longrightarrow} \quad a + f = b + e$$

$$\Longrightarrow \quad (a, b) \sim (e, f).$$

10.14.2 Kommentare

- Das analoge Verfahren wurde bei der Erweiterung $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}_0^+$ angewandt. Siehe Kapitel 7.1.
- Noch allgemeiner lässt es sich bei jeder Halbgruppe anwenden, in der eine Gleichung der Form $x + a = b$, höchstens eine Lösung x besitzt.

11 Die reellen Zahlen

11.1 Unvollständigkeit der rationalen Zahlen

LP 9.2

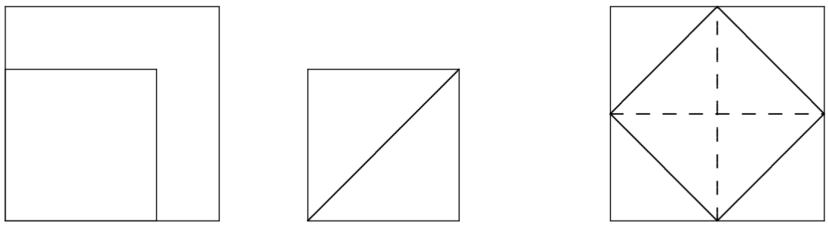
Bereits die klassisch–griechische Mathematik kannte die Unvollständigkeit der Menge der rationalen Zahlen.

11.1.1 Geometrische Frage

Ausgangspunkt sind die beiden äquivalenten geometrische Fragestellungen:

(F_1) Die Fläche eines Quadrats ist doppelt so groß wie die eines anderen. Gibt es zwei natürliche Zahlen m, n, so dass die Seitenlängen dieser beiden Quadrate im Verhältnis $m : n$ stehen?

(F_2) Gibt es zwei natürliche Zahlen m, n, so dass die Längen von Diagonale und Seite eines Quadrats im Verhältnis $m : n$ stehen?



(F_1) (F_2)

Die Figur rechts zeigt (ohne Verwendung des Satzes von Pythagoras) auf, dass die Bejahungen der beiden Fragestellungen (F_1) und (F_2) äquivalent sind.

11.1.2 Algebraisierung

Bei einer Algebraisierung dieser Fragestellung trifft man auf die folgende Fragen

(F_3) Gibt es zwei natürliche Zahlen m, n, so dass das Quadrat der ersten Zahl doppelt so groß ist wie das der zweiten?

$$m^2 = 2 \cdot n^2$$

(F_4) Gibt es zwei natürliche Zahlen m, n, so dass das Quadrat ihres Quotienten gleich 2 ist?

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

11.1.3 Satz: Wurzel zwei

Es gibt keine rationale Zahl $a = \frac{m}{n}$ mit $a^2 = 2$.

Gleichbedeutend damit sind die Aussagen:

- Die Gleichung $x^2 = 2$ hat für $G = \mathbb{Q}$ eine leere Lösungsmenge.
- Die Funktion $x^2 - 2$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$.
- Das quadratische Polynom $x^2 - 2$ hat über $\mathbb{Q}$ keine Linearfaktoren.

11.1.4 Beweis (Variante I)

Wir versuchen, den Beweis schulnah zu formulieren: Die eigentlich schwierige Tatsache, dass es sich um einen Widerspruchsbeweis handelt, wird durch bestimmte Formulierungen entschärft.

(1) Wir suchen eine Lösung für (F_4), testen also eine beliebige rationale Zahl (Bruch) $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ daraufhin, ob ihr Quadrat gleich 2 sein kann.

(2) Wir kürzen so weit wie möglich und erhalten zwei neue natürliche Zahlen $m_{\text{neu}}, n_{\text{neu}}$ mit

$$\frac{m}{n} = \frac{m_{\text{neu}}}{n_{\text{neu}}},$$

wobei m_{neu} und n_{neu} teilerfremd sind.

(3) Da das Quadrat von $\frac{m}{n}$ gleich 2 sein soll, muss

$$\frac{m_{\text{neu}}^2}{n_{\text{neu}}^2} = \left(\frac{m_{\text{neu}}}{n_{\text{neu}}}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \qquad (*)$$

sein.

(4)

Da die beiden Zahlen m_{neu} und n_{neu} teilerfremd sind,

$\Longrightarrow$ besitzen sie keine gemeinsamen Primfaktoren.

$\Longrightarrow$ Dann besitzen aber auch die Quadrate m_{neu}^2 und n_{neu}^2 keine gemeinsamen Primfaktoren,

$\Longrightarrow$ und sind deshalb teilerfremd.

$\Longrightarrow$ Das aber bedeutet, dass der Bruch in $(*)$ nicht gekürzt werden kann.

$\Longrightarrow$ Der Bruch kann niemals den Wert 2 annehmen.

11.1.5 Beweis (Variante II)

(1) Wir stellen die Frage (F_3), ob es zwei Quadratzahlen gibt, von denen die eine doppelt so groß ist wie die andere.

$$m^2 = 2 \cdot n^2 \qquad ?$$

(2) Wenn m und n gemeinsame Teiler besitzen, so dividieren wir die beiden Seiten der Gleichung durch die Quadrate dieser gemeinsamen Teiler: Es entsteht eine neue Gleichung

$$m_{\text{neu}}^2 = 2 \cdot n_{\text{neu}}^2,$$

wobei m_{neu} und n_{neu} teilerfremd sind.

(3) Wir führen für diese Gleichung einen Endziffernvergleich durch:

Alle Möglichkeiten für die Endziffern von n_{neu} und die Folgerungen daraus sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

n_{neu}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_{neu}^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$m_{\text{neu}}^2 = 2 \cdot n_{\text{neu}}^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

(4)

- Aus der Tabelle kann man ablesen, $m_{\text{neu}}^2 = 2n_{\text{neu}}^2$ als Endziffer eine 0, eine 2 oder eine 8 haben muss.
- Da m_{neu}^2 eine Quadratzahl ist, kommt aber nur 0 als Endziffer in Frage.
- Die Tabelle zeigt dann, dass n_{neu}^2 als Endziffern eine 0 oder 5 haben muss, in jedem Fall ist n_{neu}^2 durch 5 teilbar.
- Also sind sowohl m_{neu} als auch n_{neu} durch 5 teilbar.
- Das steht im Widerspruch dazu, dass m_{neu} und n_{neu} teilerfremd sind.

11.1.6 Bemerkungen

- Beiden Beweisvarianten liegen etwas tiefergehende Sätze über Zahldarstellung zugrunde:
  - Die Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung für natürliche Zahlen bzw.
  - Die Existenz und Eindeutigkeit der Dezimaldarstellung von natürlichen Zahlen.
- In der Schule könnte man sich das folgende Vorgehen (innerhalb einer längeren Unterrichtssequenz oder eines kleineren Projekts) vorstellen:
  - Einstieg: Wir suchen eine rationale Zahlen $\frac{m}{n}$ (dabei sind also m und n natürliche Zahlen), deren Quadrat gleich zwei ist.
  - Durch Raten:

$$\left(\frac{14}{10}\right)^2 = \frac{14^2}{10^2} = \frac{196}{100} = 1,96$$

$$\left(\frac{1387}{981}\right)^2 \approx 1,999009727$$

  - Wettbewerb: Wer hat die zwei Zahlen m und n ermittelt, so dass $\left(\frac{m}{n}\right)^2$ am nähesten bei der Zahl 2 liegt?
  - Einsatz von Taschenrechner, PC–Taschenrechner (Windows wissenschaftlich, 32 Stellen) oder Computeralgebra.

– Es stellt sich im Laufe der Zeit heraus, dass niemand zwei Zahlen finden kann, so dass exakt $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ ist. (Wenn doch: Belohnung 1000 €).
– Hat dies einen tieferen Grund? Können wir diesen Grund verstehen?

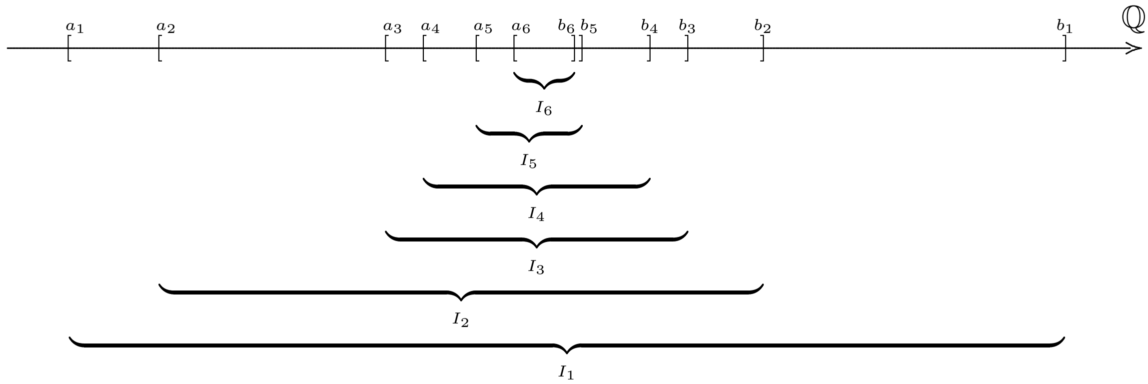
- Bereits Euklid von Alexandria (360 – ∼ 280 v.Chr., $\boxed{\text{W}}$) war die Aussage des Satzes und deren Beweis bekannt.

11.2 Intervallschachtelungen

11.2.1 Definitionen

1. Eine Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Intervallen $I_n = [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$, heißt *Intervallschachtelung (auf $\mathbb{Q}$)*, wenn

   - $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   - $\lim_{n\to\infty} \ell(I_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$



2. Eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *feiner* als eine andere Intervallschachtelung $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

   $$I_n \subseteq J_m.$$

3. Auf der Menge $\mathcal{I}(\mathbb{Q})$ der Intervallschachtelungen von $\mathbb{Q}$ definieren wir eine Relation $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch die folgende Eigenschaft:

   $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist feiner als $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist feiner als $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Man kann leicht überlegen, dass diese Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine Äquivalenzrelation, ist.

5. Die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich dieser Äquivalenzrelation heißt die *Menge der reellen Zahlen* $\mathbb{R}$.

11.2.2 Bemerkungen$^\ominus$

- Die Relation „feiner" ist reflexiv und transitiv und damit eine *Quasiordnung*. Sie ist nicht antisymmetrisch. Ganz allgemein kann man einer Quasiordnung $\preccurlyeq$ durch die obige Symmetrisierung eine Äquivalenzrelation zuordnen.

- Andere Verfahren zur Vervollständigungs–Konstruktion der reellen Zahlen beruhen auf den Begriffen der …

  – *Cauchy–Folgen*: Vervollständigung beliebiger metrischer Räume oder
  – *Dedekind'schen Schnitte*: Vervollständigung beliebiger geordneter Mengen,
  – *q–adische Entwicklungen*: Nicht–periodische Entwicklungen stehen für reelle Zahlen (In der Schulpraxis am Beispiel $q = 10$).

11.2.3 Schulische Umsetzung

Natürlich sind die obigen Formulierungen zu abstrakt–formal gehalten, als dass sie in der Schule präsentiert werden könnten. Eine Abschwächung („Elementarisierung") könnte wie folgt geschehen:

1. Es seien Intervalle

$$I_1 = [a_1, b_1], \quad I_2 = [a_2, b_2], \quad I_3 = [a_3, b_3], \ldots$$

   mit $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots \in \mathbb{Q}$ vorgegeben. Man spricht von einer *Intervallschachtelung*, wenn

   - jedes dieser Intervalle in dem Vorgängerintervall enthalten ist, d.h.

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

     und
   - die Längen der Intervalle immer kleiner werden und sich dabei immer mehr dem Wert Null annähern.

2. Jede Intervallschachtelung legt eindeutig eine *reelle* Zahl fest.

3. Die Menge der so festgelegten Zahlen heißt die *Menge der reellen Zahlen.*

11.2.4 Problem

Ein grundsätzliches Problem in der Schule ist, dass Intervallschachtelungen als Näherungsverfahren, nicht als Konstruktionsverfahren verstanden werden. Dieser Eindruck wird noch verstärkt dadurch, dass bei der Umsetzung in Beispielen meist dezimale (taschenrechnergestützte) Intervallschachtelungen vorgenommen werden.

11.2.5 Beispiele

Intervallschachtelungen können verwendet werden für die „Erzeugung" bzw. Bestimmung ...

- von Quadratwurzeln, n-ten Wurzeln,
- von Nullstellen von Polynomen mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$,
- der Kreiszahl π mittels Ein– und Umbeschreibung von regelmäßigen n–Ecken, $n \to \infty$,
- der Euler'schen Zahl e (mittels eines Modells der Zinseszins–Rechnung).

11.3 Irrationale Zahlen$^{\ominus}$

H08 T1 A1

11.3.1 Zwischenkörper

,,Zwischen" dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen gibt es zahlreiche (sogar unendlich viele) sogenannte Zwischenkörper, beispielsweise

$$\mathbb{Q} \quad \subset \quad \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \quad \subset \quad \mathcal{K} \quad \subset \quad \mathcal{W} \quad \subset \quad \mathcal{A} \quad \subset \quad \mathbb{R}.$$

Wir beschreiben diese Teilmengen

- $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ist der durch ,,Adjunktion" der Wurzel aus 2 an $\mathbb{Q}$ entstehende Körper. Es handelt sich um die Teilmenge

  $$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \ := \ \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$$

  von $\mathbb{R}$. Anstelle von 2 kann man auch jede andere Zahl nehmen, die keine Wurzel in $\mathbb{Q}$ besitzt.

  Übung: Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ein Unter–Körper von $\mathbb{R}$ ist, dass also die vier Grundrechenarten innerhalb dieser Menge ausführbar sind.

- $\mathcal{K}$ ist der Körper der konstruierbaren Zahlen. Dabei heißt eine Zahl r *konstruierbar*, wenn bei gegebener Strecken mit Länge 1 eine Strecke der Länge $|r|$ mit Zirkel und Lineal (ohne Linealskala) konstruierbar ist. Gleichbedeutend damit ist, dass die Zahl r als Rechenausdruck mit ausschließlich

  - rationalen Zahlen
  - Grundrechenarten, (Divisoren ungleich Null)
  - Quadratwurzeln nicht–negativer Zahlen

  darstellbar ist.

- $\mathcal{W}$ ist der Körper aller Zahlen r, die als Rechenausdruck mit ausschließlich

  - rationalen Zahlen
  - Grundrechenarten, (Divisoren ungleich Null)
  - Beliebigen Wurzeln $\sqrt[n]{r}$ aus nicht–negativen Zahlen

  darstellbar sind.

- $\mathcal{A}$ ist der Körper der algebraischen Zahlen. Eine reelle Zahl heißt *algebraisch*, wenn sie als Nullstelle eines Polynoms (beliebigen Grades) mit rationalen Koeffizienten darstellbar ist. Anderenfalls heißt sie *transzendent*.

11.3.2 Diagramm: Eigenschaften reeller Zahlen

$$\begin{tikzcd}
\text{rational} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Gegenbegriff}"] \arrow[d] & \text{irrational} \\
\text{algebraisch} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Gegenbegriff}"] & \text{transzendent} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

11.3.3 Beispiele irrationaler Zahlen Die folgende Tabelle gibt einige Beispiele an:

r	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$	$\mathcal{K}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{A}$	$\mathbb{R}$	
$\frac{2}{3}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
$\sqrt{2}$	/	✓	✓	✓	✓	✓	Quadratdiagonale
$\sqrt{5}$	/	/	✓	✓	✓	✓	2:1–Rechtecksdiagonale
$\sqrt[3]{2}$	/	/	/	✓	✓	✓	Würfeldoppelung
ξ	/	/	/	/	✓	✓	Wurzelauflösung von Polynomnullstellen
π	/	/	/	/	/	✓	Quadratur des Kreises
e	/	/	/	/	/	✓	
γ	?	?	?	?	?	✓	
$\cos\frac{2\pi}{5}$	/	/	✓	✓	✓	✓	Regelmäßiges 5–Eck
$\cos\frac{2\pi}{7}$	/	/	/	?	✓	✓	Regelmäßiges 7–Eck
$\cos\frac{2\pi}{17}$	/	/	✓	✓	✓	✓	Regelmäßiges 17–Eck

- ξ sie die eindeutig bestimmte Nullstelle des Polynoms $x^5 - 6x^3 + 3$ zwischen 0 und 1. Man kann (sehr aufwändig) beweisen, dass diese Nullstelle nicht in $\mathcal{W}$ enthalten ist, also nicht als Rechenausdruck mit rationalen Zahlen, Grundrechenarten und beliebigen Wurzeln darstellbar ist.

- γ ist die durch

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$$

definierte *Euler-Mascheroni-Konstante*. Es ist bis heute nicht bekannt, ob sie transzendent oder algebraisch bzw. rational oder irrational ist.

- π und e sind transzendente Zahlen. Es gibt also keine Polynome mit rationalen Koeffizienten, die π oder e als Nullstellen haben.

- Die Eckpunkte eines regelmäßigen n–Ecks auf dem Einheitskreis der komplexen Zahlenebene haben die Werte

$$\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Es handelt sich um die Nullstellen des komplexen Polynoms $z^n - 1 = 0$. Betrachtet man Real– bzw. Imaginärteil dieser Gleichung, so sieht man, dass die Koordinaten der Einheitswurzeln z Nullstellen von Polynomen mit rationalen Koeffizienten, also algebraische Zahlen, sind.

- Die klassische Frage, ob — für ein gegebenes n — das regelmäßige n–Eck mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, hat Carl Friedrich Gauss 1796 beantwortet:

  > Genau dann ist das regelmäßige n–Eck konstruierbar, wenn n ein Produkt von „Zweien" und lauter verschiedenen Fermat'schen Primzahlen ist.

  Eine Primzahl heißt *Fermat'sch*, wenn sie die Form $2^{(2^k)} + 1$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ hat. Die heute bekannten Fermat'schen Primzahlen sind in der folgenden Tabelle aufgelistet. Man vermutet, dass es keine weiteren gibt.

k	0	1	2	3	4	5
$2^{(2^k)} + 1$	$2^1 + 1$ $= 3$ FPZ	$2^2 + 1$ $= 5$ FPZ	$2^4 + 1$ $= 17$ FPZ	$2^8 + 1$ $= 257$ FPZ	$2^{16} + 1$ $= 65\,537$ FPZ	$2^{32} + 1$ $= 4\,294\,967\,297$ $= 641 \cdot 6\,700\,417$

12 Wurzeln

12.1 Das Heron–Verfahren

LP 9.2

12.1.1 Einstieg

Wie kann zu einer gegebenen Zahl $a > 0$ eine Zahl $s > 0$ gefunden werden, deren Quadrat gleich a ist?

Zur Bestimmung dieser Quadratwurzel kann man Intervallschachtelungen auf vielfältig verschiedene Weisen „aufstellen":

- „Versuch und Irrtum", Halbierung der Intervalle
- „Versuch und Irrtum", Zehntelung der Intervalle
- Das Heron–Verfahren. Wir wollen es im folgenden genauer studieren.

12.1.2 Der mathematische Gehalt des Heron-Verfahrens

besteht darin, eine Folge durch

fortgesetzte Mittelwertbildung und a-Invertierung

zu bilden.

12.1.3 Beschreibung

Bei der Beschreibung der äußeren Verfahrensweise kann man verschiedene Aspekte beleuchten, die wir tabellarisch gegenüberstellen wollen.

Es sei eine positive Zahl a gegeben.

Cauchy-Folge	Intervallschachtelung	Quadrat-Approximation
Wähle frei eine Zahl $$s_1 > 0$$	Wähle frei ein Intervall $$I_1 = [x_1, y_1] \subseteq \mathbb{R}^+,$$ so dass $x_1 \cdot y_1 = a$.	Wähle frei ein Rechteck $$R_1$$ mit Flächeninhalt a FE.
Ist die Zahl s_n gegeben, so lege die nächste Zahl s_{n+1} so fest: $$s_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot (s_n + \frac{a}{s_n})$$	Ist das Intervall $I_n = [x_n, y_n]$ gegeben, so lege das nächste Intervall I_{n+1} so fest: Die eine Grenze ist der Mittelwert $m_n = \frac{x_n+y_n}{2}$ der alten Intervallgrenzen, die andere Grenze ist $\frac{a}{m_n}$.	Ist das Rechteck R_n gegeben, so lege das Rechteck R_{n+1} so fest: R_{n+1} ist zu R_n flächengleich, die eine Seitenlänge von R_{n+1} ist der Mittelwert der Seitenlängen von R_n.
Es stellt sich dabei heraus: Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge, sie definiert eindeutig eine reelle Zahl $s = \lim_{n\to\infty} s_n > 0$ mit $s^2 = a$.	Es stellt sich dabei heraus: Die Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Intervallschachtelung, sie definiert eindeutig eine reelle Zahl $s > 0$ mit $s^2 = a$.	Es stellt sich dabei heraus: Die Folge $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nähert sich immer weiter einem Quadrat an, sie definiert also eindeutig eine Seitenlänge $s > 0$ mit $s^2 = a$.

12.1.4 Verbindung der drei Aspekte

Der Zusammenhang zwischen der Folge (s_n) und der Intervallschachtelung (I_n) besteht darin, dass das Folgenglied s_n immer eine der Intervallgrenzen x_n oder y_n ist.

Der Zusammenhang zwischen der Intervallschachtelung (I_n) und der Folge der Rechtecke (R_n) besteht darin, dass die beiden Intervallgrenzen x_n und y_n die beiden Seitenlängen des Rechtecks R_n sind.

12.1.5 Satz: Eigenschaften der Heron-Intervallschachtelung$^{\ominus}$

Es seien $I_n = [x_n, y_n]$, $n \in \mathbb{N}$, die in Abschnitt 12.1.3 angegebenen Intervalle.
Für alle $n \geq 2$ gilt

$$\begin{array}{rl}
\text{(i)} & x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n \\
\text{(ii)} & y_{n+1} - x_{n+1} \leq \frac{1}{2} \cdot (y_{n+1} - x_{n+1}) \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) = 0 \\
\text{(iii)} & x_n^2 \leq a \leq y_n^2
\end{array}$$

Mit andern Worten: Es handelt sich um eine Intervallschachtelung, die eine reelle Zahl s mit $s^2 = a$ definiert.

12.1.6 Beweis$^{\ominus}$

(i) Für den Mittelwert $m_n = \frac{x_n+y_n}{2}$ der Intervallgrenzen von I_n gilt

$$x_n \leq m_n \leq y_n$$

und dann mit Anwendung des Operators $a : \square$

$$x_n = \frac{a}{y_n} \leq \frac{a}{m_n} \leq \frac{a}{x_n} = y_n$$

Also liegen die beiden neuen Intervallgrenzen m_n und $\frac{a}{m_n}$ zwischen x_n und y_n.

(ii) Aufgrund der Tatsache, dass der Mittelwert m_n der alten Intervallgrenzen eine neue Intervallgrenze bildet, halbiert sich von Schritt zu Schritt die Intervalllänge.

(iii)

Ist $m_n^2 \leq a$, so folgt durch Anwendung des Operators $a^2 : \square$, dass $(\frac{a}{m_n})^2 \geq a$.

Ist $m_n^2 \geq a$, so folgt durch Anwendung des Operators $a^2 : \square$, dass $(\frac{a}{m_n})^2 \leq a$.

In beiden Fällen liegt a zwischen den Quadraten der beiden neuen Intervallgrenzen.

12.1.7 Exkurs: Geometrische Konstruktion der Quadratwurzel$^{\ominus}$

Der geometrischen Approximation liegt die Frage nach der ,,Quadratur des Rechtecks" zugrunde:

Wie kann man ein gegebenes Rechteck in ein flächengleiches Quadrat verwandeln?

Das Heron-Verfahren beantwortet diese Frage also mit einem Näherungsverfahren.

Es gibt auch eine geometrisch-klassische Konstruktion die ein Rechteck in ein flächengleiches Quadrat verwandelt. Sie beruht auf dem Höhensatz.

12.2 Definition der Quadratwurzel

LP 9.2

Es sei a eine positive reelle Zahl.

Es gibt dann eine reelle Zahl s, die durch die beiden Eigenschaften

- $s^2 = a$ und
- $s > 0$

eindeutig bestimmt ist. Diese Zahl s heißt *Quadratwurzel* der reellen Zahl a, sie wird mit dem Symbol

$$\sqrt{a}$$

bezeichnet.

12.2.1 Bemerkungen

- Oft spricht man einfach nur von ,,der Wurzel". Es sollten halt nicht Verwechslungen oder Verwirrungen bzgl. der anderen n-ten Wurzeln auftreten.
- In diesem Zusammenhang heißt a der *Radikand* (,,zu wurzeln").
- Zusätzlich haben die Mathematiker vereinbart, dass $\sqrt{0} = 0$ ist. Diesen Zusatz kann man vermeiden, wenn man alternativ in der obigen Definition die Eigenschaft ,,positiv" durch ,,nicht–negativ" ersetzt.
- Die Quadratwurzelfunktion

  $$\sqrt{} : \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{cases}$$

  ist die Umkehrfunktion der umkehrbaren Quadratfunktion

  $$\uparrow^2 : \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto & x^2. \end{cases}$$

  Wichtig bei dieser Festlegung ist die Einschränkung der Definitionsmenge auf $\mathbb{R}_0^+$. Damit zusammen hängen die Rechenregeln:

  $$\begin{aligned} (\sqrt{a})^2 &= a && \text{für } a \in \mathbb{R}_0^+ \\ \sqrt{a^2} &= |a| && \text{für } a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Auch innerhalb der Alltagsmathematik wird die Quadratwurzel als Umkehrung des Quadrierens aufgefasst, dabei aber die Einschränkung der Definitionsmengen auf die nicht–negativen Zahlen ausgeblendet.

- Des öfteren trifft man auf die Vorstellung, dass $\sqrt{9} = \pm 3$, die durch die vermeintliche Einsicht genährt wird, dass die Gleichung $x^2 = 9$ die beiden Zahlen 3 und -3 als Lösungen hat.

  Diese Vorstellung ist nicht vereinbar mit dem oben festgelegten Wurzelbegriff und widerspricht dem Funktionsbegriff als eindeutiger Zuordnung (=rechts-eindeutiger Relation).

  Diese Aussage wurde sogar im ,,Wurzelerlass" (Bekanntmachung des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus Nr. VIII 19291 vom 29.3.1955 über den Unterricht in Mathematik, Definition und Gebrauch des Wurzelzeichens) amtlich bekräftigt.

- Beispiele:

$$\sqrt{4} = 2 \qquad \sqrt{49} = 7 \qquad \sqrt{\tfrac{4}{9}} = \tfrac{2}{3} \qquad \sqrt{2,25} = 1,5$$

12.3 Rechnen mit Quadratwurzeln

LP 9.2

12.3.1 Monotonie

Sind a und b zwei nicht–negative Zahlen so gilt

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

12.3.2 Beweis

Wäre $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$, so folgte daraus durch Quadrieren beider Seiten der Ungleichung: $a \geq b$.

Alternativbeweis: Der Graph der Quadratfunktion $x \mapsto x^2$ ist bei $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$ streng monoton steigend. Dann ist auch der Graph der Wurzelfunktion — als Umkehrfunktion entsteht der durch Achsenspiegelung an der Winkelhalbierenden des I. Quadranten — streng monoton steigend.

12.3.3 Vergleich Wurzel und Radikand

Beachte die folgenden Fälle beim Vergleich von Wurzel und Radikand. Es ist

$$\begin{aligned} \sqrt{a} &\geq a, \quad \text{falls } a < 1, \\ \sqrt{a} &= a, \quad \text{falls } a = 1, \\ \sqrt{a} &\leq a, \quad \text{falls } a > 1. \end{aligned}$$

12.3.4 Grundrechenarten

Stelle jeweils Vermutungen an über das Ergebnis von

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} \qquad \sqrt{3} - \sqrt{2} \qquad \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \qquad \sqrt{3} : \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Wie können die Vermutungen getestet werden?

- TR (Haben wir doch schon gemerkt, dass der manchmal nicht ganz richtig tickt).
- Nachschauen in einer Tabelle
- Nachrechnen mit Hilfe der Definition.
  - Wenn die Zahl $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ gleich der Zahl $\sqrt{5}$ sein sollte, dann müsste das Quadrat dieser Zahl gleich 5 sein. Rechnen wir mal nach:
    $$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 \;=\; (\sqrt{3})^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2 \;=\; 3+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+2 \qquad \text{Fehlanzeige!}$$
  - Wenn man das Produkt aus $\sqrt{3}$ und $\sqrt{2}$ quadriert, dann kommt folgendes heraus.
    $$(\sqrt{3}\cdot\sqrt{2})^2 \;=\; (\sqrt{3})^2\cdot(\sqrt{2})^2 \;=\; 3\cdot 2 \;=\; 6 \qquad \text{Bingo!}$$
  - Wenn man den Bruch aus $\sqrt{3}$ und $\sqrt{2}$ quadriert, dann kommt folgendes heraus.
    $$(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})^2 \;=\; \frac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{2})^2} \;=\; \frac{3}{2} \qquad \text{Bingo!}$$

  Merke: Für zwei positive reelle Zahlen a, b gilt
  $$\begin{aligned}\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} &= \sqrt{a\cdot b}\\ \sqrt{a}:\sqrt{b} &= \sqrt{a:b}\end{aligned}$$

  Für die Addition oder Subtraktion kann man keine solchen Regeln aufstellen.

  Mit dem Satz

  Mit Differenzen und Summen kürzen/wurzeln/potenzieren nur die Dummen!

  sollte man nur allgemein scherzend umgehen, nicht persönlich–stigmatisierend.

- Rationalmachen von Nennern: In einem Quotienten der Form $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $a \neq b^2$ kann die Wurzel im Nenner eliminiert werden:
  $$\frac{1}{\sqrt{a}+b} \;=\; \frac{\sqrt{a}-b}{(\sqrt{a}+b)(\sqrt{a}-b)} \;=\; \frac{\sqrt{a}-b}{a-b^2} \;=\; \frac{\sqrt{a}}{a-b^2}-\frac{b}{a-b^2}$$

12.4 Kontextfelder für das Rechnen mit Quadratwurzeln

F09 T3

H99 T3

F94 T1

H90 T1

12.4.1 Geometrie

- Satzgruppe des Pythagoras
- Veränderung von Längen vs. Flächen unter Ähnlichkeit

  Beispiel: Soll die Fläche einer Kopie verdoppelt werden (DIN A4 $\to$ DIN A3), so muss man die Vergrößerung $\sqrt{2} \approx 141\%$ einstellen.
- Trigonometrie
- Goldener Schnitt: Vgl. Arbeitsblatt!
- Lägen von Diagonalen oder Raumdiagonalen

12.4.2 Algebra

- Wurzelterme, Termumformungen
- Rationalmachen des Nenners
- Quadrat- und Quadratwurzelfunktion
- Lösung quadratischer Gleichungen
- Lösung von Quadratwurzelgleichungen
- Primzahltest: Um eine natürliche Zahl n als Primzahl nachzuweisen, genügt es, alle Primzahlen $\leq \sqrt{n}$ daraufhin zu überprüfen, ob sie n teilen.
- Weiterführung: Potenzen mit rationalen Exponenten.

12.4.3 Physik, Sachkontexte

Auflösung von Formeln mit Quadraten

- Beschleunigte Bewegung: $s = \frac{a}{2}t^2$
- Kinetische Energie: $E = \frac{m}{2}v^2$
- Bremsweg: $s = \frac{v^2}{-2a}$
- Fahrschul–Faust–Formel: Man erhält den Bremsweg (in m), wenn man die Geschwindigkeit (in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$) durch 10 teilt, und das Ergebnis mit sich selbst multipliziert.
- Body–Mass-Index: $I = \frac{m}{\ell^2}$.

12.5 Höhere Wurzeln

Es sei a eine positive reelle Zahl und n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$.

Es gibt dann eine positive reelle Zahl s, die durch die beiden Eigenschaften

- $s^n = a$ und
- $s > 0$

eindeutig bestimmt ist. Diese Zahl s heißt die *n-te Wurzel* der reellen Zahl a, sie wird mit dem Symbol

$$\sqrt[n]{a}$$

bezeichnet.

12.5.1 Bemerkungen

- Zusätzlich haben die Mathematiker vereinbart, dass $\sqrt[n]{0} = 0$ ist. Diesen Zusatz kann man vermeiden, wenn man alternativ in der obigen Definition die Eigenschaft ,,positiv" durch ,,nicht–negativ" ersetzt.

- Man könnte die z-fach-Wurzel $\sqrt[z]{a}$ einer Zahl $a > 0$ auch für $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ — eben nicht nur für $z \geq 2$ — definieren durch

$$\sqrt[z]{a} \quad := \quad \begin{cases} a, & \text{falls } z = 1, \\ \frac{1}{\sqrt[-z]{a}}, & \text{falls } z < 0. \end{cases}$$

  Dies ist zwar sinnvoll möglich, aber sehr selten zu sehen, da man in diesem Fall besser zur Potenzschreibweise $a^{\frac{1}{z}}$ wechselt. Vgl. Kapitel 13.

- Sowohl in der Schulmathematik als auch in der Fachmathematik wechselt man sehr schnell zur Potenzschreibweise

$$\sqrt[n]{a} \quad = \quad a^{\frac{1}{n}},$$

  sobald Formeln, Berechnungen und Überlegungen mit n-fach-Wurzeln komplexer werden.

- Die n-fach-Wurzelfunktion

$$\sqrt[n]{} : \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto & \sqrt[n]{x} \end{cases}$$

  ist die Umkehrfunktion der umkehrbaren ,,Potenzfunktion"

$$\uparrow^n : \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto & x^n \end{cases}$$

  Wichtig bei dieser Festlegung ist die Einschränkung der Definitionsmenge auf $\mathbb{R}_0^+$. Damit zusammen hängen die Rechenregeln:

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{a})^n &= a \quad \text{für } a \in \mathbb{R}_0^+ \\ \sqrt[n]{a^n} &= |a| \quad \text{für } a \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad n \quad \text{gerade.} \end{aligned}$$

- Da für ungerades n auch die auf **ganz** $\mathbb{R}$ definierte Potenzfunktion

$$\uparrow^n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{cases}$$

umkehrbar ist, könnte man die n-fach-Wurzel auch für alle $a \in \mathbb{R}$ definieren. Das ist jedoch unüblich und ungünstig. Man verbleibt lieber bei dem Grundsatz, dass Radikanden immer nicht-negativ sind.

Der Termauswertung $\sqrt[5]{-32} = -2$ kann ein Sinngehalt nicht abgesprochen werden, sie ist halt nicht definiert.

12.6 Rechnen mit n-fach-Wurzeln

Da das Rechnen mit n-fach-Wurzeln völlig analog zu dem mit Quadratwurzeln erfolgt, listen wir hier nur die Regeln auf.

12.6.1 Monotonie

Sind a und b zwei nicht–negative Zahlen und $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

12.6.2 Multiplikativität

Für zwei positive reelle Zahlen a, b und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a \cdot b} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \\ \sqrt[n]{a : b} &= \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} \end{aligned}$$

Weiter ist für $a \geq 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}.$$

Diese drei Gleichungen spiegeln die Potenzgesetze $\boxed{\text{PG I}}$ $\boxed{\text{PG I}'}$ $\boxed{\text{PG III}}$ aus Abschnitt 13.1.4 wider.

13 Potenzen$^{\ominus}$

13.1 Von 2^3 bis $\pi^{\sqrt{3}+2i}$: Erweiterungen der Definitionsmenge

13.1.1 $\boxed{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$

Die *Potenz* ist zunächst definiert als eine Funktion

$$\uparrow : \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (a, s) & \mapsto & a^s := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{s \text{ Faktoren}} \end{cases} \qquad \text{(,,}s\text{ Faktoren" ist besser als ,,}s\text{–mal"),}$$

die eine ,,abkürzende Schreibweise" für die wiederholte Multiplikation von Zahlen beinhaltet. Zur Klärung und Vereindeutigung kann man noch anmerken, dass dabei $a^1 := a$ definiert ist.

Die Zahl a heißt in diesem Zusammenhang *Grundzahl* oder *Basis*, die Zahl s *Hochzahl* oder *Exponent*.

13.1.2 Didaktische Bemerkung

Diese Definition, auch wenn sie nach Erweiterungen der Definitionsmenge (wie folgt) unbrauchbar wird, sollte die gesamte schulische Potenzrechnung durchwirken. Im schulischen Kontext werden normalerweise die Buchstaben n und m für den Exponenten verwendet, um zu betonen, dass es sich um natürliche Zahlen handelt.

13.1.3 Rekursive Definition

Mathematisch befriedigender ist die rekursive Definition:

$$a^1 = a, \qquad a^{s+1} = a \cdot a^s, \quad s \in \mathbb{N}.$$

13.1.4 Potenzgesetze

Aus der Definition direkt ableitbar sind die drei Potenzgesetze (= Funktionalgleichungen) $(a, b, r, s \in \mathbb{N})$

$$\boxed{\text{PG I}} \qquad (a \cdot b)^s = \underbrace{(a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{s \text{ Faktoren}} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{s \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{b \cdot \ldots \cdot b}_{s \text{ Faktoren}} = a^s \cdot b^s$$

$$\boxed{\text{PG II}} \qquad a^{r+s} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{(r+s) \text{ Faktoren}} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{r \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{s \text{ Faktoren}} = a^r \cdot a^s$$

$$\boxed{\text{PG III}} \qquad a^{r \cdot s} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{(r \cdot s) \text{ Faktoren}} = \underbrace{a^r \cdot \ldots \cdot a^r}_{s \text{ Faktoren}} = (a^r)^s$$

Bei bestimmten Voraussetzungen an die beteiligten Zahlen aus der Definitionsmenge lassen sich weitere Potenzgesetze angeben, die eher schulisch als fachmathematisch bedeutsam sind:

$$\boxed{\text{PG I}'} \qquad (\frac{a}{b})^s = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{s \text{ Faktoren}} = \frac{\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{s \text{ Faktoren}}}{\underbrace{b \cdot \ldots \cdot b}_{s \text{ Faktoren}}} = \frac{a^s}{b^s}, \qquad b|a$$

$$\boxed{\text{PG II}'} \qquad a^{r-s} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{(r-s) \text{ Faktoren}} = \frac{\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{r-s \text{ Faktoren}} \cdot \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{s \text{ Faktoren}}}{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{s \text{ Faktoren}}} = \frac{\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{r \text{ Faktoren}}}{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{s \text{ Faktoren}}} = \frac{a^r}{a^s}, \qquad s < r$$

13.1.5 Erweiterung

Das dem Hankel'schen Permanenzprinzip folgende Programm beinhaltet nun, die ,,Definitionsmenge" $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf größere Teilmengen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (oder sogar $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ und noch weiter) zu

1. erweitern, so dass
2. die obigen Funktionalgleichungen gültig bleiben (bleiben = permanere)
3. und die Funktion stetig ist.

Dabei kann (und muss) auch die Wertemenge geeignet vergrößert werden.

Wir führen im folgenden dieses Programm durch. Die erweiterten Definitionsmengen sind jeweils in Rahmen gesetzt.

13.1.6 $\boxed{\mathbb{Q}^\times \times \mathbb{N}}$ $\quad (\mathbb{Q}^\times := \mathbb{Q} \setminus \{0\})$

Ganz zwanglos kann die Idee der wiederholten Definition auf rationale Zahlen ungleich Null als Basis erweitert werden, die rationale Zahlen sind:

$$a^s := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{s \text{ Faktoren}}, \qquad (a, s) \in \mathbb{Q}^\times \times \mathbb{N}.$$

Dabei bleiben die Potenzgesetze gültig.

Die Zahl 0 als Basis wollen wir von vornherein ausschließen, da sie sich innerhalb des folgenden Programms ständig als Sonderfall erweist. Der Aufwand für eine ständige Berücksichtigung dieses Sonderfalls lohnt sich nicht. Wir werden diesen Sachverhalt am Schluss noch einmal diskutieren.

13.1.7 $\boxed{\mathbb{Q}^\times \times \mathbb{N}_0}$

Die Funktionalgleichung $\boxed{\text{PG II}}$ soll weiter gelten, wenn die Null als Exponent auftritt. Das bedeutet

$$a^s \cdot a^0 = a^{s+0} = a^s.$$

Die Multiplikation mit a^0 verändert die Zahl $a^s \neq 0$ nicht. Es muss also

$$a^0 = 1$$

sein.

Schulisch lässt sich die Gleichung auch durch ein Bildungsgesetz nahelegen:

$$a^5 \xrightarrow{:a} a^4 \xrightarrow{:a} a^3 \xrightarrow{:a} a^2 \xrightarrow{:a} a^1 \xrightarrow{:a} ?$$

Es ist also „vermutlich" $a^0 = a^1 : a = 1$.

Es stellt sich heraus, dass die Potenzgesetze bei dieser Erweiterung der Definitionsmenge erfüllt bleiben.

13.1.8 $\boxed{\mathbb{Q}^\times \times \mathbb{Z}}$

Zur Aufrechterhaltung des zweiten Potenzgesetzes $\boxed{\text{PG II}}$ muss beim Auftreten von negativen Exponenten gelten

$$a^s \cdot a^{-s} = a^{s+(-s)} = a^0 = 1, \qquad (a,s) \in \mathbb{Q}^\times \times \mathbb{N}.$$

Man kann daher sinnvoll definieren

$$a^{-s} := \frac{1}{a^s} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{s \text{ Faktoren}}}.$$

Es stellt sich heraus (Beweis), dass die Potenzgesetze erfüllt bleiben.

13.1.9 $\boxed{\mathbb{Q}^+ \times \frac{1}{\mathbb{N}}}$

Es sei $s = \frac{1}{n}$ der Kehrwert einer natürlichen Zahl. Es muss aufgrund der PG III dann gelten:

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a.$$

Nachdem also die n–te Potenz von $a^{\frac{1}{n}}$ gleich a ist, ist es sinnvoll zu definieren:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Hier sehen wir, dass die Erweiterung auf beliebige rationale Exponenten ihren Preis hat: Als Basen können nur noch positive Zahlen auftreten. Außerdem tritt wegen des Auftretens von Wurzeln die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen als Wertemenge der Potenz in Erscheinung.

Für gerades n könnte man hier auch $a^{\frac{1}{n}} = -\sqrt[n]{a}$ setzen, diese Vorgehensweise führt jedoch wegen der anderen Potenzgesetze in Schwierigkeiten, beispielsweise so:

$$a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = (-\sqrt[4]{a}) \cdot (-\sqrt[4]{a}) = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a} = \sqrt[2]{a} = -a^{\frac{1}{2}}.$$

13.1.10 $\boxed{\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}}$

Ist jetzt $s = \frac{p}{q}$ eine beliebige rationale Zahl, so definiert man in Anlehnung an $\boxed{\text{PG III}}$:

$$\begin{aligned} a^s &= a^{p\cdot\frac{1}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p \\ &= (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \end{aligned}$$

Es stellt sich einmal mehr heraus, dass die Potenzgesetze erfüllt bleiben.

13.1.11 $\boxed{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}}$

Wir stellen zwei Fakten zusammen:

- Die Menge $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, das heißt zu jedem $(a, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ existiert eine Folge $(a_n, s_n) \subseteq \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} (a_n, s_n) \;=\; (a, s).$$

- Die Abbildung

$$\uparrow \begin{cases} \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q} & \to & \mathbb{R} \\ (a, s) & \mapsto & a^s \end{cases}$$

  ist stetig.

Sie ermöglichen es, die Potenz auf $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ in eindeutiger Weise fortzusetzen:
Für $(a, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ setzen wir

$$a^s := \lim_{n\to\infty} a_n^{s_n}, \qquad \text{wobei } (a_n, s_n) \subseteq \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} (a_n, s_n) = (a, s).$$

Aufgrund der Stetigkeit ist diese Definition unabhängig von der ausgewählten Folge.

Man kann leicht zeigen, dass die Potenzgesetze weiter richtig bleiben.

Steht die Exponentialfunktion

$$\exp \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \exp(x) \;:=\; \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{cases}$$

und der natürliche Logarithmus $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ als ihre Umkehrfunktion zur Verfügung, so kann man die Potenz auch definieren als

$$\uparrow \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (a, s) & \mapsto & \exp(s \cdot \ln a) \end{cases} .$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass diese Definition mit der bisherigen übereinstimmt.

13.1.12 $\boxed{\mathbb{C}^{-\circ} \times \mathbb{C}}$

Die Definition über die Exponentialfunktion bietet den Zugang für eine weitere Erweiterung des Definitionsmenge.

In der Theorie der komplexen Zahlen kann man aufzeigen, dass die Exponentialfunktion auch als Funktion von komplexen Zahlen definiert werden kann:

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^\times \\ z & \mapsto & \exp(z) \;:=\; \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \end{cases}$$

Schränkt man dabei die Wertemenge $\mathbb{C}^\times$ auf die längs der negativen Realteilachse aufgeschnittene komplexe Ebene

$$\mathbb{C}^{-\circ} := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$$

ein, so wird die Exponentialfunktion bijektiv. Die Umkehrfunktion

$$\log \begin{cases} \mathbb{C}^{-\circ} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \log(z) \end{cases}$$

heißt *Hauptzweig des komplexen Logarithmus.*
Man kann dann die Potenz für komplexe Zahlen definieren als

$$a^s = \exp(s \log a), \qquad (a,s) \in \mathbb{C}^{-\circ} \times \mathbb{C}$$

Damit ist beispielsweise auch der Ausdruck i^i definiert. Es stellt sich heraus, dass dies eine reelle positive Zahl ist:

$$i^i = \exp(i \cdot \log i) = \exp(i \cdot i\frac{\pi}{2}) = \exp(-\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}207\,879\,576.$$

Die Potenzgesetze sind in diesem Zusammenhang nur noch eingeschränkt gültig. Bemüht man die Theorie der ,,Überlagerungen der komplexen Ebene", so kann man diese Einschränkung wieder beseitigen.

13.1.13 $\boxed{\{0\} \times \{0\}}$

Beim Versuch, auch die Potenz 0^0 sinnvoll zu definieren, stößt man auf die folgenden Ideen:

- Zunächst ist

  $$0^s = 0$$

  für alle $s \in \mathbb{N}$, dann $s = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$, dann $s \in \mathbb{R}^+$. Aus Stetigkeitsgründen sollte also gelten:

  $$0^0 = \lim_{s \searrow 0} 0^s = \lim_{s \searrow 0} 0 = 0.$$

- Andererseits ist aber

  $$a^0 = 1 \text{ für } a \neq 0$$

  woraus man folgern kann:

  $$0^0 = \lim_{a \overset{\bullet}{\to} 0} a^0 = \lim_{a \overset{\bullet}{\to} 0} 1 = 1.$$

Es tritt also eine Mehrdeutigkeit auf: Die Potenz kann nicht stetig in den Punkt $(0,0)$ fortgesetzt werden.

Übung: Berechnen Sie $\lim_{x \searrow 0} x^x$.

13.2 Kontextfelder für das Rechnen mit Potenzen

13.2.1 Algebra

- Einfache Zahlpotenzen (insbesondere Zweier–Potenzen),
- b–adische Zahlsysteme,
- Potenzrechnen innerhalb des Termrechnens,
- Potenzrechnen innerhalb der Gleichungslehre.

13.2.2 Analysis

- Potenzfunktion $x \mapsto y = a \cdot x^n$
- Exponentialfunktion $x \mapsto y = a^x$
- Diskussion der Funktionsgraphen („Kurven").

13.2.3 Sachkontexte

- Geometrische Summe: „Reiskörner auf dem Schachbrett"
- Zinseszins,
- Kombinatorik: Ziehen mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge.
- Exponentielles Wachstum.

13.2.4 Geometrische Kontexte

- Quadrate: Flächen von Quadraten, Kreisflächen,
- Kuben: Volumina von Würfeln, Kugeln.

13.2.5 Physik

- In vielen Zusammenhängen der Naturwissenschaften treten Exponenten ungleich 1 oder 2 auf. Bei Auflösung dieser Formeln treten rationale Exponenten auf.
- Drittes Kepler'sches Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der Bahnradien (genauer: großen Bahnhalbachsen)
- Hagen–Poiseuille–Gesetz: Der Durchfluss einer Flüssigkeit durch eine Röhre hängt von der vierten Potenz des Radius ab:

  $\frac{V}{t} \sim r^4.$

13.2.6 Sonstiges

- b-adische Zahldarstellung
- Wissenschaftliche Zahldarstellung: Astronomische Zahlen.

F02 T1

F97 T2

H95 T3

F94 T1

H94 T1

13.2.7 Schulpraktische Aspekte

Während die erste grundlegende Definition (auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) noch relativ konkret–anschaulich ist, beruhen die Erweiterungen auf innermathematischen algebraischen Überlegungen.
Da dann in diesem erweiterten Zusammenhang die Regeln des Potenzrechnens (die drei Potenzgesetze) nur formal–verordnet empfunden werden, ergeben sich Lernschwierigkeiten und typische Fehlermuster.

13.3 Fehlertypen beim Rechnen mit Potenzen

- Verwechseln von Potenzieren und Multiplizieren

$$2^3 \overset{\leftrightsquigarrow}{=} 6 \qquad 3^2 \overset{\leftrightsquigarrow}{=} 6 \qquad 2^4 \overset{\leftrightsquigarrow}{=} 8$$

- Probleme mit dem Exponent Null

$$3^0 \overset{\leftrightsquigarrow}{=} 0 \qquad 3^0 \overset{\leftrightsquigarrow}{=} 3$$

- Fehlerhaftes Operieren mit dem Minuszeichen

$$(-4)^2 \overset{\leftrightsquigarrow}{=} -16 \qquad \text{da ja auch} \quad (-4)^3 \overset{\checkmark}{=} -64$$

- Vermeintliches Kommutativgesetz

$$a^b \overset{\leftrightsquigarrow}{=} b^a$$

- Vermeintliches Assoziativgesetz

$$a^{(b^c)} \overset{\leftrightsquigarrow}{=} \left(a^b\right)^c \qquad \begin{aligned} 10^{(10^{10})} &= 10^{10000000000} \\ (10^{10})^{10} &= 10^{100} \end{aligned}$$

- Vermeintliches Distributivgesetz

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &\overset{\leftrightsquigarrow}{=} a^3 + b^3 \\ (a-b)^3 &\overset{\leftrightsquigarrow}{=} a^3 - b^3 \end{aligned}$$

- Fehler beim Anwenden der Potenzgesetze $\boxed{\text{PG II}}$ $\boxed{\text{PG III}}$

$$\begin{aligned} a^3 &\overset{\leftrightsquigarrow}{=} a \cdot 3 \\ a^{-3} &\overset{\leftrightsquigarrow}{=} -a^3 \\ a^5 \cdot a^3 &\overset{\leftrightsquigarrow}{=} a^{15} \\ (a^5)^3 &\overset{\leftrightsquigarrow}{=} a^8 \\ a^6 : a^2 &\overset{\leftrightsquigarrow}{=} a^3 \\ \left(\frac{1}{a}\right)^3 &\overset{\leftrightsquigarrow}{=} a^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

- Fehler beim Anwenden der Funktionalgleichung $\boxed{\text{PG I}}$

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^3 &\overset{\leftrightsquigarrow}{=} a \cdot b^3 \\ (a : b)^3 &\overset{\leftrightsquigarrow}{=} a : b^3 \end{aligned}$$

Diese Fehlertypen treten vor allem beim Umformen komplexerer Produktterme in Erscheinung, da dann die Grundauffassung von einer Potenz gegenüber dem „Potenzgesetz-Formalismus" ins Hintertreffen gerät.

14 Auseinandersetzung mit Sachsituationen$^{\ominus}$

14.1 Einstieg

Das Sachrechnen ...

- ist im allgemeinen sehr unbeliebt. Schüler reagieren auf die Ankündigung von Sachrechnen mit Missmut.
- offenbart gerade die ,,anwendungsorientierte" Seite von Mathematik.
- gibt eigentlich am ehesten eine Antwort auf die von Schülern geäußerte Frage ,,Wozu brauchen wir das alles?"
- lässt sich nur schwer algorithmisieren. Das stellt sich für eher schwache Schüler als problematisch dar.
- erfordert flexible oder ungewöhnliche Strategien bis hin zur Anwendung von Tricks und Kniffs.
- durchzieht alle Schularten, Jahrgangsstufen und mathematischen Teilgebiete.
- transportiert unterschwellig Einstellungen und Informationen (Geschlechter- oder Schichtenproblematik, Lebensgewohnheiten (drei Flaschen Bier,...))
- wird in der öffentlichen Diskussion, ausgelöst durch die Ergebnisse internationaler Vergleichsstudien (TIMSS, PISA,...) um den Mathematikunterricht im Sinne von Prinzipien wie Lebensnähe, Problemorientierung verstärkt angemahnt.
- schlägt sich stark in den Bildungsstandards nieder.

14.2 Mathematische Modellbildung

14.2.1 Das „Magische Viereck der Modellierung”

Das Grundprinzip der Wechselwirkung zwischen Wirklichkeit und Mathematik lässt sich anhand des folgenden Diagramms erfassen:

$$\begin{tikzcd} \text{Offenes Sachproblem} \arrow[r, "\text{Mathematisierung}"] \arrow[d, "\text{Klärung}"'] & \text{Offenes Mathematisches Problem} \arrow[d, "\text{Lösung}"] \\ \text{Geklärtes Sachproblem} & \text{Gelöstes Mathematisches Problem} \arrow[l, "\text{Interpretation}"'] \end{tikzcd}$$

Die Lösung eines Problems der Wirklichkeit (linker Down–Pfeil) wird gemäß diesem Diagramm ersetzt durch drei Schritte

1 Mathematisierung

2 Mathematisches Operieren

3 Interpretation (Aus der Sicht der Mathematik: Anwendung)

angegangen.
Gelegentlich wird hier — nicht so ganz günstig — vom *Modellierungskreislauf* gesprochen.

14.2.2 Konkretisierung

Die Mathematisierung wird, je nach Situation, durch verschiedene spezielle Prozesse, realisiert:

Wirklichkeit	$\xrightarrow{\text{Mathematisierung}}$	**Mathematik**
Sachzusammenhang	$\xrightarrow{\text{Modellbildung}}$	Mathematisches Modell
Anzahl (Kardinalität)	$\xrightarrow{\text{Abzählen}}$	Natürliche Zahl
Größe	$\xrightarrow{\text{Messen}}$	Maßzahl ($\mathbb{B}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$)
Wettbewerbssituation	$\xrightarrow{\text{„Ranking”}}$	Lineare Ordnung
Hierarchien	$\longrightarrow$	Halbordnung
Kategorien	$\longrightarrow$	Äquivalenzrelation
Punkte der Zeichenebene	$\xrightarrow{\text{Koordinatensystem}}$	Zahlenpaare
Daten	$\longrightarrow$	Zufallsvariable auf W–Raum

14.2.3 Mathematisierung

Die Mathematisierung ist selbst nicht Gegenstand der Mathematik mit ihren

- mathematischen Inhalten (Analysis, Algebra, Geometrie, Zahlentheorie, Stochastik, ...) und
- spezifischen Arbeitsweisen (Fassung objektiver Begriffe, streng–logisches Schließen, rigoroses Beweisen, exaktes Rechnen, ...)

Einige Zitate

- ,,Is' doch logisch!"
- ,,Zahlen lügen nicht."
- ,,Ich glaube nur an die Statistik, die ich selbst gefälscht habe."
- ,,Es ist mathematisch erwiesen, dass Deutschland bei PISA 2003/Mathematik den 16. Platz belegt."

Für eine gute Mathematisierung sind eine geeignete Erfassung der Wirklichkeit, eine Kenntnis der mathematischen Modell–Palette, nicht zuletzt Übung und Erfahrung für das Zusammenspiel notwendig.

14.2.4 Mehrdeutigkeit

Für den gleichen Sachverhalt der Wirklichkeit kann es viele verschiedene mathematische Modelle geben. Dies geschieht z.B. aufgrund ...

- unterschiedlicher Intentionen hinsichtlich Genauigkeit,
- unterschiedlicher Intentionen hinsichtlich Auswirkungen, (B: Personalwahlrecht, Verhältniswahlrecht)
- isomorpher (gleich–strukturierte) mathematischer Theorien
  - verschiedene Einheiten,
  - verschiedene Koordinatensysteme,
  - Zuordnung zu Variablen (B: x als die Zahl der Hasen oder die Zahl der Fasane.
- unterschiedlicher Konventionen:

Umgekehrt kann das gleiche mathematische Modell verschiedenste Sachzusammenhänge modellieren:

- Beim Zählen von Äpfeln oder Zählen von Birnen wird das gleiche mathematische Modell benutzt, die natürlichen Zahlen.
- Schwingungen einer Schraubenfeder, eines Fadenpendels, der Kondensatorladung in einem elektrischen Schwingkreis, ... werden alle durch die gleiche Differentialgleichung modelliert.
- Der Begriff des Grenzwerts liegt unzähligen verschiedenen Sachverhalten aus der Wirklichkeit zugrunde.

Es gehört mit zum Wesen der Mathematik, Analogien und Diskrepanzen in solchen Modellen aufzuspüren.

Manchmal spielt bei der Modellbildung die mathematische Zweckmäßigkeit eine Rolle:

- Populationen (z.B. von Ameisen) werden durch reelle Zahlen beschrieben.
- Kontinuierliche Größen (Zeit) werden durch diskrete Größen (Folge von Zeitpunkten) beschrieben, weil man dann Rechner einsetzen kann.
- Idealisierung (Physik): Vernachlässigung von Reibung, Ausdehnung eines Körpers, Eigengewicht u.ä.

14.3 Präsentation des Problems

Ein Problem der Sachwelt muss nicht notwendig erst durch eine — im allgemeinen als Text gefasste — Aufgabe präsentiert werden. Bei aufmerksamer Betrachtung der Welt begegnet man vielerlei *Sinnstiftenden Lernanlässen*.

Weiter können Sachkontexte anders als durch Aufgaben–Texte präsentiert werden. Vergleiche dazu die umfangreiche Tabelle in Schipper/Dröge/Ebeling, Handbuch für den Mathematikunterricht 4. Schuljahr, S. 208/209.

14.3.1 Unterscheidung von bestimmten Aufgabentypen Weitere der Unterscheidung von Typen von Sachaufgaben dienende Begriffsbildungen sind:

- Eingekleidete Mathematikaufgabe:
  - Ich denke mir eine Zahl. ...
  - Karlas Vater ist doppelt so alt wie ihr Bruder,....... Wie alt ist Karla?
- Scherzaufgabe: Welche Farbe hatte der Bär?
- Einfache Sachaufgaben (vgl. Jo–Jo 4, S.134)
- Echte Sachaufgabe: Ein (evtl. stark simplifiziertes) Problem der Sachwelt soll durch Mathematisierung gelöst werden. Der Sachkontext steht im Mittelpunkt der Aufgabe.

  Beispiele: Pausenbestellung, Schullandheim
- Direkte oder offene Fragestellung (Rechengeschichte).
- Eine Textaufgabe ist allgemeiner eine als Text gestellte Mathematikaufgabe. Diese muss nicht notwendig einen Sachbezug enthalten. Beispiel: Welche Zahl muss von 27 541 subtrahieren, um 9 616 als Ergebnis zu erhalten?

  Beachte: Auch im Deutsch–Unterricht gibt es Textaufgaben: Es werden vorgegebene Texte bearbeitet.
- Rätselaufgabe, Denksportaufgabe.

14.3.2 Im Idealfall sollten die den Sachaufgaben zugrundeliegenden Probleme

- Situationen aus der (weiteren) Schülerwelt (Freizeit, Sport, Spiel, Alltag) entstammen
- phantasievoll, abwechslungsreich, assoziationsreich sein
- klar formuliert werden,
- die Notwendigkeit einer Mathematisierung unmittelbar einsichtig machen.
- Es besteht ein grundsätzliches Spannungsfeld:

belanglos	Sachwelt–Relevanz	interessant
$\longleftarrow$		$\longrightarrow$
simpel	Mathematisches Niveau	komplex

14.4 Simplexe und Komplexe

Simplexe sind Sachverhalte, in denen drei Größen additiv oder multiplikativ verknüpft sind. Beispiele:

- Länge — Breite — Fläche(ninhalt).
- Einkaufspreis — Gewinn — Verkaufspreis.
- Stückzahl — Stückpreis — Gesamtpreis.
- Wegstrecke — Zeitspanne — Geschwindigkeit.
- El. Stromstärke — Spannung — El. Widerstand.

Komplexe sind Sachverhalte, in denen zwei oder mehrere Simplexe über ihre Komponenten verknüpft sind.

14.5 Die Problemlösung im einzelnen

14.5.1 Die Mathematisierung des Problems

Verstehen des Sinngehalts des Problems im Überblick:

- Sprachliche Besonderheiten:
  - höchstens, maximal, mindestens, wenigstens, minimal.
  - Steigerung **auf** oder **um** das Dreifache.
  - Dutzend, durchschnittlich.
  - Mathematisch: Quersumme.
  - Geschäftsleben: Netto, Brutto, Tara, Ratenzahlung, Anzahlung, Geschäftskosten, Umsatz, Gewinn, Rabatt, Skonto, Porto.

    - Geographie, Orientierung im Raum: Luftlinie, Maßstab, horizontal, vertikal, Norden, Südwesten, Höhe über NN, Uhrzeigersinn.
    - Geschichte: Das 19. Jahrhundert.
    - Biologie, Chemie: Tülle, Pipette.
    - Freizeit
        * In einer Fußballliga finden 240 Spiele statt. Wie viele Mannschaften gehören zur Liga?
        * Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, beim Schafkopf einen ,,Sie" zu erhalten?

- Konventionen: Das Bankjahr hat 360 Tage, der Bankmonat hat 30 Tage. Der aktuelle MWSt.-Satz.
- Kontexte: Bei einem elektrischen Anschluss wird auch eine Rückleitung benötigt. Beim Weißeln eines Zimmers muss auch die Decke mitberechnet werden.
- Verstehen von Skalen, Diagrammen, Grafiken, Tabellen, Übersichten.
- Verschleierte Informationen: Zahlen sind im Text oder in der Grafik versteckt: ,,halb so viel", die abgebildete Eintrittskarte kann sechsmal entwertet werden.
- Informationen aus anderen Quellen: Lehrer, eigene Messung (Gewicht einer Münze), DB-Fahrplan, Katalogen.
- Überflüssige, redundante oder irreführende Informationen: Wie alt ist der Kapitän?

Schulpraktisch – konkret:

Aufarbeitung einer Sachsituation:

- Nacherzählen, Nachspielen, Nachstellen.
- Illustrierende Medien werden präsentiert.
- Die Situation wird verändert, vereinfacht, auf die unmittelbare Schüler–Welt übertragen.

Bei textformulierten Sachsituationen:

- Sprachliche Besonderheiten (ungewöhnliche Begriffe, Wörter, Fachbegriffe) werden geklärt. Beispiele: samt, rar,
- Lies den Text genau durch! Extrahiere die wichtigen Daten und ordne sie!
- Gegeben (Wir wissen)

  Eventuell können Größenwerte gleich in geeignete Einheiten umgewandelt werden.

  Vielleicht ist es sinnvoll, unmittelbar verknüpfte Größen (Radius – Durchmesser, Bruchteil – Prozentsatz) gleich umzurechnen.

  Unter Umständen ist es sinnvoll, die gegebenen Größen in einer Tabelle anzuordnen.
- Gesucht (Wir suchen) Bei Vorliegen einer Tabelle (s.o.) wird die gesuchte Größe in einem freien Feld mit einem Fragezeichen gekennzeichnet.

14.5.2 Das mathematische Operieren

Es muss der richtige Pfad innerhalb des Komplexes — von Simplex zu Simplex — gefunden werden (Bild des Dschungels).

Strategien:

1. Tastend, Suchend: Ausgehend vom Standort werden zunehmend immer neue und weitere Pfade erschlossen, bis das Ziel — mehr oder weniger zufällig — gefunden ist.
2. Zielgerichtet: Der Pfad ist im wesentlichen — von ähnlichen Touren, aufgrund von Karten,... — bekannt und kann so gezielt beschritten werden.
3. Mischstrategien: Ein Teil der Pfade (in der Umgebung des Standorts oder des Ziels) ist bekannt, die fehlenden Zwischenpfade werden durch Suchen erschlossen.
4. Mosaiktechnik.
5. Brückentechnik (vgl. MathSemBer 47/2, S. 198).

Die Rolle des Lehrers beim Auffinden solcher Pfade: Begleitend — stimulierend — darbietend — informierend.

> **Zentral wichtig ist das ständige Vorhalten der Wechselbeziehung von Wirklichkeit und Mathematik entlang des Lösungspfades.**

Konkret geschieht dies beispielsweise durch Zwischenantwortsätze (evtl. in Stichworten).

Es stellt sich die Frage, ob Einheiten von Größen im Verlaufe des mathematischen Operierens präsent gehalten werden müssen:

- Wo sie nur Schreibballast sind, können sie weggelassen werden.
- Wenn Umwandlungen von Größenwerten (bzgl. der Einheiten) auftreten, ist die Angabe von Einheiten unverzichtbar.
- In (Zwischen-)Antwortsätzen müssen Einheiten angegeben werden.
- Die Durchdringung des Einheitenrechnens ist eventuell noch nicht möglich. Beispiel:

  > Ein Liter Benzin (Bleifrei Super) kostet $1,26\,€$. Wieviel muss Mercedes Benz für $43\,\ell$ bezahlen? (Jgst. 5)

  Falsch: $43\,\ell \cdot 1,26\,€ \;=\; 54,18\,€$

  Richtig: $43\,\ell \cdot 1,26\frac{€}{\ell} \;=\; 54,18\,€$

  Ähnlich bei Geschwindigkeitsaufgaben: Falsch: $\frac{15\,\mathrm{km}}{5} = 3\,\mathrm{h}$. Richtig: $\frac{15\,\mathrm{km}}{5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = 3\,\mathrm{h}$.

  Problem: Das Kürzen ist Inhalt des Bruchrechnens. Insgesamt ist das Kürzen von Einheiten ein abstrakter Vorgang (In etwa ab 8. Jgst.)
  Lösung: Weglassen der Einheiten in der Berechnung. Angabe der Einheiten im Antwortsatz.

14.5.3 Interpretation

- Sinnvoller Zahlbereich: Negatives Lebensalter, Bruchzahl als Anzahl, Zehntelpfennig (beim Tanken, Zinsberechnung).
- Das Problem des Rundens.
- Sinnvolle Größenordnung (Astronomische Kosten beim Einkauf,. . .), (Auch begleitendes Überschlagsrechnen).
- Aussortieren von Lösungen: Beispielsweise bei quadratischen Gleichungen.
- Antwortsatz: Achte auf die genaue Fragestellung!

14.6 Modellbildung durch Gleichungen

14.6.1 Schrittfolge

Bei der Modellbildung durch Gleichungen bietet sich die folgende Schrittfolge an:

V (Variable). Welches ist die genaue Bedeutung der (unbekannten) Variablen?

T (Terme) Mit Hilfe der Variable und der Daten der Aufgabe werden Terme gebildet (vielleicht in einer Tabelle).

G (Gleichung) Die Aufgabe beinhaltet eine Information über Gleichheit (oder Vielfachheit) von Termen. Dies wird in Form einer Gleichung zwischen diesen Termen mathematisiert.

L (Lösung) Dies ist ein innermathematisches Problem.

A (Antwort) Vergleiche unten: Interpretation.

P (Probe) Eventuell empfiehlt sich eine Probe innerhalb des Kontexts der Sachaufgabe.

14.6.2 Beispiel 1

Maria ist 24 Jahre alt. Sie ist doppelt so alt, wie Anne war, als Maria so alt war, wie Anne jetzt ist. Wie alt ist Anne? (Gesellschaftliches Ereignis, New York, 20er Jahre).

V x ist das jetzige Alter von Anne in Jahren.

T

	Maria	Anne
jetzt	24	x
früher	x	$x - (24 - x)$

Die bei „Anne früher" abzuziehende Zeitspanne $24 - x$ ergibt sich aus den beiden Termen bei Maria.

G $$24 = 2 \cdot \Big[x - (24 - x)\Big]$$

L

$$\begin{aligned} 24 &= 2 \cdot \Big[x - (24 - x)\Big] \\ 24 &= 2 \cdot \Big[2x - 24\Big] \\ 24 &= 4x - 48 \\ 72 &= 4x \\ x &= 18 \end{aligned}$$

A Anna ist jetzt 18 Jahre alt.

P

	Maria	Anne
jetzt	24	18
früher	18	12

15 Terme$^{\ominus}$

Mit den Begriffen ,,Variable” und ,,Term” entfernt sich die Schulmathematik zum ersten Mal von der naiven Idee, dass sich Mathematik allein mit Zahlen (und Geometrie) beschäftigt. Sie wird dadurch anwendungs-mächtiger, aber eben auch abstrakter.

Zum Termbegriff gibt es im wesentlichen zwei Zugänge, die in den folgenden beiden Abschnitten mehr theoretisch beleuchtet werden.

15.1 Der Semantik–Zugang zum Termbegriff

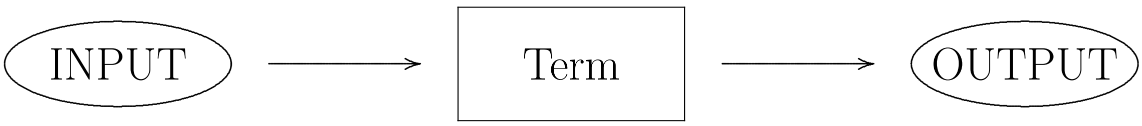
15.1.1 Was ist Semantik?

Semantik bedeutet allgemein die Lehre von der inhaltlich-konkreten Bedeutung von Zeichen, Wörtern und Sätzen in einer Sprache.

15.1.2 Semantik-Definition: Term

In der Mathematik heißt eine ,,Vorschrift”, mit deren Hilfe gegebenen Zahlen neue Zahlen zugeordnet werden können, ein *Term*.

Grafisch lässt sich diese Definition so illustrieren und komprimieren



15.1.3 Abgrenzung zum späteren Funktionsbegriff

Hier wird schon der spätere Funktions– bzw. Operatorbegriff vorweggenommen. Dies geschieht aber zunächst nicht in voller Ausschärfung und umfassender Begriffsumgebung, das heißt dass die folgenden Begriffe aus der Theorie der Funktionen noch nicht angesprochen werden:

- Definitionsmenge
- Wertemenge
- Betonung der Eindeutigkeit
- Frage der Umkehrbarkeit
- Darstellung mit Hilfe von Graphen

Zunächst geht es auch hauptsächlich nur um natürliche (diskrete) Zahlen und nicht um reelle (kontinuierliche) Zahlen.

15.2 Der Syntax–Zugang zum Termbegriff

15.2.1 Was ist Syntax?

Syntax ist allgemein die Lehre von den Regeln, die das Zusammenstellen und Manipulieren von Zeichen und Wörtern in einer Sprache beschreiben.

Ein Term ist (lediglich) eine Folge von Symbolen.

15.2.2 Syntax-Definition: Term

Eine regelhafte Abfolge von bestimmten Symbolen $\mathcal{A}$ heißt *Term.*

15.2.3 Fachmathematische Ausschärfung Diese Definition ist fachmathematisch sehr dürftig und damit unhaltbar.

Sie lässt sich aber mit vergleichsweise abstrakten Begriffen auch mathematisch einwandfrei präsentieren, wir wollen dies hier nur stichpunktartig wiedergeben:

- Grundlage ist ein *Alphabet*. Das ist eine Menge von Ziffern, Buchstaben und sonstigen Zeichen, die man dann einfach *Symbole* nennt.
- Eine endliche Folge von solchen Symbolen heißt *formaler Term.*
- Eine Sammlung von Regeln (= die eigentliche Syntax) legt fest, dass nur bestimmte formale Terme als sinnvoll (=*zulässig*) gelten.
- Ein Termkalkül legt fest, welche der zulässigen Terme *äquivalent* heißen sollen und wie aus gegebenen Termen neue gebildet werden können.

15.2.4 Kommentare

- Der Syntax-Zugang zum Termbegriff ist die Grundlage der sogenannten Computer–Algebra–Systeme (CAS) wie DERIVE, MAPLE, MATHEMATICA. Die Syntax-Theorie ist ein unabdingbarer Bestandteil der Theoretischen Informatik:

  ,,Ohne Syntax kein Handy”.

- Der österreichische Mathematiker Kurt Gödel (1906 – 1978) hat in grundlegenden Arbeiten gezeigt, dass das Axiomensystem ,,unserer” Mathematik unvollständig ist: Es gibt immer Terme, von denen nicht entschieden werden kann, ob sie mathematisch konstruierbar sind oder nicht. Dieses Problem kann auch nicht durch Hinzunahme weiterer Regeln (Axiome) behoben werden.

  Stark vereinfacht könnte man sagen, dass die Mathematik ihre eigene Unzulänglichkeit beweisen kann.

  Dieses mathematische Grundlagenphänomen wird in dem Buch ,,Gödel, Escher, Bach” von D.R. Hofstadter populär auseinandergesetzt.

15.3 Der schulpraktische Zugang zum Termbegriff

15.3.1 Definition: Variable

Symbole wie

$$\square \quad \triangle \quad \bigcirc \quad ? \quad x \quad y \quad z \quad a \quad b \quad c \quad \ldots$$

an deren Stelle Zahlen eingesetzt werden können, heißen in der Mathematik *Variable*.

15.3.2 Kommentare

- Anstelle des Wortes Variable kann auch das Wort *Platzhalter* verwendet werden. Das ist vor allem in der Grundschule verbreitet.
- Die Standard-Variable bei mathematischen Termen ist das x.
- Bei Anwendungen in Geometrie, Physik usw. treten alle Groß- und Kleinbuchstaben des Alphabets, auch griechische Buchstaben in Erscheinung.

15.3.3 Schul-Definition: Term

Rechenausdrücke, in denen

- Zahlen und/oder Variable
- einzeln oder durch Rechenzeichen,

verknüpft auftreten, heißen in der Mathematik *Terme*.

15.3.4 Beispiele für Terme sind

$$13 - \square \qquad 25 \qquad a \qquad 7 + 4 \cdot x \qquad a^2 + b^2 - c^2$$

Genau genommen sind auch einzelne Zahlen oder Variable Terme.

15.3.5 Zahlenterme

Terme, in denen keine Variable auftreten, werden einfach *Zahlenterme* genannt. Beispiele sind

$$12 \cdot 65 + 83 \qquad 4 \cdot 921 \cdot 125 \qquad 11 : 3 + 91 : 7 \qquad 789 - 987$$

15.3.6 Kommentare

- Rechenzeichen sind auch Klammern, Bruchstriche, Hochstellen einer Zahl.
- Der Malpunkt zwischen Zahlen, Variable oder Teiltermen wird in der höheren Mathematik häufig weggelassen. Dies entspricht dem Sprachgebrauch ,,Zwei Semmeln" anstelle von ,,Zwei mal Semmel".

$$\begin{aligned} 2\,a &= 2 \cdot a \\ \ell\, b\, h &= \ell \cdot b \cdot h \\ 2\,\pi\, r &= 2 \cdot \pi \cdot r \\ (a+b)(a-b) &= (a+b) \cdot (a-b) \end{aligned}$$

- Beachte dabei, dass der Malpunkt zwischen zwei Zahlen nicht weggelassen wird.

$$3\,2 \;\neq\; 3\cdot 2 \;=\; 6 \qquad\qquad 8\,\frac{1}{2} \neq 8\cdot\frac{1}{2} \;=\; 4$$

- In Termen werden normalerweise runde, eckige und geschweifte Klammern in der Reihenfolge von innen nach außen benutzt. Dies ist als Hilfestellung, nicht als unumstößliche Regel anzusehen.

15.3.7 Punkt-vor-Strich

- Für die Grundrechenarten und Vorzeichenopertoren gilt die folgende Vorrangregel.

  1. Potenz vor
  2. Punktoperationen (Multiplikation, Division) vor
  3. Strichoperationen (Addition, Subtraktion).

  Diese Regel ist eine Konvention, das heißt sie beruht auf einer (unausgesprochenen) Abmachung der weltweit (früher und heute) tätigen Mathematiker.

- Kommentare zu dieser Regel:

  – Der zweite Teil dieser Regel ist als „Punkt-vor-Strich"-Regel bekannt.

  – Als Kurzformel wird die gesamte Regel als „Po vor Pu vor S" formuliert.

  – Klammern haben — ihrem Wesen gemäß — immer Vorrang.

  – Für das Minuszeichen als Vorzeichen gelten fallweise unterschiedliche Vorrangregeln:

$$\begin{aligned} -3^4 \quad &:= \quad -(3^4) \;=\; -81 \;\neq\; (-3)^4 \\ -3+4 \quad &:= \quad (-3)+4 \;=\; 1 \;\neq\; -(3+4) \end{aligned}$$

  – Hinweis: Der netten Abkürzung „PoKlaPS" liegt ein Fehler zugrunde. Potenzen haben keinen Vorrang gegenüber Klammern. Beispiel: $(4+3)^2 \neq (4+3^2)$

15.4 Terme zur Modellierung

Die in Abschnitt 15.1.1 geschilderte Input-Output-Situation taucht vielfältig in der Wirklichkeit (Alltag, Natur, Wirtschaft, Wissenschaft, Freizeit) auf. Die mathematische Modellierung geschieht durch das *Aufstellen* von Termen.

15.4.1 Beispiele

- Ein Geldbetrag wird zunächst verdreifacht, dann werden 7 € abgezogen.

  Der Geldbetrag wird als Variable x angesehen. Ob man x als Zahl (= ohne Einheit) oder als Größenwert (= mit Einheit) ansetzt, bleibt dem praktischen oder schulischen Kontext überlassen. Der Term lautet dann

  $$T(x) \quad = \quad 3 \cdot x - 7$$

- Von einem Geldbetrag werden 7 € abgezogen, dann wird das Ergebnis verdreifacht.

  $$T(x) \quad = \quad 3 \cdot (x - 7)$$

  Anhand dieser Beispiele kann herausgearbeitet werden, dass es auf die Reihenfolge der Operationen ankommt. Auf mathematischer Seite wird die Reihenfolge durch die Punkt-vor-Strich-Regel (siehe Abschnitt 15.3.7) bzw. durch die Klammersetzung beschrieben.

- Ein Rechteck ist dreimal so lang wie breit. Wie kann der Flächeninhalt berechnet werden?

  Als Variable nehmen wir die Breite b. Dann ist die Länge gleich $3 \cdot b$. Mit Hilfe der Formel für den Rechtecksflächeninhalt ergibt sich der Term

  $$A(x) \quad = \quad 3 \cdot b \cdot b \quad = \quad 3\,b^2$$

- Die Strecke zwischen zwei Bahnhöfen ist s, ein ICE benötigt dafür die Zeit t. Als Durchschnittsgeschwindigkeit ergibt sich

  $$v \quad = \quad \frac{s}{t}$$

- Einzäunung eines Quadrats. Siehe Abschnitt 15.7.3.
- Anhalteweg und Bremsweg
- Advanced: Der Kartenhausterm.
- Prepaid-Tarif: Grundgebühr plus Min. / SMS.

15.4.2 Beispiel: Rechnung der Stadtwerke Eichstätt

(W) Für Wasser werden (inkl. MwSt 7%) eine Grundgebühr von $32,10$ € pro Jahr und Verbrauchsgebühren von $1,40$ €/ m³ berechnet. Bei einem Jahresverbrauch von x m³ beträgt daher der Kosten-Term

$$W(x) \quad = \quad 32,10 + 1,40 \cdot x \qquad (€)$$

(S) Für Strom werden (inkl. MwSt 19%) ein Grundbetrag von $90,68$ € pro Jahr und Verbrauchsgebühren von $22,5$ Ct/ kWh berechnet. Bei einem Jahresverbrauch von x kWh beträgt daher der Kosten-Term

$$S(x) \quad = \quad 90,68 + 0,225 \cdot x \qquad (€)$$

(G) Für Gas werden (inkl. MwSt 19%) ein Grundpreis von $204,20$ € pro Jahr und Verbrauchsgebühren von $6,13$ Ct/ kWh berechnet. Bei einem Jahresverbrauch von x kWh beträgt daher der Kosten-Term

$$G(x) \quad = \quad 204,20 + 0,0613 \cdot x \qquad (€)$$

15.5 Auswerten von Termen

15.5.1 Definition: Auswerten

Unter dem *Auswerten* eines Terms versteht man, dass anstelle der Variablen Zahlen eingesetzt werden. Dabei nimmt der Term einen *Wert* an.

15.5.2 Beispiele und Erläuterungen

- Es ist der Term $T(x) = 3\,x+7$ gegeben. Wenn die Zahlen $0, 1, 2, 3$ eingesetzt werden, so ergeben sich die Werte

  $$T(0) = 7 \qquad T(1) = 10 \qquad T(2) = 13 \qquad T(3) = 16$$

- Der Term

  $$T(x) = 3 \cdot \tfrac{x}{10} + (\tfrac{x}{10})^2$$

  beschreibt den Anhalteweg (= Reaktionsweg + Bremsweg, in m) eines Autos bei Geschwindigkeit x (in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$). Die Variable x tritt mehrfach auf. Es ist dann

  $$\begin{aligned} T(30) &= (\tfrac{30}{10})^2 + 3 \cdot \tfrac{30}{10} &= 18 \\ T(60) &= (\tfrac{60}{10})^2 + 3 \cdot \tfrac{60}{10} &= 54 \end{aligned}$$

  Beachte, dass nicht verschiedene Zahlen für die gleiche Variable x eingesetzt werden dürfen, etwa so

  $$3 \cdot \tfrac{30}{10} + (\tfrac{60}{10})^2 \ = \ 45$$

- Es ist der Term $T(\ell, b) = \ell \cdot b$ für den Flächeninhalt eines Rechtecks gegeben. Dann gilt beispielsweise

  $$T(1;2) = 1 \cdot 2 \ = \ 2 \qquad T(5;12) = 5 \cdot 12 \ = \ 60 \qquad T(-3;\tfrac{2}{5}) = -\tfrac{6}{5}$$

  Es dürfen für die verschiedene Variablen auch gleiche Zahlen eingesetzt werden, so dass mit diesem Term auch die Fläche eines Quadrats berechnet werden kann:

  $$T(1;1) = 1 \cdot 1 \ = \ 1 \qquad T(5;5) = 5 \cdot 5 \ = \ 25 \qquad T(-3;-3) = 9$$

15.6 Gliedern von Termen

Hier tritt wieder der Syntax–Aspekt des Termbegriffs stärker hervor.

- Fachwörter der Grundrechenarten — Text — Termbaum
- Einstieg: Es soll ein Term beschrieben werden, ohne dass dabei Rechenzeichen genannt werden.
- Merke: Bei der Termgliederung muss genau in der umgekehrten Reihenfolge vorgegangen werden wie bei der Auswertung.
- Idee der Unterklammerung.

15.7 Äquivalenz von Termen

15.7.1 Definitionen: Grund– und Definitionsmenge

(1) Die Menge, deren Elemente für die Einsetzung anstelle einer Variablen eines Terms vorgesehen sind, heißt *Grundmenge* G des Terms.

(2) Die Menge der Elemente aus der Grundmenge, die für eine Variable eingesetzt werden dürfen (können), heißt *Definitionsmenge* D des Terms.

15.7.2 Kommentare

- Oft wird bei Termen der Begriff der Grundmenge gar nicht intensiv thematisiert. Es wird dann stillschweigend einfach der aktuelle Zahlbereich $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ als Grundmenge angesehen.

- Eine Unterscheidung zwischen Grund- und Definitionsmenge wird in der aktuellen Schulpraxis kaum vorgenommen.

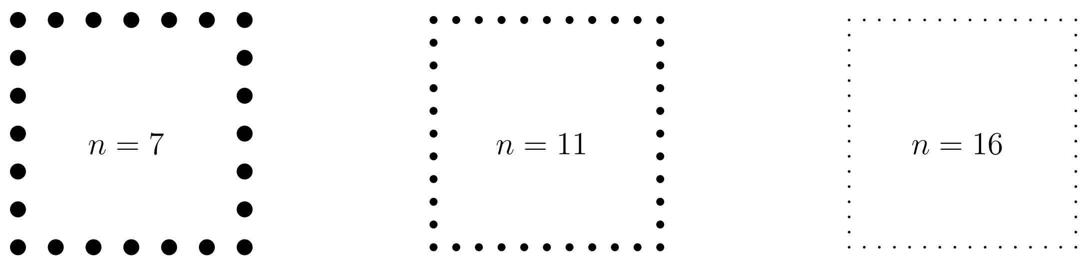
  Beispiel: Als Grundmenge für den Term $\frac{1}{x-2}$ kann man $\mathbb{N}$ ansehen. Da aber die Zahl 2 nicht eingesetzt werden kann, ist die Definitionsmenge gleich $D = \mathbb{N} \setminus \{2\}$.

  Im Kontext der Bemühung, das überzogene Begriffssystem der Schulmathematik zu verschlanken, gibt es den Ansatz, einen der beiden Begriffe ganz zu vermeiden und die Problematik der nicht–zulässigen Einsetzungen da zu behandeln, wo man ihr begegnet.

- Wir sprechen im folgenden nur von der Grundmenge.

15.7.3 Beispiel

Ein quadratisches Grundstück soll eingezäunt werden. Auf jeder Seite sollen n Pfähle mit immer gleichem Abstand stehen. Wie viele Pfähle müssen eingepflockt werden?



15.7.4 Mathematisierung

Bei der Mathematisierung dieses Sachverhalts stößt man auf ,,verschiedene" Terme:

- $T_1(n) = n + (n-1) + (n-1) + (n-2)$
- $T_2(n) = n + n + (n-2) + (n-2)$
- $T_3(n) = 2 \cdot n + 2 \cdot (n-2)$
- $T_4(n) = 4 \cdot (n-1)$
- $T_5(n) = n^2 - (n-2)^2$

15.7.5 Auswertung

Wir werten die Terme für verschiedene n aus:

Term	$n = 2$	$n = 5$	$n = 10$	$n = 63$
$T_1(n) = n + (n-1) + (n-1) + (n-2)$	4	16	36	248
$T_2(n) = n + n + (n-2) + (n-2)$	4	16	36	248
$T_3(n) = 2 \cdot n + 2 \cdot (n-2)$	4	16	36	248
$T_4(n) = 4 \cdot (n-1)$	4	16	36	248
$T_5(n) = n^2 - (n-2)^2$	4	16	36	248

Die Tabelle deutet darauf hin, dass bei der Einsetzung natürlicher Zahlen für die Variable n jeweils der gleiche Wert auftritt.

15.7.6 Semantik-Definition: Äquivalenz von Termen

Zwei Terme $T_1(x)$ und $T_2(x)$ mit gemeinsamer Grundmenge G heißen *äquivalent*, wenn sie bei Einsetzung einer beliebigen Zahl aus dieser Grundmenge für die Variable jeweils den gleichen Wert annehmen.

Man schreibt dann:

$$T_1(x) \;=\; T_2(x), \qquad x \in G.$$

Beachte, dass die Angabe der Grundmenge G weggelassen werden kann, wenn der Kontext klar ist.

15.7.7 Beispiele

- Die beiden Terme $(x+3)^2$ und $x^2 + 6x + 9$ sind äquivalent über $\mathbb{R}$.
- Die beiden Terme $3x + 51$ und $3(x + 17)$ sind äquivalent über $\mathbb{R}$.
- Die beiden Terme x^2 und x sind äquivalent über $\{0, 1\}$, nicht aber über $\mathbb{R}$.

15.7.8 Frage

Kann man äquivalente Terme als ,,gleich" bezeichnen?

- In semantischer Hinsicht JA, da es sich um die gleichen Wertzuweisungen (im Sinne von Funktionen, siehe später) handelt.
- In syntaktischer Hinsicht NEIN, da es sich um verschiedene Symbolfolgen handelt.
- In der Schulpraxis wird dieses Problem im allgemeinen ,,unter den" Teppich gekehrt. So wird zwar der Begriff der ,,Äquivalenz" eingeführt, dann aber beispielsweise die beiden Terme

  $$(a+b)^2 \qquad a^2 + 2ab + b^2$$

  als gleich bezeichnet.

15.7.9 Nicht–Äquivalenz

liegt vor, wenn zwei Terme bei Einsetzung irgend einer (einzigen) Zahl aus der Grundmenge verschiedene Werte annehmen.

Eine Fehlvorstellung besteht hier darin, dass die Nicht–Äquivalenz durch Äquivalenzumformungen (Begriff: Siehe unten) gezeigt werden muss.

15.7.10 Beispiele

(1) Die beiden Terme x^2 und $2x$ sind nicht äquivalent, da sie bei Einsetzung von $x = 1$ verschiedene Werte ergeben.

(2) Die beiden Terme $x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ und $2x^3 - 6x^2 + 4x + 5$ ergeben bei Einsetzung der Zahlen $0, 1, 2$ gleiche Werte, aber bei Einsetzung von 3 zwei verschiedene Werte. Also sind sie nicht äquivalent.

15.8 Äquivalenzumformungen

15.8.1 Nachweis der Äquivalenz

Zum Nachweis der Äquivalenz von zwei Termen müsste man gemäß Definition alle Elemente der Grundmenge ,,durchtesten". Dies ist bei unendlichen Grundmengen unmöglich. Dieses Problem wird nun — mathematisch wenig einwandfrei — wieder durch Rückgriff auf den Syntax–Aspekt ,,gelöst", man definiert:

15.8.2 Syntax-Definition: Umformung

Wird ein Term durch Anwendung von gültigen Rechengesetzen in einen anderen Term umgeformt, so spricht man von einer *Äquivalenzumformung* des einen Terms in den anderen.

Oft wird der Begriff verkürzt: *Umformung* von Termen.

Bei dem Begriff ,,gültige Rechengesetze" nimmt man Bezug auf die in der bisherigen Schul–Mathematik erworbenen Rechengesetze bzw. die zum Teil intuitiv vorhandenen Auffassungen davon. Wir beschreiben sie auf der folgenden Seite.

15.8.3 Kommutativgesetz der Addition

Es besagt, dass es bei der Addition von Zahlen (oder Termen) nicht auf die Reihenfolge der Zahlen ankommt:

$$\begin{aligned} a+b &= b+a \\ 17+453 &= 453+17 \end{aligned}$$

15.8.4 Assoziativgesetz der Addition

Es besagt, dass es bei der Addition von Zahlen (oder Termen) nicht auf die Reihenfolge der Operationen ankommt:

$$\begin{aligned} (a+b)+c &= a+(b+c) \\ (86+17)+23 &= 86+(17+23) \end{aligned}$$

15.8.5 Kommutativgesetz der Multiplikation

Es besagt, dass es bei der Multiplikation von Zahlen (oder Termen) nicht auf die Reihenfolge der Zahlen ankommt:

$$\begin{aligned} a\cdot b &= b\cdot a \\ 4592\cdot 3 &= 3\cdot 4592 \end{aligned}$$

15.8.6 Assoziativgesetz der Multiplikation

Es besagt, dass es bei der Multiplikation von Zahlen (oder Termen) nicht auf die Reihenfolge der Operationen ankommt:

$$\begin{aligned} (a+b)+c &= a+(b+c) \\ (34\cdot 25)\cdot 4 &= 34\cdot(25\cdot 4) \end{aligned}$$

15.8.7 Distributivgesetz

Es besagt, dass es bei der Multiplikation einer Zahl mit einer Summe nicht darauf ankommt, ob man erst die Summanden multipliziert und dann addiert oder erst addiert und dann die Summe multipliziert:

$$\begin{aligned} a\cdot(b+c) &= (a\cdot b)+(a\cdot c) \\ 18\cdot(200+7) &= (18\cdot 200)+(18\cdot 7) \end{aligned}$$

15.9 Lineare Terme

15.9.1 Definition: Linearer Term Ein Term der Form

$$T(x) \quad = \quad m \cdot x + t,$$

wobei m und t fixierte Zahlen sind, heißt *linearer Term*.

Auch Terme, die durch Umformungen in diese Form gebracht werden können, heißen linear.

15.9.2 Beispiele linearer Terme

$$3x + 7 \qquad 4(x - 8) \qquad -x + 5$$

$$x^2 - 5x + 6 - x^2 + 2x$$

$$7 \cdot (-5) \cdot a \cdot 3$$

15.9.3 Kommentare

- Lineare Terme zur Modellierung wurden bereits in Abschnitt 15.4.2 über die Rechnung der Stadtwerke angegeben.
- Innerhalb eines einfachen linearen Terms werden zwei Rechenoperationen ausgeführt.
- Eine besondere Aufgabenstellung bei linearen Termen ist, zu einem gegebenem Wert (=Output) rückwärts die eingesetzte Zahl (=Input) zu ermitteln. Das ist bereits das Gebiet der linearen Gleichungen.

16 Spezielle Terme und ihre Umformungen$^{\ominus}$

16.1 Produktterme

16.1.1 Definition

Ein Term heißt *Produktterm*, wenn er ein Produkt aus Vorzeichenfaktoren, Zahlen und Potenzen von Variablen ist.

Beispiele:

$$43x^2 \cdot y$$
$$-\frac{4}{3}ab \cdot a^2xw$$
$$-2,5 \cdot x^3yz^4 \cdot 6x^5$$
$$p^6q^8 \quad = \quad \underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p}_{6 \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q}_{8 \text{ Faktoren}}$$

Die herausgehobene Separierung bzgl. Faktortypen ist hilfreich.

16.1.2 Vereinfachen

Man kann Produktterme vereinfachen, indem man ...

- Vorzeichen
- Zahlfaktoren und
- Variablenpotenzen mit gleicher Basis

unter Anwendung des Kommutativ– und des Assoziativgesetzes zusammenfasst und dann evtl. die Variablenpotenzen alphabetisch ordnet.

Es entsteht ein ,,Einfacher Produktterm" mit einem Vorzeichen, einem Zahlfaktor und jeweils einer Potenz für jede Variable.

16.1.3 Beispiele

$$5a^2b \cdot (-4)ab^3 \quad = \quad 5 \cdot (-4) \cdot a^2a\,bb^3 \quad = \quad -20a^3b^4$$
$$\tfrac{3}{4} \cdot x \cdot \tfrac{1}{2} \cdot b^2 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot 3 \cdot x^3 \quad = \quad \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot a \cdot b^2 \cdot b \cdot x \cdot x^3 \quad = \quad \tfrac{1}{8} \cdot a \cdot b^3 \cdot x^4.$$
$$g^5 : g^3 \quad = \quad g^2$$
$$4x^3 \cdot 5y^2 : (-3) \quad = \quad 4x^3 \cdot 5y^2 \cdot \tfrac{1}{-3}$$

Die letzten beiden Beispiele zeigen, dass Produktterme auch Divisionszeichen enthalten können, die dann mit Hilfe der Kehrbruchidee beseitigt werden können.

Bei der Multiplikation von Variablen beachte, dass

$$a^n \cdot a^m \quad = \quad a^{n+m}, \qquad \text{da } (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{n \text{ Faktoren}}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{m \text{ Faktoren}}) \quad = \quad \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{n+m \text{ Faktoren}}$$

Beachte, dass ein häufig auftretender Fehler darin besteht, dass — beispielsweise —

$$a^2 \cdot a^3 \quad = \quad a^6$$

berechnet wird. Ursachen dafür sind ...

- das Verblassen einer lebendigen Vorstellung von der Definition der Potenz, Es wird nur noch formal gerechnet.
- das simple Übertragen der Multiplikation im Term auf den Exponenten,
- die Verwechslung (Fehler durch Nähe) mit der Potenzregel (siehe unten).

16.1.4 Multiplikation von Produkttermen

Produktterme werden multipliziert, indem man die Vorzeichenfaktoren, Zahlen und Variablen jeweils getrennt multipliziert und das entstehende Produkt dann vereinfacht.

16.1.5 Potenzierung von Produkttermen

Ein Produktterm wird potenziert, indem man jeden Faktor einzeln (mit dem Exponenten) potenziert.
(Veranschaulichung durch Würfelvolumen: Kantenlänge $x \to 2x$).
Beachte, dass für die Potenzierung von Potenzen gilt:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \qquad \text{da } \underbrace{(\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{n \text{ Faktoren}}) \cdot \ldots \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{n \text{ Faktoren}})}_{m \text{ Faktoren}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{n \cdot m \text{ Faktoren}}$$

Im Zusammenhang mit dem Assoziativgesetz der Multiplikation und ihrer Umkehroperation ergibt sich eine Zweideutikgeit. Wie soll der Term

$$15a^3 : 5a^2$$

vereinfacht werden?

- Die optisch–satztechnische Anordnung spricht dafür, dass die Klammern als

  $$(15a^3) : (5a^2)$$

  gesetzt sind.

- Würde man jedoch in dem obigen Term zusätzlich Mal–Punkte setzen

  $$15 \cdot a^3 : 5 \cdot a^2,$$

  so tritt die Konvention ,,Von Links nach Rechts” stärker hervor. Der Term würde auch bei der Verarbeitung durch ein Computerprogramm oder — nach Einsetzen einer Zahl — durch einen Taschenrechner so interpretiert werden.

16.2 Summenterme

16.2.1 Definition

Ein Term heißt *Summenterm*, wenn er als verallgemeinerte Summe von Produkttermen geschrieben ist. ,,Verallgemeinert" heißt hier, dass Additionen und Subtraktionen auftreten können (Früherer Ausdruck: Aggregat). Die einzelnen Summanden und Subtrahenden heißen in diesem Zusammenhang auch *Glieder*.

Zwei (einfache) Produktterme heißen *gleichartig*, wenn sie als Faktoren die gleichen Variablenpotenzen, aber eventuell verschiedene Zahlfaktoren oder verschiedene Vorzeichen haben.

$$5rs^2t \qquad -18rs^2t \qquad rts^2 \qquad 2r\cdot 5s\cdot t\cdot(-3s)$$

Gleichartige Produktterme in einem Summenterm können mit Hilfe des Distributivgesetzes zusammengefaßt werden.

$$\begin{aligned}&5rs^2t-18rs^2t+rts^2+2r\cdot 5s\cdot t\cdot(-3s) \;=\\ &5rs^2t-18rs^2t+rs^2t+(-30)rs^2t \;=\\ &-42rs^2t.\end{aligned}$$

Summenterme werden vereinfacht, indem man

- zunächst die Produktterme vereinfacht (und ordnet) und dann
- gleichartige Produktterme zusammenfasst.

16.3 Multiplikation von Summentermen — Faktorisierung

16.3.1 Das Distributivgesetz

Das Distributivgesetz sollte bereits aus den ,,Zahlbereichen" bekannt sein.

$$a\cdot(b+c) \;=\; a\cdot b+a\cdot c \quad \text{und} \quad (a+b)\cdot c \;=\; a\cdot c+b\cdot c \qquad \text{für alle } a,b,c\in\mathbb{Q}.$$

Neu ist jetzt, dass anstelle der Zahlen und Variablen auch beliebige Teilterme stehen können. Das Einsetzen von Termen anstelle von Variablen in bekannten Formeln ist eine wesentliche Grundfertigkeit des Termrechnens an sich und sollte bereits hier — im vergleichbar elementaren Kontext — gut geübt werden.

$$\begin{aligned}&e\cdot(f+g) \;=\; e\cdot f+e\cdot g\\ &b\cdot(a+c) \;=\; ba+bc \;=\; ab+bc\\ &2a^2x\cdot(3ax+5x^3) \;=\; 6a^3x^2+10a^2x^4\end{aligned}$$

Einen Sonderfall nimmt die Multiplikation eines Summemterms mit -1 ein. Dies sollte extra thematisiert — und nicht als ,,klarer Spezialfall" abgehandelt — werden.

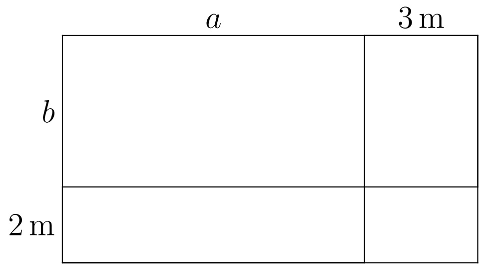
> Bei Multiplikation eines Summenterms mit -1 ändern sich die Vorzeichen der einzelnen Glieder.

16.3.2 Die Grundformel

Frau Taube sagt zu ihrem Mann:

> Ich habe heute unser Blumenbeet um 3 m verlängert und 2 m verbreitert. Kannst Du mir bitte Pflanzen dafür mitbringen?

Herr Taube bringt für $6\,\mathrm{m}^2$ Pflanzen mit!



Die neue Fläche ergibt sich also zu:

$$(a + 3\,\mathrm{m}) \cdot (b + 2\,\mathrm{m}) \;=\; a \cdot b + a \cdot 2\,\mathrm{m} + 3\,\mathrm{m} \cdot b + 6\,\mathrm{m}^2.$$

Kann man dies auch durch Ä–Umformungen nachrechnen?

$$(a + b) \cdot \underbrace{(c + d)}_{s} \;=\; (a + b) \cdot s \overset{DG}{=} a \cdot s + b \cdot s$$

$$a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) \overset{DG}{=} a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Merke (Grundformel): Für beliebige Zahlen aus $\mathbb{Q}$ gilt:

$$(a + b) \cdot (c + d) \;=\; a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

16.3.3 Das Ausmultiplizieren — allgemein

Die Grundformel kann verallgemeinert werden auf

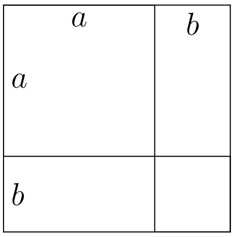
- mehrgliedrige Summentermen als Faktoren und/oder
- mehr als zwei Faktoren.

Merke: Man multipliziert zwei Summenterme, indem man jedes Glied aus dem ersten Summenterm mit jedem Glied aus dem zweiten Summenterm (unter Berücksichtigung der Vorzeichen) multipliziert und diese Produkte dann addiert.

Bei mehr als zwei Faktoren werden nacheinander immer jeweils zwei Faktoren multipliziert.

16.3.4 Die Plus–Formel

Sie heißt auch 1. binomische Formel. Der Zugang erfolgt beispielsweise über den Flächenvergleich in einem Quadrat



Rechnerisch erhält man das durch Zurückführen auf die Grundformel.

$$(a+b)^2 \;=\; (a+b)\cdot(a+b) \;=\; a^2+ab+ba+b^2 \;=\; a^2+2ab+b^2.$$

Es müssen also die Quadrate der Summanden und das *doppelte gemischte Glied* addiert werden.

Anwendung:

- Leichteres Quadrieren

$$42^2 \;=\; (40+2)^2 \;=\; 40^2+2\cdot 40\cdot 2+2^2 \;=\; 1764.$$

- Kopfrechentrick beim Quadrieren einer ,,Fünferzahl”

  Eine zweistellige Zahl mit Endziffer 5 wird quadriert, indem man die Zehnerziffer mit der um 1 erhöhten Ziffer multipliziert, zwei Nullen anhängt und 25 addiert.

$$(x|5)^2 \;=\; (x\cdot 10+5)^2 \;=\; x^2\cdot 100+2\cdot x\cdot 10\cdot 5+25 \;=\; x(x+1)\cdot 100+25.$$

- Vereinfachtes schriftliches Quadrieren einer zweistelligen Zahl (Wegen Schreibtechnik $*$ statt $\cdot$)

```
47 * 47 =        76 * 76 =        31 * 31 =
---------       ----------       ----------
   1649             4936             0901
    56               84               06
---------       ----------       ----------
   2209             5776             0961
```

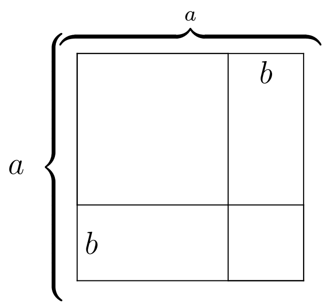
- Elementare Zahlentheorie
  - Der Unterschied zwischen zwei benachbarten Quadratzahlen n^2 und $(n+1)^2$ ist $n+(n+1)$.
  - Beim Dividieren eines Quadrats einer ungeraden Zahl erhält man immer den Rest 1.

$$(2n+1)^2 \;=\; 4n^2+4n+1 \;=\; 4n(n+1)+1$$

16.3.5 Die Minus–Formel

Sie wird auch als 2. binomische Formel bezeichnet.

Zugang über den Flächenvergleich in einem Quadrat



Rechnerisch erhält man das durch Zurückführen auf die Grundformel.

$$(a-b)^2 \;=\; (a-b)\cdot(a-b) \;=\; a^2-ab-ba+b^2 \;=\; a^2-2ab+b^2.$$

Alternative: Zurückführen auf die Plus–Formel:

$$(a-b)^2 \;=\; (a+(-b))^2 \;=\; a^2+2a(-b)+(-b)^2 \;=\; a^2-2ab+b^2.$$

Ein Problem stellt hier das Ersetzen der Variable b (in der Plusformel) durch $(-b)$ dar.

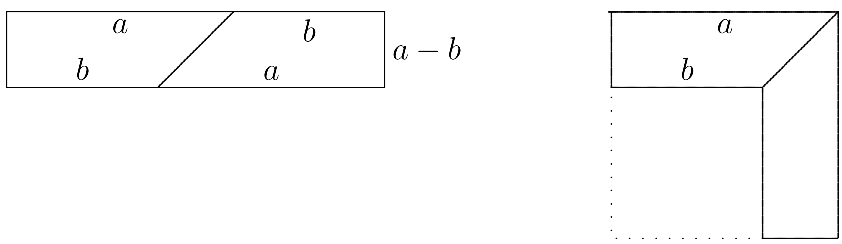
Anwendung: Leichteres Quadrieren

$$49^2 \;=\; (50-1)^2 \;=\; 50^2-2\cdot 50\cdot 1+1^2 \;=\; 2401.$$

16.3.6 Die Plus–Minus–Formel

Sie trägt auch den Namen „3. binomische Formel".

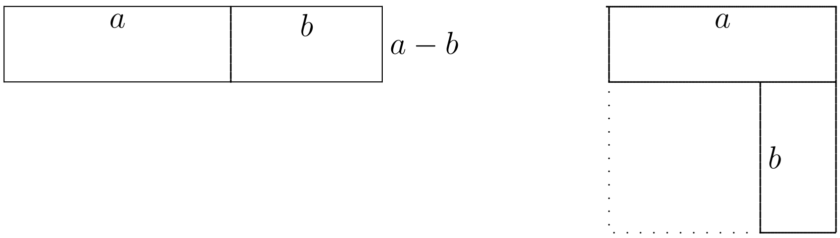
Zugang über die Umstellung einer Rechtecksfläche der Seitenlängen $a+b$ und $a-b$. Man schneidet sie entsprechend einer der beiden Skizzen durch und dreht bzw. verschiebt das „rechte" Teilstück, so dass eine „Quadratdifferenz" entsteht.



Der Flächeninhalt der linken Figur ist $(a+b)\cdot(a-b)$, der der rechten ist a^2-b^2. Da nur ein Teilstück (kongruent) umgelegt wurde, muss zwischen linker und rechter Figur Flächengleichheit bestehen:

$$(a+b)\cdot(a-b) \;=\; a^2-b^2.$$

Alternativ kann man auch die folgende Umlegung eines Teilrechtecks vornehmen und dann genauso argumentieren:



Alternativ kann man die Plus–Minus–Formel durch Zurückführen auf die Grundformel herleiten:

$$(a+b)\cdot(a-b) \stackrel{\text{GF}}{=} a^2 - ab + ba - b^2 \stackrel{\text{KG}}{=} a^2 - ab + ab - b^2 \quad = \quad a^2 - b^2.$$

Anwendung: Leichteres Kopf–Multiplizieren

$$49 \cdot 51 \quad = \quad (50-1)\cdot(50+1) \quad = \quad 50^2 - 1^2 \quad = \quad 2499.$$

Bei der Betragsberechnung einer komplexen Zahl (i.A. nicht schulrelevant), stellt sich heraus, dass die Plus–Minus–Formel mit dem Satz von Pythagoras verknüpft ist: Für eine komplexe Zahl $z = a + ib$ mit Betrag $|z| = c$ gilt:

$$c^2 = z \cdot \overline{z} = (a+ib)\cdot(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2.$$

16.3.7 Die binomischen Formeln auf einen Blick

$$\begin{array}{lclcccccl} (a+b)^2 & & & = a^2 & + & 2ab & + & b^2 & \text{(Plus–Formel)} \\ & & (a-b)^2 & = a^2 & - & 2ab & + & b^2 & \text{(Minus–Formel)} \\ (a+b) & \cdot & (a-b) & = a^2 & & & - & b^2 & \text{(Plus–Minus–Formel)} \end{array}$$

Diese tabellarische Darstellung ist nicht unbedingt als Merkhilfe gedacht, sie betont aber nochmals die Idee, dass Summenterme multipliziert werden.

Konkrete Durchführung bei umfangreicheren Termen:

$$(25xy^2 + 4p)^2 \;=\; (\underbrace{25xy^2}_{a} + \underbrace{4p}_{b})^2 \;=\; (\underbrace{25xy^2}_{a})^2 + 2 \cdot \underbrace{25xy^2}_{a} \cdot \underbrace{4p}_{b} + (\underbrace{4p}_{b})^2$$

Eine Hilfestellung ist dadurch gegeben, dass die Glieder, die die Rolle von a und b innerhalb der Formeln spielen, durch Bleistiftunterschrift entsprechend gekennzeichnet werden.

Eine Schwierigkeit tritt auf, wenn in solchen Termen selbst die Variablen a oder b auftreten:

$$(\underbrace{3a}_{a} + \underbrace{5b}_{b})^2 \;=\; \ldots$$

Behebung: Umwechseln zu A, B oder α, β oder anderen geeigneten Variablennamen oder -symbolen. n.

Früher mußten auch die binomische Formeln für höhere Potenzen (B: $(a+b)^3$) (auswendig) beherrscht werden.

Heute eher: Fähigkeit, solche Terme zu multiplizieren.

Hinweis (Fachmathematik) : Es gilt der binomische Lehrsatz:

$$(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$$

Bei mehrgliedrigen Summentermen (B: $(a+b-c)^2$) sollte man das Ausmultiplizieren direkt anwenden.

16.3.8 Faktorisierung von Summentermen

Einstieg: Betrachte den Term $T(e;f) = \frac{e^2-f^2}{e+f}$. Es werden verschiedene Zahlen für e und f eingesetzt.

e	5	1	3	-2	$\frac{2}{3}$	$1,2$
f	2	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$-0,52$
$T(e;f)$	3	0	3	-3	$\frac{1}{6}$	$1,72$

Offenbar gilt: $T(e;f) = e - f$. Wie kann man das herausfinden? So:

$$T(e;f) = \frac{e^2 - f^2}{e+f} \quad = \quad \frac{(e+f)(e-f)}{e+f} \quad = \quad e - f.$$

Dabei wurde die binomische Formel angewandt, um den Zähler zu faktorisieren.

16.3.9 Definition

Kann ein Summenterm durch eine Äquivalenzumformung in einen Produktterm überführt werden, so spricht man von einer *Faktorisierung.*

Zur Faktorisierung werden das Distributivgesetz, die Grundformel und die binomischen Formeln ,,in Rückwärtsrichtung" angewandt.

16.3.10 Zusammenfassung der Faktorisierungsmethoden

Gesetze	Multiplizieren	Faktorisieren
Minusklammerregel $-(b-a) = a-b$	mit -1 multiplizieren ,,Umkehren der Vorzeichen"	durch -1 dividieren ,,Umkehren der Vorzeichen"
Distributivgesetz $a(b+c) = ab+ac$	Ausmultiplizieren ,,in die Klammer ziehen"	Ausklammern ,,aus der Klammer ziehen"
Grundformel $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$	Gliedweises Multiplizieren	Wiederholtes Ausklammern (anspruchsvoll: Satz von Vieta)
Plusformel $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$	Anwenden der Plusformel	Anwenden der Plusformel in umgekehrter Richtung
Minusformel $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$	Anwenden der Minusformel	Anwenden der Minusformel in umgekehrter Richtung
Plusminusformel $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$	Anwenden der Plusminusformel	Anwenden der Plusminusformel in umgekehrter Richtung

Beim Faktorisieren mit Hilfe der binomischen Formeln kann es leicht zu einem Fehler kommen, der auf die Nicht–Beachtung des Faktors 2 zurückzuführen ist:

$$9r^2 - 6rs + 4s^2 \stackrel{?}{=} (3r - 2s)^2$$

Hilfreich für die Vermeidung dieses Fehlers ist der Faktorisierungs–Dreischritt

1. Suche das erste quadratische Glied!
2. Suche das zweite quadratische Glied!
3. Teste das doppelte gemischte Glied!

16.4 Typische Fehler beim Termrechnen

- Verletzung der Potenzregeln.
- Zusammenfassen verschiedenartiger Produktterme
- Falsches Zusammenfassen gleichartiger Produktterme.
- Falsche Anwendung der Klammerregeln.
- Falsche Anwendung des Distributivgesetzes.
- Bei Anwendung der Grund–, Plus oder Minusformel werden die ,,gemischten Glieder" nicht berücksichtigt:

$$(b+3)\cdot(b-4) \;=\; b^2-12 \qquad (3+x)^2 \;=\; 9+x^2 \qquad (c-2x)^2 \;=\; c^2 \pm 4x^2$$

17 Gleichungen$^{\ominus}$

17.1 Einstieg

Der Zugang zum Begriff der Gleichung geschieht wieder semantik-orientiert, im Rahmen der Logik und Mengenlehre.

Wir können uns hier nicht ausführlich mit den feinen und tiefen mathematischen Einsichten in diese zwei grundlegenden Teilgebiete abgeben. Nichtsdestoweniger müssen wir einige elementare Begriffe und Fakten bereitstellen.

17.1.1 Definition: Aussage

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Gebilde, das — innerhalb eines vereinbarten Kontexts — eindeutig als *wahr* (w) oder *falsch* (f) erkannt werden kann.

17.1.2 Kommentare

- In der obigen Definition treten einige Begriffe auf, die ihrerseits eigentlich erst definiert werden müssten. Deshalb wird diese Definition auch naiv genannt.
- Ist eine Aussage wahr, so sagt man auch sie *gilt*.
- Aussagen werden dann wieder zu mathematischen Objekten, mit denen man sogar ,,rechnen kann": Aussagenlogik, Boolesche Algebra. In diesem Zusammenhang werden Symbole für Aussagen eingeführt, meist $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ o.ä.

17.1.3 Nicht-Beispiele für Aussagen

- Bleib hier! (Grammatik)
- Wie geht es Dir? (Grammatik)
- Die Resteverwertung ist bunt. (Sinngehalt)
- ,,Rot" ist eine schöne Farbe. (Wertung, Subjektivität)
- Harald ist rothaarig. (Kontext)
- Wenn zwei Geraden eine gemeinsame Lotgerade haben, dann sind sie parallel. (Kontext fehlt: 2-dim oder 3-dim?)
- ,,Der Satz, den Sie gerade lesen (hören), ist falsch".
- Der älteste Mann der Welt ist tot. (Schlagzeile im Eichstätter Kurier)

17.1.4 Beispiele für Aussagen

,,Gute" Beispiele erhält man im allgemeinen dadurch, dass man als Kontext einfache und klare Sachverhalte wählt oder — eben — die ,,Mathematik".

Von den folgenden Aussagen kann man klar entscheiden, ob sie wahr oder falsch sind.

- 91 ist durch 7 teilbar. (w)
- Es ist $30^2 + 40^2 = 50^2$. (w)
- Wenn die Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl ungerade ist, dann handelt es sich um eine Quadratzahl. (w)

- Ein Viereck mit vier gleich langen Seiten ist ein Quadrat. (f)
- Zwei Vierecke sind ähnlich, wenn sie in allen Innenwinkeln übereinstimmen. (f)
- Das um 1 vergrößerte Produkt von vier aufeinanderfolgenden Zahlen ist eine Quadratzahl. (w)
- Es gibt unendlich viele Primzahlen (w)
- Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge (u)

17.1.5 Definition: Aussageform und Variable

Es sei G irgendeine Menge, die in diesem Zusammenhang auch wieder Grundmenge heißt.

Ist nun für jedes $x \in G$ eine Aussage $\mathcal{A}(x)$ gegeben, so spricht man von einer *Aussageform*.

In diesem Zusammenhang heißt x auch die *Variable* innerhalb der Aussageform. Anstelle von x kann natürlich auch jedes andere Symbol als ,,Statthalter" für die Elemente der Grundmenge herangezogen werden.

17.1.6 Beispiele für Aussageformen

- $G = \{\mathrm{Mo}; \mathrm{Di}; \mathrm{Mi}; \mathrm{Do}; \mathrm{Fr}; \mathrm{Sa}; \mathrm{So}\}$ x's geht Marina in den Fitness-Raum.
- $G = \mathbb{N}$ n ist eine Primzahl.
- $G = \mathbb{R}$ x ist eine irrationale Zahl.
- $G = \mathbb{R}^2$ Der Punkt $P(x_P; y_P)$ liegt auf der ,,Zackenkurve" $K = \{(x, y) | y^2 = x^3\}$.

17.1.7 Definition: Gleichung

Es seien zwei Terme $T_1(x)$ und $T_2(x)$ mit der gleichen Grundmenge G vorgegeben.

Dann entsteht durch Gleichsetzen der beiden Terme eine Aussageform mit Grundmenge G.

$$\mathcal{A}(x): \qquad T_1(x) = T_2(x)$$

Eine solche Aussageform heißt kurz *Gleichung*.

17.1.8 Definition: Lösung

Setzt man ein Element aus der Grundmenge G anstelle der Variablen ein, so entsteht aus der Aussageform eine Aussage.

Ist diese Aussage wahr, so heißt x eine *Lösung* der Gleichung.

Ist diese Aussage falsch, so sagt man, dass x keine Lösung der Gleichung ist.

17.1.9 Elementare Begriffe bei Gleichungen

Als Rahmen treten die folgenden in der Sprache der Mengenlehre gefassten Begriffe in Erscheinung:

1. (Wh:) Die Menge, deren Elemente für die Einsetzung anstelle einer Variablen einer Gleichung vorgesehen sind, heißt *Grundmenge* G der Gleichung.

   Genau genommen gehört zu einer Gleichung immer die Grundmenge. Diese Einsicht tritt in der Schulpraxis — mehr oder weniger — in den Hintergrund, weil die Grundmenge gleich dem aktuellen Zahlenbereich $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$ ist.

2. Die Menge der Elemente aus der Grundmenge G, die für die Variable einer Gleichung eingesetzt werden dürfen, heißt *Definitionsmenge* D der Gleichung.

   Während die Schulmathematik früher genauer zwischen Grundmenge und Definitionsmenge unterschieden hatte, ist dies heute nicht mehr so üblich. Wir sprechen im folgenden nur von der Grundmenge.

3. Die Menge der Elemente x der Grundmenge G, die Lösung der Gleichung sind, heißt *Lösungsmenge* L der Gleichung

   $$L \quad := \quad \left\{ a \in G \,\middle|\, \text{ Gleichung in } a \text{ ist erfüllt } \right\}$$

   Aus der bereits in der Grundschule angebahnten Vertrautheit mit linearen Gleichungen entsteht der Eindruck, dass Gleichungen immer eine eindeutige Lösung haben.

   Die Bedeutung des hier beschriebenen Kontexts mit Hilfe der Mengenlehre liegt darin, dass andere Arten von Lösungsmengen zwanglos miterfasst werden, beispielsweise:

   - gar keine Lösung
   - zwei oder mehrere (endlich viele) Lösungen
   - Lösungsmengen auch von Ungleichungen, beispielsweise Intervalle
   - Lösungsmenge auch von Gleichungssystemen

4. Eine Gleichung, für die $L = \{\}$ gilt, heißt *unerfüllbar.*

   $$\begin{aligned} x &= x+1 \\ 0 \cdot x &= 5 \end{aligned}$$

5. Eine Gleichung, für die $L = G$ gilt, heißt *allgemeingültig*

   $$\begin{aligned} 2x+6 &= (3+x) \cdot 2 \\ 0 \cdot x &= 0 \end{aligned}$$

17.2 Äquivalenzumformungen von Gleichungen

17.2.1 Ziel

Ist eine Gleichung mit Grundmenge vorgegeben, so ist das damit verbundene Ziel das Lösen dieser Gleichung, das heißt die Ermittlung der Lösungsmenge.

17.2.2 Umformen

Die Methode besteht im Umformen von Gleichungen. Dabei entsteht eine Kette von Gleichungen:

- am Anfang steht die gegebene Gleichung
- am Ende sollte eine Gleichung stehen, aus der die Lösungsmenge leicht ermittelt werden kann.

Bei einer Umformung einer ,,Anfangsgleichung" in eine ,,Endgleichung" ändert sich — bei fest gegebener Grundmenge — im allgemeinen die Lösungsmenge L_{Anf} (vorher) in eine Lösungsmenge L_{End} (nachher).

17.2.3 Typen von Umformungen

In diesem Zusammenhang sind die folgenden Typen von Umformungen besonders interessant:

- Eine Umformung heißt *Gewinnumformung*, wenn $L_{\text{Anf}} \subseteq L_{\text{End}}$. Es kommen also beim Umformen Lösungen dazu.

  Beispiele sind

Multiplizieren mit der Variablen	$17x$	$=$	34	$\Longrightarrow$	$17x^2$	$=$	$34x$
Multiplizieren mit einem Term	$37x$	$=$	111	$\Longrightarrow$	$37x \cdot (x+2)$	$=$	$111x + 222$
Multiplizieren mit Null	$2x$	$=$	4	$\Longrightarrow$	0	$=$	0
Quadrieren	$2x+1$	$=$	7	$\Longrightarrow$	$(2x+1)^2$	$=$	49

  Wird eine Gleichung mittels Gewinnumformungen gelöst, so muss man die Lösungsmenge der Endgleichung daraufhin testen, ob sie die Anfangsgleichung erfüllen. Es muss eine *Probe* durchgeführt werden.

- Eine Umformung heißt *Verlustumformung*, wenn $L_{\text{End}} \subset L_{\text{Anf}}$. Beim Umformen verschwinden Lösungen.

  Beispiele sind

Dividieren durch die Variable	$13x^2$	$=$	$26x$	$\Longleftarrow$	$13x$	$=$	26
Wurzelziehen	x^2	$=$	169	$\Longleftarrow$	x	$=$	13
Auflösen von Beträgen	$\lvert x-5\rvert$	$=$	3	$\Longleftarrow$	$x-5$	$=$	3

  Wenn man also die Endgleichung löst, kann man sich nicht sicher sein, alle Lösungen der Anfangsgleichung gefunden zu haben.

- Eine Umformung heißt *Äquivalenzumformung*, wenn $L_{\text{End}} = L_{\text{Anf}}$. Die Lösungsmenge verändert sich dabei nicht.

  Beispiele siehe unten in Abschnitt 17.2.5.

17.2.4 Frage

Es bleibt dabei eine Frage offen:

> Die Lösungsmengen von Gleichungen sind zunächst unbekannt. Wie soll man dann den Typ einer Umformung erkennen.

Diese Frage wird ,,umgangen", indem man vom

- Semantik-Kontext: ,,Einsetzungsäquivalenz" zum
- Syntax-Kontext: ,,Umformungsäquivalenz"

umschaltet. Es wird ein Katalog von ,,erlaubten Äquivalenzumformungen" zusammengestellt.

17.2.5 Katalog

Erlaubte Äquivalenzumformungen sind unter anderen:

$\boxed{\text{VS}}$ Vertauschung der Seiten

$$\begin{array}{rcl} 53 &=& 8x+5 \\ v &=& \frac{s}{t} \end{array} \quad \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 8x+5 &=& 53 \\ v\cdot t &=& s \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \Longleftrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{rcl} && \\ s &=& v\cdot t \end{array}$$

$\boxed{\text{TU}}$ Termumformungen innerhalb der linken oder rechten Seite der Gleichung.

$$\begin{array}{rclcrcl} 5+x+3+x &=& 10 & \Longleftrightarrow & 2x+8 &=& 10 \\ 9x-12+15x &=& 25+9x-7 & \Longleftrightarrow & 24x-12 &=& 9x+18 \end{array}$$

$\boxed{\text{AS/Z}}$ Addition bzw. Subtraktion einer beliebigen Zahl.

$$\begin{array}{rclcrcl} 8x+2 &=& 11x-7 & \Longleftrightarrow & 8x &=& 11x-9 \\ x^2+6x &=& 27 & \Longleftrightarrow & x^2+6x+9 &=& 36 \end{array}$$

$\boxed{\text{AS/T}}$ Addition bzw. Subtraktion eines beliebigen Terms.

$$\begin{array}{rclcrcl} 18-4x &=& 12+2x & \Longleftrightarrow & 18 &=& 12+6x \\ 5x^2-7x+3 &=& 2-x^2 & \Longleftrightarrow & 6x^2-7x+1 &=& 0 \end{array}$$

$\boxed{\text{MD/Z}}$ Multiplikation mit bzw. Division durch eine Zahl **ungleich Null**.

$$\begin{array}{rclcrcl} \frac{1}{2}x+\frac{5}{3} &=& \frac{19}{6} & \Longleftrightarrow & 3x+10 &=& 19 \\ 17x^2+34 &=& 51x & \Longleftrightarrow & x^2+2 &=& 3x \end{array}$$

$\boxed{\text{MD/T}}$ Multiplikation mit bzw. Division durch einen Term, der bei Einsetzung beliebiger Elemente der Grundmenge nur Werte ungleich Null annimmt.

$$x^2-9 \;=\; (2x-7)(x+3) \quad \Longleftrightarrow \quad x-3 \;=\; 2x-7$$

Beachte, dass dies nur eine Äquivalenzumformug ist, wenn -3 nicht in der Grundmenge enthalten ist. Wenn doch, handelt es sich um eine Verlustumformung; die Lösung -3 ging verloren.

17.2.6 Kommentare

- Generell sollte bei Äquivalenzumformungen der vier letztgenannten Typen immer der Aspekt

  ,,Auf beiden Seiten der Gleichung wird die gleiche Operation ausgeführt”

  gegenüber dem ,,auf die andere Seite bringen” oder dem ,,Rüberbringen” herausgestellt werden.

- Eine in der Schulpraxis weitverbreitete Notation von Umformungen ist ein senkrechter Strich mit Angabe der Operation auf der rechten Seite der Ausgangsgleichung

$$\begin{aligned} 14x - 9 &= 8x + 9 \quad \Big| - 8x \\ 6x - 9 &= 9 \end{aligned}$$

  Gelegentlich wird der Senkrecht-Strich als ,,Kommandostrich” bezeichnet. Es stellt sich die Frage, ob man das Lösen von Gleichungen als eine Abfolge von Kommandos auffassen sollte.

- Gewinn- und Verlustumformungen werden in der Schulpraxis nicht thematisiert, ihre Problematik aber angerissen durch Eingrenzung der Grundmenge (auf die Definitionsmenge), durch Proben oder Fallunterscheidungen.

- Sinn der Probe allgemein:
  - Verlebendigung einer formalen Prozedur, Einsicht in die Schlagkraft eines Algorithmus.
  - Austesten von Lösungen bei Gewinnumformungen.
  - Überprüfen, ob bei den Äquivalenzumformungen Fehler begangen wurden.

- Der Typ MD/T von Äquivalenzumformung tritt meist nicht im Positiv-Katalog der schulischen Äquivalenzumformungen auf. Nichtsdestoweniger wird er immer wieder angewandt, vor allem bei Sachaufgaben, Bruchgleichungen, physikalischen Formeln.
  - Kreuzweises Ausmultiplizieren
  $$\frac{3}{4-x} = \frac{2}{2+x} \quad \Longleftrightarrow \quad 3(2+x) = 2(4-x)$$
  - Kehrwertbildung
  $$\frac{1}{x} = \frac{3}{6x-9} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{6x-9}{3}$$
  - Beispiel: Formel für den el. Widerstand
  $$R = \frac{U}{I} \quad \Longleftrightarrow \quad R \cdot I = U$$

17.3 Das Waage-Modell

17.3.1 Idee

Zur einführenden Veranschaulichung von Äquivalenzumformungen bei Gleichungen dient das Waage-Modell:

- Der linke und rechte Term werden als Gewichte interpretiert, die auf die Schalen einer Balkenwaage oder Tafelwaage gelegt werden.
- Besteht Gleichheit zwischen den Termen, so ist die Waage im Gleichgewicht.
- Werden auf den beiden Seiten der Gleichung gleiche Operationen ausgeführt, so entspricht das einer Veränderung der Gewichte auf der Waage, sie bleibt aber im Gleichgewicht.

Das Waage-Modell sollte nur zur einführenden Veranschaulichung von Äquivalenzumformungen benutzt werden. Der kontinuierliche Einsatz, beispielsweise auch bei komplexeren Beispielen, führt vom Lernziel ,,Fertigkeit und flexibler Umgang mit den Techniken der Äquivalenzumformung" weg.

17.3.2 Praktische Umsetzung

Man braucht ...

- Waage: eine geeignete Balkenwaage oder Tafelwaage,
- Objekte: Man braucht mehrere gleiche Gegenstände, beispielsweise Holzwürfel, mit gleichem Gewicht (Masse), die die Zahl 1 repräsentieren.
- Behältnisse: Leichte Plastikbecher beinhalten jeweils gleich viele Holzwürfel und repräsentieren so die Variable — und ihren Wert.

Beispielsweise wird die Gleichung

$$3x + 2 \quad = \quad x + 10$$

dann dadurch modelliert, dass auf die beiden Schalen

Drei Becher und zwei Würfel   bzw.   Ein Becher und zehn Würfel

gelegt werden. Die Waage ist im Gleichgewicht, wenn in den Bechern jeweils vier Würfel enthalten sind.

Es können dann die Äquivalenzumformungen simuliert werden, indem auf den beiden Schalen jeweils gleich viele Würfel bzw. Becher dazugelegt oder weggenommen werden.

17.3.3 Ikonische Umsetzung

Die praktische Durchführung ist problematisch, da

- gängige Waagen schon bei geringem Gewichtsunterschied ein Ungleichgewicht anzeigen und dann
- die Behältnisse durch ihr Eigengewicht zu Buche schlagen.

Deshalb wird oft das Waage-Modell nur ikonisch (zeichnerisch, sprachlich) verwendet.

Man kann dann beispielsweise Streichhölzer als Objekte und Streichholzschachteln als Behältnisse hernehmen.

17.3.4 Grenzen

Auch die ikonische Umsetzung des Waage-Modells hat Grenzen, da ...

- beliebige negative, rationale oder reelle Zahlen
- das Quadrat oder andere Potenzen von Variablen
- die Multiplikation mit bzw. Division durch negative Zahlen

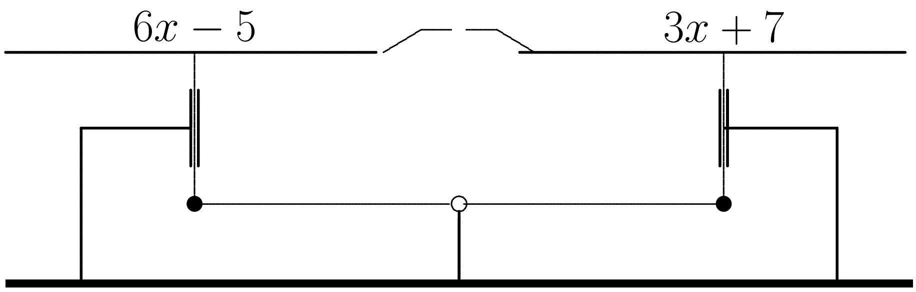
nicht gut repräsentiert werden können.

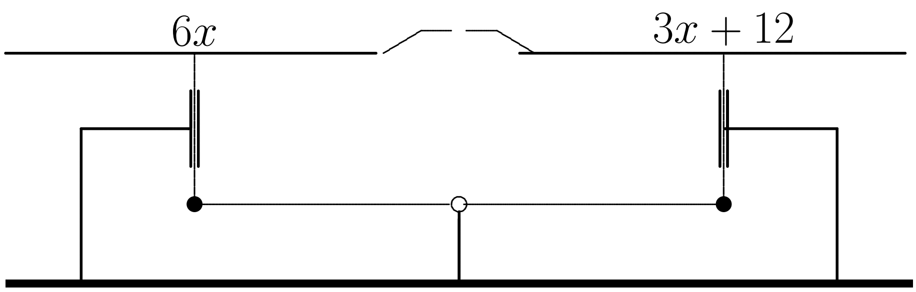
Es können nur Terme der Gestalt $mx + t$ mit $m, t \in \mathbb{N}_0$ praktisch oder ikonisch dargestellt werden.

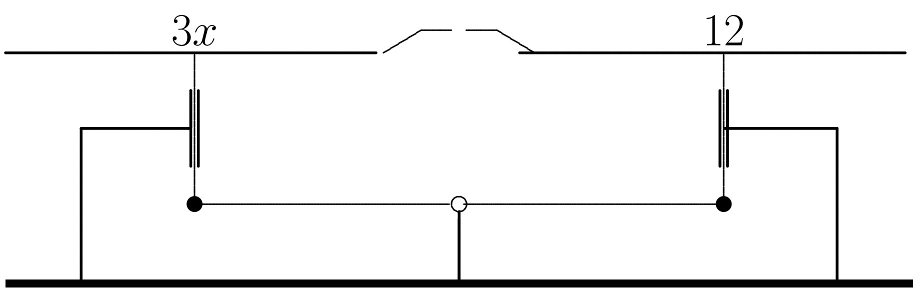
Eine symbolische Repräsentation ist aber möglich, wie das Beispiel $6x - 5 = 3x + 7$ (Abschnitt 17.3.5) zeigt.

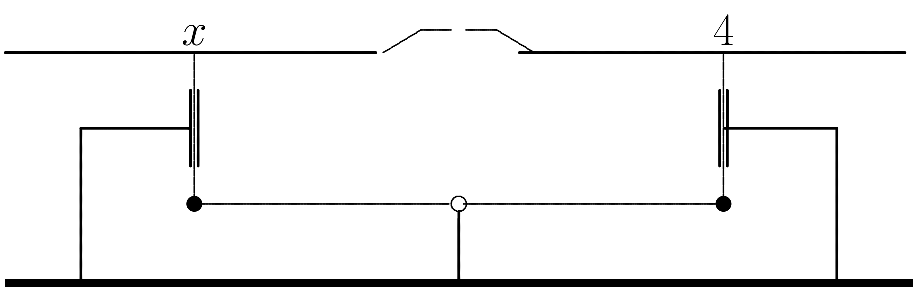
17.3.5 Schaubilder zum Waage-Modell

Die linke und rechte Seite einer Gleichung „liegen" auf den beiden Schalen einer Tafelwaage.









17.4 Kontextfelder für Gleichungen

Gleichungen treten nicht nur als zu erfüllende Aussageformen (innerhalb eines Problems), sondern auch als Aussagen (bei Sätzen, Definitionen,...), auf.

- Formeln als Gleichungen: Mathematik, Physik, Wirtschaft, Statistik

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\ (a+b)\cdot(a-b) &= a^2 - b^2 \\ \frac{1}{R_{\text{ges}}} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \\ \text{BE} &= \text{NE} + \text{St} + \text{SA} \end{aligned}$$

- Mengenbeschreibende Gleichungen:

$$Q = \Big\{ n \in \mathbb{N} \;\Big|\; \text{Es existiert ein } m \in \mathbb{N}, \text{ so dass } m^2 = n \Big\}$$

- Funktionsgleichungen:

$$y = f(x) = x^2 + -3x + 5$$

Ermittlung einer Nullstelle bzw. Auflösen einer Funktion nach dem Wert.

17.5 Typische Fehler bei Äquivalenzumformungen von Gleichungen

Beachte, dass im folgenden Fehler beschrieben werden. Die angegebenen Umformungen sind also keine (gültigen) Äquivalenzumformungen.

- Fehler beim Rechnen mit Zahlen (aller Art)!
- Fehler bei Termumformungen.
- Die Variable in einem Produktterm wird durch Subtraktion isoliert:

$$3x + 5 = 26 \quad \Big| -3 \quad \Longleftrightarrow \quad x + 5 = 23$$

$$23(3x - 7) = 115 \quad \Big| -23 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x - 7 = 92$$

$$6x + 3 = 12 \quad \Big| -5 \quad \Longleftrightarrow \quad x + 3 = 7$$

- Mangelnde Berücksichtigung des Distributivgesetzes:

$$2x + 3 = 4 \quad \Big| :2 \quad \Longleftrightarrow \quad x + 3 = 2$$

- Vermeintliche Berücksichtigung des Distributivgesetzes:

$$25 \cdot (x+15) \;=\; 150 \;\Big|\; : 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 5 \cdot (x+3) \;=\; 30$$

- Zwei Schritte werden zugleich ausgeführt und dabei die Reihenfolge vertauscht:

$$6x^2 + 4x + 14 \;=\; -8x \;\Big|\; + 8x \;\; :2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3x^2 + 10x + 7 \;=\; 0$$

- Beim ,,Rüberbringen" treten Vorzeichenfehler auf:

$$6x^2 + 4x + 14 \;=\; -8x \;\Big|\; + 8x \qquad \Longleftrightarrow \qquad 6x^2 - 4x + 14 \;=\; 0$$

  (Das vorhandene Vorzeichen bei $8x$ wirkt zu stark.)

- Fehler mit Null und Eins:

$$25 \cdot x \;=\; 25 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \;=\; 0$$

  (Die Operation $\cdot x$ auf der linken Seite ist ,,ohne Einfluss", also muss x gleich Null sein.)

$$3x - 2 \;=\; 0 \;\Big|\; + 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3x \;=\; 0$$

- Fehler im Zusammenhang mit Brüchen:

$$140\,a + 70 \;=\; \frac{35}{x} \;\Big|\; : 35 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4a + 2 \;=\; x$$

- Mangelndes Problembewusstsein um Gewinn- und Verlustumformungen.

$$x^2 \;=\; 625 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \;=\; 25$$

  oder

$$|x-2| \;=\; 27 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \;=\; 25$$

- Viele dieser Fehler treten verstärkt auf, wenn Parameter (Variable) anstelle von Zahlen in den Gleichungen auftreten.
- Bei Ungleichungen: Falsche Berücksichtigung der Umkehr des Relationszeichens.
- Mangelnde Unterscheidung von Mal–Punkten und Minuszeichen (Schrift).

17.6 Modellbildung durch Gleichungen

17.6.1 Schrittfolge

Bei der Modellbildung durch Gleichungen bietet sich die folgende Schrittfolge an.

V (Variable). Welches ist die genaue Bedeutung der (unbekannten) Variablen?

T (Terme) Mit Hilfe der Variable und der Daten der Aufgabe werden Terme gebildet (vielleicht in einer Tabelle).

G (Gleichung) Die Aufgabe beinhaltet eine Information über Gleichheit (oder Vielfachheit) von Termen. Dies wird in Form einer Gleichung zwischen diesen Termen mathematisiert.

L (Lösung) Dies ist ein innermathematisches Problem.

A (Antwort) Vergleiche unten: Interpretation.

P (Probe) Eventuell empfiehlt sich eine Probe innerhalb des Kontexts der Sachaufgabe.

17.6.2 Beispiel 1: Kartenkauf

Die Eintrittskarte für das DFB-Pokal-Spiel kostet für Erwachsene dreimal so viel wie die für Kinder. Familie Socker (Vater, Mutter, drei Kinder) hat insgesamt 108 Euro bezahlt.

V x (Euro) sei der Preis für eine Kinderkarte.

T Der Preis für eine Erwachsenenkarte ist dann $3 \cdot x$.

G Der Gesamtpreis führt auf die Gleichung

$$2 \cdot (3 \cdot x) + 3 \cdot x = 108$$

L
$$\begin{aligned} 2 \cdot (3 \cdot x) + 3 \cdot x &= 108 \\ 6x + 3x &= 108 \\ 9x &= 108 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

A Eine Kinderkarte kosten 12 Euro, die Karte für Erwachsene 36 Euro.

P Der Preis für 3 Kinderkarten und zwei Erwachsenenkarten ist tatsächlich (in Euro)

$$3 \cdot 12 + 2 \cdot 36 = 108.$$

17.6.3 Beispiel 2: Jagdausbeute

Nach einer Jagd werden die erlegten Hasen und Wildschweine betrachtet: Insgesamt sind es 74 Tiere mit 250 Beinen. Wie viele Tiere sind es jeweils.

V Die Anzahl der Wildschweine wird mit x bezeichnet.

T Es ist dann die Anzahl der Hasen gleich $74 - x$.

G Die „Bilanz der Beine" führt auf die Gleichung

$$4 \cdot x + (74 - x) \cdot 2 = 250$$

L
$$\begin{aligned}
4 \cdot x + (74 - x) \cdot 2 &= 250 \\
4 \cdot x + 148 - 2 \cdot x &= 250 \\
2 \cdot x + 148 &= 250 \\
2 \cdot x &= 102 \\
x &= 51
\end{aligned}$$

A Es wurden 51 Wildschweine und 23 Hasen erlegt.

P Probe. Es sind tatsächlich $51 + 23 = 74$ Tiere mit $4 \cdot 51 + 2 \cdot 23 = 250$ Beinen.

Beispiel 3: Zwei Schäfer

Ein Schäfer sagt zum anderen: Wenn Du mir ein Schaf gibst, haben wir gleich viele.
Sagt der andere zum ersten: Wenn Du mir ein Schaf gibst, habe ich doppelt so viele wie Du.

V Die Anzahl der Schafe des ersten Schäfers (beim Zusammentreffen, ohne Tauschaktionen) werde mit x bezeichnet.

T Aus der ersten Aussage lässt sich erschließen, dass der zweite Schäfer zwei Schafe mehr, also $x + 2$ Schafe hat.

G Der zweite Satz führt zur Gleichung:

$$x + 2 + 1 = 2 \cdot (x - 1)$$

L
$$\begin{aligned}
x + 2 + 1 &= 2 \cdot (x - 1) \\
x + 3 &= 2x - 2 \\
5 &= x
\end{aligned}$$

A Der erste Schäfer hat (beim Zusammentreffen) 5 Schafe, der zweite hat 7 Schafe.

P Probe. Spiele die Situation mit Hilfe der Lösung nochmals durch.

17.6.4 Beispiel 4: Mary and Ann

Maria ist 24 Jahre alt. Sie ist doppelt so alt, wie Anne war, als Maria so alt war, wie Anne jetzt ist. Wie alt ist Anne? (Gesellschaftliches Ereignis, New York, 20er Jahre).

V x ist das jetzige Alter von Anne in Jahren.

T Es wird eine Tabelle angelegt, in der die zugehörigen Terme eingetragen werden.

	Maria	Anne
jetzt	24	x
früher	x	$x - (24 - x)$

Der Eintrag x bei ,,Maria früher" ergibt sich aus der Formulierung ,,als Maria so alt war, wie Anne jetzt ist"

Die bei ,,Anne früher" abzuziehende Zeitspanne $24 - x$ ergibt sich aus den beiden Einträgen in der ,,Maria"-Spalte.

G $$24 = 2 \cdot \Big[x - (24 - x)\Big]$$

L
$$\begin{aligned} 24 &= 2 \cdot \Big[x - (24 - x)\Big] \\ 24 &= 2 \cdot \Big[2x - 24\Big] \\ 24 &= 4x - 48 \\ 72 &= 4x \\ x &= 18 \end{aligned}$$

A Anna ist jetzt 18 Jahre alt.

P

	Maria	Anne
jetzt	24	18
früher	18	12

17.7 Lineare Gleichungen

M7(I) LB 6

M8(I) LB 4

M7(II/III) LB 4

M8(II/III) LB 3

M9(II/III) LB 5

F08 T2 A1/2

17.7.1 Der Begriff

Eine Gleichung, die sich — direkt oder nach einer Äquivalenzumformung — in der Form

$$m \cdot x + t \;=\; 0$$

mit (fest gegebenen Zahlen) $m, t \in \mathbb{R}$ schreiben lässt, heißt *Lineare Gleichung.*

Als Grundmenge sind dabei im allgemeinen $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ vorgesehen.

17.7.2 Beispiele

$$x - 3 \;=\; 5$$

$$5x - 2 \;=\; 38$$

$$4x - 2 \;=\; -5x + 8$$

$$x^2 + 8x - 2 \;=\; (x-5)^2 + 2x - 9$$

17.7.3 Satz: Lösungsmenge der linearen Gleichung

Es sind drei Fälle zu unterscheiden.

(i) Ist $m \neq 0$, so enthält die Lösungsmenge genau ein Element: $L = \{-\frac{t}{m}\}$.

(ii) Ist $m = 0$ und $t \neq 0$, so ist die Lösungsmenge leer: $L = \{\ \}$.

(iii) Ist $m = 0$ und $t = 0$, so ist die Lösungsmenge gleich der Grundmenge: $L = G$.

17.7.4 Lösungsverfahren

F17 T1 A2

H16 T3 A2

F04 T2 A2

Überlege anhand des Beispiels $5x - 2 = 38$

- Versuch und Irrtum: Es werden einfach verschiedene Zahlen aus der Grundmenge für die Variable x eingesetzt, die Gleichung dann auf ihre Gültigkeit getestet. Dabei können Strategien / Tricks erkannt werden:
  - Muss die Lösung gerade oder ungerade sein?
  - Sollte man größere bzw. kleinere Zahlen einsetzen?
  - Kann man erkennen, ob die Lösung eine Bruchzahl oder eine negative Zahl sein muss?
- Schrittweise Reduktion durch Verbalisierung: Die Gleichung wird in der Form $m \cdot x = -t$ betrachtet. Die Frage nach der Lösung kann dann wie folgt verbalisiert werden:
  - Mit welcher Zahl muss m multipliziert werden, so dass man $-t$ erhält.
- Algebraische Lösung mit Hilfe des ,,Waage-Modells", siehe Abschnitt 17.3.
  - Addiere auf beiden Seiten $-t$.
  - Falls $m \neq 0$, dividiere durch m. Die Lösung steht dann direkt da.
  - Falls $m = 0$, ist die Lösungsmenge offensichtlich.

- Fertige Lösungsformel. Siehe dazu oben den Satz 17.7.3.
- Graphische Lösung mit Hilfe des Graphen der linearen Funktion. Die Lösungsmenge ergibt sich aus den Schnittpunkten mit der x-Achse.
- Tabelle / Tabellenkalkulation: Es wird eine Tabelle der Werte der linearen Funktion angelegt. Daraus kann die Lösung ermittelt werden.
- Einsatz von elektronischen Hilfsmitteln aller Art.

17.8 Lineare Gleichungssysteme

M9 LB 6

H16 T1

F08 T2 A1

F06 T3 A2/3

17.8.1 Definition

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine Sammlung von m Gleichungen, die — evtl. nach Äquivalenzumformungen — die Gestalt

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad (*)$$

haben, heißt ein *Lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Variablen.*

Die fest gegebenen *Koeffizienten* a_{ij} und b_i entstammen der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen (oder einem anderen — Körper: Schulisch weniger relevant).

17.8.2 Spezialfälle

Meist stimmt die Zahl der linearen Gleichungen mit der Zahl der Variablen überein, also $m = n$. Nur in diesem Fall besteht die Möglichkeit einer eindeutigen Lösung.

1 Für $m = n = 1$ hat das LGS einfach die Form

$$a \cdot x = b$$

Es handelt sich also um eine einfache lineare Gleichung, wie wir sie in Unterkapitel 17.7 behandelt haben. Sie wurde dort in der äquivalenten Form (mit $m = a$ und $t = -b$)

$$m \cdot x + t = 0$$

angegeben.

2 Im Fall $m = n = 2$ lautet das LGS H97 T2 A1

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array} \quad \text{oder bei Umbenennung} \quad \begin{array}{rcl} ax + by & = & e \\ cx + dy & = & f. \end{array}$$

Auf der rechten Seite sind einfach die Variablen und Koeffizienten umbenannt worden. Es wird dadurch notationell zugänglicher.

3 Im Fall $m = n = 3$ lautet das LGS

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array} \quad \text{oder bei Umbenennung} \quad \begin{array}{rcl} ax + by + cz & = & u \\ dx + ey + fz & = & v \\ gx + hy + jz & = & w. \end{array}$$

17.8.3 Lösungsmenge

Wie bei einer einzelnen linearen Gleichung mit einer Variablen, gilt es, bei vorgegebener Grundmenge

$$G = \mathbb{R}^n = \left\{ (x_1, \ldots, x_n \middle| x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge

$$L = \left\{ x \in G \middle| x \text{ erfüllt } (*) \right\}$$

zu bestimmen.

Für die Bestimmung der Lösungsmenge gibt es eine Sammlung von (auch schulisch zugänglichen) Methoden, die wir weiter unten erläutern.

Beachte, dass die eher heuristischen Methoden zum Lösen von Gleichungen (Versuch und Irrtum, Anwendung von Umkehroperatoren) hier nicht so gut geeignet sind.

17.8.4 Die gängigen Verfahren

F 1990 T1

Wir schildern jetzt drei Typen von Äquivalenzumformungen, die zur Vereinfachung von Linearen Gleichungssystemen dienen, und zeigen sie jeweils an diesen Beispielen auf

$$
\textcircled{2}\quad \begin{array}{lrcl} (\mathrm{I}) & 3x_1 + 2x_2 & = & 9 \\ (\mathrm{II}) & -3x_1 + \ x_2 & = & -18 \end{array}
\qquad
\textcircled{3}\quad \begin{array}{lrcl} (\mathrm{I}) & -3x_1 + 4x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ (\mathrm{II}) & 12x_1 + 4x_2 - 6x_3 & = & 2 \\ (\mathrm{III}) & x_1 - 5x_2 - 3x_3 & = & 7 \end{array}
$$

17.8.5 Das Einsetzungsverfahren

Ist in dem LGS der Koeffizient $a_{jk} \neq 0$, so kann die j-te Gleichung nach der Variablen x_k aufgelöst werden,

$$x_k = \frac{1}{a_{jk}} \cdot (b_j - a_{j1}x_1 - \ldots - a_{j,k-1}x_{k-1} - a_{j,k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{jn}x_n)$$

und diese dann in die anderen linearen Gleichungen $1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$ eingesetzt werden.

Auf diese Weise hat man das ursprüngliche LGS mit m Gleichungen und n Variablen auf eines mit $m-1$ Gleichungen und $n-1$ Variablen reduziert. Da man dann fortfahren kann, bis keine Koeffizienten $\neq 0$ mehr vorhanden sind, bietet das Einsetzungsverfahren die Grundlage für ein systematisches Lösen von LGSen.

2 Löse (II) nach x_2 auf und setze in (I) ein. x_1 kann dann berechnet werden.

$$
\begin{array}{lrcl} (\mathrm{II}) & x_2 & = & -18 + 3x_1 \\ (\mathrm{I}) & 3x_1 + 2(-18 + 3x_1) & = & 9 \\ & & \vdots & \end{array}
$$

3 Löse (III) nach x_1 auf und setze in (I) und (II) ein. Es entsteht ein LGS mit zwei Gleichungen und zwei Variablen.

$$
\begin{array}{lrcl} (\mathrm{III}) & x_1 & = & 7 + 5x_2 + 3x_3 \\ (\mathrm{I}) & -3(7 + 5x_2 + 3x_3) + 4x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ (\mathrm{II}) & 12(7 + 5x_2 + 3x_3) + 4x_2 - 6x_3 & = & 2 \\ & & \vdots & \end{array}
$$

17.8.6 Das Gleichsetzungsverfahren

F92 T1 A3b)

Stimmen bei zwei der Gleichungen die Koeffizienten der rechten Seite überein, d.h. $b_j = b_{\tilde{j}}$, so können die zugehörigen Terme auf der linken Seite gleichgesetzt werden:

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = a_{\tilde{j}1}x_1 + a_{\tilde{j}2}x_2 + \cdots + a_{\tilde{j}n}x_n$$

Stimmen Koeffizienten auf beiden Seiten überein, so fallen die zugehörigen Terme weg.

Unter Umständen resultiert eine sehr einfache Gleichung, die das weitere Vorgehen erleichtert.

2 Multipliziere (I) mit -2 und setze gleich.

$$
\begin{array}{rrcl} (-2) \cdot (\mathrm{I}) = (\mathrm{II}) & -6x_1 - 4x_2 & = & -3x_1 + x_2 \\ \Longleftrightarrow & -5x_2 & = & 3x_1 \\ \text{in (I)} & -3x_2 & = & 9 \\ & & \vdots & \end{array}
$$

3 Löse (III) nach x_1 auf und setze in (I) und (II) ein. Es entsteht ein LGS mit zwei Gleichungen und zwei Variablen.

$$\begin{array}{rrcl} \text{(III)} & x_1 & = & 7 + 5x_2 + 3x_3 \\ \text{(I)} & -3(7 + 5x_2 + 3x_3) + 4x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ \text{(II)} & 12(7 + 5x_2 + 3x_3) + 4x_2 - 6x_3 & = & 2 \\ & & \vdots & \end{array}$$

17.8.7 Das Additionsverfahren

H97 T2 A2

Es werden zwei der Gleichungen, sagen wir die j-te und die $\widetilde{j}$-te addiert, d.h.

$$(a_{j1} + a_{\widetilde{j}1})x_1 + (a_{j2} + a_{\widetilde{j}2})x_2 + \cdots + (a_{jn} + a_{\widetilde{j}n})x_n = b_j + b_{\widetilde{j}}.$$

Sind einige dieser Klammern gleich Null, so resultiert evtl. eine sehr einfache Gleichung, die das weitere Vorgehen erleichtert.

In den Beispielen:

2 Addiere (I) und (II).

$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} + \text{(II)} & 3x_2 & = & -9 \\ & & \vdots & \end{array}$$

3 Addiere (I) und (III).

$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} + \text{(III)} & -2x_1 - x_2 & = & 9 \\ & & \vdots & \end{array}$$

17.8.8 Das Gauß'sche Eliminationsverfahren

Das systematische Gauß'sche Eliminationsverfahren wird hier nicht weiter besprochen. Siehe die Vorlesungen in Linearer Algebra.

17.8.9 Graphische Interpretation

F92 T1)

Wir betrachten eine einzelne Gleichung mit n Variablen

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j.$$

und deren Lösungsmenge $\mathcal{L}_j \subseteq \mathbb{R}^n$.

Lineare Algebra und Affine Geometrie zeigen, dass diese Lösungsmenge abhängig von drei Fällen die folgende Form hat.

Fall 1: Im allgemeinen ist mindestens einer der Koeffizienten $a_{jk} \neq 0$. Die Gleichung hat dann eine Hyperebene, d.h. einen affinen Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit Dimension $n-1$, als Lösungsmenge.

Fall 2: Sind alle Koeffizienten $a_{jk} = 0$ und $b_j = 0$, so ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}_j = \mathbb{R}^n$, die Gleichung stellt überhaupt keine echte Bedingung dar.

Fall 3: Sind alle Koeffizienten $a_{jk} = 0$ und $b_j \neq 0$, so ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}_j = \varnothing$, die einzelne Gleichung hat eine leere Lösungsmenge. Dann hat auch das gesamte LGS leere Lösungsmenge.

(2) In diesem Fall beschreibt eine einzelne Gleichung mit zwei Variablen

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 = b_j, \qquad j \in \{1,2\}, \text{ ein } a_{jk} \neq 0,$$

eine Gerade im $\mathbb{R}^2$.

Zwei solche Gleichungen beschreiben also die Schnittmenge zweier Geraden. Je nachdem diese beiden Geraden sich schneiden, übereinstimmen oder echt parallel sind, ist die Lösungsmenge ein Punkt, eine Gerade oder die leere Menge.

Mit dieser Einsicht eröffnet sich ein schulischer Zugang. Im kartesischen Koordinatensystem werden die durch die beiden Gleichungen beschriebenen Geraden (beispielsweise mit Hilfe einer Wertetabelle) eingezeichnet und dann ihre Schnittmenge ermittelt.

(3) In diesem Fall beschreibt eine einzelne Gleichung mit drei Variablen

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 = b_j, \qquad j \in \{1,2,3\}, \text{ ein } a_{jk} \neq 0,$$

eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.

Drei solche Gleichungen beschreiben also die Schnittmenge von drei Ebenen. Je nachdem, in welcher Konstellation diese drei Ebenen stehen, ist die Lösungsmenge ein Punkt, eine Gerade, eine Ebene oder die leere Menge.

Eine graphische Ermittlung der Lösungsmenge ist hier nicht gut möglich, da Ebenen und ihre Schnittmenge nur perspektivisch in der Zeichenebene dargestellt werden können.

17.8.10 Lösung mit Hilfe der Cramerschen Regel

In der Linearen Algebra wird beschrieben, dass im Fall „$m = n$ und eindeutige Lösbarkeit" die Lösung des LGS explizit angegeben werden kann durch

$$x_k = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}},$$

wobei im Nenner die Determinante der Matrix A und im Zähler die Determinante der Matrix „A mit k-ter Spalte ersetzt durch b" auftritt.

In den Fällen $n = 2$ oder 3 ist ein schulischer Zugang zu dieser Formel denkbar.

(2) Im Fall $m = n = 2$ und $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ist die eindeutige Lösung des LGS gegeben durch

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2 &= \tfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{aligned}$$

Bzgl. des Beispiels (2) in Abschnitt 17.8.4 ergibt sich

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} = \tfrac{9\cdot1-2\cdot(-18)}{3\cdot1-2\cdot(-3)} = \tfrac{45}{9} = 5 \\ x_2 &= \tfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{3\cdot1-2\cdot(-3)} = \tfrac{3\cdot(-18)-9\cdot(-3)}{3\cdot1-2\cdot(-3)} = \tfrac{-27}{9} = -3. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \det(A) = &+ a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} \\ &- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22} - a_{23}a_{32}a_{11}. \end{aligned}$$

(3) Im Fall $m = n = 3$ und

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22} - a_{23}a_{32}a_{11} \neq 0$$

ist die eindeutige Lösung des LGS gegeben durch die ≫auswendig zu lernende≪ Formel

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_1+a_{13}a_{32}b_1-a_{12}b_1a_{33}-a_{13}b_1a_{22}-a_{23}a_{32}b_1}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{31}a_{22}-a_{23}a_{32}a_{11}} \\ x_2 &= \tfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_2a_{23}a_{31}+a_{13}ba_{21}-a_{12}b_1a_{33}-a_{13}a_{31}b_2-a_{23}b_2a_{11}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{31}a_{22}-a_{23}a_{32}a_{11}} \\ x_3 &= \tfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_3a_{31}+b_3a_{32}a_{21}-a_{12}a_{21}b_3-b_3a_{31}a_{22}-b_3a_{32}a_{11}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{31}a_{22}-a_{23}a_{32}a_{11}}. \end{aligned}$$

Wer will, kann diese Formeln am Beispiel (3) in Abschnitt 17.8.4 testen.

18 Quadratische Gleichungen$^{\ominus}$

18.1 Einführung

18.1.1 Der Begriff

Eine Gleichung, die sich — direkt oder nach einer Äquivalenzumformung — in der Form

$$\underbrace{a \cdot x^2}_{\text{qu.G.}} + \underbrace{b \cdot x}_{\text{l.G.}} + \underbrace{c}_{\text{k.G.}} = 0$$

mit (fest gegebenen Zahlen) $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ schreiben lässt, heißt *Quadratische Gleichung.*

18.1.2 Kommentare

- Als Grundmenge ist meist $G = \mathbb{R}$ (stillschweigend) vorgegeben.
- Den Fall $a = 0$ kann man ausschließen, er führt zurück auf die lineare Gleichung, siehe Abschnitt 17.7.
- Die Abkürzungen bedeuten *quadratisches, lineares* bzw. *konstantes Glied.* Der Parameter a heißt *Formfaktor.*
- Ist $b = 0$, so spricht man von einer *reinquadratischen* Gleichung.

  $$ax^2 + c = 0$$

  Umgekehrt heißt dann eine quadratischen Gleichung mit $b \neq 0$ *gemischtquadratisch.*
- Die obige Form der Gleichung heißt *Normalform* oder *Summenform* der quadratischen Gleichung — im Gegensatz zur Scheitelform, die eher geometrisch wichtig ist.

18.1.3 Beispiele

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad\qquad x^2 = 36$$

$$3x^2 + 7x - 36 = 28x - 25x^2 - 40 \qquad\qquad x \cdot (x + 5) = 8$$

$$(x - 25)^2 = 0 \qquad\qquad 5x - 3 = 0 \quad \text{(Nicht–Beispiel)}$$

Die Variable muss nicht unbedingt x sein. Auch

$$3y^2 + 5y - 12 = 0$$

ist eine quadratische Gleichung.

18.2 Lösungsverfahren anhand von Beispielen

18.2.1 Vorbemerkung

Die Sofort–Präsentation der Lösungsformel ist insofern ungünstig, als die Schüler/innen den Eindruck erhalten, dass sie fertige Werkzeuge einfach nur benutzen sollen und sie „sowieso" keine Einsicht in ihr Zustandekommen bekommen können.

Im folgenden wird ein Vorschlag beschrieben, bei dem

- mit ganz einfachen leicht lösbaren quadratischen Gleichungen begonnen wird
- der Schwierigkeitsgrad immer weiter gesteigert wird,
- bis zum Schluss auch die allgemeinen quadratischen Gleichungen gelöst werden.

Die Beispielklassen entstehen durch unterschiedliche Kombinationen der Bedingungen

$$a = 1 \qquad b = 0 \qquad c = 0 \qquad D < 0 \mid D = 0 \mid D > 0,$$

wobei $D := b^2 - 4ac$ die so genannte *Diskriminante* ist.

18.2.2 Beispielklassen „Vom Einfachen zum Schwierigen"

BK 1	$x^2 = 0$	$a = 1$	$b = 0$	$c = 0$	$D = 0$

$$x^2 = 0 \implies L = \{0\}$$

BK 2	$ax^2 = 0$	a	$b = 0$	$c = 0$	$D = 0$

$$7x^2 = 0 \implies L = \{0\}$$

BK 3	$x^2 + bx = 0$	$a = 1$	b	$c = 0$	$D = b^2$

$$\begin{aligned} & x^2 - 10x = 0 \\ \iff \quad & x \cdot (x - 10) = 0 \qquad \implies L = \{0; 10\} \end{aligned}$$

BK 4	$ax^2 + bx = 0$	a	b	$c = 0$	$D = b^2$

$$\begin{aligned} & 7x^2 + 4x = 0 \\ \iff \quad & 7 \cdot x \cdot (x + \tfrac{4}{7}) = 0 \qquad \implies L = \{0; -\tfrac{4}{7}\} \end{aligned}$$

BK 5	$x^2 + c = 0$	$a = 1$	$b = 0$	c	$D = -4c$

$$\begin{aligned} x^2 - 25 &= 0 \implies L = \{-5; +5\} \\ x^2 - 12 &= 0 \implies L = \{-\sqrt{12}; +\sqrt{12}\} \\ x^2 + 9 &= 0 \implies L = \{\ \} \end{aligned}$$

BK 6	$ax^2 + c = 0$	a	$b = 0$	c	$D = -4ac$

$$\begin{aligned} 9x^2 - 25 &= 0 &\Longrightarrow\quad L &= \{-\tfrac{5}{3}; +\tfrac{5}{3}\} \\ 2x^2 - 4 &= 0 &\Longrightarrow\quad L &= \{-\sqrt{2}; +\sqrt{2}\} \\ -5x^2 - 80 &= 0 &\Longrightarrow\quad L &= \{\} \end{aligned}$$

BK 7	$x^2 + bx + c = 0$	$a = 1$	b	c	$D = b^2 - 4c = 0$

$$\begin{aligned} & x^2 - 10x + 25 = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & (x-5)^2 = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & x - 5 = 0 \qquad \Longrightarrow \quad L = \{5\} \end{aligned}$$

BK 8	$x^2 + bx + c = 0$	$a = 1$	b	c	$D = b^2 - 4c > 0$

$$\begin{aligned} & x^2 - 10x + 16 = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & x^2 - 10x + 25 - 9 = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & (x-5)^2 - 9 = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & (x-5)^2 = 9 \\ \Longleftrightarrow\quad & x - 5 = -3 \quad \text{oder} \quad x - 5 = +3 \\ \Longleftrightarrow\quad & x = 2 \quad \text{oder} \quad x = 8 \\ \Longrightarrow\quad & L = \{2; 8\} \end{aligned}$$

BK 9	$x^2 + bx + c = 0$	$a = 1$	b	c	$D = b^2 - 4c < 0$

$$\begin{aligned} & x^2 - 10x + 74 = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & x^2 - 10x + 25 + 49 = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & (x-5)^2 + 49 = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & (x-5)^2 = -49 \\ \Longrightarrow\quad & L = \{\ \} \end{aligned}$$

BK 10	$ax^2 + bx + c = 0$	a	b	c	$D = b^2 - 4c = 0$

$$\begin{aligned} & 9x^2 + 12x + 4 = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & (3x+2)^2 = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & (3x+2) = 0 \\ \Longrightarrow\quad & L = \{-\tfrac{2}{3}\} \end{aligned}$$

BK 11	$ax^2 + bx + c \;=\; 0$	a	b	c	$D = b^2 - 4c > 0$

$$\begin{aligned}
& 9x^2 + 24x - 9 \;=\; 0 \\
\iff\quad & 9x^2 + 24x + 16 - 25 \;=\; 0 \\
\iff\quad & (3x+4)^2 - 25 \;=\; 0 \\
\iff\quad & (3x+4)^2 \;=\; 25 \\
\iff\quad & 3x + 4 \;=\; -5 \quad \text{oder } 3x + 4 = +5 \\
\iff\quad & x \;=\; -3 \quad \text{oder } x = \tfrac{1}{3} \\
\Longrightarrow\quad & L = \{-3; \tfrac{1}{3}\}
\end{aligned}$$

BK 12	$ax^2 + bx + c \;=\; 0$	a	b	c	$D = b^2 - 4c < 0$

$$\begin{aligned}
& 9x^2 + 24x + 20 \;=\; 0 \\
\iff\quad & 9x^2 + 24x + 16 + 4 \;=\; 0 \\
\iff\quad & (3x+4)^2 + 4 \;=\; 0 \\
\iff\quad & (3x+4)^2 \;=\; -4 \\
\Longrightarrow\quad & L = \{\;\}
\end{aligned}$$

18.2.3 Kommentare

- Wir haben gesehen, dass Lösungsmengen mit 2, 1 oder 0 Lösungen auftreten! Woran liegt das?
- Hier wurde mit der Lösungsmengen-Schreibweise gearbeitet. Man kann die Lösungen natürlich auch ohne umgebende Mengenklammern einfach so aufschreiben.

18.3 Herleitung der Lösungsformel

18.3.1 Ziel:

Wir wollen eine Formel für die Lösungsmenge einer **beliebigen** quadratischen Gleichung finden, die in Summenform gegeben ist,

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \;=\; 0 \qquad (*)$$

18.3.2 Schrittweises Vorgehen

1. Der Divisionstrick: Wir dividieren die (beiden Seiten der) Gleichung durch den Formfaktor $a \neq 0$

$$x^2 + \tfrac{b}{a} \cdot x + \tfrac{c}{a} \;=\; 0.$$

2. Quadratische Ergänzung: Wir schieben zwei Summanden dazwischen, die sich kompensieren:

$$x^2 + \tfrac{b}{a} \cdot x \underbrace{+ \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2}_{=0} + \tfrac{c}{a} \;=\; 0.$$

3. Wir wenden die binomische Plusformel in ,,Rückwärtsrichtung" an:

$$\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 + \tfrac{c}{a} \;=\; 0.$$

4. Wir ,,schälen" den quadratischen Term ,,heraus"

$$\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 \;=\; \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{c}{a}.$$

   und formen die rechte Seite weiter um

$$\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 \;=\; \tfrac{1}{4a^2} \cdot (\underbrace{b^2 - 4ac}_{=:D}).$$

   Der Ausdruck D heißt *Diskriminante*. Wir können übersichtlicher schreiben:

$$\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 \;=\; \tfrac{D}{4a^2} \qquad (**).$$

   Beachte, dass die Anfangsgleichung $(*)$ und die Endgleichung $(**)$ äquivalent sind, sie besitzen also die gleichen Lösungsmengen.

5. Wir unterscheiden jetzt drei Fälle:

$\boxed{D > 0}$ Die Diskriminante ist positiv.

Dann ist die Gleichung $(**)$ äquivalent zu der Aussage:

$$\begin{aligned} & x + \tfrac{b}{2a} = +\tfrac{\sqrt{D}}{2a} \quad \text{oder} \quad x + \tfrac{b}{2a} = -\tfrac{\sqrt{D}}{2a} \\ \Longleftrightarrow \quad & x = -\tfrac{b}{2a} + \tfrac{\sqrt{D}}{2a} \quad \text{oder} \quad x = -\tfrac{b}{2a} - \tfrac{\sqrt{D}}{2a} \end{aligned}$$

Wir können also die Lösungsmenge aufschreiben:

$$L \;=\; \left\{ -\tfrac{b}{2a} + \tfrac{\sqrt{D}}{2a}; -\tfrac{b}{2a} - \tfrac{\sqrt{D}}{2a} \right\} \;=\; \left\{ -\tfrac{b}{2a} \pm \tfrac{\sqrt{D}}{2a} \right\}.$$

$\boxed{D = 0}$ Die Diskriminante ist Null.

Dann ist die Gleichung ($**$) äquivalent zu der linearen Gleichung:

$$x + \frac{b}{2a} = 0,$$

die wir leicht lösen können:

$$L = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}.$$

$\boxed{D < 0}$ Die Diskriminante ist negativ.

Dann besitzt die Gleichung ($**$), demzufolge auch die Gleichung ($*$) keine Lösung.

$$L = \{\,\}.$$

Wir fassen dieses Verfahren in einem Satz zusammen.

18.3.3 Satz: Mitternachtsformel

Es sei eine quadratische Gleichung in Summenform vorgegeben:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0.$$

Als Grundmenge sei $\mathbb{R}$ vorgegeben.

Es wird dann die Diskriminante als Ausdruck $D := b^2 - 4ac$ gebildet. Ist dann

- $D < 0$, so gibt es keine Lösung: $L = \{\,\}$.
- $D = 0$, so gibt es genau eine Lösung. Die Lösungsmenge ist $L = \{-\frac{b}{2a}\}$.
- $D > 0$, so gibt es genau zwei verschiedene Lösungen. Die Lösungsmenge ist

$$L = \{-\tfrac{b}{2a} + \tfrac{\sqrt{D}}{2a}; -\tfrac{b}{2a} - \tfrac{\sqrt{D}}{2a}\}.$$

18.3.4 Weitere Kommentare

- Will man die Sprech- und Schreibweisen mit den Lösungsmengen vermeiden, so werden nur die ,,Lösungen" — wie oft in Schulbüchern oder Formelsammlungen — präsentiert:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  Es treten hier Verständnis-Erschwerungen auf, die in den folgenden Fragen verborgen sind:

  - Warum werden aus der einen Variablen x in der Gleichung plötzlich zwei Variable x_1 und x_2?
  - Was bedeutet das Rechenzeichen $\pm$?
  - Was ist, wenn die Zahl unter der Wurzel Null ist?
  - Was ist, wenn die Zahl unter der Wurzel negativ ist?

- Innerhalb des Lernziels ,,Beherrschen der Lösungsformel und ihrer Anwendung” sollten sich die extremen kognitiven Kategorien

$$\begin{array}{c}\text{Auswendig / Algorithmisch / Abarbeitend}\\ \updownarrow \\ \text{Lebendig verstehend / Inhaltlich orientiert / Verstehend-erarbeitend}\end{array}$$

  in ausgeglichener Weise ergänzen.

- Die Probe ermöglicht die Einsicht, dass es sich bei der Lösungsformel nicht um eine inhaltsleere, formalistische Prozedur, sondern um ein sinnvolles Lösungsverfahren, handelt.

- Der Schwierigkeitsgrad innerhalb des Gebiets der quadratischen Gleichungen lässt sich problemlos steigern:
  - Die beteiligten Konstanten a, b, c sind größere, negative, rationale oder reelle Zahlen.
  - Parameter–Gleichungen: Die Zahl der Lösungen hängt von einem Parameter ab.
  - Biquadratische Gleichungen sind quadratische Gleichungen in der Variablen x^2. Sie werden mit Hilfe einer Substitution $u = x^2$ gelöst.
  - Wurzelgleichungen sind quadratische Gleichungen in der Variablen $\sqrt{x}$.
  - Bruchgleichungen

18.3.5 Quadratische Gleichungen mit Formfaktor 1

Im M-Zweig der Mittelschule wird nur der Fall $a = 1$ betrachtet. Das heißt, es werden nur quadratische Gleichungen betrachtet, die sich in die Form

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

umformen lassen. Jede quadratische Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

kann durch die Äquivalenzumformung ,,Division durch a” in die einfachere Form mit

$$p = \tfrac{b}{a} \qquad q = \tfrac{c}{a}$$

gebracht werden.

Die Lösungsformel wird in diesem Fall zur p-q-Formel

$$x_{1,2} = \tfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2} = -\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 - q}$$

oder besser und leichter verständlich:

$$x_1 = -\tfrac{p}{2} + \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 - q}$$

$$x_2 = -\tfrac{p}{2} - \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 - q}$$

18.4 Der Satz von Vieta

18.4.1 Satz

Bei gegebenen Parametern $p, q \in \mathbb{R}$ sind die beiden folgenden Aussagen über zwei Zahlen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ äquivalent:

(A) Die Zahlen x_1 und x_2 sind Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

(B) Das Zahlenpaar (x_1, x_2) ist Lösung des (nichtlinearen) Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p \\ x_1 \cdot x_2 &= q \end{aligned}$$

18.4.2 Beweis

Ist (A) erfüllt, so folgt mit der p-q-Formel

$$x_1 = -\tfrac{p}{2} + \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 - q} \qquad x_2 = -\tfrac{p}{2} - \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 - q}$$

(oder umgekehrt).

Addiert man diese beiden Zahlen, so folgt die obere Gleichung in (B).
Multipliziert man diese beiden Zahlen, so folgt die untere Gleichung in (B).

Ist (B) erfüllt, so folgt mit der oberen Gleichung

$$x_1 = -x_2 - p.$$

Setzt man das in die untere Gleichung ein, so folgt

$$\begin{aligned} & (-x_2 - p) \cdot x_2 = q \\ \iff\ & -x_2^2 - p \cdot x_2 = q \\ \iff\ & x_2^2 + p \cdot x_2 + q = 0 \end{aligned}$$

Also ist x_2 eine Lösung der quadratischen Gleichung in (A). Vertauscht man in dieser Argumentation die Rollen von x_1 und x_2, so folgt auch, dass x_1 eine Lösung ist.

18.5 Kontextfelder für quadratische Gleichungen

18.5.1 Innermathematische Bezüge

- Bezug zu quadratischen Funktionen und Wurzel–Funktionen
- Binomialkoeffizient: Bestimme n bei gegebenem a

$$\binom{n}{2} = a \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{n(n-1)}{2} = a$$

- Zahlrätsel
  - Multipliziert man Vorgänger und Nachfolger einer Zahl, so kommt 8 heraus.
  - Multipliziert man die Summe aus dem Vierfachen einer Zahl und 2 mit der Differenz des Dreifachen dieser Zahl und 7, so erhält man 176.

18.5.2 Geometrie

- Satzgruppe des Pythagoras
- Flächenformeln enthalten quadratische Terme
- Schnittpunkte von Kreis-Kreis oder von Kreis-Gerade
- Die quadratische Gleichung des goldenen Schnitts (Grundmenge $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

$$x - 1 = \frac{1}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0$$

18.5.3 Sachsituationen

- Situationen, bei denen die Gleichung

$$b = \binom{n}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad b = \frac{n(n-1)}{2}$$

bei bekannten b nach n aufgelöst werden soll:

  - Zahl b der Händeschüttelungen bei eine Party mit n Gästen
  - Zahl b aller Trinkglas–Anstöße bei n Gästen
  - Zahl b der Spiele bei einem ,,Jeder–gegen–jeden"– Turnier bei n Mannschaften
  - Zahl b der Verbindungsstrecken von n Punkten in ,,allgemeiner" Lage.
  - Zahl b der Verbindungsstrecken von n Punkten auf einer Kreislinie
  - Zahl b der Seiten und Diagonalen in einem regelmäßigen n–Eck
  - Summe b der Zahlen kleiner n.
  - Zahl der Bausteine b in einem Podest der Höhe $n - 1$

18.5.4 Physikalische Kontexte

- Eine Faustformel aus der Fahrschule besagt, dass der Anhalteweg s eines Autos quadratisch von der Geschwindigkeit v abhängt:

$$s = \left(\frac{v}{10}\right)^2 + 3 \cdot \frac{v}{10} \qquad v \text{ in } \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}, \qquad s \text{ in m}$$

- Kraftstoffverbrauch K (in $\frac{\ell}{100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}$) hängt gemischt–quadratisch von der Geschwindigkeit v (in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$) ab:

$$K = av^2 + bv + c, \qquad \text{wobei} \qquad \begin{array}{rcl} a & \approx & 10^{-4} \ldots 10^{-3} \\ b & \approx & 10^{-2} \ldots 10^{-1} \\ c & \approx & 10^{\ 0} \ldots 10^{+1} \end{array}$$

- Zeitabhängigkeit der Höhe beim vertikalen Wurf:

$$h = -4{,}9\, t^2 + v_0\, t + h_0$$

  (t Zeit in Sekunden, h Höhe in m, v_0 Abwurfgeschwindigkeit in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, h_0 Abwurfhöhe in m)

- Wurfparabel

19 Funktionen$^{\ominus}$

19.1 Historische Episoden

19.1.1 Funktion als Rechenausdruck

Eine Funktion einer veränderlichen Größe ist ein Ausdruck, der auf irgendeine Weise aus der veränderlichen Größe und Konstanten zusammengesetzt ist.

Johann Bernoulli, (ch, 1667 – 1748, 1718).

19.1.2 Funktion als Zuordnung

Steht eine Variable y so in Beziehung zu einer Variablen x, dass zu jedem numerischen Wert von x gemäß einer Vorschrift ein eindeutiger Wert von y gehört, so heißt y eine Funktion der unabhängigen Variablen x.

P.G. Lejeune Dirichlet (dt, 1805 – 1859, 1837).

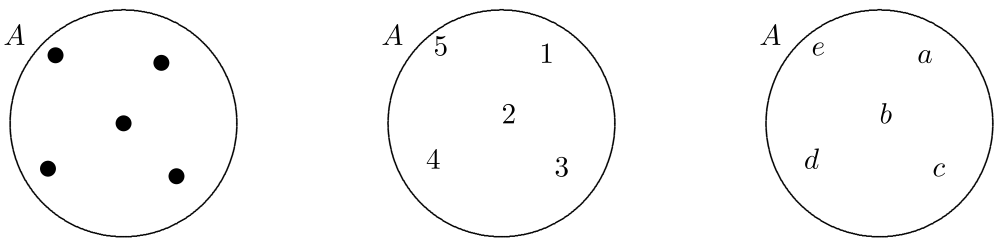
Diese beiden Definitionen von Funktionen sind geprägt von dem syntaktischen bzw. semantischen Aspekt.

19.2 Funktion als Spezialfall einer Relation

Es seien A und B zwei Mengen. Beachte, dass diese beiden Mengen **völlig beliebig** sein können, sie können endlich oder unendlich sein, auf ihnen können Rechen- oder Ordnungsstrukturen definiert sein oder nicht.

19.2.1 Veranschaulichung durch Venn-Diagramme

Eine hilfreiche Veranschaulichung für die folgenden Überlegungen sind sogenannte *Venn–Diagramme*. Eine Menge wird als inneres einer geschlossenen Kontur gezeichnet, die Elemente mit ununterscheidbaren ($\bullet$) oder unterscheidbaren ($1, 2, 3 \ldots, a, b, c \ldots$) Symbolen dargestellt:



Beachte, dass dies nur für Mengen mit wenigen Elementen sinnvoll ist. In Bezug auf unterrichtliche Umsetzung könnte sich dies dahingehend auswirken, dass Schüler den Mengen- bzw. Funktionsbegriff als „auf endlichen Mengen allein basierend" wahrnehmen.

19.2.2 Definition: Geordnetes Paar

Für $a \in A$ und $b \in B$ definiert man das *geordnete Paar* als die Menge

$$(a, b) \;:=\; \Big\{\{a, b\}, a\Big\}.$$

Diese künstlich und umständlich erscheinende Definition kann man wieder vergessen, wenn man den folgenden unscheinbaren, aber bedeutungsvollen Satz akzeptiert:

$$\text{Es gilt} \qquad (a, b) = (c, d) \quad \Longleftrightarrow \quad a = c \;\text{ und }\; b = d.$$

19.2.3 Definition: Kartesische Produkt

Die Menge aller geordneten Paare

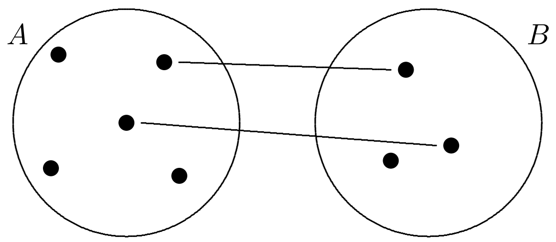
$$A \times B \; := \; \Big\{ (a,b) \Big| \; a \in A, b \in B \Big\}.$$

heißt das *Kartesische Produkt* der Mengen A und B (René Descartes, fr, 1596 – 1650)

19.2.4 Definition: Relation

Eine beliebige Teilmenge von $A \times B$ heißt eine *Relation R zwischen A und B*.

Gut kann man das im Venn–Diagramm veranschaulichen:



Zwischen einem Element $a \in A$ und einem Element $b \in B$ wird genau dann eine Linie gezogen, wenn $(a,b) \in R$.
Beispiele:

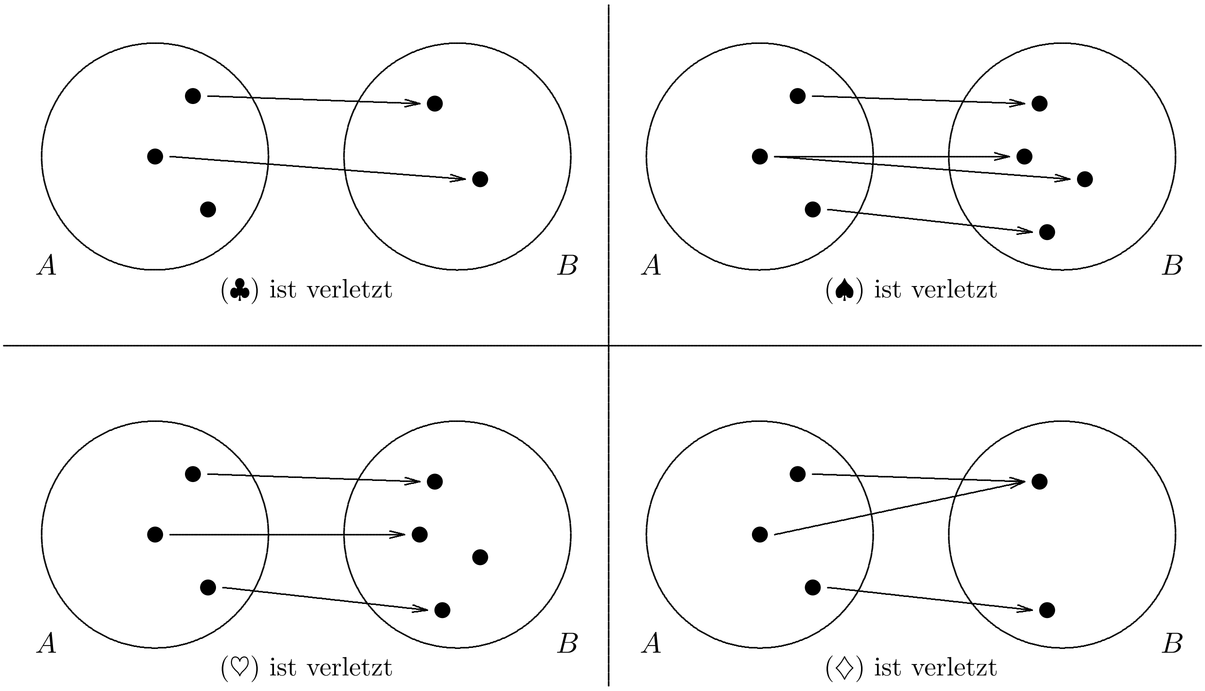
- Die Allrelation $R \;=\; A \times B$
- Die leere Relation $R = \varnothing$.
- Die konstante Relation $R = \{(x,b) | x \in A\}$. Dabei ist $b \in B$ fixiert.
- Auf $A \times A$ die Diagonale $R = \{(a,a) | a \in A\}$.

19.2.5 Eigenschaften einer Relation

Eine Relation zwischen A und B heißt

$$\begin{array}{l} (\clubsuit)\ \textit{links–total}, \\ (\spadesuit)\ \textit{rechts–eindeutig}, \\ (\heartsuit)\ \textit{rechts–total}, \\ (\diamondsuit)\ \textit{links–eindeutig}, \end{array} \text{ wenn für jedes } \begin{array}{l} a \in A \text{ mindestens ein } b \in B \\ a \in A \text{ höchstens ein } b \in B \\ b \in B \text{ mindestens ein } a \in A \\ b \in B \text{ höchstens ein } a \in A \end{array} \text{ existiert, so dass } (a,b) \in R.$$

$$\text{Im Diagramm veranschaulicht heißt dies: In } \begin{array}{l} a \in A \text{ startet mindestens} \\ a \in A \text{ startet höchstens} \\ b \in B \text{ endet mindestens} \\ b \in B \text{ endet höchstens} \end{array} \text{ eine Linie.}$$



19.2.6 Definition: Funktion

Definition: Eine Relation zwischen A und B heißt *Funktion*, wenn sie links–total und rechts–eindeutig ist.

In diesem Zusammenhang heißt A *Definitionsmenge* und B *Wertemenge* der Funktion. Die Menge

$$\left\{ b \in B \,\middle|\, \text{Es ex.} \quad a \in A, \quad \text{so dass} \quad (a,b) \in R \right\}$$

heißt *Bild(–menge)* der Funktion. Es kommt auch vor, dass bei allgemeineren Relationen diese Begriffe verwendet werden.

19.2.7 Definitionen

	injektiv,		links-eindeutig	
Eine Funktion heißt	*surjektiv*,	wenn sie zusätzlich	rechts-total	ist.
	bijektiv,		links-eindeutig und rechts-total	

19.2.8 Definition: Umkehrfunktion

Ist eine Funktion bijektiv, so ist die *Spiegelrelation*

$$R^{-1} := \left\{ (b,a) \,\middle|\, (a,b) \in R \right\} \subseteq B \times A$$

ebenfalls eine Funktion. Sie heißt *Umkehrfunktion* zu R.

19.3 Funktion als Zuordnung

- Die obige Definition von „Funktion" kann wie folgt umformuliert werden: Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt Funktion, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

  Zu **jedem** $a \in A$ existiert **genau ein** $b \in B$, so dass $(a,b) \in R$.

- Bei dieser Sichtweise wird eine Funktion nicht mehr als ein statisches Objekt aufgefasst, sondern eher dynamisch: Es geschieht eine Zuordnung der Punkten $b \in B$ zu Punkten $a \in A$.

- Dies wird auch in einer gänzlich veränderten Notation deutlich:

$$f : \begin{cases} A & \to & B \\ a & \mapsto & f(a) \end{cases}$$

  $f(a)$ ist dabei ein irgendwie gearteter mathematisch sinnvoller Ausdruck, der obige Definition ,,zu jedem ... genau ein" sicherstellt. Dies kann ein Term oder eine Festlegung durch Text sein. Auch Fallunterscheidungen sind möglich.

19.4 Schulische Praxis

19.4.1 Schulische Definition

Die Definition erfolgt heute nicht mehr über den viel zu abstrakten Relationsbegriff, sondern anschaulich:

> Es seien $\mathcal{D}$ und $\mathcal{W}$ zwei Mengen. Eine Vorschrift, die
>
> - jedem Element aus $\mathcal{D}$
> - genau ein Element aus $\mathcal{W}$
>
> zuordnet, heißt *Funktion* von $\mathcal{D}$ nach $\mathcal{W}$.

Es handelt sich also letztlich um einen Ettikettenschwindel: Der Ausdruck ,,Vorschrift" ist ja genauso wenig definiert wie der Begriff ,,Funktion".

19.4.2 Einige Kommentare

- Innerhalb der Schul–Algebra und Schul–Analysis sind die beteiligten Mengen meist Teilmengen (insbesondere Intervalle) des aktuellen Zahlbereichs $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$.
- In der Geometrie tritt ebenfalls der Funktionsbegriff auf, man spricht aber von (geometrischen) Abbildungen. Die zugrundeliegenden Mengen sind Teilmengen der ,,Zeichenebene".
- Die Elemente der Definitionsmenge werden praktisch immer mit dem Buchstaben x und die der Wertemenge mit y bezeichnet. (Vor- und Nachteile?)
- Oft, nicht nur im schulischen Kontext, werden die Elemente der Definitionsmenge (bzw. das Symbol dafür im Funktionsterm) ,,unabhängige Variable" und die der Wertemenge ,,abhängige Variable" genannt.
- In der Notation wird die Mengenebene unterdrückt. Man schreibt also nur

  $$f : x \mapsto f(x)$$

- Einige besondere Bezeichnungen seien anhand des Beispiels $f(x) = 2x^2 - 5$ erklärt:
  - Funktionsvorschrift: $x \mapsto 2x^2 - 5$.
  - Funktionsterm: $2x^2 - 5$.
  - Funktionsgleichung: $y = 2x^2 - 5$.
- Die beiden Begriffe ,,Definitionsmenge" und ,,Definitionsbereich" sind gleich.
- Hinsichtlich des Begriffs der Definitionsmenge treten Inkonsistenzen auf:

  In der allgemeinen Einführung des Funktionsbegriffs tritt die Definitionsmenge — korrekt — als vorgegebenes Objekt auf.

  In der schulischen Praxis dagegen muss meist der (maximale) Definitionsbereich aus dem Funktionsterm $f(x)$ als Teilmenge einer Grundmenge ($\mathbb{R}$) bestimmt werden (Nenner dürfen nicht Null, Radikanden nicht negativ sein, Logarithmusargumente müssen positiv sein,...).

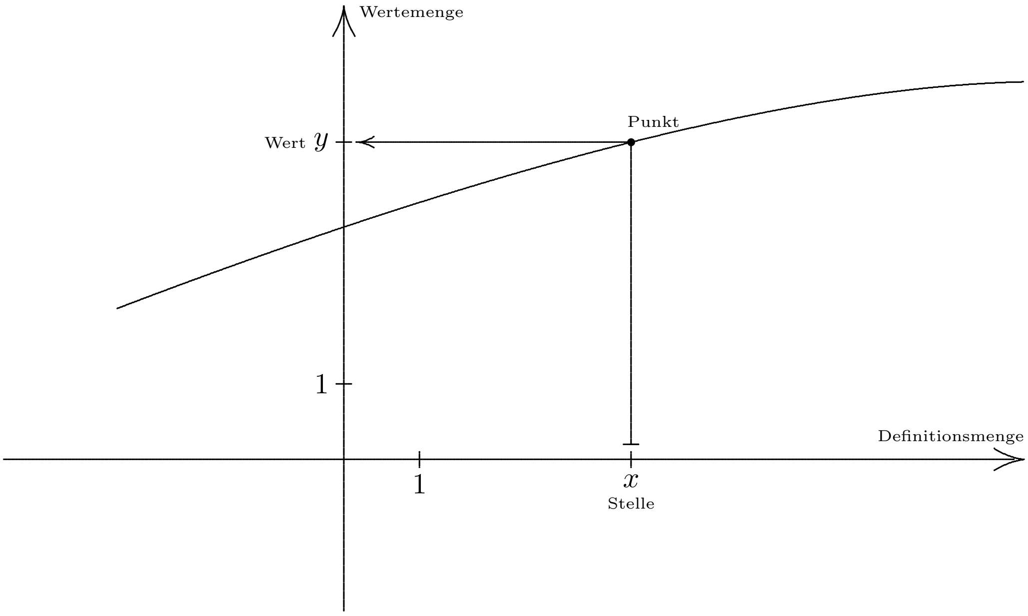
- In der Schulpraxis tritt nur der Begriff der Wertemenge, nicht aber der der Bildmenge in Erscheinung.

  Die Wertemenge wird bei bekannter Definitionsmenge und bei bekanntem Funktionsterm als Teilmenge von $\mathbb{R}$ bestimmt. Das Problem der Surjektivität wird also ausgeklammert und damit die Frage der Umkehrbarkeit einer Funktion auf das Problem der Injektivität reduziert.

Insgesamt tritt hier ein in der Schulmathematik häufiger zu beobachtendes Phänomen auf:
Es werden Begriffe vermeintlich exakt eingeführt. Beim langfristigen Umgang mit ihnen werden sie aber — aufgrund von Zweckmäßigkeit, Unwissenheit, Schülerüberforderung, Vermeidung von Penibilitäten oder Pathologien — in abgewandelter oder verschleierter Bedeutung benutzt.

19.5 Darstellung von Funktionen als Graphen

Sind Definitions– und Bildmenge einer Funktion (oder auch allgemeiner: Relation) Teilmengen von $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ (evtl. auch einer anderen linear geordneten Menge), so wird eine veranschaulichende Darstellung als Graph möglich.



- Die Definitionsmenge D wird als (Teilmenge der)

  Rechtswertachse = horizontale Achse = x–Achse = Abszisse

  aufgefasst.

- Die Wertemenge $\mathcal{W}$ wird als (Teilmenge der)

  Hochwertachse = vertikale Achse = y–Achse = Ordinate

  aufgefasst.

- Die graphische Darstellung der Funktion (oder Relation) geschieht dadurch, dass jedes Paar (x, y) der Funktion/Relation in der mit einem Koordinatensystem versehenen Zeichenebene $\mathbb{E}$ als Punkt markiert wird:

$$\begin{aligned} G_f &= \left\{ P(x|y) \in \mathbb{E} \;\middle|\; x \in \mathcal{D} \quad \wedge \quad y = f(x) \right\} \\ &= \left\{ P(x|f(x)) \in \mathbb{E} \;\middle|\; x \in \mathcal{D} \right\} \quad \subseteq \quad \mathcal{D} \times \mathcal{W}. \end{aligned}$$

  Damit stimmt der Graph einer Funktion f im streng mengentheoretischen Sinn mit der Funktion überein.

- Unterscheide die Begriffe

Symbol	Begriff	Element der ...	graphisch ...	bzw.
x	Stelle	Definitionsmenge	Rechtswertachse	x-Achse
y	Wert	Wertemenge	Hochwertachse	y-Achse
(x, y)	Punkt	Kart. Produkt	Zeichenebene	(x, y)–Koordinatensystem

Sowohl in der Fachmathematik als auch in der Schulmathematik wird dieses Begriffssystem nur teilweise durchgehalten.

- Den vier auf Seite 235 definierten besonderen Eigenschaften einer Relation lassen sich innerhalb der Darstellung mittels Graphen die folgenden Beschreibungen zuordnen:

Eine Relation zwischen A und B ist

<table>
<tr><td>(♣) links–total,</td><td rowspan="4">wenn jede</td><td>vertikale</td><td rowspan="4">Gerade durch</td></tr>
<tr><td>(♠) rechts–eindeutig,</td><td>vertikale</td></tr>
<tr><td>(♡) rechts–total,</td><td>horizontale</td></tr>
<tr><td>(♢) links–eindeutig,</td><td>horizontale</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>eine Stelle x der Definitionsmenge</td><td>mindestens</td><td rowspan="4">einmal den Graphen schneidet.</td></tr>
<tr><td>eine Stelle x der Definitionsmenge</td><td>höchstens</td></tr>
<tr><td>einen Wert y der Wertemenge</td><td>mindestens</td></tr>
<tr><td>einen Wert y der Wertemenge</td><td>höchstens</td></tr>
</table>

- Bei der graphischen Darstellung tritt der ,,dynamische" Charakter der Funktion (Zuordnung) wieder in den Hintergrund, der Graph ist eher ein ,,statisches" Objekt.

  Die Verbindung der beiden Auffassungen kann durch den im Diagramm angedeuteten ,,Eckpfeil" hergestellt werden.

19.6 Didaktische Aspekte zur Erschließung des Funktionsbegriffs

Die Erschließung von Funktionen geschieht in dem durch das folgende Diagramm abgesteckten Wechselspiel:

$$\begin{tikzcd}
\text{Abbildung} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{Term} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{Graph} \arrow[r, leftrightarrow] & \text{Auswerten}
\end{tikzcd}$$

19.7 Der Funktionenfundus der Mathematik in der Realschule

Folgende Funktionen werden — gemäß Lehrplan Mathematik Realschule, Zweig I — in den angegebenen Jahrgangsstufen eingeführt. Der Begriff Funktion tritt erst in JGS 8/9 deutlich in Erscheinung.

FUNKTIONEN IN DER ALGEBRA:

6 Direkte Proportionalität

7 Indirekte Proportionalität

8 Lineare Funktionen, Theorie des Funktionsbegriffs, Funktionen der indirekten Proportionalität

9 Quadratische Funktionen, Wurzelfunktion, Betragsfunktion.

10 Potenzfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen, trigonometrische Funktionen.

ABBILDUNGEN IN DER GEOMETRIE:

6 Achsenspiegelung

7 Parallelverschiebung, allgemeine Kongruenzabbildungen,
Drehungen (Punktspiegelung als Spezialfall, Drehwinkel 180°)

8 Kongruenz- und abbildungsgeometrisches Beweisen

9 Zentrische Streckung

10 Abbildungen im Koordinatensystem (dargestellt durch Matrizen und Vektoren)

19.8 Lineare Funktionen

F16 T1 A3

F08 T2 A1/3

F06 T3 A1

F96 T2 A1b)

F93 T3 A1

19.8.1 Definition: Lineare Funktion

Eine Funktion, die in der Gestalt

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & mx + t \end{cases}$$

angegeben werden kann, wobei $m, t \in \mathbb{R}$ zwei beliebige, aber fixierte, Konstanten (Parameter) sind, heißt *lineare Funktion*.

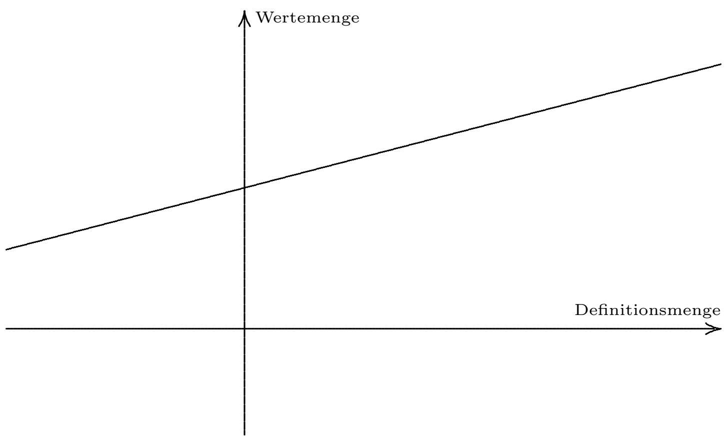
19.8.2 Kommentar

Es tritt hier beispielhaft ein Grundkonflikt der Schulmathematik in Erscheinung: Die mehr oder weniger starke Fixierung bzw. Reservierung von bestimmten Buchstabensymbolen (hier x, y, m, t) für bestimmte Variable oder Parameter beinhaltet Vor– und Nachteile:

- Eine starke Fixierung erhöht den ,,Wiedererkennungswert", (syntaktisch aufgefasste) Manipulationen werden erleichtert. Begriffe und Methoden zur Analyse können besser überschaut und eingeordnet werden.
- Lineare Zusammenhänge oder direkte Proportionalitäten treten zwischen vielfältigsten Größen des Alltagslebens oder der wissenschaftlichen Fächer in Erscheinung. Naturgemäß werden hier verschiedenste Symbole verwendet. Die Übertragung der allgemeinen Überlegungen auf konkrete Beispiele wird erschwert.

19.8.3 Graphische Darstellung

Der Name rührt daher, dass eine Funktion genau dann linear ist, wenn ihr Graph eine Gerade darstellt.



19.8.4 Kommentare

Es tritt hier beispielhaft ein Grundkonflikt der Schulmathematik in Erscheinung: Die mehr oder weniger starke Fixierung bzw. Reservierung von bestimmten Buchstabensymbolen (hier x, y, m, t) für bestimmte Variable oder Parameter beinhaltet Vor– und Nachteile:

- Der Parameter m heißt *Steigung*. Er kann am Graphen im sogenannten Steigungsdreieck interpretiert werden.

- Der Parameter t heißt meist *y–Achsen–Abschnitt*. Um die Fixierung auf einen bestimmten Buchstaben zu lösen, könnte/sollte man hier evtl. vom ,,Hochwertachsenabschnitt" sprechen.
- Die spezielle Form der Funktionsvorschrift $mx + t$ heißt gelegentlich *Normalform*.
- Eine starke Fixierung erhöht den ,,Wiedererkennungswert", (syntaktisch aufgefasste) Manipulationen werden erleichtert. Begriffe und Methoden zur Analyse können besser überschaut und eingeordnet werden.
- Lineare Zusammenhänge oder direkte Proportionalitäten treten zwischen vielfältigsten Größen des Alltagslebens oder der wissenschaftlichen Fächer in Erscheinung. Naturgemäß werden hier verschiedenste Symbole verwendet. Die Übertragung der allgemeinen Überlegungen auf konkrete Beispiele wird erschwert.
- In der linearen Algebra heißt eine Funktion f zwischen zwei Vektorräumen linear, wenn $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ für alle Skalare α und alle Vektoren x. Im Falle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folgt daraus, dass f die Form $f(x) = mx$ hat. Hier wird im folgenden der ,,schulische" Begriff zugrundegelegt.
- Innerhalb der Schulmathematik sind Definitions- bzw. Wertemenge nicht gewichtige Bestandteile der Definition: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}_0^+$, $\mathbb{Q}$ oder Intervalle bilden auch den Kontext für direkte Proportionalität.

19.8.5 Spezielle lineare Funktionen

- Für $t = 0$ ergibt sich die Funktion $y = m \cdot x$, dies beschreibt die direkte Proportionalität (Graph ist Ursprungsgerade).
- Für $t > 0$ schneidet der Graph die y–Achse oberhalb des Ursprungs.
- Für $t < 0$ schneidet der Graph die y–Achse unterhalb des Ursprungs.
- Für $m = 0$ ergibt sich die konstante Funktion (Graph ist horizontale (zur x–Achse parallele) Gerade)
- Für $m > 0$ ist die Funktion streng monoton steigend (Graph steigt bzgl. Links–Rechts–Ausrichtung an)
- Für $m < 0$ ist die Funktion streng monoton fallend (Graph sinkt bzgl. Links–Rechts–Ausrichtung ab)

19.8.6 Qualitative Beschreibung linearer Funktionen

Lineare Funktionen beschreiben generell eine Beziehung zwischen zwei Größen x und y, die durch die folgenden (gleichwertigen) Aussagen beschrieben werden kann:

- eine Änderung der Größe x ist direkt proportional zu einer Änderung der Größe y, formelmäßig dargestellt:

  $$\Delta x \sim \Delta y$$

- die Größe y setzt sich aus einem konstanten Anteil und einem direkt proportionalen Anteil zusammen:

  $$y = m \cdot x + t$$

- Der Graph ist eine Gerade.

19.8.7 Kontextfelder für lineare Funktionen

Mathematisch:

- Nullstellenbestimmung ($\rightarrow$ Lineare Gleichungen)
- Punkt–Steigungsform: Eine lineare Funktion mit Steigung m, deren Graph durch den Punkt $(x_P|y_P)$ verläuft, ist gegeben durch

$$x \mapsto m(x - x_P) + y_P \qquad \text{bzw.} \qquad y = m(x - x_P) + y_P$$

- Umwandlung in die Implizit–Form: $ax + by + c = 0$,
- Propädeutik der linearen Gleichungssysteme
- Veränderung der Funktion bzw. ihres Graphen bei Veränderung der Parameter
- Scharen oder ,,Büschel" von Funktionsgraphen

Sachsituationen

- Kerzenuhr: Länge — Brenndauer

Wirtschaft:

- Fixkosten und variable Kosten
- Klassische Telefon–, Wasser oder Strom–Rechnung: Grundgebühr und verbrauchsabhängige Kosten.
- Kauf eines Spiels (elektronisch oder auch nicht): Grundgerät und Module
- Taxifahrt

Physik:

- Länge einer Stange bei Temperaturveränderung.
- Länge einer Feder bei angehängtem Gewichtsstück.
- Umwandlung von Temperaturangaben: Celsius — Fahrenheit — Kelvin

19.9 Direkte Proportionalität

19.9.1 Satz und Definition: Direkte Proportionalität

☐ F93 T3

Zwei Größen x und y heißen *direkt proportional zueinander*, symbolisch ausgedrückt durch

$$y \sim x,$$

wenn sie eine (und damit jede) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllen:

(A) Bei Ver–2,3,...,q–fachung eines Wertes x tritt eine Ver–2,3, ...,q–fachung des Wertes $y \neq 0$ ein.

(B) Der Graph der Wertepaare (x, y) ist Teilmenge einer Ursprungsgerade, die ungleich der x- oder y-Achse ist.

(C) Wenn $x \neq 0$ und $y \neq 0$, dann sind die Quotienten der beiden Werte y und x sind konstant:

$$\frac{y}{x} = m = \text{const} \neq 0.$$

(D) Es gibt eine konstante Größe $m \neq 0$, so dass

$$y = m \cdot x.$$

19.9.2 Definition: Proportionalitätskonstante

Die in (C) und (D) erwähnte Konstante m heißt der *Proportionalitätskonstante* oder *Proportionalitätsfaktor*. Sie ist zugleich die Steigung der Geraden in (B).

Aus den Aussagen oben ist zu entnehmen, dass diese Konstante ungleich Null ist.

19.9.3 Kommentare

- In der Definition ist von Größen anstelle von Zahlen die Rede. Dies rührt daher, dass die Direkte Proportionalität viel stärker im schulischen Kontext von Sachsituationen thematisiert wird als im innermathematischen Kontext.
- Anders als bei vielen anderen funktionalen Zusammenhängen ist die direkte Proportionalität eine symmetrische Beziehung. Ist die Größe y direkt proportional zu der Größe x, so ist auch x direkt proportional zu y.

  Beachte, dass die Vertauschung der beiden Größen x und y die Kehrwertbildung $m \mapsto \frac{1}{m}$ beim Proportionalitätsfaktor nach sich zieht:

  $$y \; = \; m \cdot x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \; = \; \frac{1}{m} \cdot y$$

- In alltäglichen Sachkontexten ist die Proportionalitätskonstante m positiv. In der Physik tritt auch der Fall $m < 0$ in Erscheinung.
- Verwandte andere Zusammenhänge sind die der indirekten, der quadratischen, der quadratisch-reziproken Proportionalität oder der des logarithmischen Zusammenhangs.

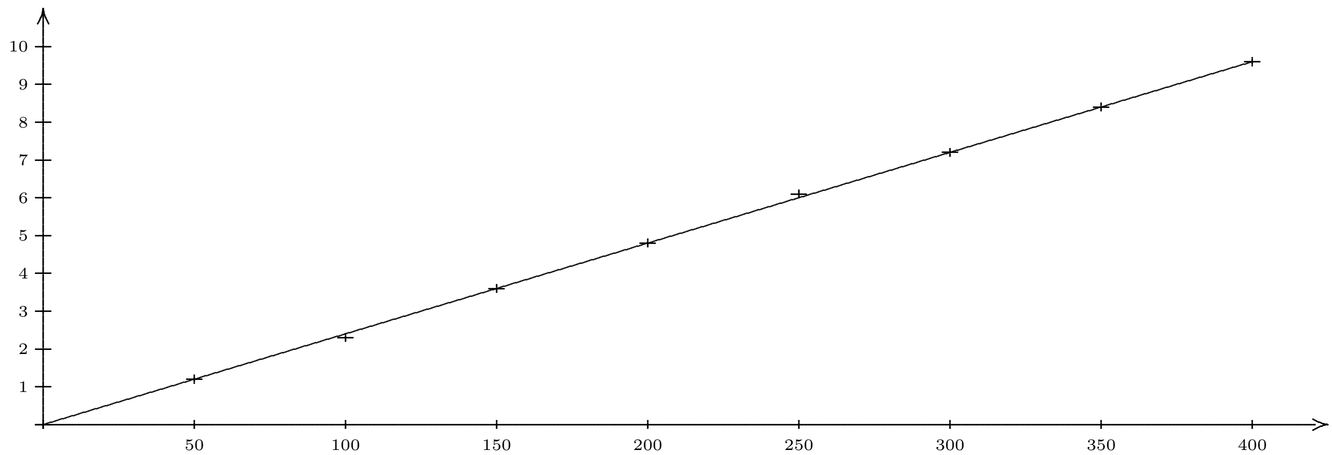
19.9.4 Beispiel

An eine ,,gute" metallene Schraubenfeder werden verschiedene Gewichtsstücke gehängt. Abhängig von den Gewichtsstücken wird die Dehnungslänge gemessen.

Es könnte dabei die folgende Wertetabelle entstehen:

m in g	0	50	100	150	200	250	300	350	400
$\Delta\ell$ in cm	0	$1,2$	$2,3$	$3,6$	$4,8$	$6,1$	$7,2$	$8,4$	$9,6$

Die beiden Größen sind direkt proportional zueinander, abgesehen von zwei ,,Ausreißern". Als Graph ergibt sich eine Ursprungshalbgerade



Man teste anhand der Tabelle und des Graphen die Eigenschaften (A) bis (D).

19.9.5 Direkte Proportionalität als Spezialfall einer linearen Funktion

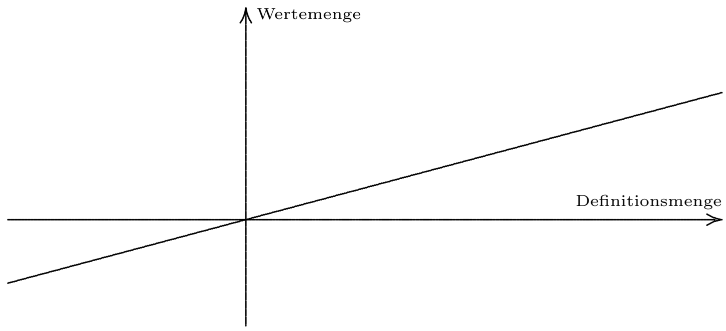
- Bei stärker mathematischer Sichtweise würde man sagen, dass eine direkte Proportionalität eine Funktion der Form

  $$f : \begin{cases} \mathcal{D} & \to & \mathcal{W} \\ x & \mapsto & m \cdot x \end{cases}$$

  mit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ und $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}$ und $m \neq 0$ ist, also den Spezialfall $t = 0$ UND $m \neq 0$ einer linearen Funktion darstellt.

- Innerhalb der Schulmathematik sind Definitions- bzw. Wertemenge nicht gewichtige Bestandteile der Definition: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}_0^+$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}^+$ oder andere Intervalle kommen als ,,Wertereservoir" auch in Frage.

- Im Fall $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ ist der Graph einer direkten Proportionalität eine Ursprungsgerade, im Fall $\mathcal{D} = \mathbb{R}_0^+$ eine Ursprungshalbgerade.



19.9.6 Je mehr — desto mehr

Eine weit verbreitete Auffassung über die direkte Proportionalität ist, dass sie durch die Aussage

> **Je** größer der Wert der einen Größe x,
> **desto** größer der Wert der anderen Größe y.

beschrieben werden könne. Im mathematischen Sinn ist dies nur die Eigenschaft einer Funktion, dass sie streng monoton steigt.

- Richtig ist zunächst, dass

  $$\text{direkte Proportionalität} \quad \overset{\text{falls } m > 0}{\Longrightarrow} \quad \text{je mehr — desto mehr.}$$

- Im Fall $m < 0$ stimmt diese Implikation nicht. Die direkte Proportionalität

  $$y \quad = \quad -2 \cdot x$$

  zieht kein ,,je mehr — desto mehr" nach sich.

- Auf jeden Fall stimmt die Umkehrung nicht. Es gibt viele Zusammenhänge in der Mathematik und in der Sachwelt, die die ,,je mehr — desto mehr"–Eigenschaft haben, jedoch keine direkte Proportionalität darstellen.

  Beispiele sind:

- Seitenlänge — Flächeninhalt (bei einem Quadrat)
- Geschwindigkeit — Bremsweg
- Spannung — Stromstärke (bei einer Glühlampe)
- Fadenlänge — Schwingungsdauer (bei einem Fadenpendel)
- Einkommen — Steuer

19.9.7 Kontextfelder für die direkte Proportionalität

Sachsituationen:

- Koch- oder Backzutaten
- Fest/Feier: Gästezahl — Einkaufsmenge
- Der tropfende Wasserhahn: Zeit — Volumen

Geometrie:

- Längen bei Ähnlichkeit:
  - Seite — Umfang im Quadrat
  - Seite — Diagonale im Quadrat
  - Radius — Umfang beim Kreis
  - Höhe im gleichseitigen Dreieck
- Gradmaß — Bogenmaß bei Winkeln

Wirtschaft:

- Kaufmenge — Kaufpreis
- Anbaufläche — Anbauertrag
- Stückzahl — Gewicht
- Währungsumwandlung (auch: Euro — DM)
- Klassischer Fahrpreis bei der DB
- Kraftstoff–Verbrauch: Fahrstrecke — Benzinvolumen

Physik:

- Steigung einer Straße
- Bei konstanter Geschwindigkeit: Wegstrecke — Zeitspanne
- Ohm'sches Gesetz: Angelegte Spannung — Fließender Strom
- Hooke'sches Gesetz für Schraubenfedern: Dehnungslänge — Kraft
- Masse — Volumen bei einem homogenen Körper
- Masse — Gewichtskraft
- Wassertiefe — Wasser(–Schwere–)druck
- Zusammenhang zwischen innerer Energie (zugeführter Wärme) und Temperaturerhöhung: Spezifische Wärmekapazität.
- Verschiedene Formen der Allgemeine–Gas–Gleichung für ideale Gase.
- Nicht–Beispiel: Meereshöhe — Luftdruck
- Nicht–Beispiel: Geschwindigkeit — Bremsweg

- Nicht–Beispiel: Fallhöhe — Fallzeit
- Nicht–Beispiel: Pendellänge — Schwingungsdauer.
- Umwandlung: Geschwindigkeit in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ — Geschwindigkeit in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
- Durchfluss

Technik:

- Übersetzung bei Zahnrädern,
- Ketten– oder Riemenantrieb, Getriebe

19.10 Indirekte Proportionalität

19.10.1 Satz und Definition: Indirekte Proportionalität

Zwei Größen x und y heißen *indirekt proportional zueinander*, symbolisch ausgedrückt durch

$$y \sim \frac{1}{x},$$

wenn sie eine (und damit jede) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllen:

(A) Bei Ver–2,3,…,q–fachung eines Wertes x tritt eine Halbierung, Drittelung, …, Ver-$\frac{1}{q}$–fachung des Wertes $y \neq 0$ ein.

(B) Der Graph der Wertepaare (x, y) ist Teilmenge einer Hyperbel.

(C) Die Produkte der beiden Werte y und x sind konstant:

$$y \cdot x = m = \text{const} \neq 0$$

(D) Es gibt eine konstante Größe $m \neq 0$, so dass

$$y = m \cdot \frac{1}{x}.$$

19.10.2 Definition: Proportionalitätskonstante

Die in (C) und (D) erwähnte Konstante m heißt gelegentlich (m.E. nicht so glücklich) *Proportionalitätskonstante* oder sogar *Proportionalitätsfaktor*.

Aus den Aussagen oben ist zu entnehmen, dass diese Konstante ungleich Null sein muss.

19.10.3 Kommentare

- In der Definition ist von Größen anstelle von Zahlen die Rede. Dies rührt daher, dass die Indirekte Proportionalität viel stärker im schulischen Kontext von Sachsituationen thematisiert wird als im innermathematischen Kontext.
- Die indirekte Proportionalität eine symmetrische Beziehung. Ist die Größe y indirekt proportional zu der Größe x, so ist auch x indirekt proportional zu y.

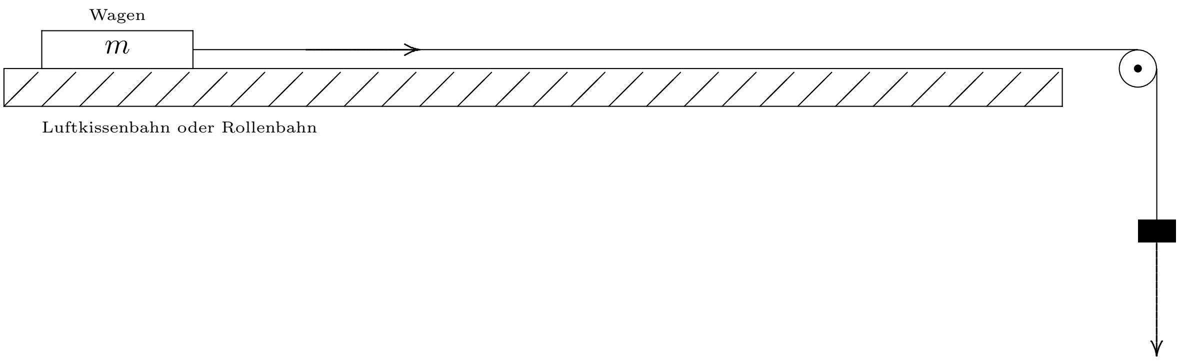
  Der Proportionalitätsfaktor bleibt dabei gleich:

  $$y = m \cdot \tfrac{1}{x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = m \cdot \tfrac{1}{y}.$$

- In alltäglichen Sachkontexten ist die Proportionalitätskonstante m positiv. In der Physik tritt auch der Fall $m < 0$ in Erscheinung.

19.10.4 Beispiel

Ein Wagen der Masse m kann sich auf einer Fahrbahn reibungsfrei bewegen. Er wird mit Hilfe eines Gewichtsstücks über eine Umlenkrolle beschleunigt.



Misst man (wie auch immer) die Beschleunigung a in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, so stellt sich heraus, dass die Beschleunigung indirekt proportional zur Masse des Wagens ist:

$$a \sim \frac{1}{m}.$$

19.10.5 Indirekte Proportionalität als Funktion

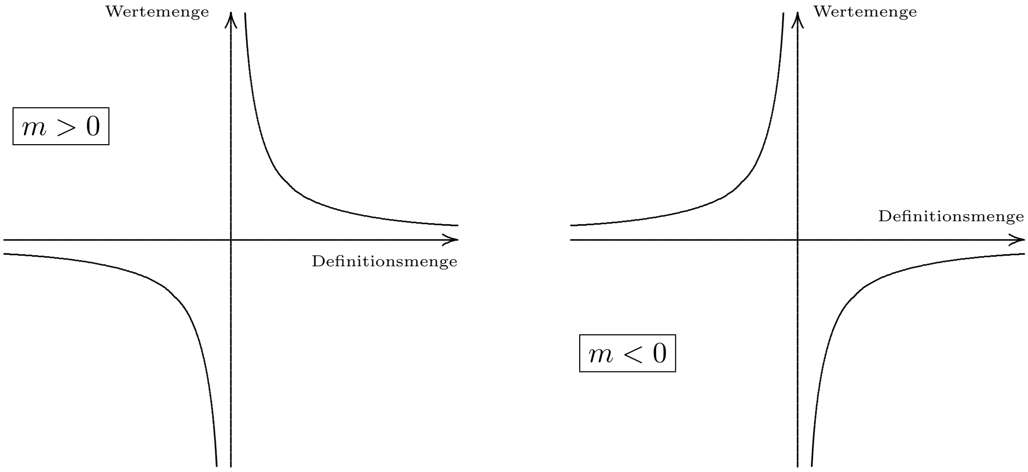
- Bei stärker mathematischer Sichtweise würde man sagen, dass eine indirekte Proportionalität eine Funktion der Form

$$f : \begin{cases} \mathcal{D} & \to & \mathcal{W} \\ x & \mapsto & m \cdot \frac{1}{x} \end{cases}$$

mit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $m \neq 0$ ist.

- Innerhalb der Schulmathematik sind Definitions- bzw. Wertemenge nicht gewichtige Bestandteile der Definition.

- Der Graph ist ,,hyperbel-ähnlich".



Die Graphen nähern sich asymptotisch an die Achsen an.

Im Fall $m = -1$ sind die Graphen Hyperbeln, sie sind punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs.

19.10.6 Kontextfelder für die indirekte Proportionalität

Geometrie:

- Bei Rechtecken mit konstantem Flächeninhalt: Länge – Breite

Wirtschaft:

- Bei konstanter Arbeitsmenge: Arbeitszeit — Zahl der Arbeitskräfte
- Bei Befüllung eines Gefäßes mit festem Volumen: Mittlere Füllgeschwindigkeit – Füllzeit

Physik:

- Bei konstanter Wegstrecke: Mittlere Geschwindigkeit — Zeitspanne
- Ideales Gas bei konstanter Temperatur: Volumen — Druck
- Goldene Regel der Mechanik beim Flaschenzug: Zugkraft — Zuglänge
- Goldene Regel der Mechanik in der Hydraulik: Kolbendruck — Kolbenhub
- Goldene Regel der Mechanik bei der Fahrradgangschaltung: Trittkraft — Pedalumdrehungen

19.11 Quadratische Funktionen

M10 LB 4
F17 T2
H11 T2
F07 T2
H06 T1
H04 T2
F03 T1
F00 T2
F96 T2
H93 T3
F92 T3

19.11.1 Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt quadratische Funktion, wenn sie — evtl. nach Äquivalenzumformung — die Form

$$f(x) \quad = \quad ax^2 + bx + c$$

mit fest gegebenen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, hat.

19.11.2 Kommentare

(1) Es gibt weitere Begriffe, die wir bereits im Abschnitt 18.1 über quadratische Gleichungen kennengelernt haben: Formfaktor, quadratisches Glied, lineares Glied, konstantes Glied.

(2) Als Definitionsmenge und Wertemenge treten hier grundsätzlich die reellen Zahlen in Erscheinung. Natürlich könnten auch andere Zahlbereiche ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$) gewählt werden. Bei der Berechnung von Nullstellen, Umkehrbarkeit usw. läuft man dann aber in Sackgassen.

(3) Der Graph einer beliebigen quadratischen Funktion ist eine *Parabel*. Allgemeine Parabeln treten als Kegelschnitte in Erscheinung. Nicht jede Parabel ist Graph einer quadratischen Funktion.

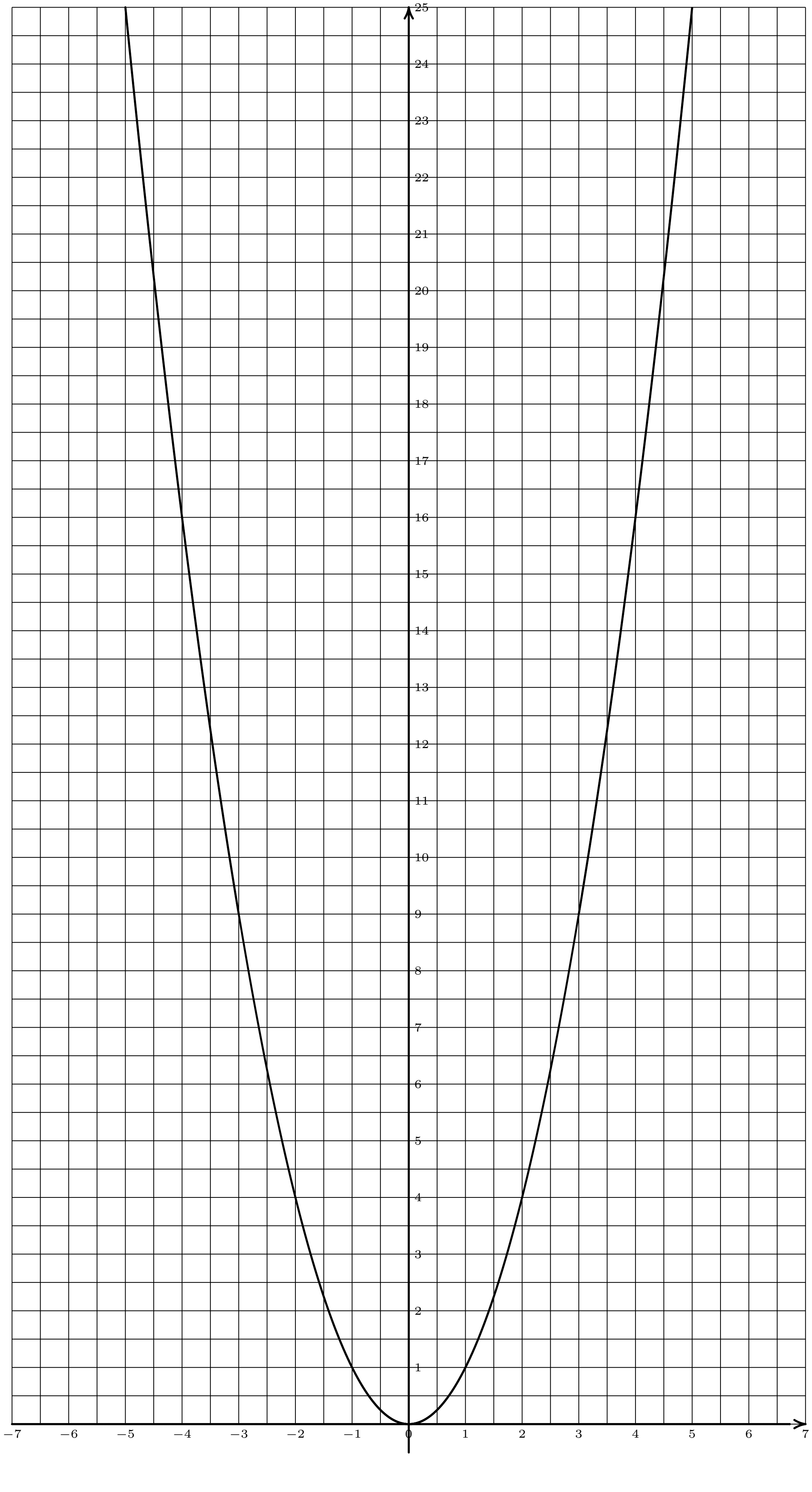
19.11.3 Die Quadratfunktion

Der Fall $a = 1$, $b = c = 0$ ist von besonderem Interesse. Der Funktionsterm lautet also

$$f(x) \quad = \quad x^2$$

Man spricht dann auch von **der** *Quadratfunktion*. Ihr Graph heißt *Normalparabel*. Auf der nächsten Seite ist der Graph abgebildet.

Beachte, dass die Normalparabel im Ursprung eine horizontale Tangente hat und nicht in irgendeiner Weise dort geknickt verläuft.


25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7

19.11.4 Summenform ↔ Scheitelform

Wir wiederholen — mit leichten Veränderungen — die Schritte aus Abschnitt 18.3.2, hier für quadratische Funktionen anstelle von quadratischen Gleichungen

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + b \cdot x + c \\
&\quad \text{(Ausklammern des Formfaktors)} \\
&= a \cdot [x^2 + \tfrac{b}{a} \cdot x + \tfrac{c}{a}] \\
&\quad \text{(Quadratische Ergänzung)} \\
&= a \cdot [x^2 + \tfrac{b}{a} \cdot x + (\tfrac{b}{2a})^2 - (\tfrac{b}{2a})^2 + \tfrac{c}{a}] \\
&\quad \text{(Plusformel)} \\
&= a \cdot [(x + \tfrac{b}{2a})^2 - (\tfrac{b}{2a})^2 + \tfrac{c}{a}] \\
&\quad \text{(Hineinmultiplizieren des Formfaktors)} \\
&= a \cdot (x \underbrace{+\tfrac{b}{2a}}_{=:-x_S})^2 \underbrace{-\tfrac{b^2}{4a} + c}_{=:y_S} \\
&\quad \text{(Umbenennung der Parameter)} \\
&= a \cdot (x - x_S)^2 + y_S
\end{aligned}$$

Um umgekehrt von der Scheitelform zur Summenform zukommen, genügt einfaches Ausmultiplizieren mit Hilfe der binomischen Plusformel.

$$\begin{aligned}
f(x) &= a \cdot (x - x_S)^2 + y_S \\
&= a \cdot (x^2 - 2x_S x + x_S^2) + y_S \\
&= ax^2 \underbrace{-2ax_S}_{=:b} x \underbrace{+ax_S^2 + y_S}_{=:c} \\
&= ax^2 + bx + c
\end{aligned}$$

19.11.5 Scheitelpunktkoordinaten mit x_S und y_S

Bei graphischer Interpretation (siehe weiter unten Abschnitt 19.11.11) stellt sich heraus, dass die beiden Zahlen

$$x_S = -\tfrac{b}{2a}, \qquad y_S = -\tfrac{b^2}{4a} + c$$

die Koordinaten des Scheitelpunkts sind.

Man mache sich klar, dass der Graph einer gegebenen quadratischen Funktion jeweils durch einen Satz von drei Parametern beschrieben ist:

$$(a, b, c) \quad \text{bzw.} \quad (a, x_S, y_S).$$

19.11.6 Problematik bei Wahl der Symbole

Die Bezeichnung der Scheitelpunktkoordinaten mit x_S und y_S ist

- einerseits hilfreich: Es handelt sich um die x- bzw. y-Koordinate bzgl. des Koordinatensystems.
- andererseits verständnishemmend: Es entsteht der Eindruck, dass es „(unbekannte) Variable" seien. Tatsächlich sind es aber Parameter, also „beliebige und aktuell fixierte" Zahlen, die einen einzelnen Funktionsgraphen beschreiben.

Die Problematik kommt also von den zwei Universal-Bedeutungen der Symbole x und y im Schulunterricht: Benennung der Achsen einerseits und Benennung der Elemente von Definitions/Wertemenge bei einer Funktion andererseits.

19.11.7 Umkehrbarkeit der quadratischen Funktionen

Als Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine quadratische Funktion f weder injektiv noch surjektiv, also nicht umkehrbar. Mit Hilfe der Scheitelform kann man leicht sehen, dass bei geeigneter Einschränkung von Definitions- und Wertemenge eine quadratische Funktion umkehrbar wird. Sie hat dann die Form

$$f_{\text{eing.}} : \begin{cases} [x_S, +\infty[& \to & \begin{cases} [y_S, +\infty[, & \text{falls } a > 0, \\ ]-\infty, y_S], & \text{falls } a < 0 \end{cases} \\ x & \mapsto & a(x - x_S)^2 + y_S \end{cases}$$

19.11.8 Tabelle von Parabelklassen

F96 T2

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über verschiedene Klassen von Parabeln.

Graph der Funktion	Beschreibung / Name	Bild der Normalparabel unter ...	Schnittmenge eines Kegelmantels im $\mathbb{R}^3$ mit der (x, y)-Ebene. Eine Mantellinie ist parallel zur ...
$y = x^2$	Normalparabel	Identität	y-Achse
$y = ax^2$	vertikal-symmetrische Parabel Scheitelpunkt ist Ursprung	Zentrischer Streckung $(x, y) \mapsto (\frac{x}{a}, \frac{y}{a})$	y-Achse
$y = x^2 + bx + c$ $= (x - x_S)^2 + y_S$	vertikal-symmetrische Parabel nach oben geöffnet kongruent zur Normalparabel	Verschiebung $(x, y) \mapsto (x + x_S, y + y_S)$	y-Achse
$y = -x^2 + bx + c$ $= -(x - x_S)^2 + y_S$	vertikal-symmetrische Parabel nach unten geöffnet kongruent zur Normalparabel	Punktspiegelung $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ und Verschiebung $(x, y) \mapsto (x + x_S, y + y_S)$	y-Achse
$y = ax^2 + bx + c$ $= a(x - x_S)^2 + y_S$	vertikal-symmetrische Parabel	Zentrischer Streckung $(x, y) \mapsto (\frac{x}{a}, \frac{y}{a})$ und Verschiebung $(x, y) \mapsto (x + x_S, y + y_S)$	y-Achse
—	Parabel	Ähnlichkeitsabbildung	(x, y)-Ebene

19.11.9 Erläuterungen zur Tabelle

(1) Der Begriff ,,vertikal-symmetrisch” ist eine Abkürzung für die Eigenschaft einer Parabel, dass ihre Symmetrie-Achse parallel zur y-Achse verläuft. Diese Eigenschaft haben genau die Parabeln, die Graphen von quadratischen Funktionen sind.

(2) Die Aussagen in den einzelnen Zeile der Tabelle sind äquivalent.

(3) Die Graphen von quadratischen Funktionen mit Formparameter $a = \pm 1$ sind kongruent zur Normalparabel. Ob diese Graphen auch Normalparabel heißen sollen, bleibt dahingestellt.

19.11.10 Gruppentheoretische Deutung

Für eine Ähnlichkeitsabbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(A) T ist Nacheinanderausführung einer zentrischen Streckung und einer Translation.

(B) T bildet Geraden auf dazu parallele Geraden ab.

(C) T bildet Graphen von quadratischen Funktionen auf Graphen von quadratischen Funktionen ab.

Alle Ähnlichkeitsabbildungen mit diesen Eigenschaften bilden eine Untergruppe der Gruppe aller Ähnlichkeitsabbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Man könnte sie die Gruppe der ,,richtungstreuen Ähnlichkeitsabbildungen” nennen.

Drehungen sind Ähnlichkeitsabbildungen, die (außer bei Drehwinkel 0° oder 180°) nicht zu dieser Untergruppe gehören.

19.11.11 Graph-Transformation

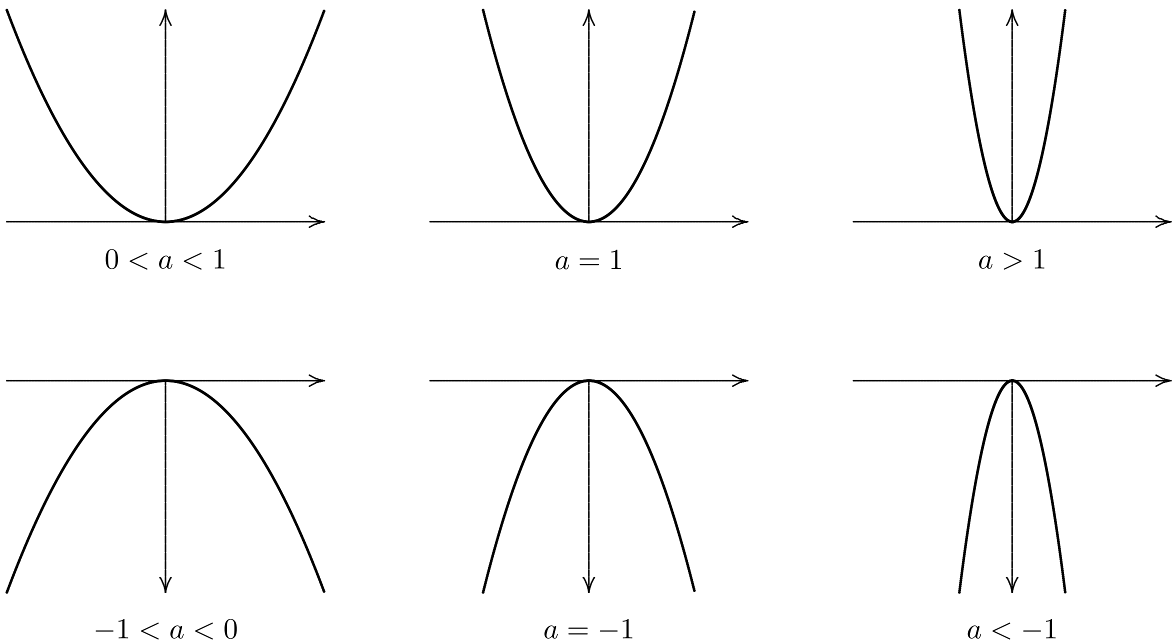
Wir begründen die zweite und dritte Zeile der Tabelle. Bei zentrischer Streckung bzw. Verschiebung wird die Normalparabel G_{x^2} auf die Graphen G_{ax^2} bzw. $G_{(x-x_S)^2+y_S}$ abgebildet.

$$G_{x^2} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y = x^2\right\}$$

$$\begin{array}{ll||ll}
& \scriptstyle(\text{Zentrische Streckung mit Faktor } \frac{1}{a}) & & \scriptstyle(\text{Verschiebung um } (x_S, y_S)) \\
\longrightarrow & \left\{(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}) \in \mathbb{R}^2 \middle| y = x^2\right\} & \longrightarrow & \left\{(x + x_S, y + y_S) \in \mathbb{R}^2 \middle| y = x^2\right\} \\
& \scriptstyle(\text{Substitution } \widetilde{x} = \frac{x}{a},\ \widetilde{y} = \frac{y}{a}) & & \scriptstyle(\text{Substitution } \widetilde{x} = x + x_S,\ \widetilde{y} = y + y_S) \\
= & \left\{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \mathbb{R}^2 \middle| a\widetilde{y} = (a\widetilde{x})^2\right\} & = & \left\{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \mathbb{R}^2 \middle| \widetilde{y} - y_S = (\widetilde{x} - x_S)^2\right\} \\
& \scriptstyle(\text{Äquivalenzumformung: Division durch } a) & & \scriptstyle(\text{Äquivalenzumformung: Addition von } y_S) \\
= & \left\{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \mathbb{R}^2 \middle| \widetilde{y} = a\widetilde{x}^2\right\} & = & \left\{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \mathbb{R}^2 \middle| \widetilde{y} = (\widetilde{x} - x_S)^2 + y_S\right\} \\
& \scriptstyle(\text{Umbenennung}) & & \scriptstyle(\text{Umbenennung}) \\
= & \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y = ax^2\right\} & = & \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y = (x - x_S)^2 + y_S\right\} \\
= & G_{ax^2} & = & G_{(x-x_S)^2+y_S}
\end{array}$$

19.11.12 Unterschiedliche Parabelklassen bzgl. Form

Abhängig vom Formparameter $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ergeben sich die folgenden Klassen von Parabeln, die als Graphen von quadratischen Funktionen auftreten können.



Kontextfelder für Quadratische Funktionen

19.11.13 Extremwertaufgaben

Es kommt gelegentlich vor, dass Optimierungsprobleme der Wirklichkeit bei der mathematischen Modellierung auf quadratische Zielfunktionen führen.

Auch ohne Zuhilfenahme von Extremwertkriterien der Analysis ist bekannt, dass der Scheitelpunkt (x_s, y_S) das Extremum der Funktion darstellt.

19.11.14 Beispielaufgabe aus der Geometrie

Auf einer Wiese soll ein rechteckiges Teilstück durch einen 800 m langen Zaun eingegrenzt werden. Wie lang/breit muss das Rechteck sein, damit die eingesperrten Schafe am meisten zu fressen bekommen?

Die Lösung kann in der folgenden Folge von Schritten erarbeitet werden.

Variable: Die Länge des rechteckigen Teilstücks wird mit x bezeichnet.
Die Breite des rechteckigen Teilstücks wird mit b bezeichnet.

Term: Der Umfang des rechteckigen Teilstücks ist dann gegeben durch $U = 2 \cdot x + 2 \cdot b$.

Nebenbedingung: Sie besteht in der Gleichung $U = 2 \cdot x + 2 \cdot b = 800\,\mathrm{m}$

Zielfunktion: Die zu maximierende Zielfunktion ist der Flächeninhalt: $A = x \cdot b$

Elimination: Mit Hilfe der Nebenbedingung kann die Breite eliminiert werden: $A = A(x) = x \cdot (\frac{U}{2} - x) = -x^2 + \frac{U}{2}\, x$.

Lösung: Der Scheitelpunkt der Funktion ist bei $x_S = -\frac{U}{4} = 200\,\mathrm{m}$.
Als Wert ergibt sich $y_S = \frac{-(\frac{U}{2})^2}{-4} = (\frac{U}{4})^2 = 40\,000\,\mathrm{m}^2$.

Antwort: Die Länge sollte gleich 200 m gewählt werden. Demzufolge ist das Teilstück quadratisch mit einer Fläche von $40\,000\,\mathrm{m}^2$.

19.11.15 Wurfparabel

Wird ein Körper im Schwerefeld der Erde — bei Reibungsfreiheit — geworfen, so ist die Zeit-Ort-Funktion in x bzw. y-Richtung gegeben durch

$$\begin{aligned} s_x(t) &= s_{x,0} + v_{x,0} \cdot t \\ s_y(t) &= s_{y,0} + v_{y,0} \cdot t - \tfrac{g}{2} \cdot t^2. \end{aligned}$$

Dabei bedeuten

t	Vergangene Zeit in s
s_x	Horizontale Wurfweite in m
s_y	Vertikale Wurfweite in m
$s_{x,0}$	Horizontal-Koordinate des Abwurfpunkts in m
$s_{y,0}$	Vertikal-Koordinate des Abwurfpunkts in m
$v_{x,0}$	Horizontal-Komponente der Abwurfgeschwindigkeit in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
$v_{y,0}$	Vertikal-Komponente der Abwurfgeschwindigkeit in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
g	Erdbeschleunigung $= 9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Löst man die erste Gleichung nach t auf,

$$t = \tfrac{s_x(t) - s_{x,0}}{v_{x,0}},$$

und setzt das in die zweite Gleichung ein, so folgt die Bahngleichung

$$\begin{aligned} s_y(t) &= s_{y,0} + v_{y,0} \cdot t - \tfrac{g}{2} \cdot t^2 \\ &= s_{y,0} + v_{y,0} \cdot \tfrac{s_x(t) - s_{x,0}}{v_{x,0}} - \tfrac{g}{2} \cdot \left(\tfrac{s_x(t) - s_{x,0}}{v_{x,0}}\right)^2. \end{aligned}$$

Wir vereinfachen diese Situation noch in mehrfacher Hinsicht:

- Der Körper werde horizontal geworfen, d.h. es ist $v_{y,0} = 0$.
- Der Körper werde im Ursprung geworfen, d.h. es ist $s_{x,0} = s_{y,0} = 0$.
- Wir verwenden übersichtlichere Symbole $v = v_{x,0}$, $x = s_x(t)$, $y = s_y(t)$.

Dann lautet die Bahngleichung

$$y = -\tfrac{g}{2} \cdot \left(\tfrac{x}{v}\right)^2 = -\tfrac{g}{2v^2}\, x^2,$$

die Bahn hat also die Form eines nach unten geöffneten Parabelbogens.

19.11.16 Sichtbare Bahn

Wird die Bahn eines Körpers sichtbar gemacht, beispielsweise durch die Langzeitaufnahme eines leuchtenden Körpers, so sieht man den Graphen der quadratischen Funktion direkt.

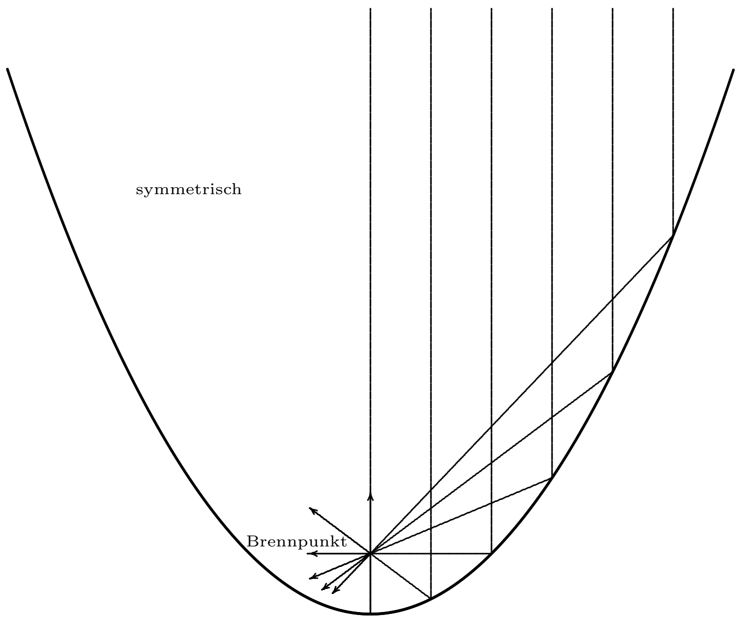
- Wasserstrahl,
- Funkenflug, Silvesterfeuerwerk, Vulkanausbruch

19.11.17 Parabolspiegel

Wir betrachten den Graphen der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2$ mit $a > 0$. Ein beliebiger parallel im Abstand x zur y-Achse von oben einfallender Strahl werde im Parabel-Punkt (x, ax^2) — genauer an der Tangente durch diesen Punkt — gemäß Reflexionsgesetz ,,Ausfallswinkel = Einfallswinkel" reflektiert.

Unabhängig von x geht der reflektierte Strahl genau durch den *Brennpunkt* $(0, \frac{1}{4a})$.

Diese geometrische Besonderheit der Parabel wird beim Parabolspiegel ausgenutzt. Licht- oder Funkwellen, die von einer weit entfernten Quelle ausgesandt werden, können in einem einzigen Punkt gebündelt werden. Aufgrund der Verdichtung können diese Signale von einem Empfänger im Brennpunkt viel besser registriert werden. Der Parabolspiegel muss allerdings genau auf die Quelle ausgerichtet sein.



19.11.18 Weitere Beispiele

- Brücken und andere Bauwerke H06 T1 A3
- Parabelrutsche im Gebäude der Mathematik/Informatik der TUM auf dem Campus Garching
- Der Gateway Arch in St. Louis ist nicht parabelförmig, er hat die Form einer abgeflachten Kettenlinie.

19.12 Exponentialfunktionen

19.12.1 Kontextfelder für Exponentialfunktionen

- Wachstum von Populationen:
  - Bakterien, Pilzkulturen, Ameisen, Fischen, Weltbevölkerung.
  - Ausbreitung von Krankheiten
  - Weltbevölkerung,
- Preissteigerungen: Lohnerhöhung, Mieterhöhung,
- Physik:
  - Barometrische Höhenformel,
  - Radioaktiver Zerfall
  - Modellversuch: Bierschaum–Zerfall
  - Kondensator–Auf- oder Entladung.
  - Größe der Kohlendioxidbläschen im Sektglas.
- Wirtschaft, Geld:
  - Zinseszins
  - Dynamisches Sparen, Lebensversicherung
  - Legende von den Reiskörnern auf dem Schachbrett
- Kettenbrief–Aktionen.
- Experiment: Stochastische Münzen–Vermehrung (Vgl. XQuadrat 10).

20 Allgemeines$^{\ominus}$

20.1 Fachwörter bei den Grundrechenarten

- Addition — Addieren zu (Zusammenzählen)

$$\underbrace{\overbrace{12}^{\text{1. Summand}} + \overbrace{4}^{\text{2. Summand}}}_{\text{Summe}} = \overbrace{16}^{\text{Summenwert}}$$

- Subtraktion — Subtrahieren (Abziehen, Wegnehmen) von

$$\underbrace{\overbrace{12}^{\text{Minuend}} - \overbrace{4}^{\text{Subtrahend}}}_{\text{Differenz}} = \overbrace{8}^{\text{Differenzwert}}$$

- Multiplikation — Multiplizieren (Malnehmen) mit

$$\underbrace{\overbrace{12}^{\text{1. Faktor}} \cdot \overbrace{4}^{\text{2. Faktor}}}_{\text{Produkt}} = \overbrace{48}^{\text{Produktwert}}$$

- Division — Dividieren (Teilen) durch

$$\underbrace{\overbrace{12}^{\text{Dividend}} : \overbrace{4}^{\text{Divisor}}}_{\text{Quotient}} = \overbrace{3}^{\text{Quotientenwert}}$$

- Potenz — Potenzieren („Hochnehmen") mit

$$\underbrace{\overbrace{12}^{\text{Basis/Grundzahl}} \uparrow \overbrace{4}^{\text{Exponent/Hochzahl}}}_{\text{Potenz}} = \overbrace{20736}^{\text{Potenzwert}}$$

20.2 Relationen in einer Menge

Es sei wieder $\mathcal{M}$ eine Menge. Im folgenden sind mögliche Eigenschaften einer solchen Relation aufgelistet. Eine Relation $\mathcal{R}$ in einer Menge $\mathcal{M}$ heißt …

- *reflexiv*, wenn für alle $x \in \mathcal{M}$ gilt: $(x, x) \in \mathcal{R}$.
- *symmetrisch*, wenn für alle $x \in \mathcal{M}$, $y \in \mathcal{M}$ die folgende Implikation gilt:
  $(x, y) \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad (y, x) \in \mathcal{R}$.
  (∗ Das heißt: Nur wenn $(x, y) \in \mathcal{R}$ ist, muss auch $(y, x) \in \mathcal{R}$ sein. ∗)
- *transitiv*, wenn für alle $x \in \mathcal{M}$, $y \in \mathcal{M}$, $z \in \mathcal{M}$ die folgende Implikation gilt:
  $$\left.\begin{array}{l}(x, y) \in \mathcal{R} \text{ und} \\ (y, z) \in \mathcal{R}\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad (x, z) \in \mathcal{R}$$
- *irreflexiv*, wenn für alle $x \in \mathcal{M}$ gilt: $(x, x) \notin \mathcal{R}$.
- *antisymmetrisch*, wenn für alle $x \in \mathcal{M}$, $y \in \mathcal{M}$ mit $x \neq y$ höchstens eine der beiden folgenden Aussagen wahr ist:
  $$(x, y) \in \mathcal{R} \qquad\qquad (y, x) \in \mathcal{R}$$
- *total*, wenn für alle $x, y \in \mathcal{M}$ mindestens eine der beiden folgenden Aussagen wahr ist:
  $$(x, y) \in \mathcal{R} \qquad\qquad (y, x) \in \mathcal{R}$$
- *Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- *Halbordnung*, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.
- *lineare* (oder *totale*) *Ordnung*, wenn sie eine Halbordnung und zusätzlich total ist.
- *strenge Halbordnung*, wenn sie irreflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.
- *strenge lineare Ordnung*, wenn sie eine strenge Halbordnung und total ist.

20.3 Aufstellung von Rechengesetzen

Es sei M eine Menge, deren Elemente in diesem Zusammenhang Zahlen heißen.

Auf M sind zwei zweistellige Verknüpfungen definiert, die wir in Anlehnung an das Standardbeispiel der Grundrechenarten Addition und Multiplikation nennen. Es treten in diesem Zusammenhang weitere Fachwörter und Sprechweisen auf, die in dem Abschnitt über Fachwörter zusammengetragen sind.

- Die Addition

$$\oplus \begin{cases} M \times M & \rightarrow & M \\ (a,b) & \mapsto & a \oplus b \end{cases}$$

- Die Multiplikation

$$\odot \begin{cases} M \times M & \rightarrow & M \\ (a,b) & \mapsto & a \odot b \end{cases}$$

Bei Hintereinanderausführung (Schachtelung) mehrerer Verknüpfungen müssen zur Gliederung grundsätzlich Klammern verwendet werden. Die Punkt–vor–Strich–Konvention ermöglicht eine Verminderung der Zahl der Klammern und erhöht damit die Übersicht.

$$a \oplus b \odot c \;:= \begin{cases} := & a \oplus (b \odot c) \\ \\ :\neq & (a \oplus b) \odot c \end{cases}$$

Auf der folgenden Seite sind mögliche Eigenschaften der beiden Verknüpfungen aufgelistet.

Eigenschaften der Addition

(AG/A) Assoziativgesetz der Addition

Für alle $a, b, c \in M$ gilt: $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

Damit wird die Bildung einer Summe mit drei oder mehr Gliedern ohne Klammern erst sinnvoll: $a \oplus b \oplus c \ := \ (a \oplus b) \oplus c$.

(KG/A) Kommutativgesetz der Addition

Für alle $a, b \in M$ gilt: $a \oplus b = b \oplus a$.

(NE/A) Neutrales Element der Addition

Es gibt ein Element $0 \in M$, so dass für alle $a \in M$ gilt: $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$.

(EiL/A) Eindeutigkeit „der Lösung" (Kürzbarkeit)

Zu beliebigen $a, b \in M$ gibt es **höchstens** ein Element $c \in M$, so dass gilt: $a \oplus c = b$.

(ExL/A) Existenz „der Lösung"

Zu beliebigen $a, b \in M$ gibt es **mindestens** ein Element $c \in M$, so dass gilt: $a \oplus c = b$.

Eigenschaften der Multiplikation

(AG/M) Assoziativgesetz der Multiplikation

Für alle $a, b, c \in M$ gilt: $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$.

Damit wird die Bildung eines Produkts mit drei oder mehr Gliedern ohne Klammern erst sinnvoll: $a \odot b \odot c \ := \ (a \odot b) \odot c$.

(KG/M) Kommutativgesetz der Multiplikation

Für alle $a, b \in M$ gilt: $a \odot b = b \odot a$.

(NE/M) Neutrales Element der Multiplikation

Es gibt ein Element $1 \in M$, so dass für alle $a \in M$ gilt: $a \odot 1 = 1 \odot a = a$.

(EiL/M) Eindeutigkeit „der Lösung" (Kürzbarkeit)

Zu jedem $a \in M \setminus \{0\}, b \in M$ gibt es **höchstens** ein $c \in M$, so dass gilt:

(ExL/M) Existenz „der Lösung"

Zu jedem $a \in M \setminus \{0\}, b \in M$ gibt es **mindestens** ein $c \in M$, so dass gilt: $a \odot c = b$

Eine Eigenschaft, die beide Verknüpfungen betrifft

(DG) Distributivgesetz

Für alle $a, b, c \in M$ gilt: $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$