

Skript zur Vorlesung

Funktionentheorie 1

(Wintersemester 2018/19)

Dieses Geheft enthält in kompakter Form die wesentlichen Inhalte, wie sie in der Vorlesung „Funktionentheorie 1“ vorgestellt werden.

Es ist zum Gebrauch neben der Vorlesung gedacht und erhebt nicht den Anspruch, „in sich selbst verständlich“ oder vollständig zu sein.

S. Hilger

Inhaltsverzeichnis

1	Die komplexen Zahlen	4
1.1	Algebraische Struktur	4
1.2	Topologie auf \mathbb{C}	9
1.3	Exponentialfunktion, Logarithmus und trigonometrische Funktionen	10
1.4	Gebiete	12
1.5	Diskrete Teilmengen von Gebieten	15
2	Holomorphe Funktionen	17
2.1	Komplex-Differenzierbarkeit	17
2.2	Holomorphie	19
3	Analytische Funktionen	22
3.1	Einstieg	22
3.2	Konvergente Potenzreihen und Konvergenzradius	24
3.3	Analytische Funktionen sind holomorph	26
3.4	Der Identitätssatz	30
4	Integration mittels Wegintegralen	32
4.1	Kurven	32
4.2	Das Kurvenintegral	34
4.3	Wege	38
4.4	Randoperator, geschlossene Wege	40
4.5	Das Wegintegral, Stetige Abhängigkeit	42
5	Die Cauchy-Sätze	49
5.1	Der komplexe HDI	49
5.2	Der Rundum-Satz	51
6	Folgerungen	58
6.1	Algebra der analytischen Funktionen	58
6.2	Satz von Liouville und Fundamentalsatz der Algebra	59
6.3	Die Logarithmusfunktion einer holomorphen Funktion	61
6.4	Lokale Zerlegung einer holomorphen Funktion	63
6.5	Prinzip der offenen Abbildung, Maximums- und Minimumsprinzip	65
6.6	Exkurs: Konforme Funktionen \ominus	67
7	Laurent-Zerlegung	70
7.1	Laurent-Zerlegung	70
7.2	Laurent-Entwicklung, Definition des Hauptteils	73
8	Bis auf Singularitäten holomorphe Funktionen	75
8.1	Einstieg	75
8.2	Der Riemann'sche Hebbarkeitssatz	77
8.3	Klassifikation von Singularitäten	78
8.4	Die Windungszahl	83
8.5	Das Residuum	85

8.6	Der Residuensatz	87
9	Homologie – Homotopie	90
9.1	Begriffe der Homologie	90
9.2	Die Cauchy-Sätze — Homologische Versionen	92
9.3	Einfach zusammenhängende Gebiete	95

1 Die komplexen Zahlen

1.1 Algebraische Struktur

1.1.1 Gauß'sche Zahlenebene

Wir betrachten die Menge der reellen Zahlenpaare

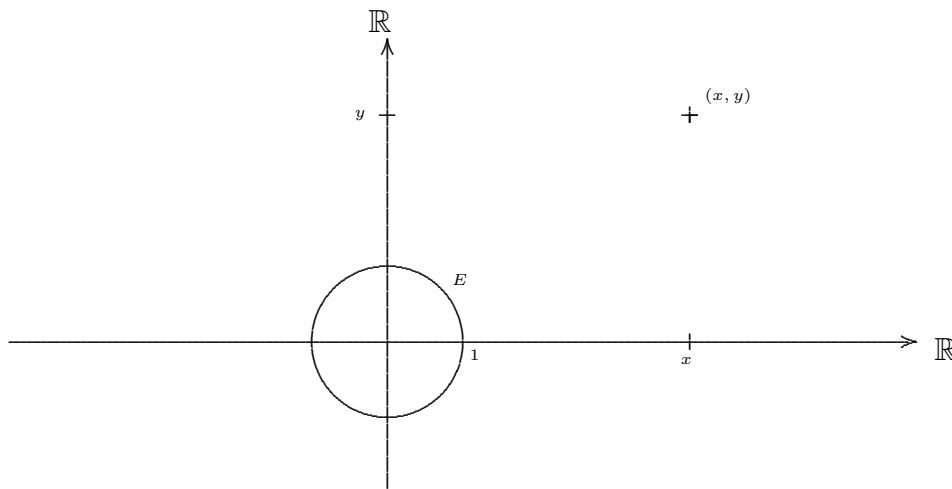
$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

In dem nun zu entwickelnden Kontext heißen die Zahlenpaare *komplexe Zahlen*. Wir werden versuchen, eine Zuordnung von Buchstaben

$$z = (x, y), \quad w = (u, v)$$

einzuhalten.

Wir stellen uns zunächst diese Menge als die reelle Ebene \mathbb{R}^2 vor.



Bei Zugrundelegung dieser Auffassung heißt die Ebene auch *Gauß'sche Zahlenebene* oder *komplexe Zahlenebene*.

1.1.2 Vektorraum-Struktur

Die Menge hat die Struktur eines 2-dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraums. Wir setzen Begriffe aus der Linearen Algebra als bekannt voraus: Lineare (Un-)Abhängigkeit, Erzeugnis, Basis, Konvexität.

1.1.3 Komplexe Addition und Multiplikation

Es gibt aber eine Lösung unserer Aufgabe. Wir definieren auf der Menge \mathbb{C} die Addition koordinatenweise und die Multiplikation ganz anders wie folgt:

$$\begin{aligned} (x, y) + (u, v) &:= (x + u, y + v) \\ (x, y) \cdot (u, v) &:= (xu - yv, xv + yu) \end{aligned}$$

Wir probieren diese Verknüpfungen an verschiedenen Beispielen aus.

1.1.4 Addition, skalare Multiplikation, reelle Zahlen als Teilmenge

- Die Addition ist einfach die aus der Schule bekannte Addition von Vektoren in der Zeichenebene. Das neutrale Element bzgl. der Addition ist $0 = (0, 0)$. Das additiv inverse zu einer Zahl (x, y) ist $(-x, -y)$.
- Wir betrachten die Verknüpfung für Zahlenpaare, deren zweite Koordinate 0 ist.

$$(x, 0) + (u, 0) = (x + u, 0), \quad (x, 0) \cdot (u, 0) = (x \cdot u, 0).$$

Das bedeutet, dass mit diesen Zahlen genauso gerechnet wird wie mit den reellen Zahlen. Auf diese Weise kann die Menge der reellen Zahlen als Teilmenge der komplexen Zahlen aufgefasst werden. Man sagt auch, dass die Zahlen $(a, 0)$ reell sind. Die Schreibweise als Inklusion

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

ist mengentheoretisch etwas skurril, aber algebraisch sinnvoll. Entsprechend schreibt man auch

$$x := (x, 0) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

- Aus der Schule ist bekannt, dass Vektoren auch vervielfacht werden können (Skalar-Multiplikation). Wir multiplizieren eine reelle Zahl mit einer beliebigen komplexen Zahl:

$$(x, 0) \cdot (u, v) = (xu, xv).$$

Tatsächlich wird der Vektor (u, v) mit x skalar vervielfacht.

1.1.5 Die imaginäre Einheit, Real- und Imaginärteil

- Das Quadrat von $(0, 1)$ ist

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0).$$

Wir haben also eine Wurzel der reellen Zahl -1 gefunden.

- Dies ist Anlass für die Definition der *Imaginären Einheit*:

$$i := (0, 1).$$

- Dann kann eine beliebige komplexe Zahl (x, y) ein-eindeutig geschrieben werden als

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy.$$

- In Bezug auf eine gegebene komplexe Zahl $z = (x, y)$ heißt die reelle Zahl x der *Realteil* und y der *Imaginärteil*. Als Funktionen sind dies

$$\text{Re} : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x, \end{cases} \quad \text{Im} : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto y. \end{cases}$$

1.1.6 Distributive Interpretation der komplexen Multiplikation

Die Regel für die Multiplikation 1.1.3 zweier komplexer Zahlen kann in der i -Darstellung nun so aufgeschrieben werden:

$$(x + iy) \cdot (u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Damit eröffnet sich im Nachhinein eine zugänglichere Sichtweise der komplexen Multiplikation. Bei Anwendung der Distributivität und der Regel $i^2 = -1$ auf die linke Seite kommt genau der Ausdruck rechts heraus.

Beachte, dass wir damit das Distributivgesetz weder bewiesen noch benutzt haben, wir haben lediglich die Definition der komplexen Multiplikation „distributiv interpretiert“.

1.1.7 Multiplikativ Inverses

Das zu einem Element $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ multiplikativ inverse ist gegeben durch

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Wie bei rationalen oder reellen Zahlen wird bei der Division zweier komplexer Zahlen die Bruchschreibweise verwendet.

In der Tat gilt:

$$(x + iy) \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2} \right) = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} \right) + i \left(\frac{xy}{x^2+y^2} - \frac{yx}{x^2+y^2} \right) = 1.$$

1.1.8 Satz: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

1.1.9 Beweis

Siehe Lineare Algebra 1 (LIA1).

1.1.10 Definition: Konjugation in \mathbb{C}

Wir definieren für eine Zahl $z = x + iy$ in der komplexen Zahlenebene die *Konjugiert-Komplex-Bildung* durch:

$$- : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z = x + iy & \mapsto \bar{z} = x - iy \end{cases}$$

\bar{z} heißt die zu z *konjugiert-komplexe* Zahl.

1.1.11 Satz: Eigenschaften der Konjugiert-Komplex-Bildung

Die Konjugiert-Komplex-Bildung hat folgende Eigenschaften.

(i) Sie ist ein „Automorphismus“ des Körpers \mathbb{C} , d.h. es gilt für alle $z, w \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w}, & \overline{z - w} &= \bar{z} - \bar{w}, \\ \overline{z \cdot w} &= \bar{z} \cdot \bar{w}, & \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} &= \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, \quad \text{falls } w \neq 0. \end{aligned}$$

(ii) Sie ist involutiv, d.h. es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\overline{\overline{z}} = z$$

(iii) Für Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl z gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= \frac{z + \overline{z}}{2} \\ \operatorname{Im} z &= \frac{z - \overline{z}}{2i} \end{aligned}$$

Eine komplexe Zahl stimmt mit ihrer konjugierten überein genau dann, wenn sie reell ist

$$z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}.$$

1.1.12 Definition: Absolutbetrag in \mathbb{C}

Wir definieren für eine Zahl $z = x + iy$ in der komplexen Zahlenebene die Konjugiert-Komplex-Bildung durch:

$$|\cdot| : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow [0, \infty[\\ z = x + iy & \mapsto |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Die Zahl $|z|$ heißt der *Absolutbetrag* (kurz: *Betrag*) der komplexen Zahl z .

1.1.13 Satz: Eigenschaften des Absolutbetrags

Der Absolutbetrag hat folgende Eigenschaften

(i) Zusammenhang mit Konjugiert-Komplex-Bildung

$$\begin{aligned} |z|^2 &= z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}_0^+ \\ |z| &= 0 \iff z = 0 \end{aligned}$$

(ii) Multiplikativität. Für zwei komplexe Zahlen z, w gilt

$$\begin{aligned} |w \cdot z| &= |w| \cdot |z| \\ \left| \frac{w}{z} \right| &= \frac{|w|}{|z|}, \quad \text{falls } z \neq 0 \\ |w + z| &\leq |w| + |z| \\ |w - z| &\geq \left| |w| - |z| \right| \end{aligned}$$

1.1.14 Bemerkung

Mit Hilfe der Konjugiert-Komplexbildung und des Absolutbetrags lässt sich die Ermittlung des multiplikativ inversen Elements einer komplexen Zahl $z = x + iy$ so durchführen

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\overline{z} \cdot z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

1.1.15 Interpretation als reelle 2×2 -Matrizen

Es besteht eine bijektive Abbildung

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid a_{11} = a_{22}, a_{12} = -a_{21} \right\} \\ x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, \end{array} \right.$$

unter der Addition und Multiplikation in \mathbb{C} mit der Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ korrespondieren.

Weiter korrespondieren Konjugiert-Komplex-Bildung mit Transponierung und die Bildung des Betragsquadrats mit der Determinante.

1.1.16 Beobachtung

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ stellt genau dann eine komplexe Zahl dar, wenn sie mit der Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vertauscht.

1.1.17 Interpretation als Matrizen oder Vektoren

Stellt man komplexe Zahlen sowohl als Vektoren in $\mathbb{R}^{2 \times 1}$ bzw. $\mathbb{R}^{1 \times 2}$ oder als reelle 2×2 -Matrizen dar, so spiegelt sich die Multiplikation von komplexen Zahlen wie folgt innerhalb des Rechnens mit Matrizen wider.

$$\begin{aligned} (v + iw) \cdot (x + iy) &= b + ic \\ \begin{pmatrix} v & -w \\ w & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b & -c \\ c & b \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v & -w \\ w & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \\ (v \ w) \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} &= (b \ c). \end{aligned}$$

Beachte, dass die Matrix in der letzten Zeile die „transponiert-zugeordnete“ Matrix ist.

1.2 Topologie auf \mathbb{C}

1.2.1 Vereinbarung

Wir fügen dem reellen Intervall $[0, \infty[$ den „unendliche fernen Punkt $+\infty$ “ hinzu und bezeichnen diese Menge mit $[0, \infty]$. Auf dieser Menge sind solide mathematisch definiert

- eine lineare Ordnung und
- eine streng monoton fallende bijektive Abbildung

$$\begin{cases} [0, \infty] & \rightarrow [0, \infty] \\ r & \mapsto \frac{1}{r}. \end{cases}$$

1.2.2 Schreibweise für Teilmengen von \mathbb{C}

Zunächst fassen wir die folgenden Teilmengen von \mathbb{R} auch als Teilmengen von \mathbb{C} auf.

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0\} \\ \mathbb{R}^+ &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z > 0\} \\ \mathbb{R}_0^+ &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \geq 0\} \\ \mathbb{R}^- &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z < 0\} \\ \mathbb{R}_0^- &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0\} \\ \mathbb{R}^\times &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \neq 0\}. \end{aligned}$$

Für die folgenden „kreisförmigen“ Teilmengen ist es bequem, eine Notation als Standard einzuführen. Wir definieren für $r, R \in [0, \infty]$ und $a \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} U_r(a) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\} \\ B_r(a) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\} \\ S_r(a) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\} \\ U_{r,R}(a) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < R\} \\ \dot{U}_r(a) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < r\} = U_{0,r}(a). \end{aligned}$$

Weiter sei

$$\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\} = U_{0,\infty}(0).$$

Bei der Menge

$$[a, b] := \{a + t(b - a) \mid t \in [0, 1]\} \subseteq \mathbb{C}, \quad a, b \in \mathbb{C},$$

handelt es sich um die *Verbindungsstrecke* der beiden Stellen a und b in \mathbb{C} . Damit wird die aus der reellen Analysis bekannte Schreibweise für Intervalle (mit $a \leq b$) verallgemeinert.

Entsprechend lassen sich Intervalle $]a, b[$ oder $[a, b[=]b, a]$ definieren.

1.2.3 Topologische Begriffe

Viele Begriffe aus der Topologie von \mathbb{R}^2 setzen wir als bekannt voraus: Norm, Metrik, Grenzwerte, offene, abgeschlossene, kompakte Teilmengen, Rand einer Teilmenge.

Es sei $a \in \mathbb{C}$. Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt *Umgebung* von a , wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $U_\delta(a) \subseteq U$.

1.3 Exponentialfunktion, Logarithmus und trigonometrische Funktionen

1.3.1 Exponentialfunktion

Wir übernehmen aus der Analysis die folgende Information.

Es gibt eine stetige Funktion

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \exp(z) = e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \end{cases}$$

und eine Zahl $\pi \in [3, 4]$ so, dass

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z + w) \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}$$

$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ist surjektiv, streng monoton steigend

$\exp :] - i\frac{\pi}{2}, +i\frac{\pi}{2}[\rightarrow S_1(0) \setminus \{-1\}$ ist bijektiv

$$\exp\left(\frac{\pi}{2}i\right) = i.$$

1.3.2 Trigonometrische Funktionen

Wir nehmen weiter zur Kenntnis die Funktionen

$$\cos(z) = \operatorname{Re}(\exp(iz)) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \quad \text{wobei}$$

$$p_k = \begin{cases} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!}, & \text{falls } k \in 2\mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\sin(z) = \operatorname{Im}(\exp(iz)) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k, \quad \text{wobei}$$

$$q_k = \begin{cases} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!}, & \text{falls } k \in 2\mathbb{Z} + 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

1.3.3 Zweige des komplexen Logarithmus

Es sei $\varphi \in \mathbb{R}$ fixiert. Die auf ein horizontal-unendliches Rechteck eingeschränkte Exponentialfunktion

$$e|_\varphi : \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in]\varphi, \varphi + 2\pi[\} & \rightarrow \mathbb{C} \setminus (e^{\varphi i} \cdot [0, \infty[) \\ z & \mapsto \exp(z) \end{cases}$$

ist bijektiv und hat demzufolge eine Umkehrfunktion

$$\ell_\varphi : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus (e^{\varphi i} \cdot [0, \infty[) & \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in]\varphi, \varphi + 2\pi[\} \\ z & \mapsto \ln |z| + i\psi, \quad \text{wobei } e^{i\psi} = \frac{z}{|z|}. \end{cases}$$

Bei der Definitionsmenge handelt es sich um die von 0 aus in Richtung $e^{i\varphi}$ „aufgeschlitzte“ Zahlenebene. Man nennt die Funktion ℓ_φ einen *Zweig des komplexen Logarithmus*.

Die Funktion $\operatorname{Log} = \ell_{-\pi}$ ist wohl der am meisten verwendete Zweig, man nennt sie den *Hauptzweig des komplexen Logarithmus*.

1.3.4 Die Argumentfunktion

Die innerhalb des komplexen Logarithmus l_φ auftretende Funktion

$$\arg_\varphi : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus (e^{\varphi i} \cdot [0, \infty[) & \rightarrow]\varphi, \varphi + 2\pi[\\ z & \mapsto \psi, \quad \text{wobei } e^{i\psi} = \frac{z}{|z|}, \end{cases}$$

heißt das *Argument von* z . Auch diese Funktion ist von dem fixierten $\varphi \in \mathbb{R}$ abhängig. Meistens wird auch hier $\varphi = -\pi$ gewählt.

1.3.5 Bemerkung

Beachte, dass eine Fortsetzung von

$$e_\varphi \text{ auf } \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in [\varphi, \varphi + 2\pi[\} \quad \text{bzw.}$$

$$l_\varphi \text{ auf } \mathbb{C}^\times$$

weiter „mengentheoretisch“ zueinander inverse Funktionen produziert, die Funktion l_φ aber dann wegen

$$\lim_{\tilde{\varphi} \nearrow \varphi} l_\varphi(e^{\tilde{\varphi} i}) = \lim_{\tilde{\varphi} \nearrow \varphi} (1 + i(\tilde{\varphi} + 2\pi)) = 1 + i(\varphi + 2\pi) \neq 1 + i\varphi = l_\varphi(e^{\varphi i})$$

nicht mehr stetig — und damit unbrauchbar für die komplexe Analysis — ist.

1.4 Gebiete

1.4.1 Satz und Definition: Gebiet

Für eine offene nicht-leere Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(A) Ω heißt *Gebiet*.

(B) Ω ist zusammenhängend: Gilt für zwei offene Teilmengen $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}$

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset, \quad \Omega \subseteq U_1 \cup U_2,$$

so ist $\Omega \subseteq U_1$ oder $\Omega \subseteq U_2$.

(C) Ω ist wegzusammenhängend, d.h. je zwei Punkte $z, w \in \Omega$ lassen sich durch eine stetige Kurve verbinden, das ist eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ mit $\gamma(0) = z$ und $\gamma(1) = w$.

(D) Je zwei Punkte $z, w \in \Omega$ lassen sich durch einen Streckenzug verbinden.

Vereinbarung: Bei Nennung des griechischen Buchstabens Ω sei durchgehend angenommen, dass es sich um ein Gebiet in \mathbb{C} handelt.

1.4.2 Beweis

(C) \Rightarrow (B). Diese Aussage gilt für beliebige Teilmengen von topologischen Räumen. Hier kein Beweis.

(B) \Rightarrow (C). Diese Aussage gilt zumindest für offene Mengen im $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$. Hier kein Beweis.

(C) \Rightarrow (D). Es seien zwei Punkte und eine verbindende stetige Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ vorgegeben. Wir definieren

$$\tau := \sup_{t \in [0, 1]} \{ \gamma(t) \mid \text{Für alle } s \leq t \text{ lassen sich } \gamma(0) \text{ und } \gamma(s) \text{ durch einen Streckenzug verbinden.} \}$$

Es gibt dann eine Kreisscheibe U mit $\gamma(\tau) \in U \subseteq \Omega$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass $\gamma([\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]) \subseteq U$. Dann lassen sich aber $\gamma(\tau - \varepsilon)$ und alle Punkte $\gamma(\tau + \delta)$, $0 \leq \delta \leq \varepsilon$ durch eine Strecke verbinden, demzufolge lassen sich $\gamma(0)$ und alle Punkte $\gamma(\tau + \delta)$, $\delta \leq \varepsilon$ durch einen Streckenzug verbinden.

(D) \Rightarrow (C). Ein Streckenzug ist eine stetige Kurve.

1.4.3 Definition: Konvexes Gebiet

(i) Ist Ω eine Teilmenge von \mathbb{C} , so heißt die Menge

$$\text{conv}(\Omega) := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j, \right. \\ \left. \text{wobei } a_1, \dots, a_n \in \Omega, \lambda_j \in [0, 1], \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \right\}$$

die *konvexe Hülle* von Ω .

(ii) Ein Gebiet heißt *konvex*, wenn zu je zwei Punkten $z, w \in \Omega$ auch die Verbindungsstrecke $[z, w]$ zu Ω gehört. Gleichbedeutend damit ist, dass Ω gleich seiner konvexen Hülle ist.

1.4.4 Definition: Sternförmiges Gebiet

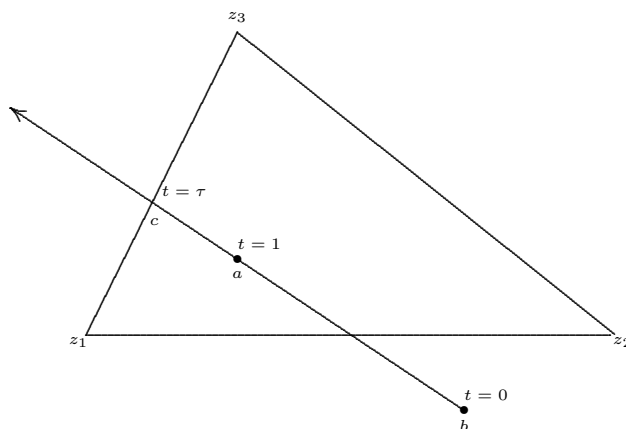
Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $b \in \Omega$.

- (i) Das Gebiet heißt *sternförmig bzgl. b* , wenn für jedes $z \in \Omega$ die Verbindungsstrecke $[z, b]$ zu Ω gehört.
- (ii) Das Gebiet heißt *sternförmig*, wenn es eine Stelle $b \in \Omega$ gibt, bzgl. derer Ω sternförmig ist.

1.4.5 Satz: Dreieck im sternförmigen Gebiet

Es seien Ω ein sternförmiges Gebiet und $D = [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup [z_3, z_1] \subseteq \Omega$ eine Dreiecks-
kontur. Dann gilt auch $\text{conv}(D) \subseteq \Omega$.

1.4.6 Beweis



(0) Es seien Ω bzgl. b sternförmig und $a \in \text{conv}(D)$. O.B.d.A. ist $a \neq b$.

(1) Als Bild der kompakten Menge

$$\{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in [0, 1]^3 \mid \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}$$

unter der stetigen Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{R}^3 & \mapsto \mathbb{C} \\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) & \mapsto \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 \end{cases}$$

ist $\text{conv}(D)$ kompakt.

(2) Wegen der Kompaktheit von $\text{conv}(D)$ erreicht der Strahl von b durch a bei

$$\begin{aligned} c &:= b + \tau(a - b) \in D, & \text{wobei} \\ \tau &:= \sup\{t \in \mathbb{R} \mid b + t(a - b) \in \text{conv}(D)\} \geq 1 \end{aligned}$$

den Rand von $\text{conv}(D)$.

(3) Es ist dann, da c im bzgl. b sternförmigen Gebiet Ω liegt,

$$a \in [b, c] \subseteq \Omega.$$

1.4.7 Überblick: Besondere Gebiete

Man überlege und beachte die folgenden Implikationen für Gebiete Ω

$$U_\delta(a) \implies \text{konvex} \implies \text{sternförmig} \implies \text{einfach zusammenhängend.}$$

Der Begriff ganz rechts wird erst später geklärt. An keiner Stelle kann der Implikationspfeil umgekehrt werden.

1.5 Diskrete Teilmengen von Gebieten

1.5.1 Satz und Definition: Häufungsstelle

Es sei $A \subseteq \mathbb{C}$. Eine Stelle $a \in \mathbb{C}$ heißt *Häufungsstelle*¹ von A , wenn es zu jedem $\delta > 0$ ein $z \in A \cap \dot{U}_\delta(a)$ gibt.

Äquivalent dazu: Es existiert eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\begin{aligned} a_n &\in A \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \\ a_n &\neq a \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= a. \end{aligned}$$

Bildlich: Die Häufungsstellen von A lassen sich per Konvergenz durch Folgen aus $A \setminus \{a\}$ erreichen.

Häufungsstellen können zu A gehören oder nicht.

1.5.2 Beispiele

- 0 ist Häufungsstelle von $\frac{1}{\mathbb{N}}$.
- a ist Häufungsstelle von $U_\delta(a)$ und von $\dot{U}_\delta(a)$.
- Ist Ω offen, so ist jedes $a \in \bar{\Omega}$ (top. Abschlussoperator) Häufungsstelle von Ω .
- \mathbb{Z} hat keine Häufungsstelle.
- Jede reelle Zahl ist Häufungsstelle von \mathbb{Q} .

1.5.3 Vorsicht

Der Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht notwendig die Häufungsstelle der Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Das sieht man schon am Beispiel einer konstanten Folge.

1.5.4 Satz und Definition: Diskrete Teilmenge eines Gebiets

Für ein Gebiet Ω und eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- Man sagt: A ist *diskret* in Ω .
- Wenn A eine Häufungsstelle a hat, dann ist $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.
- Zu jedem $a \in \Omega$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass $\dot{U}_\delta(a) \cap A = \emptyset$.
- Ist eine Folge in A konvergent mit Grenzwert in Ω , so ist sie schließlich (= fast) konstant.

Beachte, dass diese Eigenschaft eine Relation zwischen zwei Mengen und nicht die Eigenschaft einer einzelnen Menge ist.

1.5.5 Beweis Fehlt!

¹anderswo: Häufungspunkt

1.5.6 Beispiele: Diskrete Teilmengen

- \mathbb{Z} ist diskret in \mathbb{C} .
- $\frac{1}{\mathbb{N}}$ ist nicht diskret in \mathbb{C} .
- $\frac{1}{\mathbb{N}}$ ist diskret in \mathbb{C}^\times .

1.5.7 Satz: Diskret, kompakt \Rightarrow endlich

Sind Ω ein Gebiet, N diskret in Ω und $K \subseteq \Omega$ kompakt, so ist $N \cap K$ endlich.

Begründung: Wäre $N \cap K$ eine unendliche Menge, so könnte man eine injektive Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $N \cap K$ angeben. Da K kompakt ist, hat diese Folge eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert a in $K \subseteq \Omega$. Dieses a wäre dann eine Häufungsstelle von N in Ω . Widerspruch.

2 Holomorphe Funktionen

2.1 Komplex-Differenzierbarkeit

2.1.1 Definition und Satz: Komplex-Differenzierbarkeit

Für eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ und eine komplexe Zahl $A \in \mathbb{C}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (A) Die Funktion f heißt *komplex-differenzierbar in a mit Ableitung A* .
 (B) Es ist

$$\lim_{z \xrightarrow{\bullet} a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = A.$$

(Der Punkt über dem Pfeil erinnert daran, dass die diesen Grenzwert realisierenden Folgen $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ nicht den Wert a annehmen dürfen.)

- (C) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $z \in U_\delta(a)$ gilt:

$$|f(z) - f(a) - A \cdot (z - a)| \leq \varepsilon \cdot |z - a|.$$

- (D) Die Funktion f ist als reell-reelle Funktion (reell total) differenzierbar in $(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) \in \mathbb{R}^2$ mit einer Ableitung

$$\begin{pmatrix} \partial_x(\operatorname{Re} f) & \partial_y(\operatorname{Re} f) \\ \partial_x(\operatorname{Im} f) & \partial_y(\operatorname{Im} f) \end{pmatrix} (a) \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

so, dass die partiellen Ableitungen die so genannten *Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned} \partial_y(\operatorname{Im} f)(a) &= \partial_x(\operatorname{Re} f)(a) && =: \operatorname{Re} A \\ \partial_x(\operatorname{Im} f)(a) &= -\partial_y(\operatorname{Re} f)(a) && =: \operatorname{Im} A \end{aligned}$$

erfüllen.

2.1.2 Beweis

Die Äquivalenz (B) \Leftrightarrow (C) ist die „gleiche“ wie die entsprechende in der reellen Analysis.

Die Äquivalenz (C) \Leftrightarrow (D) beruht darauf, dass man die Ungleichung in (C) von \mathbb{C} nach \mathbb{R}^2 umschreibt und dann beachtet, dass die komplexe Zahl $A \in \mathbb{C}$ gemäß Abschnitt 1.1.17 zu einer reellen 2×2 -Matrix der Form $\begin{pmatrix} \clubsuit & -\diamond \\ \diamond & \clubsuit \end{pmatrix}$ korrespondieren muss.

2.1.3 Nicht-Beispiele

- Die elementaren Funktionen der Komplex-Theorie

$$z \mapsto \bar{z}, \quad z \mapsto \operatorname{Re} z, \quad z \mapsto \operatorname{Im} z, \quad z \mapsto |z|$$

sind alle an keiner einzigen Stelle $a \in \mathbb{C}$ komplex-differenzierbar.

- Die Funktion

$$\begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto |z|^2 \end{cases}$$

ist komplex-differenzierbar in $a = 0$ mit Ableitung $= 0$, nicht aber komplex-differenzierbar in jedem anderen $a \in \mathbb{C}^\times$.

- Positiv-Beispiele gleich.

2.2 Holomorphie

2.2.1 Definition: Holomorphie

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $a \in \mathbb{C}$ und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion.

- (i) Die Funktion f heißt *holomorph in a* , wenn es eine Umgebung $U \subseteq \Omega$ von a gibt, so dass f in jedem $z \in U$ komplex-differenzierbar ist.
- (ii) Die Funktion f heißt *holomorph (auf Ω)*, wenn sie in jedem $z \in \Omega$ komplex-differenzierbar ist.

In diesem Fall heißt die aus den einzelnen Ableitungen gebildete Funktion

$$f' : \begin{cases} \Omega & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto A \end{cases} \quad (\text{Ableitung bei } z)$$

die Ableitungsfunktion — oder kurz: Ableitung — von f .

- (iii) Die Funktion f heißt *ganz*, wenn sie holomorph auf ganz $\Omega = \mathbb{C}$ ist.

2.2.2 Beispiele

- Die Konstant-Funktionen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto a$, sind holomorph auf \mathbb{C} mit $f' = 0$.
- Die Identität $\text{id}_{\mathbb{C}}$ ist holomorph auf \mathbb{C} mit $f' = 1$.
- Für festes $n \in \mathbb{N}$ ist die Potenzfunktion $z \mapsto z^n$ holomorph auf \mathbb{C} mit Ableitungsfunktion $z \mapsto nz^{n-1}$.
- Für festes $n \in \mathbb{N}$ sind die Funktionen

$$f : \begin{cases} \mathbb{C}^\times & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto z^{-n} \end{cases}$$

holomorph mit Ableitung $f'(z) = -n \cdot z^{-(n+1)}$.

- Eine Polynom-Funktion

$$z \mapsto p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \dots + p_1 z + p_0$$

ist holomorph auf \mathbb{C} mit Ableitungsfunktion

$$z \mapsto np_n z^{n-1} + (n-1)p_{n-1} z^{n-2} + \dots + p_1.$$

- Die Exponentialfunktion ist holomorph auf \mathbb{C} , da

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(a+h) - \exp(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \exp(a) \cdot \frac{\exp(h) - 1}{h} \\ &= \exp(a) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} h^{k-1} = \exp(a). \end{aligned}$$

- Es lässt sich dann leicht begründen, dass die Funktionen \cos und \sin auf \mathbb{C} holomorph sind mit

$$\begin{aligned}\cos'(z) &= -\sin(z) \\ \sin'(z) &= \cos(z).\end{aligned}$$

Angesichts der bisherigen Beispiele und der Nicht-Beispiele in Abschnitt 2.1.3 stellt sich die Frage, ob es denn weitere holomorphe Funktionen gibt. JA, siehe nächstes Kapitel 3.

2.2.3 Satz: Verknüpfung holomorpher Funktionen

Es seien $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen.

(i) f ist auch stetig.

(ii) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ist auch die Linearkombination $\alpha f + \beta g$ holomorph in a und es gilt:

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'.$$

(iii) Das Produkt der beiden Funktionen ist holomorph und es gilt:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

(iv) Ist $g(a) \neq 0$ für $a \in \Omega$, so ist die Funktion $\frac{f}{g}$ in einer Umgebung U von a definiert und holomorph. Dabei gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g^2(z)} \quad \text{für alle } z \in U.$$

Es seien $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen mit $f(\Omega) \subseteq \tilde{\Omega}$.

(v) Sind f und g holomorph, so ist auch die Funktion $g \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und es gilt:

$$(g \circ f)'(z) = g'(w) \cdot f'(z) \quad \text{für alle } z \in U, w = f(z).$$

2.2.4 Beweis

Die Behauptungen ergeben sich alle sofort per Analogie oder Übertragung aus den entsprechenden Sätzen für die Differentiation reeller Funktionen.

2.2.5 Satz: Lokal bijektive holomorphe Funktionen

Es sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f'(a) \neq 0$, $a \in \Omega$.

Dann ist f bei a *lokal bijektiv*, das bedeutet genauer:

Es existieren eine offene Umgebung U von a und eine offene Umgebung \tilde{U} von $b = f(a)$ so, dass die eingeschränkte Funktion $f|_U : U \rightarrow \tilde{U}$ bijektiv ist.

Die Umkehrfunktion $g : \tilde{U} \rightarrow U$ ist holomorph. Für $z \in U$ und $w \in W$ gilt

$$f'(z) \cdot g'(w) = 1 \quad \text{für alle } z \in U, w = f(z).$$

2.2.6 Beweis

Betrachtet man f als reelle Funktion $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, so ist sie total differenzierbar mit invertierbarer Ableitungsmatrix $f'(a) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Aufgrund des „Satzes über die Umkehrfunktion“ existieren die Umgebungen U von a und \tilde{U} von b sowie die Umkehrfunktion $g : \tilde{U} \rightarrow U$. Diese Umkehrfunktion ist wieder total differenzierbar mit Ableitungsmatrix g' , die die Gleichung

$$f'(z) \cdot g'(w) = 1, \quad \text{für alle } z \in U, w = f(z)$$

in $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ erfüllt. Aufgrund der Holomorphie von f ist $f'(z)$ eine zu einer komplexen Zahl korrespondierende 2×2 -Matrix, dies gilt dann auch für die inverse Matrix (\sim komplexe Zahl) $g'(w)$. Also ist g holomorph.

2.2.7 Beispiel

Vgl. Abschnitt 1.3.3. Die Funktion e_φ ist auf ihrer Definitionsmenge $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z \in]\varphi, \varphi + 2\pi[\}$ bijektiv und holomorph mit $e_\varphi(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$.

Demzufolge ist der Zweig des komplexen Logarithmus ℓ_φ holomorph auf $\mathbb{C}^\times \setminus (e^{i\varphi} \cdot \mathbb{R}^+)$.

Die Ableitung ergibt sich wegen

$$e'_\varphi(z) \cdot \ell'_\varphi(w) = 1$$

zu

$$\ell'_\varphi(w) = \frac{1}{e'_\varphi(z)} = \frac{1}{e'_\varphi(e_\varphi^{-1}(w))} = \frac{1}{e_\varphi(e_\varphi^{-1}(w))} = \frac{1}{w}, \quad w \in \mathbb{C}^\times \setminus (e^{i\varphi} \cdot \mathbb{R}^+).$$

3 Analytische Funktionen

3.1 Einstieg

3.1.1 Definition: Analytische Funktion

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $a \in \Omega$ und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion.

- (i) Die Funktion f heißt *analytisch in a* , wenn es ein $\delta > 0$ gibt mit $U_\delta(a) \subseteq \Omega$ und eine Potenzreihe mit Konvergenzradius (vgl. nächstes Unterkapitel 3.2) $\rho \geq \delta$ so, dass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (z - a)^k \quad \text{für alle } z \in U_\delta(a).$$

- (ii) Die Funktion heißt *analytisch auf Ω* , wenn sie analytisch in jedem $a \in \Omega$ ist.

3.1.2 Beispiele

- (1) Jede Polynomfunktion

$$z \mapsto p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots + p_n z^n$$

ist analytisch auf \mathbb{C} . Ist nämlich z^k eine Monomfunktion, so gilt für ein festes $a \in \mathbb{C}$

$$z^k = (z - a + a)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} (z - a)^j.$$

- (2) Die Exponentialfunktion

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

ist wegen

$$\exp(z) = \exp(z - a + a) = \exp(a) \cdot \exp(z - a) = \exp(a) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (z - a)^k$$

analytisch auf \mathbb{C} .

- (3) Es sind dann auch Kosinus- und Sinusfunktion

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \\ \sin(z) &= \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \end{aligned}$$

analytisch auf \mathbb{C} .

- (4) Die Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \frac{1}{1-z} \end{cases}$$

ist aufgrund der geometrische-Reihe-Identität

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad |z| < 1,$$

analytisch bei 0. Das nächste Beispiel (mit $w = 1$) zeigt, dass sie analytisch auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ ist.

3.1.3 Beispiel

Für festes $w \in \mathbb{C}$ ist die Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{w\} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \frac{1}{z-w} \end{cases}$$

analytisch. Es gilt nämlich für $z \in U_{|w-a|}(a)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-w} &= \frac{1}{(z-a)-(w-a)} = -\frac{1}{w-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} \\ &= -\frac{1}{w-a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{(w-a)^{k+1}} (z-a)^k. \end{aligned}$$

3.1.4 Einige Fragen

Es stellen sich einige Fragen zur Theorie der analytischen Funktionen.

- Sind analytische Funktionen stetig?
- Sind analytische Funktionen holomorph?
- Besitzen analytische Funktionen Stammfunktionen?
- Sind Linearkombinationen und Produkte von analytischen Funktionen wieder analytisch?
- Sind Kehrwerte von analytischen Funktionen ohne Nullstelle wieder analytisch?
- Sind Nacheinanderausführungen von analytischen Funktionen wieder analytisch?
- Ist eine bei $a \in \Omega$ analytische Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ auch auf der zugehörigen offenen Umgebung $U_\delta(a)$ analytisch?
- Sind Umkehrfunktionen von bijektiven analytischen Funktionen wieder analytisch?

Diese Fragen können innerhalb der „Potenzreihentheorie“ mit mehr oder weniger Aufwand geklärt werden.

In den Unterkapiteln 3.2 – 3.3 wollen wir zunächst nur zeigen, dass analytische Funktionen holomorph sind. Die Fragen (d) – (h) werden wir später mit Hilfe weiter fortgeschrittener Funktionentheorie (positiv) beantworten.

3.2 Konvergente Potenzreihen und Konvergenzradius

Diese Kapitel stellt im wesentlichen eine Wiederholung aus der (reellen) Analysis dar.

3.2.1 Satz: Konvergenz

- (i) Jede Potenzreihe konvergiert an ihrer Entwicklungsstelle.
- (ii) Konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ für ein festes $w \in \mathbb{C}$, so konvergiert sie auch (absolut) für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |w|$.
- (iii) Konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} p_k (z - a)^k$ für ein festes $w \in \mathbb{C}$, so konvergiert sie auch (absolut) für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - a| < |w - a|$.

3.2.2 Beweis

- (i) muss nicht bewiesen werden.
- (ii) O.B.d.A. ist $w \neq 0$. Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} p_k w^k$ konvergiert, ist $(p_k w^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge und daher beschränkt:

$$|p_k w^k| \leq M \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Für alle z mit $|z| < |w|$ gilt dann

$$|p_k z^k| = |p_k w^k| \cdot \left|\frac{z}{w}\right|^k \leq M \cdot q^k, \quad \text{wobei } q := \left|\frac{z}{w}\right| < 1.$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} M \cdot q^k$ ist eine geometrische (absolut konvergente) Reihe und stellt daher eine Majorante für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ dar.

Für den Beweis von (iii) muss man in (ii) nur z durch $z - a$ und w durch $w - a$ ersetzen.

3.2.3 Bemerkung: Kreisscheibe

Aus dem Satz folgt unmittelbar, dass die Menge der $z \in \mathbb{C}$, für die eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} p_k (z - a)^k$ konvergiert, entweder ...

- nur a enthält oder
- eine in a zentrierte Kreisscheibe oder
- die gesamte komplexe Ebene

ist. Der Satz macht aber keinerlei Aussage darüber, an welchen Stellen der begrenzenden Kreislinie (im zweiten Fall) die Potenzreihe konvergiert.

3.2.4 Definitionen

- (1) Für eine gegebene Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} p_k (z - a)^k$ heißt die Menge

$$\mathcal{K} := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \sum_{k=0}^{\infty} p_k (z - a)^k \text{ konvergiert} \right\}$$

die *Konvergenzkreisscheibe (der Potenzreihe)*.

- (2) Die Zahl $\varrho \in [0, \infty]$, definiert durch

$$\sup \left\{ |z - a| \mid z \in \mathcal{K} \right\}$$

heißt *Konvergenzradius (der Potenzreihe)*.

3.2.5 Beispiele

(1) Polynome, die Exponentialfunktion und die beiden Funktionen \sin und \cos haben den Konvergenzradius $\rho = +\infty$.

(2) Ist r eine beliebige positive Zahl, so konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{r}\right)^k$$

genau dann, wenn

$$\left|\frac{z}{r}\right| < 1 \iff |z| < r.$$

Der Konvergenzradius ist also $\rho = r$.

(3) Wir betrachten die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} z^k$$

Sie wird für $|z| < 1$ von der geometrischen Reihe majorisiert. Wir wissen, dass sie für $z = 1$ divergiert (harmonische Reihe). Es ist also $\rho = 1$.

Bei $z = -1$ konvergiert sie (Leibniz-Kriterium).

(4) Die formale Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^k z^k$$

konvergiert nur für $z = 0$. Für jedes $z \neq 0$ gibt es nämlich ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $N \cdot |z| \geq 2$. Dann ist für $k \geq N$

$$|k^k z^k| = |k \cdot z|^k \geq |N \cdot z|^k \geq 2^k.$$

Also ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k$ eine „divergente Minorante“. Der Konvergenzradius ist $\rho = 0$.

3.2.6 Satz: Gleichmäßige Konvergenz einer Potenzreihe

Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} p_k (z - a)^k$ eine Potenzreihe mit Entwicklungsstelle a und Konvergenzradius $\rho > 0$. Ist $r < \rho$, so konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig absolut auf $B_r(a)$.

3.2.7 Beweis

Für alle $z \in B_r(a)$ gilt

$$|p_k (z - a)^k| \leq |p_k r^k|.$$

Damit stellt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |p_k r^k|$ eine gleichmäßige konvergente Majorante für die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |p_k (z - a)^k|$$

dar. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ gleichmäßig auf $B_r(a)$.

3.3 Analytische Funktionen sind holomorph

3.3.1 Vorbereitung: Gleicher Konvergenzradius

Die beiden Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k (z - a)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k p_k (z - a)^k$$

haben den gleichen Konvergenzradius ϱ .

3.3.2 Beweis

(0) Es seien ϱ_ℓ und ϱ_r die Konvergenzradien der linken bzw. rechten Potenzreihe. Es genügt, den Fall $a = 0$ zu betrachten.

(1) Für ein beliebiges z ist

$$|p_k z^k| \leq |k p_k z^k|,$$

so dass aus der absoluten Konvergenz der rechten Reihe mit dem Majorantenkriterium auf die Konvergenz der linken Reihe geschlossen werden kann. Also ist

$$\varrho_r \leq \varrho_\ell.$$

(2) Wir bemerken zunächst, dass für festes $n \in \mathbb{N}_0$ und $b \in]0, 1[$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \cdot b^x = |\ln b|^{-n} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} (|\ln b| x)^n e^{-x |\ln b|} = |\ln b|^{-n} \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} y^n e^{-y} = 0.$$

(3) Es sei ein $w \in \dot{U}_{\varrho_\ell}$ vorgegeben. Es existiert ein r mit $|w| < r < \varrho_\ell$, so dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} p_k r^k$ absolut konvergiert. Gemäß (2) mit $n = 1$ ist die Folge

$$k \cdot \left| \frac{w}{r} \right|^k$$

eine Nullfolge, also durch M beschränkt. Dann gilt weiter

$$\left| k p_k w^k \right| = \left| k \cdot \left(\frac{w}{r} \right)^k \cdot p_k r^k \right| \leq M \left| p_k r^k \right|.$$

Damit haben wir eine absolut konvergente Majorante für die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} k p_k w^k$$

gefunden, sie konvergiert also absolut.

(4) Insgesamt haben wir bewiesen, dass

$$\varrho_r \geq |w| \quad \text{für alle } w \text{ mit } |w| < \varrho_\ell$$

gilt. Das heißt aber gerade $\varrho_r \geq \varrho_\ell$.

3.3.3 Satz: Holomorphie der Grenzfunktion einer Potenzreihe

Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(z-a)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\varrho > 0$. Wir definieren die Grenzfunktion

$$f : \begin{cases} U_{\varrho}(a) & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} p_k(z-a)^k. \end{cases}$$

Dann ist f auf $U_{\varrho}(a)$ holomorph, sogar unendlich oft komplex-differenzierbar. Dabei gilt

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} k p_k(z-a)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) p_{k+1}(z-a)^k \\ f^{(n)}(z) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} p_k(z-a)^{k-n}. \end{aligned}$$

(„Gliederweise Ableitung“). Die Potenzreihen haben den Konvergenzradius ϱ .

3.3.4 Beweis

Es sei $w \in U_{\varrho}(a)$ fixiert. Wähle ein r mit $|w-a| < r < \varrho$.

Die Funktionen-Partialsommenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$f_n(z) := \sum_{k=0}^n p_k(z-a)^k$$

konvergiert gleichmäßig gegen die Grenzfunktion f auf $B_r(a)$. Weiter konvergiert auch die Folge $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Ableitungsfunktionen

$$f'_n(z) := \sum_{k=1}^n k p_k(z-a)^{k-1}$$

gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion g auf $B_r(a)$.

Damit sind die Aussagen aus der reellen Analysis über Eigenschaften einer Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge mit gleichmäßig konvergenter Ableitungsfunktionenfolge in die komplexe Analysis übertragbar. Die Grenzfunktion f ist komplex-differenzierbar an der Stelle w mit $g(w)$ als Ableitung.

Die Aussagen über die höheren Ableitungen folgen daraus mit Induktion.

3.3.5 Beispiele

(1) Es ist — ganz ausführlich

$$\begin{aligned} \exp'(z) &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right]' = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{z^k}{k!} \right]' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k z^{k-1}}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z). \end{aligned}$$

und demzufolge auch

$$\cos'(z) = -\sin(z), \quad \sin'(z) = \cos(z).$$

(2) Die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (z-1)^k$$

stellt auf $U_1(1)$ eine holomorphe Funktion dar. Ihre Ableitung ist

$$\begin{aligned} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (z-1)^k \right]' &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (z-1)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (1-z)^{k-1} \\ &= \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Wir haben also erneut eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ gefunden — diesmal auf $U_1(1)$.

Wir wissen bereits aus Abschnitt 2.2.7, dass auch die Zweige des Logarithmus ℓ_φ Stammfunktionen von $\frac{1}{z}$ sind — auf $\mathbb{C}^\times \setminus (\mathbb{R}^+ e^{i\varphi})$.

3.3.6 Folgerung: Analytische Funktionen sind holomorph

Es sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch bei $a \in \Omega$.

- (i) Die Funktion ist holomorph bei a .
- (ii) Zusatz: Die Funktion ist sogar „unendlich-holomorph“. Die Koeffizienten der zugehörigen Potenzreihenentwicklung sind eindeutig bestimmt durch

$$f^{(n)}(a) = n! p_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

3.3.7 Beweis

Setze einfach $z = a$ in der Formel

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} p_k (z-a)^{k-n}.$$

aus Satz 3.3.3.

3.3.8 Definition und Satz: Ordnung einer Nullstelle

Es seien $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, $f \not\equiv 0$, $a \in \Omega$ und $m \in \mathbb{N}_0$.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (A) a heißt eine *Nullstelle m -ter Ordnung* (von f).
- (B) Es ist

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0, \quad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

- (C) Die Funktion f hat an der Stelle a die Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} p_k (z-a)^k, \quad z \in U_\rho(a), \quad p_m \neq 0$$

- (D) Es existieren ein $\delta > 0$ und eine analytische Funktion $g : U_\delta(a) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ so, dass

$$f(z) = (z-a)^m \cdot g(z), \quad z \in U_\delta(a).$$

3.3.9 Das Ordnungs-Funktional

Man führt in diesem Zusammenhang auch das Ordnungs-Funktional

$$\text{ord}(f, a) = m$$

ein. Beachte die etwas ungewöhnliche, nicht-so-wichtige, aber stimmige Äquivalenz

$$f(a) \neq 0 \iff \text{ord}(f, a) = 0.$$

Es wird hier auf die Angabe einer Definitionsmenge verzichtet. Man könnte hier auf den Begriff der „Garbe von Funktionskeimen“ verweisen, einen vor etwa 70 Jahren von Jean Leray eingeführten, aus der gegenwärtigen Mathematik nicht wegzudenkenden Begriff.

3.4 Der Identitätssatz

3.4.1 Identitätssatz für analytische Funktionen

Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analytische Funktionen.

(i) Die Nullstellenmenge von f

$$N_f = \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$$

ist entweder diskret in Ω oder gleich Ω .

(ii) Die Koinzidenzmenge von f und g

$$K_{f,g} = \{z \in \Omega \mid f(z) = g(z)\}$$

ist entweder diskret in Ω oder gleich Ω .

3.4.2 Beweis

(0) Er ist nur für die Aussage (i) nötig.

Zur Vereinfachung der Sprech- und Schreibweisen:

Sind $A \subseteq \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$, so nennen wir eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine a -Folge in A , wenn

$$\begin{aligned} a_n &\in A \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \\ a_n &\neq a \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= a. \end{aligned}$$

(1) Es sei $N = N_f$ abgekürzt und

$$N_{\text{Hf}} := \{z \in \Omega \mid z \text{ ist Häufungsstelle von } N\}.$$

(2) Wir zeigen, dass N_{Hf} offen ist. O.B.d.A. ist $N_{\text{Hf}} \neq \emptyset$. Sei dann $a \in N_{\text{Hf}}$ beliebig und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine a -Folge in N , weiter

$$f(z) = p_0 + p_1(z-a) + p_2(z-a)^2 + p_3(z-a)^3 + \dots$$

die Potenzreihenentwicklung von f an der Stelle a mit Konvergenzradius ϱ .

Wir zeigen per Induktion, dass alle $p_k = 0$.

(2a) Da f stetig ist, gilt

$$p_0 = f(a) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0.$$

(2b) Sind $p_0 = \dots = p_k = 0$, so ist die Funktion

$$z \mapsto \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} = p_{k+1} + p_{k+2}(z-a) + p_{k+3}(z-a)^2 + \dots$$

analytisch an der Stelle a . Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $a_n \in U_\varrho(a)$ für alle $n \geq N$ und

$$0 = \frac{f(a_n)}{(a_n-a)^{k+1}} = p_{k+1} + p_{k+2}(a_n-a) + p_{k+3}(a_n-a)^2 + \dots$$

Der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ liefert $p_{k+1} = 0$.

(2c) Da die Potenzreihe identisch Null ist, gibt es eine offene Umgebung U von a , so dass $f = 0$ auf U . Damit gilt aber $U \subseteq N_{\text{Hf}}$ und N_{Hf} ist offen.

(3) Wir zeigen, dass $\Omega \setminus N_{\text{Hf}}$ offen ist. O.B.d.A. ist $\Omega \setminus N_{\text{Hf}} \neq \emptyset$. Es sei $a \in \Omega \setminus N_{\text{Hf}}$.

(3a) Angenommen, es gibt eine a -Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in N_{Hf} .

Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine a_n -Folge $(a_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ in $N \setminus \{a\}$.

Zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und dann ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|a_{n,k} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

insgesamt also

$$|a_{n,k} - a| \leq |a_{n,k} - a_n| + |a_n - a| < \varepsilon.$$

Das aber bedeutet, dass a selbst Häufungsstelle von N ist, was einen Widerspruch zu $a \in \Omega \setminus N_{\text{Hf}}$ darstellt.

(3b) Es gibt also keine a -Folge in N_{Hf} . Damit gibt es aber ein $\delta > 0$ mit $a \subseteq U_\delta(a) \subseteq \Omega \setminus N_{\text{Hf}}$, also ist $\Omega \setminus N_{\text{Hf}}$ offen.

(4) Da Ω ein Gebiet ist, muss gemäß Definition 1.4.1

$$\Omega \subseteq N_{\text{Hf}} \quad \text{oder} \quad \Omega \subseteq \Omega \setminus N_{\text{Hf}}$$

gelten.

(5) Im ersten Fall enthält Ω nur Häufungsstellen von N und es folgt wegen der Stetigkeit von f , dass $f = 0$. Also $N = \Omega$.

(6) Im zweiten Fall enthält Ω keine einzige Häufungsstelle von N , das bedeutet, dass N diskret in Ω ist.

4 Integration mittels Wegintegralen

4.1 Kurven

4.1.1 Definition: Kurve

Es seien $[r, s]$ ein nicht-leeres kompaktes reelles Intervall und $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet.

Eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [r, s] \rightarrow \Omega$ heißt \mathcal{C}^1 -Kurve in Ω . An den Stellen r und s bedeutet Differenzierbarkeit die rechtsseitige bzw. linksseitige Differenzierbarkeit.

Wegen ihrer besonderen Bedeutung bezeichnen wir Anfangs- und Endpunkt einer \mathcal{C}^1 -Kurve mit

$$\gamma^- := \gamma(r), \quad \gamma^+ := \gamma(s).$$

Die Bildmenge einer Kurve heißt *Spur*, sie wird bezeichnet mit

$$\text{spur } \gamma := \gamma([r, s]).$$

4.1.2 Beispiele

(a) Sind $a, b \in \mathbb{C}$, so heißt die Kurve

$$\sigma(a, b) : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto a + t(b - a) \end{cases}$$

die a und b verbindende Strecke. Es gilt $\text{spur}(\sigma(a, b)) = [a, b]$.

(b) Für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ heißt die Kurve

$$\kappa_r(a) : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto a + r \cdot e^{2\pi i t} \end{cases}$$

der (bzgl. der geordneten Basis $(1, i)$ von $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ positiv orientierte) Kreis um a mit Radius r .

(c) Für $a \in \mathbb{C}$ und $r, \tilde{r} > 0$ heißt die Kurve

$$\epsilon_{r, \tilde{r}}(a) : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto a + r \cdot \cos(2\pi t) + i\tilde{r} \sin(2\pi t) \end{cases}$$

Ellipse um a mit Halbachsen r und \tilde{r} .

4.1.3 Äquivalenz von Kurven

Zwei \mathcal{C}^1 -Kurven $\gamma : [r, s] \rightarrow \Omega$ und $\tilde{\gamma} : [\tilde{r}, \tilde{s}] \rightarrow \Omega$ heißen *äquivalent*, wenn es eine stetig differenzierbare streng monoton steigende Abbildung $\vartheta : [\tilde{r}, \tilde{s}] \rightarrow [r, s]$ gibt, so dass

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \vartheta.$$

Äquivalente \mathcal{C}^1 -Kurven haben die gleiche Spur bei gleichem Anfangs- und Endpunkt.

4.1.4 Übung

Es seien $\gamma : [r, s] \rightarrow \Omega$ eine \mathcal{C}^1 -Kurve und $[\tilde{r}, \tilde{s}]$ ein weiteres kompaktes Intervall. Finde eine zu γ äquivalente \mathcal{C}^1 -Kurve $\tilde{\gamma} : [\tilde{r}, \tilde{s}] \rightarrow \Omega$.

4.1.5 Bemerkung

\mathcal{C}^1 -Kurven mit gleicher Spur und gleichem Anfangs- und Endpunkt müssen nicht notwendig äquivalent sein.

Die beiden Kurven

$$\gamma : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto e^{2\pi it}, \end{cases} \quad \tilde{\gamma} : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto e^{4\pi it} \end{cases}$$

haben den Einheitskreis als Spur, die Zahl $1 \in \mathbb{C}$ als Anfangs- und Endpunkt, sie sind aber nicht äquivalent.

4.1.6 Entgegengesetzte Orientierung

Es sei $\gamma : [r, s] \rightarrow \Omega$ eine \mathcal{C}^1 -Kurve. Die \mathcal{C}^1 -Kurve

$$\gamma^{\text{eo}} : \begin{cases} [r, s] & \rightarrow \Omega \\ t & \mapsto \gamma(r + s - t) \end{cases}$$

heißt die zu γ *entgegengesetzt orientierte Kurve*.

4.2 Das Kurvenintegral

4.2.1 Definition: Kurvenintegral

Es sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.

(i) Ist $\gamma : [r, s] \rightarrow \Omega$ eine \mathcal{C}^1 -Kurve, so heißt die komplexe Zahl

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &:= \int_{\gamma} f(z) dz := \int_r^s f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_r^s \operatorname{Re}[f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)] dt + i \int_r^s \operatorname{Im}[f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)] dt \end{aligned}$$

das *Kurvenintegral* (von f entlang γ).

Alternativzugang: Über Riemannsche Summen.

(ii) Die reelle Zahl

$$L(\gamma) := \int_r^s |\gamma'(t)| dt \geq 0$$

heißt die *Länge* der \mathcal{C}^1 -Kurve.

4.2.2 Satz

(i) Sind die beiden \mathcal{C}^1 -Kurven γ und $\tilde{\gamma}$ äquivalent zueinander, so gilt

$$\int_{\tilde{\gamma}} f = \int_{\gamma} f.$$

(ii) Ist γ eine \mathcal{C}^1 -Kurve, so gilt

$$\int_{\gamma^{\text{eo}}} f = - \int_{\gamma} f.$$

4.2.3 Beweis

Mit der Substitutionsregel der ein-dimensionalen Integration rechnen wir jeweils nach.

(i)

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} f &= \int_{\tilde{r}}^{\tilde{s}} f(\tilde{\gamma}(\tilde{t})) \cdot \tilde{\gamma}'(\tilde{t}) d\tilde{t} = \int_{\tilde{r}}^{\tilde{s}} f(\gamma(\tau(\tilde{t}))) \cdot \gamma'(\vartheta(\tilde{t})) \cdot \vartheta'(\tilde{t}) d\tilde{t} \\ &\stackrel{t=\vartheta(\tilde{t})}{=} \int_r^s f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} f. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^{\text{eo}}} f &= \int_r^s f(\gamma^{\text{eo}}(\tilde{t})) \cdot \gamma^{\text{eo}'}(\tilde{t}) d\tilde{t} = \int_r^s f(\gamma(r+s-\tilde{t})) \cdot \gamma'(r+s-\tilde{t}) \cdot (-1) d\tilde{t} \\ &\stackrel{\text{Sub}}{=} \int_s^r f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = - \int_r^s f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = - \int_{\gamma} f. \end{aligned}$$

4.2.4 Beispiele

In den folgenden Beispielen werden verschiedene Kurven γ betrachtet.

Es sei jeweils Ω ein Gebiet, so dass $\text{spur } \gamma \subseteq \Omega$, und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.

(a) Sind $a, b \in \mathbb{C}$, so gilt

$$\int_{\sigma(a,b)} f = \int_0^1 f(a + t(b-a)) \cdot (b-a) dt = (b-a) \cdot \int_0^1 f(a + t(b-a)) dt.$$

Die Länge dieser Kurve ist $L(\sigma(a,b)) = |b-a|$.

(b) Sind $a, b \in \mathbb{R}$, so gilt — mit einer Substitution $\tau = a + t(b-a)$ —

$$\int_{\sigma(a,b)} f = \int_0^1 f(a + t(b-a)) \cdot (b-a) dt \stackrel{\text{Sub}}{=} \int_a^b f(\tau) d\tau.$$

Es handelt sich also um das aus der Schule bekannte orientierte Integral über ein kompaktes reelles Integral.

(c) Es gilt

$$\int_{\kappa_r(a)} f = \int_0^1 f(a + re^{2\pi it}) \cdot 2\pi ire^{2\pi it} dt = 2\pi ir \cdot \int_0^1 f(a + re^{2\pi it}) \cdot e^{2\pi it} dt$$

Die Länge dieser Kurve ist

$$L(\kappa_r(a)) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = \int_0^1 |2\pi ire^{2\pi it}| dt = 2\pi r.$$

(d) Es gilt für $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \int_{\kappa_r(0)} z^n dz &= \int_0^1 r^n e^{2\pi int} \cdot r \cdot 2\pi i e^{2\pi it} dt = \int_0^1 2\pi i \cdot r^{n+1} \cdot e^{2\pi i(n+1)t} dt \\ &= \begin{cases} \int_0^1 2\pi i dt = 2\pi i, & \text{falls } n = -1, \\ \left[\frac{r^{n+1}}{n+1} \cdot e^{2\pi i(n+1)t} \right]_{t=0}^{t=1} = 0, & \text{falls } n \neq -1. \end{cases} \end{aligned}$$

(e) Es gilt für $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{\kappa_r(a)} (z-a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & \text{falls } n = -1, \\ 0, & \text{falls } n \neq -1. \end{cases}$$

4.2.5 Umfang der Ellipse \ominus

Wir stellen eine Formel für die Länge eines Viertelbogens ϵ der Ellipse $\epsilon_{r,s}(0)$ auf. Wir parametrisieren durch

$$\epsilon : \begin{cases} [0, \frac{\pi}{2}] & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto r \cdot \cos t + is \sin t \end{cases}$$

und erhalten — mit $\varepsilon^2 := 1 - \frac{s^2}{r^2}$

$$\begin{aligned} L(\epsilon) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\epsilon'(t)| dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 \cdot \sin^2 t + s^2 \cos^2 t} dt \\ &= r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t + \frac{s^2}{r^2} \cos^2 t} dt \\ &\quad (\pm \cos^2 t) \\ &= r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt \\ &\quad (\text{Substitution } \tau = \frac{\pi}{2} - t) \\ &= r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \tau} d\tau \\ &\quad (\text{Substitution } x = \sin \tau) \\ &= r \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx. \end{aligned}$$

Die Integrale in den letzten beiden Zeilen heißen *elliptische Integrale* (der zweiten Art). Es können keine elementaren Stammfunktionen angegeben werden.

Als Funktionen der oberen Integrationsgrenze sind sie streng monoton steigend, besitzen daher streng monoton steigende Umkehrfunktionen, die dann auch *elliptische Funktionen* heißen. Solche elliptischen Funktionen haben noch viele weitere interessante analytische Eigenschaften, sie vermitteln eine tiefere Beziehung zwischen bestimmten komplexen Mannigfaltigkeiten (komplexen Tori) und so genannten *elliptischen Kurven*. Diese wiederum sind eigentlich schon Thema in der Zahlentheorie und analytisch-algebraischen Geometrie. Die Weiterführung dieser Überlegung ist Kontext für den Beweis des Modularitätssatzes (und damit Fermats letztem Satz) durch Andrew Wiles im Jahr 1994.

4.2.6 Satz: Eigenschaften des Kurvenintegrals

Es sei Ω ein Gebiet und γ eine \mathcal{C}^1 -Kurve in Ω .

(i) Linearität. Für zwei stetige Funktionen $f, \tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ und komplexe Zahlen a, \tilde{a} ist

$$\int_{\gamma} (af + \tilde{a}\tilde{f}) = a \int_{\gamma} f + \tilde{a} \int_{\gamma} \tilde{f}.$$

(ii) Abschätzung. Für eine stetige Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq \max_{z \in \text{spur } \gamma} \{|f(z)|\} \cdot L(\gamma).$$

(Eine Abschätzung der Form $|\int_{\gamma} f| \leq \int_{\gamma} |f|$ ist absurd, da auf der rechten Seite i.a. gar keine reelle Zahl steht.)

(iii) Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen, die auf spur γ gleichmäßig konvergiert, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\gamma} f_n \right) = \int_{\gamma} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right).$$

4.2.7 Beweis

(ii) Ist $g : [r, s] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so existiert ein $\varphi \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\begin{aligned} \left| \int_r^s g(t) dt \right| &= e^{-i\varphi} \cdot \int_r^s g(t) dt = \int_r^s e^{-i\varphi} \cdot g(t) dt \\ &= \int_r^s \text{Re}[e^{-i\varphi} \cdot g(t)] dt + i \int_r^s \text{Im}[e^{-i\varphi} \cdot g(t)] dt \\ &\quad \text{(Die Zahl ist reell!)} \\ &= \int_r^s \text{Re}[e^{-i\varphi} \cdot g(t)] dt \leq \int_r^s |e^{-i\varphi} \cdot g(t)| dt = \int_r^s |g(t)| dt. \end{aligned}$$

Für die Funktion f gilt dann

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f \right| &= \left| \int_r^s f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_r^s |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \max_{t \in [r, s]} \{|f(\gamma(t))|\} \cdot \int_r^s |\gamma'(t)| dt = \max_{z \in \text{spur } \gamma} \{|f(z)|\} \cdot L(\gamma). \end{aligned}$$

(iii) Es ist

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\gamma} f_n \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 f_n(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \left(\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)) dt \right) = \int_{\gamma} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right). \end{aligned}$$

In (*) haben wir benutzt, dass bei der Reell-Integration einer gleichmäßig konvergenten Folge von stetigen Funktionen Integration und Grenzwertbildung vertauscht werden können. Da das Integrationsintervall kompakt ist, impliziert die gleichmäßige Konvergenz von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge $((f_n \circ \gamma) \cdot \gamma')_{n \in \mathbb{N}}$.

4.3 Wege

4.3.1 Definition: Weg

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Weiter seien

- $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ endlich viele (stetig differenzierbare) Kurven in Ω und
- $n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$ genau so viele ganze Zahlen.

Mit diesen Daten bilden wir die „formale ganzzahlige Linearkombination“

$$n_1 \cdot \gamma_1 + n_2 \cdot \gamma_2 + \dots + n_m \cdot \gamma_m$$

und nennen diese einen *Weg (in Ω)*.

Es ist offensichtlich, dass man solche Linearkombinationen addieren und subtrahieren kann, dass sie also eine abelsche Gruppe bilden.

Es wird zusätzlich vereinbart, dass beim „Rechnen“ mit solchen Linearkombinationen gilt:

$$\begin{aligned} \gamma^{\circ\circ} &= -\gamma \\ \gamma &= \tilde{\gamma}, \quad \text{falls } \gamma \text{ und } \tilde{\gamma} \text{ äquivalent zueinander.} \end{aligned} \quad (*)$$

Wir setzen $\text{spur } \omega = \text{spur } \gamma_1 \cup \dots \cup \text{spur } \gamma_m$.

4.3.2 Anschauliche Deutung: Weg

Man stelle sich einfach vor, dass die Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ jeweils n_1 -fach, \dots , n_m -fach durchlaufen werden. Es ist dabei nicht wichtig, in welcher Reihenfolge dies geschieht oder dass Anfangspunkte und Endpunkte übereinstimmen.

4.3.3 Mathematisch klare Definition: Weg

Es sei $\Omega \in \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Abbildung

$$\omega : \left\{ \mathcal{C}^1\text{-Kurven in } \Omega \right\} \rightarrow \mathbb{Z},$$

die nur bei endlich vielen \mathcal{C}^1 -Kurven ungleich Null ist, heißt ein *Weg*.

Eine solche Abbildung kann dann als formale \mathbb{Z} -Linear-Kombination

$$\omega = n_1 \cdot \gamma_1 + n_2 \cdot \gamma_2 + \dots + n_m \cdot \gamma_m$$

geschrieben werden: Die γ_j sind die \mathcal{C}^1 -Kurven, an denen die Abbildung ω ungleich Null ist, die Zahlen n_j sind die durch ω zugeordneten Bilder von γ_j .

Die Menge $\Gamma(\Omega)$ der Wege in Ω trägt die Struktur einer abelschen Gruppe. Es ist die „frei erzeugte“ abelsche Gruppe über der Menge der \mathcal{C}^1 -Wege.

In dieser Gruppe betrachten wir die Untergruppe, die von allen Elementen der Form

$$\begin{aligned} \gamma + \gamma^{\circ\circ}, \\ \gamma - \tilde{\gamma}, \quad \text{wobei } \gamma \text{ und } \tilde{\gamma} \text{ äquivalent zueinander} \end{aligned}$$

erzeugt wird. Gehen wir zur Faktorgruppe nach dieser Untergruppe über, so entspricht dies genau den „Identifizierungen“ in (*).

4.3.4 Beispiel: Stückweise stetig differenzierbarer Weg

Es seien $[r, s]$ ein kompaktes reelles Intervall und $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen.

Eine stetige Abbildung $\omega : [r, s] \rightarrow \Omega$ heißt ein *stückweise stetig differenzierbarer Weg*, wenn es endlich viele Stellen

$$r = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{m-1} < \tau_m = s$$

gibt, so dass für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt:

$$\gamma_j := \omega|_{[\tau_{j-1}, \tau_j]} \text{ ist eine } \mathcal{C}^1\text{-Kurve.}$$

Man kann dann einem solchen stückweise stetig differenzierbaren Weg einen Weg

$$\omega = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m,$$

das ist eben die formale Summe der beteiligten \mathcal{C}^1 -Kurven, zuordnen.

Naheliegender, dass man definiert: $\omega^+ = \omega(s)$ und $\omega^- = \omega(r)$.

4.3.5 Beispiele

- Jede einzelne Kurve γ kann auch als Weg $\omega = 1 \cdot \gamma$ angesehen werden.
- Ist γ eine \mathcal{C}^1 -Kurve, so ist $\gamma + \gamma^{\circ}$ der Weg, bei dem die Kurve erst vorwärts- und „dann wieder“ rückwärts durchlaufen wird.
- Sind a_1, a_2, a_3 Stellen in Ω , so ist $\sigma(a_1, a_2) + \sigma(a_2, a_3)$ der Weg von a_1 nach a_3 über a_2 . Allgemeiner ...

4.3.6 Definition: Streckenzug

Ist (a_1, \dots, a_n) eine endliche Folge von Stellen in \mathbb{C} , so heißt der Weg

$$\sigma(a_1, \dots, a_n) = \sigma(a_1, a_2) + \dots + \sigma(a_{n-1}, a_n)$$

der *Streckenzug* (= *Polygonzug*) (zu der endlichen Folge).

4.3.7 Bildchen

4.4 Randoperator, geschlossene Wege

4.4.1 Definition: Randoperator

Ist ein Weg

$$n_1 \cdot \gamma_1 + n_2 \cdot \gamma_2 + \dots + n_m \cdot \gamma_m$$

als „formale ganzzahliger Linearkombination“ gegeben, so kann man ihr einen Rand zuzuordnen

$$\partial \omega := (n_1 \cdot \gamma_1^+ - n_1 \cdot \gamma_1^-) + (n_2 \cdot \gamma_2^+ - n_2 \cdot \gamma_2^-) + \dots + (n_m \cdot \gamma_m^+ - n_m \cdot \gamma_m^-),$$

das ist die formale Summe der positiv gezählten Endpunkte und der negativ gezählten Anfangspunkte.

Beachte auch hier wieder, dass es nicht um die Berechnung des Wertes dieser Summe innerhalb des Körpers der komplexen Zahlen geht.

Für den Spezialfall eines stückweise stetig differenzierbaren Wegs gilt $\partial \omega = \omega^+ - \omega^-$.

4.4.2 Definition: Geschlossener Weg

Ein Weg heißt *geschlossen*, wenn bei Anwendung des Randoperators die Null-Linearkombination herauskommt.

Wir sagen weiter, dass ein Weg ω die Stellen a und \tilde{a} verbindet, wenn für ihn $\partial \omega = b - a$ gilt.

4.4.3 Anschauliche Deutung

Geschlossenheit eines Weges bedeutet, dass sich die Anfangs- und Endpunkte der beteiligten \mathcal{C}^1 -Kurven genau wegheben, oder — anders ausgedrückt — dass es zu jedem Endpunkt ein-eindeutig einen Anfangspunkt gibt. Dabei werden die Vielfachheiten berücksichtigt.

Man überlege, dass ein beliebiger geschlossener Weg eine (endliche) formale Summe von geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Wegen ist.

4.4.4 Mathematisch klare Definition

Der Randoperator ist der durch

$$\partial : \left\{ \begin{array}{l} \{\text{Wege in } \Omega\} \\ \gamma \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{\text{Formale Summen von Stellen in } \Omega\} \\ \gamma^+ - \gamma^- \end{array} \right\}$$

definierte Gruppen-Homomorphismus.

Der Kern dieses Gruppen-Homomorphismus ist eine Untergruppe, die Elemente des Kerns heißen *geschlossene Wege*.

4.4.5 Beispiele

- (a) Stimmen für eine einzelne Kurve γ Endpunkt und Anfangspunkt überein, so ist sie geschlossen. Beispielsweise sind der Kreis $\kappa_r(a)$ und die Ellipse $\epsilon_{r,\tilde{r}}(a)$ (vgl. 4.1.2) geschlossene Kurven.
- (b) Ist γ eine \mathcal{C}^1 -Kurve, so ist $\gamma + \gamma^{\text{eo}}$ ein geschlossener Weg.
- (c) Ein Streckenzug $\sigma(a_1, \dots, a_n, a_1)$ ist geschlossen.
Wir nennen einen solchen geschlossenen Streckenzug auch *n-Eck-Streckenzug*, im Fall $n = 3$ einen Dreieck-Streckenzug.

4.4.6 Bildchen

4.5 Das Wegintegral, Stetige Abhängigkeit

4.5.1 Definition: Wegintegral

Es sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Ist $\omega = n_1 \cdot \gamma_1 + n_2 \cdot \gamma_2 + \dots + n_m \cdot \gamma_m$ ein Weg, so heißt die komplexe Zahl

$$\int_{\omega} f = n_1 \cdot \int_{\gamma_1} f + \dots + n_m \cdot \int_{\gamma_m} f$$

das *Wegintegral* (von f entlang dieses Weges).

4.5.2 Satz: Stetige Abhängigkeit vom Endpunkt

Es seien Ω ein Gebiet, $\sigma(a_0, a)$ eine Strecke in Ω und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

Dann gibt es eine Umgebung $U \subseteq \Omega$ von a , so dass die Abbildung

$$\begin{cases} U & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \int_{\sigma(a_0, z)} f \end{cases}$$

wohldefiniert und stetig ist.

4.5.3 Beweis

Es sei $D = \text{spur } \sigma(a_0, a) \subseteq \Omega$.

(1) Es gibt ein $\varrho > 0$, so dass

$$D_{\varrho} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{dist}(z, D) \leq \varrho\} \subseteq \Omega.$$

Anderenfalls gäbe es eine Folge $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C} \setminus \Omega$ mit

$$\text{dist}(w_n, D) < \frac{1}{n}.$$

Diese Folge ist beschränkt, besitzt daher eine konvergente Teilfolge. Für den Grenzwert w dieser Teilfolge gilt

$$\begin{aligned} w &\in D, & \text{da } \text{dist}(w, D) = 0 \text{ und } D \text{ abgeschlossen,} \\ w &\in \mathbb{C} \setminus \Omega, & \text{da } \mathbb{C} \setminus \Omega \text{ abgeschlossen.} \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch.

(2) Es sei die stetige Funktion g definiert durch

$$g : \begin{cases} [0, 1] \times D_{\varrho} & \rightarrow \mathbb{C} \\ (t, z) & \mapsto f(a_0 + t(z - a_0)) \cdot (z - a_0). \end{cases}$$

(3) Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da die Definitionsmenge kompakt ist, ist g sogar gleichmäßig stetig. Das bedeutet, dass es ein $\delta > 0$ gibt so, dass

$$|g(t, z) - g(\tau, a)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } (t, z), (\tau, a) \in [0, 1] \times D_{\varrho} \text{ mit } \|(t, z) - (\tau, a)\| \leq \delta.$$

Insbesondere ist dann

$$|g(t, z) - g(t, a)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } (t, z), (t, a) \in [0, 1] \times D_{\varrho} \text{ mit } |z - a| \leq \delta.$$

(4) Für alle $z \in D_\varrho$ mit $|z - a| \leq \delta$ gilt dann

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\sigma(a_0, z)} f - \int_{\sigma(a_0, a)} f \right| \\ &= \left| \int_0^1 \underbrace{f(a_0 + t(z - a_0))(z - a_0)}_{=g(t, z)} dt - \int_0^1 \underbrace{f(a_0 + t(a - a_0))(a - a_0)}_{=g(t, a)} dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |g(t, z) - g(t, a)| dt \\ &\leq \int_0^1 \varepsilon dt = \varepsilon. \end{aligned}$$

4.5.4 Satz: Approximation mittels Streckenzug

Es sei Ω offen, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, γ eine \mathcal{C}^1 -Kurve in Ω .

(i) Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Streckenzug σ in Ω , so dass

$$\begin{aligned} \gamma^- &= \sigma^- \\ \gamma^+ &= \sigma^+ \\ \left| \int_\gamma f - \int_\sigma f \right| &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) Ist $w \in \Omega \setminus \{\omega^-, \omega^+\}$ eine fixierte Stelle, so kann der Streckenzug σ in (i) so gewählt werden, dass $w \notin \text{spur } \sigma$.

4.5.5 Beweis

(1) Es sei $K \subseteq \Omega$ eine kompakte Umgebung von $\text{spur } \gamma$. Setze

$$M_1 := \max_{t \in [0, 1]} \{|\gamma'(t)|\}, \quad M_2 := \max_{z \in K} \{|f(z)|\}.$$

O.B.d.A. kann $M_1 > 0$ und $M_2 > 0$ angenommen werden.

(2) Sei also $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir zeigen für alle $s \in [0, 1]$.

(\mathcal{A}_s): Es existiert ein Streckenzug σ_s so, dass

$$\begin{aligned} w &\notin \text{spur } \sigma_s \\ \left| \int_{\gamma|_{[0, s]}} f - \int_{\sigma_s} f \right| &\leq \varepsilon \cdot s. \end{aligned}$$

Für $s = 1$ ergibt sich dann die Behauptung des Satzes.

(3) Angenommen, es gibt ein $s \in [0, 1]$, so dass (\mathcal{A}_s) nicht gilt. Definiere dann

$$\begin{aligned} \tau &:= \sup\{s \in [0, 1] \mid (\mathcal{A}_s) \text{ gilt.}\} \\ a &:= \gamma(\tau). \end{aligned}$$

(4) Wähle ein $\delta > 0$ so, dass

$$U_\delta(a) \subseteq K$$

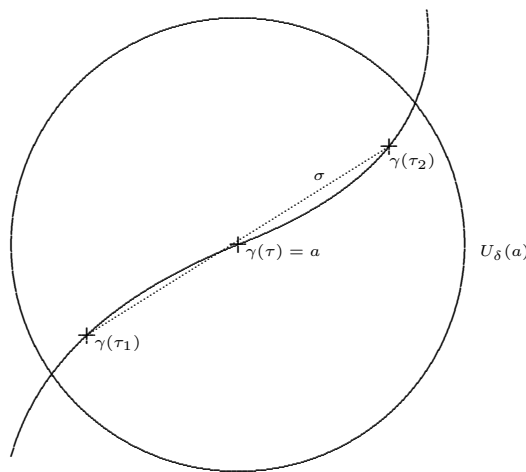
$$|f(z) - f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{4M_1} \quad \text{für } z \in U_\delta(a)$$

und dann $\tau_1, \tau_2 \in [0, 1]$ so, dass

$$\begin{cases} \tau_1 < \tau, & \text{falls } \tau > 0, \\ \tau_1 = \tau, & \text{falls } \tau = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_2 > \tau, & \text{falls } \tau < 1, \\ \tau_2 = \tau, & \text{falls } \tau = 1, \end{cases}$$

$$\text{spur } \gamma|_{[\tau_1, \tau_2]} \subseteq U_\delta(a)$$

$$|\gamma'(t) - \gamma'(\tau)| \leq \frac{\varepsilon}{8M_2} \quad \text{für } t \in [\tau_1, \tau_2].$$



(5) Wir definieren nun die Strecke

$$\sigma : \begin{cases} [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \gamma(\tau_1) + \frac{t-\tau_1}{\tau_2-\tau_1} \cdot (\gamma(\tau_2) - \gamma(\tau_1)), \end{cases}$$

ihre Ableitung ist

$$\sigma'(t) = \frac{\gamma(\tau_2) - \gamma(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1}.$$

Ist dann $t \in [\tau_1, \tau_2]$, so gibt es gemäß dem Mittelwertsatz der 1-dimensionalen reellen Differentialrechnung zwei Stellen $\xi_1, \xi_2 \in [\tau_1, \tau_2]$ so, dass insgesamt

$$\begin{aligned} |\gamma'(t) - \sigma'(t)| &= \left| \gamma'(t) - \operatorname{Re} \frac{\gamma(\tau_2) - \gamma(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} - i \operatorname{Im} \frac{\gamma(\tau_2) - \gamma(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} \right| \\ &= |\gamma'(t) - \operatorname{Re} \gamma'(\xi_1) - i \operatorname{Im} \gamma'(\xi_2)| \\ &\leq |\operatorname{Re}(\gamma'(t) - \gamma'(\xi_1))| + |\operatorname{Im}(\gamma'(t) - \gamma'(\xi_2))| \\ &\leq |\gamma'(t) - \gamma'(\xi_1)| + |\gamma'(t) - \gamma'(\xi_2)| \\ &\leq |\gamma'(t) - \gamma'(\tau)| + |\gamma'(\tau) - \gamma'(\xi_1)| + |\gamma'(t) - \gamma'(\tau)| + |\gamma'(\tau) - \gamma'(\xi_2)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2M_2}. \end{aligned}$$

Zu (ii): Sollte $w \in \text{spur } \sigma$ sein, so kann in der obigen Konstruktion die Strecke σ durch einen Streckenzug aus zwei Strecken ersetzt werden, die ganz in $U_\delta(a)$ verlaufen und deren

Spur nicht die Stelle w trifft. Der Rest des Beweises kann leicht für diesen Fall modifiziert werden.

(6) Wir fügen dem Streckenzug σ_{τ_1} diese Strecke hinzu:

$$\sigma_{\tau_2} := \sigma_{\tau_1} + \sigma.$$

(7) Es gilt dann

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\gamma} f - \int_{\sigma_{\tau_2}} f \right| \\ &= \left| \int_{\gamma|_{[0, \tau_1]}} f + \int_{\gamma|_{[\tau_1, \tau_2]}} f - \int_{\sigma_{\tau_1}} f - \int_{\sigma} f \right| \\ &\leq \left| \int_{\gamma|_{[0, \tau_1]}} f - \int_{\sigma_{\tau_1}} f \right| + \left| \int_{\gamma|_{[\tau_1, \tau_2]}} f - \int_{\sigma} f \right| \\ &\leq \varepsilon \cdot \tau_1 + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |f(\gamma(t)) - f(\sigma(t)) \cdot \gamma'(t)| dt \\ &\leq \varepsilon \cdot \tau_1 + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \underbrace{|f(\gamma(t)) - f(\sigma(t))|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2M_1}} \cdot \underbrace{|\gamma'(t)|}_{\leq M_1} dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \underbrace{|f(\sigma(t))|}_{\leq M_2} \cdot \underbrace{|\gamma'(t) - \sigma'(t)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2M_2}} dt \\ &\leq \varepsilon \cdot \tau_1 + \frac{\varepsilon}{2}(\tau_2 - \tau_1) + \frac{\varepsilon}{2}(\tau_2 - \tau_1) = \varepsilon \cdot \tau_2. \end{aligned}$$

Also gilt \mathcal{A}_{τ_2} und das ist ein Widerspruch zur Definition von τ in Schritt (3).

4.5.6 Satz: Integral über geschlossenen Weg verschwindet

Es seien Ω ein Gebiet, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung. Weiter sei $g \subseteq \mathbb{C}$ eine Gerade und $\zeta \in g$.

Betrachte dazu die folgenden (immer schwächer werdenden) Aussagen.

(N) Es gilt für jeden geschlossenen Weg ω in Ω

$$\int_{\omega} f = 0.$$

(N') Es gilt für jeden n -Eck-Streckenzug σ in Ω

$$\int_{\sigma} f = 0.$$

(N'') Es gilt für jeden Dreieck-Streckenzug σ in Ω

$$\int_{\sigma} f = 0.$$

(N''') Es gilt für jeden Dreieck-Streckenzug σ in Ω mit $\zeta \notin \text{conv}(\text{spur } \sigma)$, d.h. ζ liegt nicht im Inneren oder auf dem Rand des Dreiecks

$$\int_{\sigma} f = 0.$$

(N'''') Es gilt für jeden Dreieck-Streckenzug σ in Ω mit $\text{conv}(\text{spur } \sigma) \cap g = \emptyset$

$$\int_{\sigma} f = 0.$$

Es gelten dann die Implikationen

$$\begin{aligned} \text{(N)} &\iff \text{(N')} \implies \text{(N'')} \implies \text{(N''')} \implies \text{(N'''')} \text{ und} \\ &\text{(N')} \iff \text{(N'')} \iff \text{(N''')} \iff \text{(N'''')} \text{ falls } \Omega \text{ sternförmig.} \end{aligned}$$

4.5.7 Beweis

Die Implikationen $(N) \Rightarrow (N') \Rightarrow (N'') \Rightarrow (N''') \Rightarrow (N'''')$ sind trivial.

$(N') \Rightarrow (N)$. Der geschlossene Weg ω ist Summe von \mathcal{C}^1 -Kurven $\gamma_1, \dots, \gamma_m$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Gemäß Satz 4.5.4 gibt es zu jeder der Kurven einen Streckenzug σ_j mit gleichem End- und Anfangspunkt so, dass

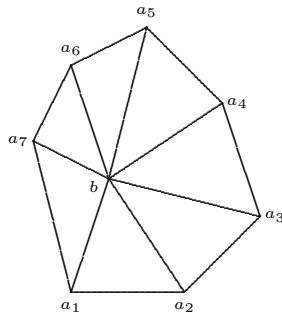
$$\left| \int_{\gamma_j} f - \int_{\sigma_j} f \right| \leq \frac{\varepsilon}{m}.$$

Durch Aufsummation über alle $j = 1, \dots, m$ ergibt sich

$$\left| \int_{\omega} f \right| = \left| \int_{\omega} f - \int_{\sigma_1 + \dots + \sigma_m} f \right| \leq \varepsilon.$$

Daraus folgt die Behauptung.

$(N'') \Rightarrow (N')$. Es sei $\sigma(a_1, \dots, a_n, a_1)$ ein (geschlossener) Streckenzug im bzgl. b sternförmigen Gebiet.



Wir ergänzen ihn dadurch, dass an jedem der Punkte a_j , durch den Streckenzug $\sigma(a_j, b, a_j)$ zum Basispunkt b hin- und zurückgekehrt wird. Es entsteht ein Streckenzug

$$\sigma' = \sigma(\underbrace{a_1, b, a_1}_{\sigma_1}, \underbrace{a_2, b, a_2}_{\sigma_2}, \dots, \underbrace{a_n, b, a_n}_{\sigma_n}, a_1).$$

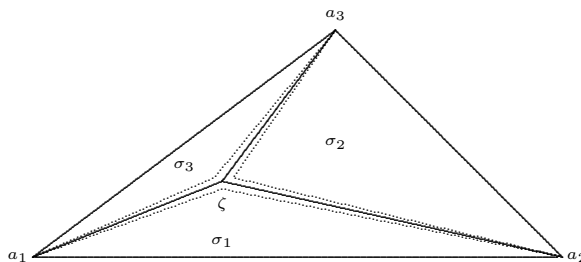
Wir verändern diesen Streckenzug weiter dadurch, dass die Start=Endstelle von a_1 nach b verlegt wird und „Nullstrecken“ $\sigma(b, b)$ eingefügt werden.

$$\sigma'' = \sigma(\underbrace{b, a_1, a_2, b}_{\sigma_1}, \underbrace{b, a_2, a_3, b}_{\sigma_2}, \dots, \underbrace{b, a_n, a_1, b}_{\sigma_n}).$$

Da der Streckenzug σ'' Summe von Dreieck-Streckenzügen σ_j ist, gilt

$$\int_{\sigma} f = \int_{\sigma'} f = \int_{\sigma''} f = \int_{\sigma_1} f + \dots + \int_{\sigma_n} f = 0.$$

$(N''') \Rightarrow (N'')$. Es sei $\sigma = \sigma(a_1, a_2, a_3, a_1)$ ein beliebiger Dreieck-Streckenzug in Ω . Wir müssen den Fall betrachten, dass $\zeta \in \text{conv}(\text{spur } \sigma)$.



Wir betrachten dazu den geschlossenen Streckenzug

$$\sigma' = \sigma(\underbrace{\zeta, a_1, a_2, \zeta}_{\sigma_1}, \underbrace{\zeta, a_2, a_3, \zeta}_{\sigma_2}, \underbrace{\zeta, a_3, a_1, \zeta}_{\sigma_3}).$$

Gemäß Satz 1.4.5 liegen auch die Spuren dieser Dreieck-Streckenzüge in Ω .

Da sich σ und σ' nur durch Hin-und-Zurück-Streckenzüge $\sigma(\zeta, a_j, \zeta)$ unterscheiden, gilt

$$\int_{\sigma} f = \int_{\sigma'} f = \int_{\sigma_1} f + \int_{\sigma_2} f + \int_{\sigma_3} f.$$

Wir müssen also nur noch aufzeigen, dass

$$\int_{\sigma_j} f = 0$$

für einen Dreieck-Streckenzug σ_j mit einem Eckpunkt ζ .

Gemäß Satz 4.5.2 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Dreieck-Streckenzug $\tilde{\sigma}_j$ mit $\zeta \notin \text{conv}(\text{spur } \tilde{\sigma}_j)$ so, dass

$$\left| \int_{\sigma_j} f - \int_{\tilde{\sigma}_j} f \right| < \varepsilon.$$

Gemäß Voraussetzung (N''') ist $\int_{\tilde{\sigma}_j} f = 0$ und deshalb

$$\left| \int_{\sigma_j} f \right| < \varepsilon.$$

Es folgt $\int_{\sigma_j} f = 0$ und damit die Behauptung (N'').

(N''') \Rightarrow (N''').

5 Die Cauchy-Sätze

5.1 Der komplexe HDI

5.1.1 Definition: Stammfunktion

Es seien Ω ein Gebiet und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Die Funktion $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Stammfunktion (auf Ω)*, wenn sie auf Ω holomorph ist mit $F'(z) = f(z)$.

5.1.2 Beispiele

Für jedes $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ ist die Funktion $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$ eine Stammfunktion von $f(z) = z^n$ auf \mathbb{C} bzw. \mathbb{C}^\times .

Für $n = -1$ können wir keine Stammfunktion angeben. Eine Erweiterung des natürlichen Logarithmus auf \mathbb{C}^\times steht uns nicht zur Verfügung.

5.1.3 Satz: Der komplexe HDI

Es sei Ω ein Gebiet, γ eine \mathcal{C}^1 -Kurve in Ω . Besitzt die stetige Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion F auf Ω , so gilt

$$\int_{\gamma} f = F(\gamma^+) - F(\gamma^-).$$

5.1.4 Beweis

Wir führen das sorgfältig mit Hilfe der Definitionen auf die reelle Analysis zurück

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_r^s f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &\quad \text{(Kettenregel für } F \circ \gamma : [r, s] \rightarrow \Omega \rightarrow \mathbb{C}) \\ &= \int_r^s (F \circ \gamma)'(t) dt \\ &\quad \text{(Definition des Integrals einer komplexwertigen Funktion)} \\ &= \int_r^s \operatorname{Re}[(F \circ \gamma)'(t)] dt + i \int_r^s \operatorname{Im}[(F \circ \gamma)'(t)] dt \\ &\quad \text{(Reelle Ableitung vertauscht mit linearen Operationen)} \\ &= \int_r^s [\operatorname{Re}(F \circ \gamma)]'(t) dt + i \int_r^s [\operatorname{Im}(F \circ \gamma)]'(t) dt \\ &\quad \text{(HDI der reellen Analysis)} \\ &= \operatorname{Re}(F \circ \gamma)(s) - \operatorname{Re}(F \circ \gamma)(r) + i[\operatorname{Im}(F \circ \gamma)(s) - \operatorname{Im}(F \circ \gamma)(r)] \\ &= F(\gamma(s)) - F(\gamma(r)) \\ &= F(\gamma^+) - F(\gamma^-) \end{aligned}$$

5.1.5 Folgerung: Konstanz bei Ableitung Null

Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

Ist $f'(z) = 0$ für alle $z \in \Omega$, so ist f konstant.

5.1.6 Beweis

Sind $z, w \in \Omega$ beliebig, so verbinde z und w durch einen Streckenzug σ . Es gilt dann

$$0 = \int_{\sigma} f' = f(\sigma^+) - f(\sigma^-) = f(w) - f(z).$$

5.1.7 Satz: Existenz einer Stammfunktion

Es sei Ω ein Gebiet und die Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

(N) Für jeden geschlossenen Weg ω in Ω gilt

$$\int_{\omega} f = 0.$$

(S) f besitzt eine Stammfunktion F auf Ω .

5.1.8 Beweis

(S) \Rightarrow (N). Das folgt sofort aus dem letzten Satz.

(N) \Rightarrow (S). Fixiere ein $a \in \Omega$ und definiere die Funktion $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$F(z) := \int_{\sigma} f, \quad \text{wobei } \sigma^- = a \quad \text{und} \quad \sigma^+ = z.$$

Ein solcher Streckenzug existiert gemäß Satz 1.4.1. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl des a und z verbindenden Streckenzuges. Wäre $\tilde{\sigma}$ ein zweiter solcher Streckenzug, so wäre ja $\sigma + \tilde{\sigma}^{\text{eo}}$ geschlossen und es gilt nach Voraussetzung (N)

$$\int_{\tilde{\sigma}} f = \int_{\tilde{\sigma}} f + \int_{\sigma + \tilde{\sigma}^{\text{eo}}} f = \int_{\sigma} f.$$

Es bleibt zu zeigen, dass F in jedem $z \in \Omega$ komplex-differenzierbar ist. Dazu sei $h \in \mathbb{C}^{\times}$ betragsmäßig so klein, dass die Strecke $\sigma(z, z+h)$ in Ω verläuft. Wir betrachten nun den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \cdot \int_{\sigma(z, z+h)} f = \frac{1}{h} \cdot \int_0^1 f(z+th) \cdot h \, dt \\ &= \int_0^1 \operatorname{Re} f(z+th) \, dt + i \int_0^1 \operatorname{Im} f(z+th) \, dt \\ &\quad \text{(Mittelwertsatz der reellen Integralrechnung: Es ex. } \xi, \xi' \in [0, 1] \text{ mit } \dots) \\ &= \operatorname{Re} f(z + \xi h) + i \operatorname{Im} f(z + \xi' h) \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \left[\operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z) \right] = f(z). \end{aligned}$$

Der Grenzübergang ist möglich, da f stetig ist.

5.2.2 Bemerkungen

Bei der Implikation $(H) \Rightarrow (N)$ handelt es sich um den so genannten *Integralsatz von Cauchy*.

Die Implikation $(H) \Rightarrow (N'')$, vgl. Satz 4.5.6, wird auch als *Lemma von Goursat-Pringsheim* bezeichnet.

Die Implikation $(N, S) \Rightarrow (H)$ ist Inhalt des *Satzes von Morera*.

Die Implikation $(H) \Rightarrow (G)$ macht den Begriff „unendlich-holomorph“ (vgl. Folgerung 3.3.6(ii)) überflüssig. Holomorphe Funktionen sind immer „unendlich-holomorph“, ja sogar analytisch.

In den Aussagen (C), (A) und (G) kann die Kurve $\kappa_r(a)$ durch jeden anderen geschlossenen Weg ersetzt werden, der innerhalb von Ω einmal um die Stelle a herumläuft. Der Beweis dafür wurde im wesentlichen in der Übung (Aufgabe 18) erbracht.

5.2.3 Beweis

Das Diagramm im Satz gibt auch die Abarbeitung der Implikationen im Beweis wider.

Die Äquivalenz $(N) \Leftrightarrow (S)$ wurde in Satz 5.1.7 konstatiert.

Die Implikation $(G) \Rightarrow (H)$ ist trivial.

Es bleiben also nur noch die Implikationen

$$(H) \Rightarrow (N), \text{ wenn } \Omega \text{ sternförmig}$$

$$(H) \Rightarrow (C) \Rightarrow (A) \Rightarrow (G)$$

$$(S) \Rightarrow (A)$$

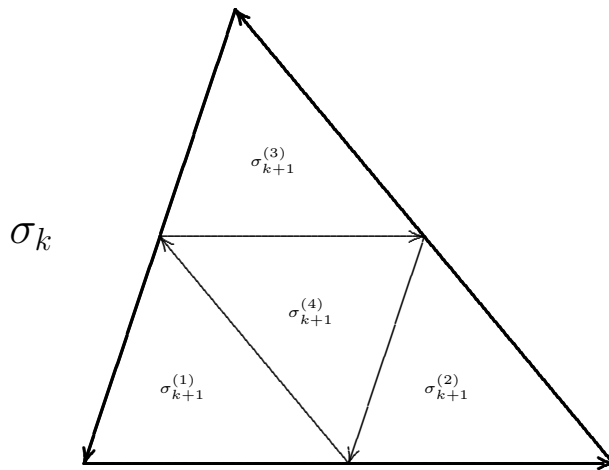
zu zeigen. Bemerkenswert dabei ist, dass die Beweise einiger Implikationen mit Hilfe bereits bewiesener anderer Implikationen erfolgen.

5.2.4 Beweis (H) \Rightarrow (N)

Unter Bezug auf Satz 4.5.6 müssen wir nur (H) \Rightarrow (N''') beweisen.

(1) Es sei also σ_0 ein Dreieck-Streckenzug in Ω . Wir definieren nun rekursiv eine Folge von Dreieck-Streckenzügen $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ wie folgt.

Ist ein Dreieck-Streckenzug σ_k für $k \in \mathbb{N}_0$ gegeben, so sind dann vier weitere Dreieck-Streckenzüge $\sigma_{k+1}^{(j)}$, $j = 1, 2, 3, 4$, gemäß der folgenden Abbildung definiert.



Es gilt offenbar

$$\int_{\sigma_k} f = \int_{\sigma_{k+1}^{(1)}} f + \int_{\sigma_{k+1}^{(2)}} f + \int_{\sigma_{k+1}^{(3)}} f + \int_{\sigma_{k+1}^{(4)}} f.$$

(2) Wir wählen einen der vier Dreieck-Streckenzüge $\sigma_{k+1} := \sigma_{k+1}^{(j)}$ aus so, dass

$$\left| \int_{\sigma_{k+1}} f \right| \geq \frac{1}{4} \cdot \left| \int_{\sigma_k} f \right|.$$

Wegen der Dreiecks-Ungleichung ist das möglich.

(3) So erhalten wir eine Folge $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ von Dreieck-Streckenzügen mit

$$\left| \int_{\sigma_k} f \right| \geq \frac{1}{4^k} \cdot \left| \int_{\sigma_0} f \right|.$$

(4) Es sei ℓ_k die Länge der längsten Strecke in σ_k . Dann gilt

$$\ell_k = \frac{1}{2^k} \ell_0.$$

(5) Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ sei $d_k \in \text{spur } \sigma_k$. Es gilt dann für $\tilde{k} \geq k$

$$|d_{\tilde{k}} - d_k| \leq \ell_k = \frac{1}{2^k} \ell_0.$$

Das heißt, die Folge $(d_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Cauchy-Folge in der vollständig metrischen Menge $\text{conv}(\text{spur } \sigma_0)$ und konvergiert deshalb gegen einen Grenzwert $d \in \text{conv}(\text{spur } \sigma_0)$.

(6) Es gilt weiter für $z \in \text{spur } \sigma_k$ und $\tilde{k} \geq k$

$$|z - d_{\tilde{k}}| \leq \ell_k.$$

Mit $\tilde{k} \rightarrow \infty$ zeigt sich

$$|z - d| \leq \ell_k.$$

(7) Wegen $d \in \text{conv}(\text{spur } \sigma_0)$ und $\zeta \notin \text{conv}(\text{spur } \sigma_0)$ ist $d \neq \zeta$, also ist die Funktion f an der Stelle d holomorph. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also eine offene Umgebung U von d , so dass

$$|f(z) - f(d) - f'(d) \cdot (z - d)| \leq \varepsilon \cdot |z - d|.$$

(8) Wir fixieren ein $k \in \mathbb{N}_0$, so dass $\text{spur } \sigma_k = \bigcup_{j=1}^3 \text{spur}(\sigma_{kj}) \subseteq U$. Dabei seien $\sigma_{k\ell}$ die drei Strecken, die als Summanden von σ_k auftreten. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\sigma_0} f \right| \\ & \quad \text{(Ungleichung in (3))} \\ & \leq 4^k \cdot \left| \int_{\sigma_k} f \right| \\ & = 4^k \cdot \left| \int_{\sigma_k} [f(z) - f(d) - f'(d)(z - d)] dz + f(d) \int_{\sigma_k} 1 dz + f'(d) \int_{\sigma_k} (z - d) dz \right| \\ & \quad \text{(Die beiden Integrale rechts sind gleich Null)} \\ & \leq 4^k \cdot \left| \int_{\sigma_k} f(z) - f(d) - f'(d)(z - d) dz \right| \\ & \quad \text{(Satz 4.2.6 (ii))} \\ & \leq 4^k \cdot \max_{z \in \text{spur } \sigma_k} \{|f(z) - f(d) - f'(d)(z - d)|\} \cdot [L(\sigma_{k1}) + L(\sigma_{k2}) + L(\sigma_{k3})] \\ & \quad \text{(Ungleichung in (7))} \\ & \leq 4^k \cdot \varepsilon \cdot \max_{z \in \text{spur } \sigma_k} \{|z - d|\} \cdot [L(\sigma_{k1}) + L(\sigma_{k2}) + L(\sigma_{k3})] \\ & \quad \text{(Ungleichung in (6))} \\ & \leq 4^k \cdot \varepsilon \cdot 3 \cdot \ell_k^2 \\ & \quad \text{(Ungleichung in (4))} \\ & = 4^k \cdot \varepsilon \cdot 3 \cdot \frac{1}{4^k} \ell_0^2 \\ & = 3 \cdot \varepsilon \cdot \ell_0^2. \end{aligned}$$

(9) Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$\int_{\sigma_0} f = 0.$$

5.2.5 Beweis (H) \Rightarrow (C)

(1) Es sei $z \in U_r(a) \subseteq B_r(a) \subseteq \Omega$ fixiert. Zusätzlich sei $\tilde{r} > r$ so, dass $U_{\tilde{r}}(a) \subseteq \Omega$. Wir definieren die Hilfs-Funktion

$$g_z : \begin{cases} U_{\tilde{r}}(a) & \rightarrow \mathbb{C} \\ w & \mapsto \begin{cases} f'(z), & \text{falls } w = z, \\ \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & \text{falls } w \neq z. \end{cases} \end{cases}$$

(2) g_z ist holomorph auf $U_{\tilde{r}}(a) \setminus \{z\}$.

Ist σ ein Dreieck-Streckenweg mit $z \notin \text{conv}(\text{spur } \sigma)$, so gibt es ein sternförmiges Gebiet V mit $\text{conv}(\text{spur } \sigma) \subseteq V \subseteq U_{\tilde{r}}(a)$, wir können die bereits bewiesene Implikation (H) \Rightarrow (N) (bei Ausnahmestelle $\zeta = z$) anwenden und erhalten

$$\int_{\sigma} g_z = 0.$$

(3) Mit Satz 4.5.6, (N''') \Rightarrow (N), Ausnahmestelle $\zeta = z$, schließen wir weiter auf

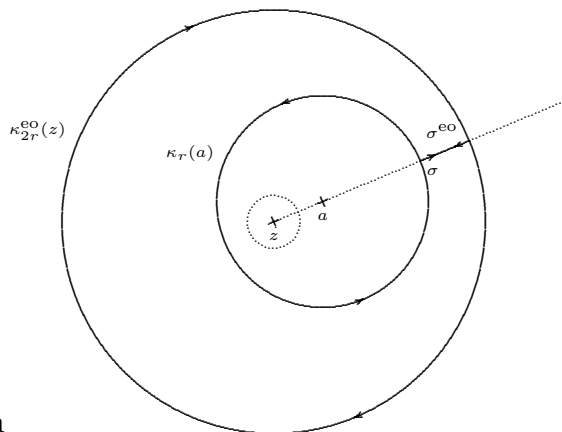
$$\int_{\kappa_r(a)} g_z = 0.$$

(4) In diesem Schritt wollen wir das Integral

$$\int_{\kappa_r(a)} \frac{1}{w-z} dw$$

berechnen. Anders als in Beispiel 4.2.4 (e) stimmt der Mittelpunkt a des Kreiswegs nicht mit der Singularität z in der zu integrierenden Funktion überein.

Dazu betrachten wir den geschlossenen Weg in dem folgenden Diagramm.



Die Funktion

$$\begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{z\} & \rightarrow \mathbb{C} \\ w & \mapsto \frac{1}{w-z} \end{cases}$$

ist holomorph. Wir rechnen aus

$$0$$

(Folgerung (H) \Rightarrow (N), geschlossener Weg, angenähert durch geschlossenen Weg im geschlitzten Gebiet $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ \cdot [z, a]$)

$$\begin{aligned}
&= \int_{\kappa_r(a)} \frac{1}{w-z} dw + \int_{\sigma} \frac{1}{w-z} dw + \int_{\kappa_{2r}^{\text{eo}}(z)} \frac{1}{w-z} dw + \int_{\sigma^{\text{eo}}} \frac{1}{w-z} dw \\
&\quad \text{(Die Integrale über } \sigma \text{ und } \sigma^{\text{eo}} \text{ heben sich weg)} \\
&= \int_{\kappa_r(a)} \frac{1}{w-z} dw + \int_{\kappa_{2r}^{\text{eo}}(z)} \frac{1}{w-z} dw \\
&\quad \text{(Beispiel 4.2.4 (e))} \\
&= \int_{\kappa_r(a)} \frac{1}{w-z} dw - 2\pi i.
\end{aligned}$$

Es ist also

$$\int_{\kappa_r(a)} \frac{1}{w-z} dw = 2\pi i.$$

(5) Es folgt mit (3) und (4) die Cauchy'sche Integralformel

$$\begin{aligned}
\int_{\kappa_r(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw &\stackrel{(3)}{=} \int_{\kappa_r(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{\kappa_r(a)} g_z(w) dw \\
&= \int_{\kappa_r(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{\kappa_r(a)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw \\
&= \int_{\kappa_r(a)} \frac{f(z)}{w-z} dw \stackrel{(4)}{=} 2\pi i \cdot f(z).
\end{aligned}$$

5.2.6 Beweis (C) \Rightarrow (A)

Gemäß Beispiel 3.1.3 ist die Funktion $z \mapsto \frac{1}{w-z}$ analytisch in a mit Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(w-a)^{k+1}} (z-a)^k \quad \text{für } \left| \frac{z-a}{w-a} \right| < 1.$$

Wir setzen dies in die Cauchy'sche Integralformel (C) ein und können gemäß Satz 4.2.6 (iii) Kurvenintegration und Reihenbildung vertauschen

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_r(a)} f(w) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{(w-a)^{k+1}} \right) dw = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_r(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} dw \right) (z-a)^k.$$

5.2.7 Beweis (A) \Rightarrow (G)

Dass eine analytische Funktion unendlich-oft differenzierbar ist, haben wir bereits in Satz 3.3.3 konstatiert. Es bleibt noch die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel zu zeigen.

Aus Folgerung 3.3.6(ii) können wir entnehmen, dass

$$f^{(n)}(a) = n! \cdot p_n = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{\kappa_r(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw, \quad \text{falls } B_r(a) \subseteq \Omega.$$

Wir ersetzen die Variable a durch z und erhalten

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{\kappa_r(z)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad \text{falls } B_r(z) \subseteq \Omega.$$

Wie in 5.2.5, Schritt (3) lässt sich begründen, dass die \mathcal{C}^1 -Kurve $\kappa_r(z)$ durch eine andere \mathcal{C}^1 -Kurve $\kappa_r(a)$ ersetzt werden kann,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{\kappa_r(a)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad \text{falls } B_r(a) \subseteq \Omega \quad \text{und } z \in U_r(a).$$

5.2.8 Beweis (S) \Rightarrow (A)

Die Stammfunktion F der gegebenen Funktion f ist holomorph, also gemäß der bereits bewiesenen Implikation (H) \Rightarrow (A) auch analytisch. Damit ist aber auch ihre Ableitung f analytisch.

6 Folgerungen

6.1 Algebra der analytischen Funktionen

Die in Abschnitt 3.1.4 aufgeworfenen Fragen (d) – (g) können wir nun aufgrund der Äquivalenz „holomorph \Leftrightarrow analytisch“ leicht beantworten.

6.1.1 Satz: Operationen mit analytischen Funktionen

- (d) Linearkombinationen und Produkte von analytischen Funktionen sind wieder analytisch.
- (e) Der Kehrwert einer analytischen Funktion ohne Nullstellen ist wieder analytisch.
- (f) Die Nacheinanderausführung zweier analytischer Funktionen ist wieder analytisch.
- (g) Eine bei $a \in \Omega$ analytische Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ist auch auf der zugehörigen offenen Umgebung $U_\delta(a)$ analytisch.

Dass die Umkehrfunktion einer bijektiven analytischen Funktion analytisch ist, wird später in Satz 6.4.1 aufgezeigt.

6.1.2 Satz: Identitätssatz für holomorphe Funktionen

- (i) Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktionen. Die Nullstellenmenge dieser Funktion ist diskret in Ω oder gleich Ω .
- (ii) Die Menge der holomorphen Funktionen auf Ω bildet einen Integritätsring.

Zur Begründung sei auf Satz 3.4.1 verwiesen.

6.1.3 Bemerkung

Bei reellen unendlich oft differenzierbaren Funktionen ist dies ganz anders. Man kann leicht zeigen, dass die Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

unendlich oft differenzierbar ist. Es gilt dann

$$f(x) \cdot f(-x) = 0,$$

aber keine der beiden Faktor-Funktionen ist gleich der Null-Funktion.

6.2 Satz von Liouville und Fundamentalsatz der Algebra

6.2.1 Satz von Liouville

Ist eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist sie konstant.

6.2.2 Beweis

Es sei $z \in \mathbb{C}$. Die verallgemeinerte Cauchy'sche Integralformel für $n = 1$, beliebiges $r > 0$ und $a = z$, lautet dann

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_r(z)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\kappa_r(z)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{w \in \kappa_r(z)} \left\{ \left| \frac{f(w)}{(w-z)^2} \right| \right\} \cdot L(\kappa_r(z)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \max_{w \in \kappa_r(z)} \{|f(w)|\} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 2\pi r = \max_{w \in \kappa_r(z)} \{|f(w)|\} \cdot \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Mit $r \rightarrow \infty$ folgt $f'(z) = 0$. Siehe jetzt Folgerung 5.1.5.

6.2.3 Fundamentalsatz der Algebra

Ist p ein nicht-konstantes Polynom mit komplexen Koeffizienten, so gibt es ein $a \in \mathbb{C}$ mit $p(a) = 0$.

6.2.4 Beweis

(0) Das Polynom sei gegeben durch

$$p(z) = p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \dots + p_1 z + p_0$$

$n \geq 1$ und $p_n \neq 0$.

(1) Wir nehmen an, es gäbe keine Nullstelle. Dann ist die Funktion $\frac{1}{p}$ holomorph auf \mathbb{C} .

(2) Wegen

$$\frac{p(z)}{z^n} = p_n + \frac{p_{n-1}}{z} + \dots + \frac{p_1}{z^{n-1}} + \frac{p_0}{z^n}$$

gibt es (zu jedem $\varepsilon > 0$, also auch zu $\varepsilon = \frac{|p_n|}{2}$) ein $r > 0$ so, dass

$$\left| \frac{p(z)}{z^n} - p_n \right| \leq \frac{|p_n|}{2}, \quad \text{falls } |z| \geq r.$$

Das aber bedeutet für $|z| \geq r$, dass

$$\left| \frac{p(z)}{z^n} \right| \geq \frac{|p_n|}{2},$$

weiter

$$|p(z)| \geq \frac{|p_n \cdot z^n|}{2}.$$

und dann

$$\frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{2}{|p_n \cdot z^n|} \leq \frac{2}{|p_n \cdot r^n|}.$$

(3) Auf der kompakten Menge $B_r(0)$ nimmt die holomorphe Funktion $\frac{1}{p}$ ihr Maximum M an. Dann ist für $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{|p(z)|} \leq \max\left\{M, \frac{2}{|p_n \cdot r^n|}\right\}.$$

(4) Die Funktion $\frac{1}{p}$ ist also holomorph und beschränkt, gemäß Satz 6.2.1 von Liouville konstant. Dann ist auch p konstant. Widerspruch.

6.3 Die Logarithmusfunktion einer holomorphen Funktion

6.3.1 Satz: Logarithmusfunktion einer holomorphen Funktion

Betrachte für eine holomorphe Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\times$ die folgenden Aussagen.

- (\star) Ω ist sternförmig.
- ($N_\mathcal{L}$) Für jeden geschlossenen Weg ω in Ω verschwinden die Wegintegrale der *logarithmischen Ableitung*

$$\int_\omega \frac{f'}{f} = 0.$$

- ($S_\mathcal{L}$) Es existiert auf Ω eine Stammfunktion der logarithmischen Ableitung $\frac{f'}{f}$.
- (L) Es existiert auf Ω eine *komplexe Logarithmusfunktion* ℓ für f , d.h. eine holomorphe Funktion $\ell : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\exp(\ell(z)) = f(z), \quad z \in \Omega.$$

- (W) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert auf Ω eine *n-te Wurzel-Funktion* für f , das ist eine holomorphe Funktion $w : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ so, dass

$$(w(z))^n = f(z), \quad z \in \Omega.$$

Dann gelten die Implikationen

$$(\star) \implies (N_\mathcal{L}) \iff (S_\mathcal{L}) \iff (L) \implies (W).$$

6.3.2 Beweis

Die Implikationen $(\star) \implies (N_\mathcal{L}) \iff (S_\mathcal{L})$ sind aus dem Rindm-Satz bekannt.

Den Zugang zum Beweis der Äquivalenz $(S_\mathcal{L}) \iff (L)$ kann man der komplexen Differentialgleichung

$$f' = \ell'(z) \cdot f \quad \text{auf } \Omega.$$

für die Funktion f entnehmen.

- ($S_\mathcal{L}$) \implies (L). Es sei $\tilde{\ell}$ eine Stammfunktion. Sei $a \in \Omega$ und dann $\ell_0 \in \mathbb{C}$ so gewählt, dass

$$\exp(\ell_0) = \frac{\exp(\tilde{\ell}(a))}{f(a)}.$$

Setze $\ell(z) = \tilde{\ell}(z) - \ell_0$. Für die Funktion

$$h : \begin{cases} \Omega & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \frac{\exp(\ell(z))}{f(z)}. \end{cases}$$

gilt dann gemäß Ketten- und Quotientenregel

$$h'(z) = \frac{\frac{f'(z)}{f(z)} \exp(\ell(z))f(z) - \exp(\ell(z))f'(z)}{f^2(z)} = 0$$

und

$$h(a) = \frac{\exp(\ell(a))}{f(a)} = \frac{\exp(\tilde{\ell}(a) - \ell_0)}{f(a)} = \frac{\exp(\tilde{\ell}(a))}{f(a)} \cdot \frac{f(a)}{\exp(\tilde{\ell}(a))} = 1.$$

Also ist h gemäß Folgerung 5.1.5 konstant gleich Eins und damit

$$f(z) = \exp(\ell(z)).$$

(L) \Rightarrow (S $_{\ell}$). Existiert die komplexe Logarithmusfunktion ℓ , so ist deren Ableitung

$$\ell'(z) = \frac{\ell'(z) \cdot \exp(\ell(z))}{\exp(\ell(z))} = \frac{f'(z)}{f(z)},$$

ℓ selbst ist also eine Stammfunktion von $\frac{f'}{f}$.

(L) \Rightarrow (W). Setze einfach

$$w(z) = \exp\left(\frac{\ell(z)}{n}\right).$$

6.3.3 Bemerkungen

(1) Man kann nicht einfach die gesuchte Funktion ℓ durch $\ell(z) = \log f(z)$ bzw. $w(z) = \sqrt[n]{f(z)}$ definieren, da über Funktionen $\log : \mathbb{C}^{\times} \rightarrow \mathbb{C}$ und $\sqrt[n]{} : \mathbb{C}^{\times} \rightarrow \mathbb{C}$ nichts bekannt ist. Tatsächlich existieren — bei Definitionsmenge \mathbb{C} und bei Forderung von vernünftigen Eigenschaften — solche Funktionen nicht.

(2) Es sei $a \in \mathbb{C}^{\times}$. Auf der geschlitzten Ebene $\Omega = \mathbb{C} \setminus a\mathbb{R}_0^+$ hat die logarithmische Ableitung $z \mapsto \frac{1}{z}$ der Identität $z \mapsto z$ eine Stammfunktion. Gemäß der Implikation (S) \Rightarrow (L) existiert auf Ω eine Logarithmusfunktion ℓ zur Identität:

$$\exp(\ell(z)) = z, \quad z \in \Omega.$$

Das wissen wir schon.

6.4 Lokale Zerlegung einer holomorphen Funktion

6.4.1 Definition und Satz: Biholomorphe Funktion

Für eine holomorphe Funktion $f : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (A) (Def) f heißt *biholomorph*.
- (B) f ist bijektiv und f^{-1} ist ebenfalls holomorph.
- (C) f ist bijektiv und es ist $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$.
- (D) f ist bijektiv.

6.4.2 Beweis

Die Implikation (B) \Rightarrow (C) ist der Kettenregel 2.2.3(v) zu entnehmen. Die umgekehrte Implikation (C) \Rightarrow (B) ist im Satz über die Umkehrfunktion 2.2.5 enthalten.

Die Implikation (B) \Rightarrow (D) ist trivial.

Den Beweis der umgekehrten Implikation (D) \Rightarrow (B) erfolgt etwas später in Abschnitt 6.4.6. Wir benutzen den Begriff „biholomorph“ zunächst nur im Sinne der beiden Aussagen (B) und (C).

6.4.3 Satz: Lokale Zerlegung einer holomorphen Funktion

Es seien $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion und $a \in \Omega$, $b := f(a)$.

Dann existieren

- eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$,
- offene Umgebungen U , $V = U_\delta(0)$ und $W = U_{\delta^n}(0)$ von 0
- und eine biholomorphe Abbildung $h : U \rightarrow V$

so, dass $f|_{U+a} : U + a \rightarrow W + b$ surjektiv ist mit

$$f(z) = [h(z - a)]^n + b, \quad \text{für } z \in U + a.$$

Als Diagramm dargestellt ist dies

$$f|_{U+a} : \begin{cases} U + a & \xrightarrow{\tau_{-a}} & U & \xrightarrow{h} & V & \xrightarrow{\uparrow^n} & W & \xrightarrow{\tau_b} & W + b \\ a & \longmapsto & 0 & \longmapsto & 0 & \longmapsto & 0 & \longmapsto & b \end{cases}$$

6.4.4 Definition

Ist $n > 1$ in der soeben beschriebenen Situation, so heißt die Stelle a eine *Verzweigungsstelle* (engl. branch point, ramification point) von f . Die Zahl $n - 1$ heißt *Ordnung der Verzweigung* bei a .

Da $f'(a) = 0$ bei einer Verzweigungsstelle, liegen die Verzweigungsstellen diskret in Ω .

6.4.5 Beweis

(1) Setzt man $\widehat{f} := \tau_{-b} \circ f \circ \tau_a$, so ist $\widehat{f}(0) = 0$. \widehat{f} ist analytisch, für $z \in U_\varrho(0) \subseteq \Omega$ gilt

$$\begin{aligned} \widehat{f}(z) &= p_1 z + p_2 z^2 + \dots \\ &= z^n \cdot \underbrace{(p_n + p_{n+1} z + p_{n+2} z^2 + \dots)}_{=: g(z)}, \quad p_n \neq 0. \end{aligned}$$

(2) Die Funktion g ist auf $U_{\delta'}(0)$, $\delta' < \varrho$, holomorph und ungleich Null, es existiert gemäß Satz 6.3.1 eine holomorphe Funktion $w : U_{\delta'}(0) \rightarrow \mathbb{C}^\times$, so dass

$$g(z) = [w(z)]^n \quad \text{für alle } z \in U_{\delta'}(0)$$

und demzufolge

$$\widehat{f}(z) = [z w(z)]^n \quad \text{für alle } z \in U_{\delta'}(0).$$

(3) Die Funktion $h(z) = z w(z)$ in der eckigen Klammer ist holomorph mit $h'(0) \neq 0$. Gemäß Satz 2.2.5 existieren eine offene Umgebung $V = U_\delta(0)$, $\delta < \delta' < \varrho$ und eine offene Umgebung U von 0 so, dass $h : U \rightarrow V$ biholomorph wird.

(4) Beachte noch, dass die Potenz-Abbildung

$$\uparrow^n : \begin{cases} V = U_\delta(0) & \rightarrow & U_{\delta^n}(0) = W \\ z & \mapsto & z^n, \end{cases}$$

surjektiv ist. Damit ist der Satz bewiesen.

6.4.6 Beweis der Implikation (D) \Rightarrow (C) aus Satz 6.4.1.

Wir betrachten für ein $a \in \Omega$ die lokale Zerlegung gemäß Satz 6.4.3

$$f|_{U+a} : \begin{cases} U+a & \xrightarrow{\tau_{-a}} & U & \xrightarrow{h} & V & \xrightarrow{\uparrow^n} & W & \xrightarrow{\tau_b} & W+b \\ a & \longmapsto & 0 & \longmapsto & 0 & \longmapsto & 0 & \longmapsto & b \end{cases}$$

Dabei sind $n \in \mathbb{N}$, $U, V = U_\delta(0)$ und $W = U_{\delta^n}(0)$ geeignete Null-Umgebungen.

Daraus ist zu entnehmen:

$$f|_{U+a} \text{ bijektiv} \iff \uparrow^n \text{ bijektiv} \iff \uparrow^n \text{ ist Identität} \iff f'(a) \neq 0.$$

6.5 Prinzip der offenen Abbildung, Maximums- und Minimumsprinzip

6.5.1 Satz: Prinzip der offenen Abbildung

Es seien Ω ein Gebiet und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung.

- (i) Ist $U \subseteq \Omega$ offen, so gilt dies auch für das Bild $f(U)$.
- (ii) Ist $U \subseteq \Omega$ zusammenhängend, so gilt dies auch für das Bild $f(U)$.
- (iii) Ist $U \subseteq \Omega$ ein Gebiet, so gilt dies auch für das Bild $f(U)$.

6.5.2 Beweis

Zu (i). Es sei $b \in f(\Omega)$ fixiert. Es existiert dann ein $a \in \Omega$ mit $b = f(a)$.

Gemäß Satz 6.4.3 gibt es eine offene Umgebung $V + b$ von b , die ganz im Bild von f enthalten ist.

Zu (ii) und (iii). Eine zusammenhängende Menge wird durch eine stetige Abbildung auf eine zusammenhängende Menge abgebildet.

6.5.3 Bemerkung

Die Abbildung $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bildet das offene Intervall $] -\pi, +\pi[$ auf das Intervall $[-1, +1]$ ab. Welches Argument im Beweis ist nicht von \mathbb{C} auf \mathbb{R} übertragbar?

6.5.4 Satz: Maximums- und Minimumsprinzip

Hat der Betrag $|f|$ einer holomorphen Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ein

lokales Maximum oder

lokales Minimum ungleich Null,

so ist f konstant.

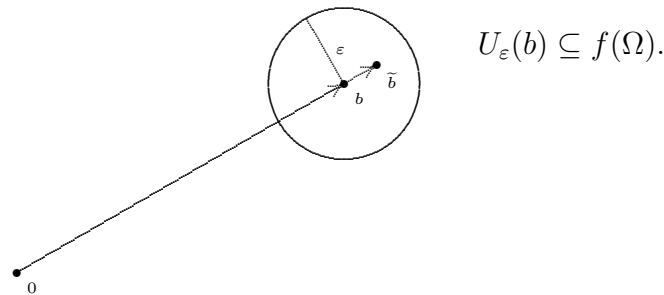
6.5.5 Beweis

Fall des Maximums:

(0) Angenommen, f ist nicht-konstant und es gibt $a \in \Omega$, $\delta > 0$ so, dass die Funktion $|f| : U_\delta(a) \rightarrow [0, \infty[$ in a maximal wird.

(1) Aufgrund des Identitätssatzes 3.4.1 kann f auf $U_\delta(a)$ nicht gleich Null sein. Also ist $b := f(a) \neq 0$.

(2) Gemäß dem Prinzip der offenen Abbildung 6.5.1 gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass



(3) Wir „strecken etwas“ die komplexe Zahl b mittels

$$\tilde{b} := \left(1 + \frac{\varepsilon}{2|b|}\right)b \in U_\varepsilon(b) \subseteq f(\Omega),$$

was aber wegen

$$|\tilde{b}| = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2|b|}\right) \cdot |b| = |b| + \frac{\varepsilon}{2} > |b|$$

ein Widerspruch ist.

Fall des Minimums:

Es sei a die Stelle des Minimums ungleich Null. Es gibt $\varepsilon > 0$, so dass $|f|$ auf $U_\varepsilon(a) > 0$ ist. Dann hat die Funktion $|\frac{1}{f}| : U_\varepsilon(a) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ein lokales Maximum und ist deshalb gemäß dem „Fall des Maximums“ konstant.

6.5.6 Bemerkungen

(1) Aus dem Minimumsprinzip folgt wieder ganz einfach der Fundamentalsatz der Algebra.

(2) Die Funktion $z \mapsto z^2$ zeigt, dass beim Minimumsprinzip nicht auf „ungleich Null“ verzichtet werden kann.

6.6 Exkurs: Konforme Funktionen \ominus

6.6.1 Definition und Satz: Konforme Abbildung

Es sei der \mathbb{R}^n mit dem euklidischen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ versehen.

Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

- (A) (Def) f heißt *konform*.
- (B) An jeder Stelle $a \in \Omega$ ist die Ableitung $f'(a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Drehstreckung, d.h. die Nacheinanderausführung einer zentrischen Streckung mit positivem Streckungsfaktor und einer orthogonalen Abbildung mit Determinante $+1$.
- (C) f ist lokal bijektiv, d.h. zu jedem $a \in \Omega$ gibt es offene Umgebungen U von a und V von $b = f(a)$ so, dass $f|_U : U \rightarrow V$ bijektiv ist. Die Ableitungen von f und von f^{-1} sind an jeder Stelle Drehstreckungen.
- (D) f ist winkel- und orientierungstreu, d.h. genauer:

Sind $\gamma, \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \Omega$ zwei stetig differenzierbare Kurven mit

Tangentialvektoren $\gamma'(0), \tilde{\gamma}'(0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so sind auch

die Bild-Tangentialvektoren $(f \circ \gamma)'(0), (f \circ \tilde{\gamma})'(0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

und es gilt

$$\frac{\langle (f \circ \gamma)'(0), (f \circ \tilde{\gamma})'(0) \rangle}{\|(f \circ \gamma)'(0)\| \cdot \|(f \circ \tilde{\gamma})'(0)\|} = \frac{\langle \gamma'(0), \tilde{\gamma}'(0) \rangle}{\|\gamma'(0)\| \cdot \|\tilde{\gamma}'(0)\|},$$

$(\gamma'(0), \tilde{\gamma}'(0)), ((f \circ \gamma)'(0), (f \circ \tilde{\gamma})'(0))$ sind gleich-orientiert.

Gleiche Orientierung bedeutet dabei: Ersetzt man in einer $n \times n$ -Matrix die zwei Spaltenvektoren links durch die zugehörigen beiden Spaltenvektoren rechts, so bleibt das Vorzeichen der Determinante gleich.

6.6.2 Beweis

Die Äquivalenz (B) \Leftrightarrow (C) ist im wesentlichen die Aussage des Satzes über die Umkehrfunktion. Man berücksichtige weiter, dass die Inverse einer Drehstreckung wieder eine Drehstreckung ist.

Die Äquivalenz (C) \Leftrightarrow (D) entstammt im wesentlichen der Linearen Algebra.

- Drehungen sind orthogonal und lassen deshalb das Skalarprodukt und damit den Betrag invariant.
- Zentrische Streckungen mit positivem Streckungsfaktor lassen den Quotienten $\frac{\langle v, \tilde{v} \rangle}{\|v\| \cdot \|\tilde{v}\|}$ mit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gleich.
- Drehungen und zentrische Streckungen mit positivem Streckungsfaktor erhalten die Orientierung.

6.6.3 Bemerkungen

(1) Im Fall $n = 2$ mit $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ sind die konformen Abbildungen genau die „lokal biholomorphen“ Abbildungen.

Beispielsweise ist $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ konform. Für jedes $a \in \mathbb{C}$ ist $b = f(a) \neq 0$, es existieren dann Umgebungen U von a und V von b so, dass $\exp : U \rightarrow V$ bijektiv ist, die holomorphe Umkehrabbildung ist ein geeigneter Zweig des Logarithmus.

(2) Der Begriff der konformen Abbildung kann auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten verallgemeinert werden.

(3) Die klassische Darstellung eines Gebiets der Erdoberfläche auf einer ebenen Karte erfolgt durch die so genannte Mercator-Projektion. Sie ist winkel- und orientierungstreu, nicht aber längen, flächen- oder parallelitätstreu.

(4) Die Kategorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit den konformen Abbildungen spielt eine große Rolle in verschiedenen Teilgebieten der Theoretischen Physik. Siehe W.

6.6.4 Schukowski-Transformation

Ein prominentes Beispiel einer konformen Abbildung im $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ ist die *Schukowski-Transformation*

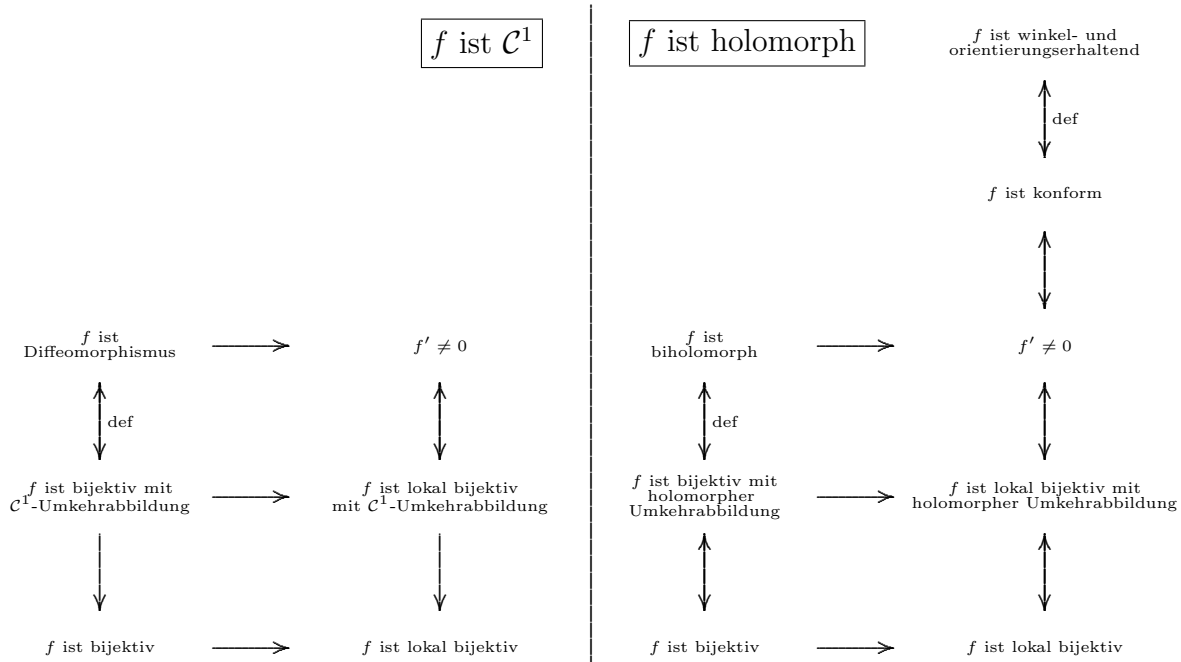
$$\begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, +1\} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto z + \frac{1}{z}. \end{cases}$$

Sie spielt in der (auch angewandten) Strömungsmechanik eine große Rolle, da sie einen Kreis durch $+1$ und um -1 herum auf eine geschlossene Kurve abbildet, die einen Tragflächenquerschnitt umschließt.

Die Eigenschaften der Strömung um die Tragfläche herum können mit Hilfe der Schukowski-Transformation auf diejenigen der Strömung um den Kreis herum „zurückgeholt“ werden. Damit werden diese Eigenschaften wegen der größeren Symmetrie leichter berechenbar. Siehe W_{EN}.

6.6.5 Diagramm

Es seien Ω ein Gebiet und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Dann gelten die Implikationen in dem folgenden Diagramm



7 Laurent-Zerlegung

7.1 Laurent-Zerlegung

7.1.1 Cauchy'scher Integralsatz für Kreisringe

Es seien $r, R \in [0, \infty]$, dann $U_{r,R}(a) \subseteq \mathbb{C}$ ein offener Kreisring mit $\zeta \in U_{r,R}(a)$. Weiter sei $f : U_{r,R}(a) \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die auf $U_{r,R}(a) \setminus \{\zeta\}$ holomorph ist. Weiter seien $\tilde{r}, \tilde{R} \in \mathbb{R}^+$ mit

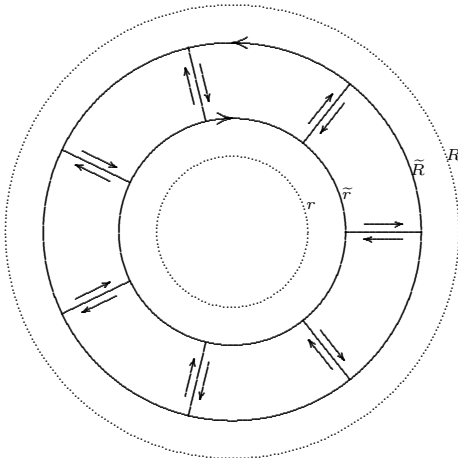
$$r < \tilde{r} < \tilde{R} < R.$$

Dann gilt für den geschlossenen Weg $\kappa_{\tilde{R}}(a) - \kappa_{\tilde{r}}(a)$ in $U_{r,R}(a)$

$$\int_{\kappa_{\tilde{R}}(a) - \kappa_{\tilde{r}}(a)} f = 0.$$

Neu gegenüber dem eigentlichen Cauchy'schen Integralsatz 5.2.1 (N) ist, dass das zugrundeliegende Gebiet nicht mehr sternförmig ist. Beachte, dass die Aussage nicht für beliebige geschlossene Wege im Kreisring gilt.

7.1.2 Bildchen



7.1.3 Beweis

Ergänze den Weg ω so, dass er Summe von geschlossenen „segmentförmigen“ Wegen ω_j , $j = 1, 2, \dots, m$ wird, die jeweils nur in einem sternförmigen Teil-Gebiet von Ω verlaufen.

Gemäß dem Cauchy'schen Integralsatz und der Implikation $(N''') \Rightarrow (N)$, jeweils für sternförmige Gebiete, gilt dann

$$\int_{\kappa_{\tilde{R}}(a) - \kappa_{\tilde{r}}(a)} f = \sum_{j=1}^m \int_{\omega_j} f = 0.$$

7.1.4 Satz: Laurent-Zerlegung

Es seien $r, R \in [0, \infty]$ mit $r < R$, $a \in \mathbb{C}$ und die Funktion $f : U_{r,R}(a) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

(i) Dann existieren zwei holomorphe Funktionen

$$f_{\text{in}} : U_R(0) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_{\text{au}} : U_{\frac{1}{r}}(0) \rightarrow \mathbb{C}$$

so, dass

$$f(z) = f_{\text{in}}(z - a) + f_{\text{au}}\left(\frac{1}{z - a}\right), \quad z \in U_{r,R}(a).$$

(ii) Die beiden Funktionen in (i) sind durch die Zusatzforderung $f_{\text{au}}(0) = 0$ eindeutig bestimmt.

(iii) Die beiden Funktionen gemäß (i) und (ii) sind gegeben durch

$$f_{\text{in}} : \begin{cases} U_R(0) & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\kappa_{\tilde{R}}(a)} \frac{f(w)}{(w-a)-z} dw, \end{cases} \quad \text{wobei } \tilde{R} \text{ so, dass } |z| < \tilde{R} < R$$

$$f_{\text{au}} : \begin{cases} U_{\frac{1}{r}}(0) & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\kappa_{\tilde{r}}(a)} \frac{z \cdot f(w)}{1-(w-a)z} dw, \end{cases} \quad \text{wobei } \tilde{r} \text{ so, dass } |z| < \frac{1}{\tilde{r}} < \frac{1}{r}.$$

7.1.5 Beweis

(1) Die zwei in (iii) präsentierten Funktionen sind, wie man sich überzeugen kann, wohldefiniert. Insbesondere sind die Funktionsterme wegen Satz 7.1.1 unabhängig von den gewählten Radien \tilde{R} bzw. \tilde{r} .

Als Funktionen von w sind die Integrandenfunktionen auf den Spuren der Kreis-Wege wohldefiniert und stetig.

Da die Integrandenfunktionen als Funktionen von z holomorph sind, ist jeweils auch das Kurvenintegral eine holomorphe Funktion von z .

(2) Wir betrachten zunächst den Fall $a = 0$. Es sei $z \in U_{r,R}(0)$ fixiert. Ähnlich wie in 5.2.5 definieren wir dazu die Hilfsfunktion

$$g_z : \begin{cases} U_{r,R}(0) & \rightarrow \mathbb{C} \\ w & \mapsto \begin{cases} f'(z), & \text{falls } w = z, \\ \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & \text{falls } w \neq z. \end{cases} \end{cases}$$

(3) Es seien nun $\tilde{r}, \tilde{R} \in \mathbb{R}^+$ so, dass $r < \tilde{r} < |z| < \tilde{R} < R$. Wir wenden den Satz 7.1.1 auf die Funktion g_z mit Ausnahmestelle $\zeta = z$ und den geschlossenen Weg $\kappa_{\tilde{R}}(0) - \kappa_{\tilde{r}}(0)$ an und erhalten

$$\int_{\kappa_{\tilde{R}}(0)} g_z(w) dw = \int_{\kappa_{\tilde{r}}(0)} g_z(w) dw,$$

bei Einsetzung des Funktionsterms für g_z ist dies

$$\int_{\kappa_{\tilde{R}}(0)} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \cdot \int_{\kappa_{\tilde{R}}(0)} \frac{1}{w-z} dw = \int_{\kappa_{\tilde{r}}(0)} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \cdot \int_{\kappa_{\tilde{r}}(0)} \frac{1}{w-z} dw.$$

Wegen

$$\int_{\kappa_{\bar{R}}(0)} \frac{1}{w-z} dw = 2\pi i$$

$$\int_{\kappa_{\bar{r}}(0)} \frac{1}{w-z} dw = 0$$

können wir die letzte Gleichung nach $f(z)$ auflösen und erhalten

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\kappa_{\bar{R}}(0)} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\kappa_{\bar{r}}(0)} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\kappa_{\bar{R}}(0)} \frac{f(w)}{w-z} dw + \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\kappa_{\bar{r}}(0)} \frac{\frac{1}{z} \cdot f(w)}{1-\frac{w}{z}} dw = f_{\text{in}}(z) + f_{\text{au}}\left(\frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

(4) Zur Eindeutigkeit (ii). Wenn für eine Funktion f zwei verschiedene Zerlegungen existieren würden, so würde für die Null-Funktion auf dem Kreisring eine nicht-triviale Zerlegung

$$0 = n_{\text{in}}(z) + n_{\text{au}}\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in U_{r,R}(0),$$

existieren. In diesem Fall ist die Funktion

$$N : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \begin{cases} n_{\text{in}}(z), & \text{falls } z \in U_R(0), \\ -n_{\text{au}}\left(\frac{1}{z}\right), & \text{falls } z \in \mathbb{C} \setminus B_r(0), \end{cases} \end{cases}$$

wohldefiniert und holomorph.

Wegen $n_{\text{au}}(0) = 0$ ist N beschränkt auf \mathbb{C} , dann gemäß Satz 6.2.1 von Liouville eine Konstante und — abermals wegen $n_{\text{au}}(0) = 0$ — identisch Null. Dann sind aber auch n_{in} und n_{au} identisch Null auf $U_{r,R}(0)$ und dann auch auf ihren gesamten Definitionsmengen.

(5) Im Fall $a \neq 0$ definieren wir die transformierte Funktion durch

$$h : \begin{cases} U_{r,R}(0) & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto f(a+z). \end{cases}$$

Sie erfüllt die Voraussetzung des Satzes für $a = 0$, der bisherige Beweis kann also auf h angewandt werden.

(6) Es ist dann auch

$$\begin{aligned} h_{\text{in}}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\kappa_{\bar{R}}(0)} \frac{h(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\kappa_{\bar{R}}(0)} \frac{f(a+w)}{w-z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\kappa_{\bar{R}}(a)} \frac{f(w)}{w-a-z} dw = f_{\text{in}}(z) \\ h_{\text{au}}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\kappa_{\bar{r}}(0)} \frac{z \cdot h(w)}{1-wz} dw = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\kappa_{\bar{r}}(0)} \frac{z \cdot f(a+w)}{1-wz} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\kappa_{\bar{r}}(a)} \frac{z \cdot f(w)}{1-(w-a)z} dw = f_{\text{au}}(z) \end{aligned}$$

und deshalb

$$f(z) = h(z-a) = h_{\text{in}}(z-a) + h_{\text{au}}\left(\frac{1}{z-a}\right) = f_{\text{in}}(z-a) + f_{\text{au}}\left(\frac{1}{z-a}\right).$$

7.2 Laurent-Entwicklung, Definition des Hauptteils

7.2.1 Folgerung: Laurent-Entwicklung

Es seien wie in Satz 7.1.4 $r, R \in [0, \infty]$ mit $r < R$ und die Funktion $f : U_{r,R}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann können die dort erwähnten in $z = 0$ holomorphen Funktionen f_{in} und f_{au} in Potenzreihen entwickelt werden:

$$f_{\text{in}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \quad z \in U_R(0),$$

$$f_{\text{au}}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k, \quad z \in U_{\frac{1}{r}}(0),$$

so, dass also insgesamt

$$f(z) = f_{\text{in}}(z-a) + f_{\text{au}}\left(\frac{1}{z-a}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (z-a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \left(\frac{1}{z-a}\right)^k, \quad z \in U_{r,R}(a).$$

Setzt man noch weiter $p_k := q_{-k}$, $k \in -\mathbb{N}$, wo kann man dies weiter zusammenfassen zu

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{-k} \left(\frac{1}{z-a}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} p_k (z-a)^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k (z-a)^k.$$

7.2.2 Beachte dabei, dass das Symbol $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k$ definiert ist als

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k := \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k,$$

wobei die beiden Grenzwerte auf der rechten Seite unabhängig voneinander existieren müssen.

Die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k$$

ist dafür nicht hinreichend, wie das Beispiel $c_k = k$ zeigt.

7.2.3 Definition: Hauptteil bei Kreisring

Es seien $f : U_{r,R}(a) \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf einem Kreisring definierte holomorphe Funktion.

Die soeben beschriebene Funktion (bzw. Potenzreihe)

$$\begin{cases} U_{r,\infty}(a) & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto f_{\text{au}}\left(\frac{1}{z-a}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \left(\frac{1}{z-a}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} p_{-k} \left(\frac{1}{z-a}\right)^k \end{cases}$$

heißt der *Hauptteil* (der auf dem Kreisring definierten Funktion).

7.2.4 Beispiel

Wir führen das Beispiel aus 3.1.3 mit der holomorphen Funktion

$$f: \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{w\} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \frac{1}{z-w} \end{cases}$$

fort. Für ein fixiertes $a \in \mathbb{C} \setminus \{w\}$ wollen wir die Laurent-Entwicklung dieser Funktion in den zugehörigen Kreisingen bestimmen.

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-w} &= \frac{1}{(z-a)-(w-a)} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{w-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = -\frac{1}{w-a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-(z-a)^k}{(w-a)^{k+1}}, & \text{falls } z \in U_{|w-a|}(a), \\ \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}} = \frac{1}{z-a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(w-a)^{k-1}}{(z-a)^k}, & \text{falls } z \in U_{|w-a|,\infty}(a). \end{cases} \end{aligned}$$

7.2.5 Beispiel F10 T3 A5

Für die Funktion

$$f(z) = \frac{2}{z(z^2+1)}$$

bestimme man die Laurentreihen (Laurententwicklung) in den Bereichen $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \frac{1}{2}\}$, $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-i| < 1\}$, $A_3 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z-i| < 3\}$, und berechne längs $\alpha(t) = \frac{1}{2}e^{it}$ und $\beta(t) = 4e^{i4t}$, $t \in [0, 2\pi]$ die Wegintegrale $\int_{\alpha} f(z) dz$, $\int_{\beta} f(z) dz$.

Hinweis: Partialbruchzerlegung.

8 Bis auf Singularitäten holomorphe Funktionen

8.1 Einstieg

8.1.1 Definition: Bis auf Singularitäten holomorphe Funktion

Es seien Ω ein Gebiet. Eine Funktion f (zunächst ohne Spezifizierung der Definitionsmenge) heißt *bis auf Singularitäten holomorph (b.a.S.h.) auf Ω* , wenn es eine in Ω diskrete Menge $A_f \subseteq \Omega$ gibt so, dass die Funktion $f : \Omega \setminus A_f \rightarrow \mathbb{C}$ definiert und holomorph ist.

In diesem Zusammenhang heißen die Elemente der *Ausnahmemenge A_f* die (*isolierten*) *Singularitäten* von f .

Beachte, dass eine solche Funktion f für jedes $a \in A_f$ mindestens auf einer punktierten Umgebung $\dot{U}_\delta(a)$ definiert und holomorph ist.

8.1.2 Beispiele

Die Funktionen

$$f_1(z) = \frac{1}{z}, \quad f_2(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad f_3(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

sind b.a.S.h. auf \mathbb{C} und haben eine Singularität bei $a = 0$.

8.1.3 Äquivalenzrelation

Zwei auf Ω b.a.S.h. Funktionen f und \tilde{f} heißen äquivalent, wenn sie auf

$$\Omega \setminus (A_f \cup A_{\tilde{f}})$$

übereinstimmen.

8.1.4 b.a.S.h. Funktionen bilden \mathbb{C} -Algebra

Zwei auf einem Gebiet Ω b.a.S.h. Funktionen können „bis auf Singularitäten“ addiert, subtrahiert oder multipliziert werden. Die Menge der auf einem Gebiet Ω b.a.S.h. Funktionen bildet also eine \mathbb{C} -Algebra.

Beachte, aber dass der Quotient zweier b.a.S.h. Funktionen nicht notwendig wieder eine b.a.S.h. Funktion ist. So ist die Funktion $z \mapsto \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ eine b.a.S.h. Funktion auf \mathbb{C} . Die Funktion $z \mapsto 1/\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right)$ ist aber keine b.a.S.h. Funktion auf \mathbb{C} , da ihre Ausnahmemenge $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{\pi k} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ nicht diskret in \mathbb{C} ist.

8.1.5 Laurent-Entwicklung bei einer Singularität

Es seien fixiert eine b.a.S.h. Funktion f auf Ω und $a \in A_f$.

Dann gibt es eine punktierte Umgebung $\dot{U}_\delta(a) = U_{0,\delta}(a) \subseteq \Omega$, auf der f holomorph ist. Gemäß Satz 7.2.1 gibt es eine Laurent-Entwicklung von f bei dieser Singularität a , d.h. es ist für $z \in U_{0,\delta}(a)$

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} p_{-k} \left(\frac{1}{z-a}\right)^k}_{\text{konvergent auf } \mathbb{C} \setminus \{a\}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} p_k (z-a)^k}_{\text{konvergent auf } U_\delta(a)}.$$

8.1.6 Definition: Hauptteil bei Singularität

Der linke Term auf der rechten Seite ist der *Hauptteil* (von f an der Stelle a). Diese Funktion ist auf $\mathbb{C} \setminus \{a\} = U_{0,\infty}(a)$ definiert und holomorph.

8.2 Der Riemann'sche Hebbarkeitssatz

8.2.1 Satz und Definition: Riemann'scher Hebbarkeitssatz

Es seien Ω ein Gebiet und f eine auf Ω b.a.S.h. Funktion.

Die folgenden Aussagen über eine Ausnahmestelle $a \in A_f$ sind äquivalent.

(A) (Def) Die Funktion f hat bei a eine *hebbare Singularität*.

(B) Die Funktion

$$\hat{f}: \begin{cases} (\Omega \setminus A_f) \cup \{a\} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \begin{cases} f(z), & \text{falls } z \in \Omega \setminus A_f, \\ \lim_{z \rightarrow a} f(z), & \text{falls } z = a, \quad (\text{der Grenzwert existiert!}) \end{cases} \end{cases}$$

stimmt auf $\Omega \setminus A_f$ mit f überein und ist in a holomorph.

(C) Es gibt ein $\delta > 0$, so dass f auf $\dot{U}_\delta(a)$ beschränkt ist.

8.2.2 Beweis

(0) Die Implikationen (B) \Rightarrow (C) ist trivial, es bleibt noch (C) \Rightarrow (B) zu zeigen.

(1) Definiere die Hilfsfunktion

$$g: \begin{cases} U_\delta(a) & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \begin{cases} (z-a)^2 f(z), & \text{falls } z \neq a, \\ 0, & \text{falls } z = a. \end{cases} \end{cases}$$

Wegen

$$\frac{g(z)-g(a)}{z-a} = (z-a)f(z) \xrightarrow{z \rightarrow a} 0$$

ist g auf ganz $U_\delta(a)$ stetig, dann auch holomorph.

(2) Gemäß Rindum-Satz 5.2.1, (H) \Rightarrow (A), besitzt g in a eine Potenzreihenentwicklung

$$g(z) = p_0 + p_1(z-a) + p_2(z-a)^2 + p_3(z-a)^3 + \dots \quad z \in U_\delta(a),$$

Wegen $g(a) = 0$ und $g'(a) = 0$ sind $p_0 = p_1 = 0$, also

$$g(z) = p_2(z-a)^2 + p_3(z-a)^3 + \dots \quad z \in U_\delta(a)$$

und damit

$$f(z) = p_2 + p_3(z-a) + \dots, \quad z \in \dot{U}_\delta(a).$$

(3) Die Funktion

$$\hat{f}: \begin{cases} (\Omega \setminus A_f) \cup \{a\} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \begin{cases} f(z), & \text{falls } z \in \Omega \setminus A_f, \\ p_2, & \text{falls } z = a, \end{cases} \end{cases}$$

hat dann die in Aussage (B) genannte Eigenschaft.

8.3 Klassifikation von Singularitäten

8.3.1 Satz und Definition: Klassifikation von Singularitäten

Es sei f eine b.a.S.h. Funktion auf Ω mit Ausnahmemenge A_f . Ist $a \in A_f$, so tritt dafür genau einer der drei folgenden Fälle ein, die jeweils durch äquivalente Aussagen beschrieben werden.

- (H_i) f hat bei a eine hebbare Singularität.
 (H_{ii}) Der Hauptteil von f bei a ist identisch Null.

(P_i) (Def) Die Stelle a heißt ein *Pol* (für f).

(P_{ii}) Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass im Hauptteil von f bei a gilt

$$p_{-m} \neq 0, \quad \text{und} \quad p_{-k} = 0 \quad \text{für alle } k \geq m + 1.$$

(P_{iii}) Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass die Funktion $z \mapsto g(z) = (z - a)^m \cdot f(z)$ bei a eine hebbare Singularität hat. Für den Wert bei a gilt

$$\widehat{g}(a) = \lim_{z \rightarrow a} g(z) \neq 0.$$

(P_{iv}) Zu jeder Schranke $M > 0$ gibt es ein $r > 0$, so dass

$$|z - a| \leq r \implies |f(z)| \geq M.$$

Kurzfassung: $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$.

(P_v) Die Funktion $\frac{1}{f}$ (ist eine b.a.S.h. Funktion auf Ω und) hat bei a eine hebbare Singularität mit $(\frac{1}{f})^\wedge(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0$.

(W_i) (Def) Die Stelle a heißt *wesentliche Singularität* (für f).

(W_{ii}) Im Hauptteil von f bei a gilt

$$p_{-k} \neq 0 \quad \text{für unendlich viele } k \in \mathbb{N}.$$

(W_{iii}) (Satz von Casorati-Weierstrass)

Für jedes $\delta > 0$ mit $\dot{U}_\delta(a) \subseteq \Omega \setminus A_f$ liegt das Bild $f(U_\delta(a))$ dicht in \mathbb{C} , d.h.

Zu jedem $w \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $z \in \dot{U}_\delta(a)$, so dass $|w - f(z)| < \varepsilon$.

(W_{iv}) (Großer Satz von Picard)

Für jedes $\delta > 0$ mit $\dot{U}_\delta(a) \subseteq \Omega \setminus A_f$ trifft das Bild $f(U_\delta(a))$ höchstens einen Wert $c \in \mathbb{C}$ nicht, d.h. es ist

$$f(U_\delta(a)) = \mathbb{C} \quad \text{oder} \quad f(U_\delta(a)) = \mathbb{C} \setminus \{c\} \quad \text{für ein } c \in \mathbb{C}.$$

8.3.2 Beweis

Dass die drei Eigenschaften echt alternativ und erschöpfend sind, lässt sich an den Aussagen (X_{ii}) ablesen.

Die Äquivalenz $(H_i) \Leftrightarrow (H_{ii})$ ist trivial.

Die Äquivalenz $(P_{ii}) \Leftrightarrow (P_{iii})$ ist durch die Äquivalenz $(H_i) \Leftrightarrow (H_{ii})$, angewandt auf die Funktion g , gegeben. Die zusätzlichen „ $\neq 0$ “-Aussagen lassen sich leicht einsehen.

Die Äquivalenz $(P_{iv}) \Leftrightarrow (P_v)$ ist aus der Analysis bekannt.

$(W_{iv}) \Rightarrow (W_{iii})$ ist trivial. Den „großen Satz von Picard“ $(W_{ii}) \Rightarrow (W_{iv})$ beweisen wir nicht.

Die restlichen Implikationen werden eigens bewiesen.

8.3.3 Beweis von $(P_{iii}) \Rightarrow (P_v)$

Gemäß Voraussetzung ist die Funktion g eine b.a.S.h. Funktion auf Ω mit hebbarer Singularität bei a und $\widehat{g}(a) \neq 0$. Damit hat die Funktion

$$z \mapsto \frac{1}{f(z)} = \frac{(z-a)^m}{\widehat{g}(z)}$$

bei a eine hebbare Singularität und es ist $\lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0$.

8.3.4 Beweis von $(P_v) \Rightarrow (P_{iii})$

Gemäß Voraussetzung ist die Funktion $(\frac{1}{f})^\wedge$ bei a holomorph mit $(\frac{1}{f})^\wedge(a) = 0$.

Da $(\frac{1}{f})^\wedge$ dann analytisch und nicht identisch Null ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion $h : U_\delta(a) \rightarrow \mathbb{C}$ so, dass

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^m \cdot h(z), \quad z \in \dot{U}_\delta(a), \quad h(a) \neq 0.$$

Weiter existiert dann ein $\widetilde{\delta} \leq \delta$ so, dass $\frac{1}{h}$ auf $U_{\widetilde{\delta}}(a)$ holomorph ist. Es gilt dann

$$g(z) = (z-a)^m \cdot f(z) = \frac{1}{h(z)}, \quad z \in \dot{U}_{\widetilde{\delta}}(a)$$

und damit (P_{iii}) .

8.3.5 Beweis von $(W_{ii}) \Rightarrow (W_{iii})$

(0) Es sei $\delta > 0$ wie in (W_{iii}) vorgegeben.

Wir nehmen an, es gäbe ein $w \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(w) \cap f(\dot{U}_\delta(a)) = \emptyset$. Umgekehrt formuliert: Für alle $z \in \dot{U}_\delta(a)$ gilt $|f(z) - w| \geq \varepsilon$.

(1) Dann ist die Funktion

$$g : \begin{cases} \dot{U}_\delta(a) & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \frac{1}{f(z)-w} \end{cases}$$

holomorph und beschränkt. Gemäß dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz 8.2.1 liegt dann eine hebbare Singularität von g bei a vor.

(2) Würde die Singularität durch einen Wert $\widehat{g}(a) = 0$ behoben, so wäre

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \left[\frac{1}{\widehat{g}(z)} + w \right] = \infty$$

und f hätte einen Pol bei a . Widerspruch.

(3) Würde die Singularität durch einen Wert $\widehat{g}(a) \neq 0$ behoben, so wäre die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{\widehat{g}(z)} + w$$

auf $\dot{U}_\delta(a)$ beschränkt und f hätte bei a eine hebbare Singularität. Widerspruch.

8.3.6 Beweis von $(W_{iii}) \Rightarrow (W_{ii})$

Es sei also (W_{iii}) erfüllt. Es sei $\delta > 0$ so, dass $\dot{U}_\delta(a) \subseteq \Omega \setminus A_f$.

Hätte f bei a eine hebbare Singularität, so würde das Bild $\widehat{f}(B_{\delta'}(a))$ mit $\delta' < \delta$ kompakt sein. Das ist ein Widerspruch dazu, dass $f(U_{\delta'}(a))$ dicht in \mathbb{C} liegt.

Hätte f bei a einen Pol, so würde gemäß (P_{iv}) zur Zahl 1 ein δ' mit $0 < \delta' < \delta$ existieren so, dass

$$z \in \dot{U}_{\delta'}(a) \implies |f(z)| \geq 1.$$

Das ist ebenfalls ein Widerspruch dazu, dass $f(U_{\delta'}(a))$ dicht in \mathbb{C} liegt.

8.3.7 Zusatz: Ordnung einer Singularität

Die in (P_i) bzw. (P_{ii}) erwähnten Zahlen $m \in \mathbb{N}$ stimmen überein. Man spricht in diesem Fall von einem *Pol m -ter Ordnung*.

Das Ordnungs-Funktional aus Definition 3.3.9 kann für b.a.S.h. Funktionen so erweitert werden:

$$\text{ord}(f, a) := \begin{cases} +\infty, & \text{falls } f \equiv 0 \\ m, & \text{falls } f \text{ bei } a \text{ eine hebbare Singularität hat} \\ & \text{und dann } \widehat{f} \text{ bei } a \text{ eine Nullstelle } m\text{-ter Ordnung,} \\ -m, & \text{falls } f \text{ bei } a \text{ einen Pol } m\text{-ter Ordnung hat,} \\ -\infty, & \text{falls } f \text{ bei } a \text{ eine wesentliche Singularität hat.} \end{cases}$$

Beachte die in der dritten Zeile auftretende etwas verwirrende Zuordnung

$$\text{ord} = -m \iff \text{Ordnung des Pols} = +m$$

und die Feststellung

$$\text{ord}(f, a) = 0 \iff f \text{ hat bei } a \text{ weder Nullstelle noch Singularität.}$$

Meromorphe Funktionen

8.3.8 Definition: Meromorphe Funktion

Eine auf Ω b.a.S.h. Funktion f heißt *meromorph (auf Ω)*, wenn $\text{ord}(f, a) \in \mathbb{Z}$ für alle $a \in \Omega$ oder $f \equiv 0$. Äquivalent dazu ist, dass alle Singularitäten Polstellen sind. Wir bezeichnen die Menge der Polstellen mit P_f .

8.3.9 Kehrwert einer meromorphen Funktion

Es sei $f \not\equiv 0$ eine auf Ω meromorphe Funktion mit Polstellenmenge P_f und Nullstellenmenge N_f .

(i) Dann ist auch die Funktion $g = \frac{1}{f}$, definiert durch

$$g : \begin{cases} \Omega \setminus N_f & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & \text{falls } z \in \Omega \setminus (P_f \cup N_f), \\ 0, & \text{falls } z \in P_f, \end{cases} \end{cases}$$

meromorph auf Ω . Es gilt dabei $N_g = P_f$ und $P_g = N_f$.

(ii) Es ist weiter

$$\text{ord}(g, a) = -\text{ord}(f, a), \quad a \in N_g \cup P_g.$$

(iii) Die Menge der auf Ω meromorphen Funktionen bildet einen Körper.

8.3.10 Beweis

(i) Ist $a \in P_f$, so gibt es ein $\delta > 0$ so, dass $|f(z)| \leq 1$ für $z \in \dot{U}_\delta(a)$. Dann ist $|\frac{1}{f(z)}| \leq 1$ für $z \in \dot{U}_\delta(a)$ und a ist eine hebbare Singularität für g . Weiter ist $g(a) = 0$. Es folgt $N_g \supseteq P_f$ und dann $N_g = P_f$.

Vertauscht man nun die Rollen von f und g , so folgt auch $P_g = N_f$.

(ii) Wir zeigen die Behauptung durch die folgende Kette von Äquivalenzen.

f hat bei a eine Nullstelle der Ordnung m .

\iff Es ex. $\delta > 0$ und eine holomorphe Funktion $h : U_\delta(a) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ so, dass

$$f(z) = (z - a)^m \cdot h(z), \quad z \in U_\delta(a).$$

$\xleftrightarrow{\text{Satz 8.2.1}}$ Es ex. $\delta > 0$ und eine holomorphe Funktion $h : U_\delta(a) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ so, dass

$$f(z) = (z - a)^m \cdot h(z), \quad z \in \dot{U}_\delta(a).$$

\iff Es ex. $\delta > 0$ und eine holomorphe Funktion $h : U_\delta(a) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ so, dass

$$(z - a)^m \cdot g(z) = h(z), \quad z \in \dot{U}_\delta(a).$$

\iff g hat bei a eine Polstelle der Ordnung m .

8.3.11 Beispiele

- Alle holomorphen Funktionen wie

$$z^n, \quad \exp(z), \quad \ell_\varphi(z) \quad \sin(z), \quad \cos(z),$$

und deren Summen, Differenzen, Produkte sind meromorph.

- Weiter sind alle b.a.S.h.Funktionen, die Quotienten aus holomorphen Funktionen sind, meromorph, beispielsweise rationale Funktionen und

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}, \quad \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}.$$

- Es gibt viele weitere durch Grenzprozesse definierte meromorphe Funktionen, beispielsweise die

Gamma-Funktion, elliptische Funktionen, Zeta-Funktion(en), Theta-Funktion(en), Weierstrass'sche \wp -Funktion und so genannte Modulformen.

- Kompositionen von meromorphen Funktionen sind nicht notwendig meromorph. Beispielsweise sind die Funktionen

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right), \quad \sin\left(\frac{1}{z}\right).$$

nicht meromorph, da sie bei $a = 0$ eine wesentlichen Singularität haben.

8.3.12 Bemerkung

Es gibt einige interessante Unterkörper des Körpers der meromorphen Funktionen, beispielsweise den der rationalen Funktionen oder den der elliptischen Funktionen.

8.4 Die Windungszahl

8.4.1 Satz und Definition: Windungszahl

Es sei ω ein geschlossener Weg in \mathbb{C} . Dann ist die Funktion

$$\chi(\omega, \cdot) : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \text{spur } \omega & \rightarrow \mathbb{Z} \\ z & \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{1}{w-z} dw \end{cases}$$

wohldefiniert und stetig. Sie heißt die *Windungszahl* (manchmal auch *Index*) des geschlossenen Wegs.

8.4.2 Beweis

(1) Jeder geschlossene Weg ist eine formale (endliche) Summe von geschlossenen (stetigen) stückweise stetig differenzierbaren Wegen, siehe Abschnitt 4.3.4. Deshalb muss die Behauptung nur für solche gezeigt werden.

(2) Es seien also $\omega : [r, s] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener stetiger stückweise stetig differenzierbarer Weg und $z \in \mathbb{C} \setminus \text{spur } \omega$. Die Funktion

$$F : \begin{cases} [r, s] & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto \frac{\exp\left(\int_r^t \frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau)-z} d\tau\right)}{\frac{\omega(t)-z}{\omega(r)-z}} \end{cases}$$

ist konstant gleich 1, wie man durch Auswertung an der Stelle $t = r$ und Differentiation mittels Quotientenregel nachweisen kann:

$$F'(t) = \frac{\frac{\omega'(t)}{\omega(t)-z} \cdot \exp\left(\int_r^t \frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau)-z} d\tau\right) \cdot \frac{\omega(t)-z}{\omega(r)-z} - \exp\left(\int_r^t \frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau)-z} d\tau\right) \cdot \frac{\omega'(t)}{\omega(r)-z}}{\left(\frac{\omega(t)-z}{\omega(r)-z}\right)^2} = 0.$$

(3) Schließlich ist

$$F(s) = \exp\left(\int_r^s \frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau)-z} d\tau\right) = 1$$

und damit

$$\int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw = \int_r^s \frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau)-z} d\tau = k \cdot 2\pi i \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

(4) Es ist

$$|\chi(\omega, z) - \chi(\omega, \tilde{z})| = \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \int_{\omega} \frac{z-\tilde{z}}{(w-z)(w-\tilde{z})} dw \right| \leq \frac{L(\omega) \cdot |z-\tilde{z}|}{2\pi \min\{\text{dist}(z, \text{spur } \omega), \text{dist}(\tilde{z}, \text{spur } \omega)\}},$$

was die Stetigkeit zeigt.

8.4.3 Satz: Zusammenhangskomponenten

Es sei ω ein geschlossener Weg in \mathbb{C} .

Das Gebiet $\mathbb{C} \setminus \text{spur } \omega$ besteht aus mehreren offenen Zusammenhangskomponenten (= maximalen zusammenhängenden Teilgebieten). Es gilt:

- (i) Die Windungszahl ist auf den Zusammenhangskomponenten konstant.
- (ii) Genau eine Zusammenhangskomponente ist unbeschränkt, auf ihr ist die Windungszahl gleich Null.

8.4.4 Beweis

Die Aussage (i) ist eine Konsequenz davon, dass die Windungszahl stetig und ganzzahlig ist. Sie entstammt der allgemeinen „Zusammenhangs-Lehre“.

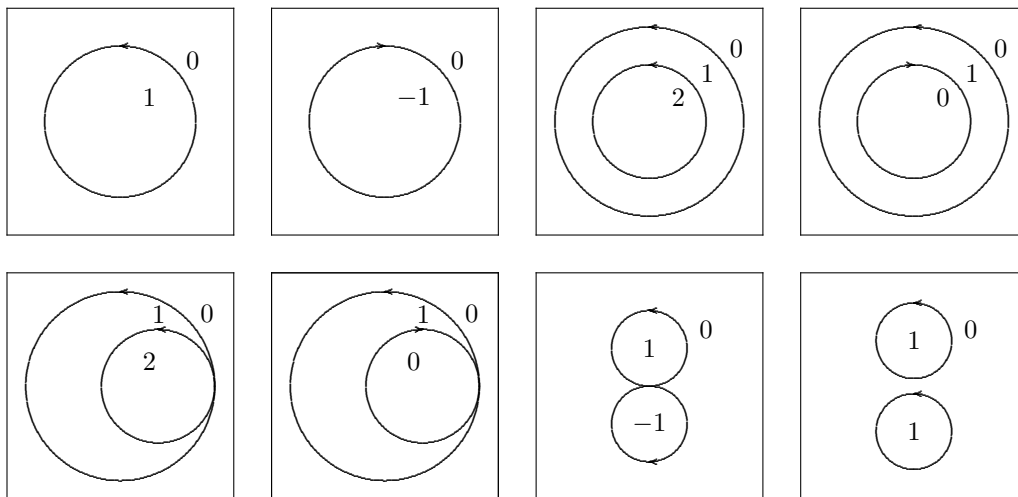
(ii) Da die Menge $\text{spur } \omega$ kompakt ist, lässt sie sich in einer kompakten Kreisscheibe $B_r(0)$ einschließen.

Weiter ist

$$|\chi(\omega, z)| = \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \int_{\omega} \frac{1}{(w-z)} dw \right| \leq \frac{L(\omega)}{2\pi \text{dist}(z, \text{spur } \omega)}.$$

Dieser Ausdruck geht für eine Folge (z_n) mit $|z_n| \rightarrow \infty$ gegen Null.

8.4.5 Bildchen



8.5 Das Residuum

8.5.1 Definition: Residuum

Es seien f eine b.a.S.h. Funktion auf Ω und $a \in A_f$.

Wie in Abschnitt 8.1.5 beschrieben, existiert dann eine Laurent-Entwicklung

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} p_{-k} \left(\frac{1}{z-a}\right)^k}_{\text{konvergent auf } \mathbb{C} \setminus \{a\}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} p_k (z-a)^k}_{\text{konvergent auf } U_{\delta}(a)} \\
 &= \dots + \frac{p_{-3}}{(z-a)^3} + \frac{p_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{p_{-1}}{z-a} + p_0 + p_1(z-a) + p_2(z-a)^2 + \dots
 \end{aligned}$$

Bei der Berechnung des Kurvenintegrals über eine Kreislinie $\kappa_r(a)$, $r < \delta$, stellt sich unter Beachtung von 4.2.4 (e) heraus, dass

$$\int_{\kappa_r(a)} f(z) dz = \int_{\kappa_r(a)} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k (z-a)^k \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \int_{\kappa_r(a)} (z-a)^k = p_{-1} \cdot 2\pi i.$$

Die auf diese Weise bedeutungsvolle komplexe Zahl

$$\text{Res}(f, a) := p_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\kappa_r(a)} f(z) dz$$

heißt das *Residuum* (der b.a.S.h. Funktion f bei der Singularität a).

8.5.2 Satz: Berechnung des Residuums von meromorphen Funktionen

Es seien f, g meromorphe Funktionen auf Ω und $a \in A_f$.

Dann gelten die folgenden Formeln.

- (i) $\text{ord}(f, a) = k \in \mathbb{N}_0 \implies \text{Res}(f, a) = 0$
- (ii) $\text{ord}(f, a) = -k, k \in \mathbb{N} \implies \text{Res}(f, a) = \frac{([[(z-a)^k f(z)]^\wedge]^{(k-1)}(a))}{(k-1)!}$
- (iii) $\left. \begin{array}{l} \text{ord}(f, a) \geq 0 \\ \text{ord}(g, a) = 1 \end{array} \right\} \implies \text{Res}\left(\frac{f}{g}, a\right) = \frac{f(a)}{g'(a)}$
- (iv) $\left. \begin{array}{l} \text{ord}(f, a) \in \mathbb{Z} \\ \text{ord}(g, a) \geq 0 \end{array} \right\} \implies \text{Res}\left(g \cdot \frac{f'}{f}, a\right) = g(a) \cdot \text{ord}(f, a)$
- (v) $\text{ord}(f, a) \in \mathbb{Z} \implies \text{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = \text{ord}(f, a)$.

8.5.3 Beweis

(i) ist trivial, (v) folgt aus (iv).

(ii) Wir schreiben die Laurent-Entwicklung hin und schließen

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{p_{-k}}{(z-a)^k} + \frac{p_{-k+1}}{(z-a)^{k-1}} + \dots + \frac{p_{-1}}{z-a} + p_0 + p_1(z-a) + \dots \\ [(z-a)^k f(z)]^\wedge &= p_{-k} + p_{-k+1}(z-a) + \dots + p_{-1}(z-a)^{k-1} \\ &\quad + p_0(z-a)^k + p_1(z-a)^{k+1} + \dots \\ ([(z-a)^k f(z)]^\wedge)^{(k-1)}(a) &= (k-1)! p_{-1}. \end{aligned}$$

(iii) Wir setzen die Laurent-Entwicklungen für f, g und $\frac{f}{g}$ an:

$$\begin{aligned} f(z) &= p_0 + p_1(z-a) + p_2(z-a)^2 + \dots \\ g(z) &= q_1(z-a) + q_2(z-a)^2 + \dots \\ \left[\frac{f}{g}\right](z) &= \frac{r_{-1}}{z-a} + r_0 + r_1(z-a) + r_2(z-a)^2 + \dots \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich zeigt

$$r_{-1} \cdot q_1 = p_0$$

und damit

$$r_{-1} = \frac{p_0}{q_1} = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

(iv) Mit $k := \text{ord}(f, a)$ setzen wir die Laurent-Entwicklungen für f, f', g und $\frac{f'}{f}$ an:

$$\begin{aligned} f(z) &= p_k(z-a)^k + p_{k+1}(z-a)^{k+1} + p_{k+2}(z-a)^{k+2} + \dots \\ f'(z) &= k p_k(z-a)^{k-1} + (k+1)p_{k+1}(z-a)^k + (k+2)p_{k+2}(z-a)^{k+1} + \dots \\ g(z) &= q_0 + q_1(z-a) + q_2(z-a)^2 + \dots \\ \left[g \cdot \frac{f'}{f}\right](z) &= \frac{r_{-1}}{z-a} + r_0 + r_1(z-a) + r_2(z-a)^2 + \dots \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich zeigt

$$r_{-1} \cdot p_k = q_0 \cdot k \cdot p_k$$

und damit

$$r_{-1} = q_0 \cdot k = g(a) \cdot \text{ord}(f, a).$$

8.5.4 Beispiel 1

$f(z) = \frac{z}{z^2 - 2iz + 8}$. Berechne die Residuen in den Singularitäten.

8.5.5 Beispiel 2

$f(z) = \cot z$. Berechne die Residuen in den Singularitäten.

8.6 Der Residuensatz

8.6.1 Der Residuensatz

Es seien Ω ein Gebiet und f eine b.a.S.h. Funktion auf Ω . Es sei weiter ω ein geschlossener Weg in Ω so, dass $A_f \cap \text{spur } \omega = \emptyset$.

Dazu seien weiter die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

- Ω ist sternförmig.
- $A_f = \{a_1, \dots, a_n\}$ ist endlich.

Dann gilt die folgende Formel

$$\int_{\omega} f = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^n [\text{Res}(f, a_j) \cdot \chi(\omega, a_j)].$$

8.6.2 Beweis

(1) Wir betrachten zu jedem a_j den Hauptteil

$$z \mapsto f_{\text{au},j}\left(\frac{1}{z-a_j}\right) = \sum_{k=-\infty}^{-1} p_k^{(j)}(z-a_j)^k,$$

wobei $f_{\text{au},j} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf ganz \mathbb{C} ist.

(2) Die Hilfsfunktion

$$g : \begin{cases} \Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto f(z) - \sum_{j=1}^n f_{\text{au},j}\left(\frac{1}{z-a_j}\right) \end{cases}$$

ist eine b.a.S.h. Funktion auf Ω , bei der alle Singularitäten hebbar sind. Die Funktion \hat{g} ist also holomorph auf Ω .

(3) Es sind dann für Ω , f und ω die Voraussetzungen des Cauchy-Integralsatzes (Rundumsatz 5.2.1 (H) \Rightarrow (N)) erfüllt. Deswegen ist

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\omega} \hat{g} = \int_{\omega} \left[f(z) - \sum_{j=1}^n f_{\text{au},j}\left(\frac{1}{z-a_j}\right) \right] dz \\ &= \int_{\omega} f - \sum_{j=1}^n \int_{\omega} \sum_{k=-\infty}^{-1} p_k^{(j)}(z-a_j)^k dz \\ &= \int_{\omega} f - \sum_{j=1}^n p_{-1}^{(j)} \int_{\omega} (z-a_j)^{-1} dz \\ &= \int_{\omega} f - 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^n [\text{Res}(f, a_j) \cdot \chi(\omega, a_j)]. \end{aligned}$$

8.6.3 Bemerkungen

- Ist f holomorph, so sind alle Residuen gleich Null. Der Residuensatz reduziert sich auf den Cauchyschen Integralsatz.
- Für $f = \frac{1}{z-a}$ erhält man die Definition der Umlaufzahl zurück.

8.6.4 Problem

(1) Die Funktion $f(z) = \frac{1}{\sin}(z)$ ist eine b.a.S.h. Funktion auf \mathbb{C} mit unendlich vielen Singularitäten.

(2) Die Funktion $f(z) = \frac{1}{\sin}\left(\frac{1}{z}\right)$ ist eine b.a.S.h. Funktion auf $\dot{U}_4(0)$ mit unendlich vielen Singularitäten.

Das bedeutet zunächst, dass der Residuensatz in der obigen Form nicht für die Berechnung des Kurvenintegrals über $\kappa_1(2)$ herangezogen werden kann. Natürlich lässt sich das Problem hier ganz leicht beheben, in dem man das Definitions-Gebiet der Funktionen geeignet einschränkt, beispielsweise auf $U_{\frac{3}{2}}(2)$.

Diese Situation ist etwas unbefriedigend, es tun sich einige Fragen auf:

- Die Singularitäten „außerhalb der Kurve“ haben ja offenbar gar keinen Einfluss auf das Integral. Wenn es unendlich viele sind, sollte man sie doch irgendwie — in den Voraussetzungen — beseitigen können.
- Was bedeutet eigentlich „außerhalb der Kurve“?
- Könnte man nicht die Singularitäten außerhalb einfach aus der Definitionsmenge streichen? Dann besteht aber die Frage, ob die neue Definitionsmenge noch offen ist.
- Könnte man nicht kleine Scheiben um die Häufungsstellen der Singularitäten (sie sind ja am Rand der Definitionsmenge) aus der Definitionsmenge entfernen? Dann besteht aber die Frage, ob die neue Definitionsmenge noch sternförmig ist.

Es scheinen also Techniken zur geeigneten Manipulation der Definitionsmenge gefragt.

Einen Ausweg in eine ganz andere Richtung bietet der Begriff der „Homologie“.

8.6.5 Beispiel. Aufgabe F16 T1 A1

(a) Finden Sie eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$, welche in den Punkten -1 und 1 wesentliche Singularitäten mit den Residuen

$$\operatorname{Res}_{-1}(f) = -1, \quad \operatorname{Res}_1(f) = 1$$

besitzt. Ist f durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt?

(b) Sei f die in (a) gefundene Funktion. Für $\alpha \in [0, \infty[$ sei γ_α der geschlossene Weg, der die Punkte

$$2 + \alpha i, \quad -2 - i, \quad -2 + i, \quad 2 - \alpha i, \quad 2 + \alpha i$$

in der angegebenen Reihenfolge durch Geradenstücke verbindet. Für welche Werte von α ist das komplexe Wegintegral

$$\int_{\gamma_\alpha} f(z) dz$$

definiert? Berechnen Sie das Integral für diese Werte von α .

8.6.6 Lösung

(a) Man verwende die Funktion $z \mapsto \exp(\frac{1}{z})$. Es ist das Standardbeispiel für eine Funktion mit wesentlicher Singularität.

Die Funktion $z \mapsto \exp(\frac{1}{z-1})$ hat Singularität bei $z = 1$ und Residuum $+1$.

Die Funktion $z \mapsto -\exp(\frac{1}{z+1})$ hat Singularität bei $z = -1$ und Residuum -1 .

Also erfüllt $f : z \mapsto \exp(\frac{1}{z-1}) - \exp(\frac{1}{z+1})$ die Anforderungen der Teilaufgabe.

f ist keineswegs eindeutig bestimmt. Addition einer beliebigen ganzen (=auf \mathbb{C} holomorphen) Funktion verändert nicht die Menge der Singularitäten oder die Residuen. Ein anderes Beispiel wäre $g : z \mapsto \sin(\frac{1}{z-1}) - \sin(\frac{1}{z+1})$.

(b) Zeichne den geschlossenen Weg. Mit dem Schul-Strahlensatz ist zu sehen, dass die beiden Strecken $\sigma(2 + \alpha i, -2 - i)$ und $\sigma(-2 + i, 2 - \alpha i)$ die Singularitäts-Stellen -1 und $+1$ genau dann passieren, wenn

$$\alpha = \frac{1}{3} \quad \text{oder} \quad \alpha = 3.$$

Also ist das Wegintegral für alle $\alpha > 0$ mit $\alpha \neq \frac{1}{3}$ und $\alpha \neq 3$ definiert.

Es ist gemäß Residuensatz

$$\int_{\gamma_\alpha} f(z) dz = 2\pi i \cdot [\operatorname{Res}(f, -1) \cdot n(\gamma_\alpha, -1) + \operatorname{Res}(f, +1) \cdot n(\gamma_\alpha, +1)].$$

Zur Berechnung des Wertes unterscheiden wir drei Fälle.

$\alpha < \frac{1}{3}$ Es ist

$$\begin{aligned} \alpha < \frac{1}{3} : \quad & \int_{\gamma_\alpha} f(z) dz = 2\pi i \cdot [(-1) \cdot (-1) + (+1) \cdot (-1)] = 0 \\ \frac{1}{3} < \alpha < 3 : \quad & \int_{\gamma_\alpha} f(z) dz = 2\pi i \cdot [(-1) \cdot (-1) + (+1) \cdot (+1)] = 4\pi i \\ 3 < \alpha : \quad & \int_{\gamma_\alpha} f(z) dz = 2\pi i \cdot [(-1) \cdot (+1) + (+1) \cdot (+1)] = 0. \end{aligned}$$

9 Homologie – Homotopie

Dieses Kapitel wurde in der eigentlichen Vorlesung nur im Überblick behandelt.

9.1 Begriffe der Homologie

9.1.1 Definition: Homologisch Inneres und Äußeres

In Abhängigkeit von einem fest gegebenen Weg ω definieren wir das (*homologisch*) *Innere* und *Äußere*

$$\text{Int}(\omega) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{spur}(\omega) \mid \chi(\omega, z) \neq 0\}$$

$$\text{Ext}(\omega) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{spur}(\omega) \mid \chi(\omega, z) = 0\}$$

sowie die Teilmengen

$$\text{Ext}_{\text{unb}}(\omega) := \text{Unbeschränkte Zusammenhangskomponente}$$

$$\text{Ext}_{\text{bes}}(\omega) := \text{Ext}(\omega) \setminus \text{Unbeschränkte Zusammenhangskomponente.}$$

Es ist dann

$$\mathbb{C} = \underbrace{\text{Int}(\omega) \cup \text{spur}(\omega)}_{\text{kompakt}} \cup \text{Ext}(\omega) \quad (\text{disjunkt})$$

$$\mathbb{C} = \underbrace{\text{Int}(\omega) \cup \text{Ext}_{\text{bes}} \cup \text{spur}(\omega)}_{\text{kompakt}} \cup \text{Ext}_{\text{unb}}(\omega) \quad (\text{disjunkt}).$$

9.1.2 Zur Beachtung

Man beachte, dass nur in einfacheren Ausnahmefällen das homologisch Innere eines eine kompakte Menge berandenden geschlossenen Weges mit dem topologisch Inneren der Menge übereinstimmt.

9.1.3 Definition: Nullhomologer Weg

Ein geschlossener Weg ω in Ω heißt *nullhomolog in Ω* , wenn

$$\text{Int}(\omega) \subseteq \Omega \quad \text{oder äquivalent} \quad \mathbb{C} \setminus \Omega \subseteq \text{Ext}(\omega).$$

9.1.4 Beispiele: Nullhomologe Wege

1. Jeder geschlossene Weg ist nullhomolog in \mathbb{C} .
2. Jeder geschlossene Weg in $U_1(0)$ ist nullhomolog in $U_1(0)$.
3. Die \mathcal{C}^1 -Kurve $\kappa_1(0)$ ist nicht nullhomolog in \mathbb{C}^\times .
4. Der geschlossene Weg $\kappa_2(0) - \kappa_1(0)$ ist nullhomolog in \mathbb{C}^\times .

9.1.5 Vorbereitung

Bei gegebener holomorpher Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definieren wir die „Differenzenquotient-Funktion“

$$f^\Delta : \begin{cases} \Omega \times \Omega & \rightarrow \mathbb{C} \\ (w, z) & \mapsto \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & \text{falls } z \neq w, \\ f'(z), & \text{falls } z = w. \end{cases} \end{cases}$$

Dann sind die partiellen Funktionen $f^\Delta(w, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ und $f^\Delta(\cdot, z) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ für jeweils festes $w \in \Omega$ bzw. festes $z \in \Omega$ holomorph.

9.1.6 Beweis

Die Funktion $f^\Delta(\cdot, w)$ ist stetig auf Ω und holomorph auf $\Omega \setminus \{w\}$, dann wegen des Riemannsches Hebbarkeitssatzes holomorph auf ganz Ω .

Alternativ kann man auch mit den Sätzen 4.5.6 und 5.2.1 argumentieren.

9.2 Die Cauchy-Sätze — Homologische Versionen

9.2.1 Die Cauchy-Sätze — Homologische Versionen

Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und ω ein nullhomologer Weg in Ω .

Dann gelten die folgenden Aussagen.

(C) Für alle holomorphen Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ gilt die Cauchysche Integralformel

$$\chi(\omega, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \text{für alle } z \in \Omega \setminus \text{spur}(\omega).$$

(N) Für alle holomorphen Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ gilt der Cauchysche Integralsatz

$$\int_{\omega} f = 0.$$

(R) Für alle auf Ω b.a.S.h.Funktionen f mit $A_f \cap \text{spur}(\omega) = \emptyset$ ist

$$A_f \cap \text{Int}(\omega) = \{a_1, \dots, a_n\} \text{ endlich}$$

und es gilt der Residuensatz

$$\int_{\omega} f = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^n [\text{Res}(f, a_j) \cdot \chi(\omega, a_j)].$$

9.2.2 Bemerkung

Während der Rundum-Satz

- eine bestimmte Funktion bei beliebigen geschlossenen Wegen in den Blick nimmt, und dabei die Bedeutung der Holomorphie herausarbeitet
- nimmt die homologische Version einen bestimmten geschlossenen Weg bei beliebigen holomorphen Funktionen in den Blick und arbeitet den Begriff der Homologie heraus.

9.2.3 Beweis

(1) Wir zeigen (C). Dazu definieren wir die Funktion

$$g : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \begin{cases} \int_{\omega} f^{\Delta}(w, z) dw, & \text{falls } z \in \Omega \\ \int_{\omega} \frac{f(w)}{w-z} dw, & \text{falls } z \in \text{Ext}(\omega). \end{cases} \end{cases}$$

(2) Wegen

$$\begin{aligned} \int_{\omega} f^{\Delta}(w, z) dw &= \int_{\omega} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw = \int_{\omega} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \cdot \underbrace{\int_{\omega} \frac{1}{w-z} dw}_{\chi(\omega, z)=0} \\ &= \int_{\omega} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \text{für alle } z \in \Omega \cap \text{Ext}(\omega) \end{aligned}$$

und

$$\mathbb{C} = \text{Int}(\omega) \cup \text{spur}(\omega) \cup \text{Ext}(\omega) \stackrel{\omega \text{ null-hlg.}}{\subseteq} \Omega \cup \text{Ext}(\omega)$$

ist g wohldefiniert.

(3) Die Integranden-Funktionen in den beiden Zeilen sind jeweils holomorph in z und stetig in w , bei Integration über einen w -Weg resultieren holomorphe Funktionen auf Ω bzw. $\text{Ext}(\omega)$. g ist also als ganzes holomorph.

(4) Es existiert ein $r > 0$ so, dass $\text{spur}(\omega) \subseteq B_r(0)$. Für alle $R > r$ und $z \in U_{R,\infty}(0) \subseteq \text{Ext}(\omega)$ ist dann

$$|g(z)| = \left| \int_{\omega} \frac{f(w)}{w-z} dw \right| \leq \frac{L(\omega) \cdot \max\{|f(B_r(0))\}}{\text{dist}(z, B_r(0))} \leq \frac{L(\omega) \cdot \max\{|f(B_r(0))\}}{R-r}$$

Das bedeutet, dass g beschränkt ist. Gemäß Satz von Liouville ist g konstant. Mit $R \rightarrow \infty$ folgt, dass $g \equiv 0$ ist.

(5) Für $z \in \Omega \setminus \text{spur}(\omega)$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &= g(z) = \int_{\omega} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw = \int_{\omega} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{\omega} \frac{f(z)}{w-z} dw \\ &= \int_{\omega} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \cdot \chi(\omega, z). \end{aligned}$$

(C) \Rightarrow (N). Für festes $z \in \mathbb{C} \setminus \text{spur}(\omega)$ betrachten wir die holomorphe Funktion

$$h: \begin{cases} \Omega & \rightarrow \mathbb{C} \\ w & \mapsto f(w) \cdot (w-z) \end{cases}$$

und wenden darauf die Integralformel aus (C) an:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} f(w) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{h(w)}{w-z} dw = \chi(\omega, z) \cdot h(z) = 0.$$

(N) \Rightarrow (R).

(1) Gemäß Satz 1.5.7 ist

$$A_f \cap \text{Int}(\omega) \subseteq \underbrace{A_f}_{\text{diskret in } \Omega} \cap \underbrace{(\text{Int}(\omega) \cup \text{spur}(\omega))}_{\text{kompakt}}$$

endlich. Es sei $A_f = \{a_1, \dots, a_n\}$.

(2) Wir betrachten zu jedem a_j den Hauptteil

$$z \mapsto f_{\text{au},j}\left(\frac{1}{z-a_j}\right) = \sum_{k=-\infty}^{-1} p_k^{(j)}(z-a_j)^k,$$

wobei $f_{\text{au},j} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf ganz \mathbb{C} ist.

(3) Die Hilfsfunktion

$$g: \begin{cases} \Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto f(z) - \sum_{j=1}^n f_{\text{au},j}\left(\frac{1}{z-a_j}\right) \end{cases}$$

ist eine b.a.S.h. Funktion auf Ω , bei der alle Singularitäten hebbar sind. Die Funktion g ist also holomorph auf Ω .

(4) Aufgrund des Cauchy-Integralsatzes 9.2.1 in der homologischen Version gilt dann

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\omega} g = \int_{\omega} \left[f(z) - \sum_{j=1}^n f_{\text{an},j} \left(\frac{1}{z-a_j} \right) \right] dz \\ &= \int_{\omega} f - \sum_{j=1}^n \int_{\omega} \sum_{k=-\infty}^{-1} p_k^{(j)} (z-a_j)^k dz \\ &= \int_{\omega} f - \sum_{j=1}^n p_{-1}^{(j)} \int_{\omega} (z-a_j)^{-1} dz \\ &= \int_{\omega} f - 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^n [\text{Res}(f, a_j) \cdot \chi(\omega, a_j)]. \end{aligned}$$

9.3 Einfach zusammenhängende Gebiete

9.3.1 E-Satz und Definition: Einfach zusammenhängendes Gebiet

Die folgenden Aussagen über ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sind äquivalent.

(E₁) (Def) Das Gebiet heißt *einfach zusammenhängend*.

(E₂) Alle geschlossenen Wege in Ω sind nullhomolog.

(In der Literatur findet man auch, dass Gebiete mit dieser Eigenschaft „homologisch einfach zusammenhängend“ heißen.)

(E₃) Für jede holomorphe Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ und jeden geschlossenen Weg ω in Ω gilt

$$\int_{\omega} f = 0.$$

(In der Literatur findet man auch, dass Gebiete mit dieser Eigenschaft Elementargebiete heißen.)

(E₄) Jede holomorphe Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ hat eine Stammfunktion.

(E₅) Jede harmonische Abbildung $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist Realteil einer holomorphen Abbildung $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Dabei heißt eine Abbildung $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ *harmonisch*, wenn sie als reelle Funktion eine \mathcal{C}^2 -Funktion ist und die partielle Differentialgleichung $\partial_x \partial_x u + \partial_y \partial_y u = 0$ erfüllt.

(E₆) Zu jeder holomorphen Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\times$ gibt es eine holomorphe Logarithmusfunktion, d.h. eine Funktion $\ell : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ so, dass $f = \exp \circ \ell$.

(E₇) Zu jeder holomorphen Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\times$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert auf Ω eine *n-te Wurzel-Funktion* für f , das ist eine holomorphe Funktion $w : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\times$ so, dass

$$(w(z))^n = f(z), \quad z \in \Omega.$$

(E₈) Zu jeder holomorphen Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\times$ existiert auf Ω eine *Quadratwurzel-Funktion* für f , das ist eine holomorphe Funktion $w : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\times$ so, dass

$$(w(z))^2 = f(z), \quad z \in \Omega.$$

(E₉) Es gibt eine biholomorphe Abbildung $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ oder $g : \Omega \rightarrow U_1(0)$.

(E₁₀) Ω hat kein „Loch“. Das heißt genauer, dass eine kompakte Zusammenhangskomponente K des Komplements von Ω leer sein muss:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{C} \setminus \Omega = K \cup A \\ K \cap A = \emptyset \\ K \text{ kompakt} \\ A \text{ abgeschlossen} \end{array} \right\} \implies K = \emptyset.$$

(E₁₁) Es besteht ein Homöomorphismus $H : \Omega \rightarrow U_1(0)$.

(Ein Homöomorphismus ist eine stetige bijektive Abbildung mit stetiger Umkehrabbildung.)

(E₁₂) Alle geschlossenen stetigen Kurven γ in Ω sind *nullhomotop*, d.h. sie lassen sich stetig zu einer Stelle $a \in \Omega$ zusammenziehen. Das heißt noch genauer:

Zu jeder geschlossenen stetigen Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ existiert eine stetige Abbildung

$$\eta : \begin{cases} [0, 1] \times [0, 1] & \rightarrow \Omega \\ (t, s) & \mapsto \eta(t, s) \end{cases}$$

so, dass

$$\eta(t, 0) = \gamma(t), \quad \text{für alle } t \in [0, 1]$$

$$\eta(t, 1) = a, \quad \text{für alle } t \in [0, 1]$$

$$\eta(0, s) = \eta(1, s). \quad \text{für alle } s \in [0, 1].$$

(In der Literatur findet man auch, dass Gebiete mit dieser Eigenschaft „homotopisch einfach zusammenhängend“ heißen.)

9.3.2 Bemerkung zum Namen „E-Satz“

Der Buchstabe E steht für eine ganze Reihe von Begriffen, die in dem Satz auftauchen:

- Einfach zusammenhängendes Gebiet
- Elementargebiet
- Existenz von Stammfunktionen, harmonisch konjugierten Funktionen, Logarithmen, Wurzeln
- In mehr differentialgeometrischer Sprache heißt eine 1-Form $f(z) dz$, wobei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, **exakt**, wenn es eine 0-Form F gibt, deren „äußeres Differential“ $dF = f$ ist.

Im Spezialfall einer 1-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit, beispielsweise einem Gebiet, ist diese 0-Form das gleiche wie eine Stammfunktion von f .

9.3.3 Beweis

(E₂) \Rightarrow (E₃). Diese Implikation ist die gleiche wie (O) \Rightarrow (N) in Satz 9.2.1.

(E₃) \Leftrightarrow (E₄) \Leftrightarrow (E₆) \Rightarrow (E₇). Diese Implikationen sind uns aus den Sätzen ?? und ?? wohlbekannt.

(E₇) \Rightarrow (E₈) ist trivial.

(E₈) \Rightarrow (E₉) Diese Implikation ist das Herzstück des ganzen Satzes. Bei dieser Aussage handelt es sich um den Riemannsches Abbildungssatz. Vielleicht wird er in FTH2 bewiesen.

Die meisten anderen Implikationen beweisen wir in den folgenden extra Abschnitten.

9.3.4 (E₃) ⇒ (E₂)

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ ist die Funktion $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ holomorph auf Ω , deshalb

$$\chi(\omega, z) = \int_{\omega} \frac{1}{w-z} dw = 0.$$

und es folgt $z \in \text{Ext}(\omega)$.

9.3.5 (E₄) ⇒ (E₅)

Es sei also $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch. Wir wählen ein $a \in \Omega$.

Wir definieren die Funktion

$$f : \begin{cases} \Omega & \rightarrow \mathbb{C} \\ z = (x, y) & \mapsto \partial_x u - i\partial_y u. \end{cases}$$

Für f gelten dann die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_x(\text{Re } f) &= \partial_x^2 u = -\partial_y^2 u = \partial_y(\text{Im } f) \\ \partial_y(\text{Re } f) &= \partial_y \partial_x u = \partial_x \partial_y u = -\partial_x(\text{Im } f), \end{aligned}$$

also ist f holomorph.

Gemäß Voraussetzung (E₄) hat f eine Stammfunktion $F = U + iV$, es kann dabei U so gewählt werden, dass $U(a) = u(a)$. Weiter ist dann

$$\partial_x u = \text{Re } f = \text{Re}(F') = \partial_x U,$$

es folgt also $U = u$. Damit ist F die gesuchte holomorphe Funktion.

9.3.6 (E₅) ⇒ (E₆)

Es sei $f = u + iv : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\times$ holomorph. Wir rechnen zunächst nach, dass $\log |f| : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch ist. Dabei setzen wir $u_x = \partial_x u$, $u_x = \partial_x(\partial_x u)$ usw.

Es ist

$$\partial_x(\log \sqrt{u^2 + v^2}) = \frac{2uu_x + 2vv_x}{2\sqrt{u^2 + v^2}\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{uu_x + vv_x}{u^2 + v^2}$$

und dann weiter

$$\begin{aligned} & \partial_x^2(\log \sqrt{u^2 + v^2}) + \partial_y^2(\log \sqrt{u^2 + v^2}) \\ &= \frac{(u_x u_x + u_{xx} u + v_x v_x + v_{xx} v)(u^2 + v^2) - (uu_x + vv_x)(2uu_x + 2vv_x)}{(u^2 + v^2)^2} \\ & \quad + \frac{(u_y u_y + u_{yy} u + v_y v_y + v_{yy} v)(u^2 + v^2) - (uu_y + vv_y)(2uu_y + 2vv_y)}{(u^2 + v^2)^2} \\ &= \frac{(u_x u_x + u_{xx} u + v_x v_x + v_{xx} v)(u^2 + v^2) - (uu_x + vv_x)(2uu_x + 2vv_x)}{(u^2 + v^2)^2} \\ & \quad + \frac{(v_x v_x - v_{xx} u + u_x u_x - u_{xx} v)(u^2 + v^2) - (-uv_x + vu_x)(-2uv_x + 2vu_x)}{(u^2 + v^2)^2} \\ &= \frac{2(u_x^2 + v_x^2)(u^2 + v^2) - 2(uu_x + vv_x)^2 - 2(vu_x - uv_x)^2}{(u^2 + v^2)^2} \\ &= \frac{2(u_x^2 u^2 + u_x^2 v^2 + v_x^2 u^2 + v_x^2 v^2) - 2(u^2 u_x^2 + 2uu_x vv_x + v^2 v_x^2) - 2(v^2 u_x^2 - 2uu_x vv_x + u^2 v_x^2)}{(u^2 + v^2)^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Gemäß Voraussetzung (E_5) existiert also eine holomorphe Funktion $\tilde{\ell} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \tilde{\ell} = \log |f|$. Für diese Funktion gilt

$$\left| \frac{\exp(\tilde{\ell}(z))}{f(z)} \right| = \frac{\exp(\operatorname{Re} \tilde{\ell}(z))}{|f(z)|} = \frac{|f(z)|}{|f(z)|} = 1.$$

Daraus folgt (Übung 3/Aufgabe 8), dass die Funktion $\frac{\exp(\tilde{\ell}(z))}{f(z)}$ selbst konstant, also gleich $e^{i\alpha}$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ ist.

Mit $\ell(z) := \tilde{\ell}(z) - i\alpha$ gilt dann

$$\exp(\ell(z)) = \exp(\tilde{\ell}(z) - i\alpha) = \exp(\tilde{\ell}(z)) \cdot e^{-i\alpha} = f(z) \cdot e^{i\alpha} \cdot e^{-i\alpha} = f(z).$$

Damit haben wir eine holomorphe Logarithmusfunktion für f gefunden.

9.3.7 (E_2) \Rightarrow (E_{10}): Lemma von Saks-Zygmund

Es sei Ω ein Gebiet mit einem Loch, d.h. es ist $\Omega = \tilde{\Omega} \setminus K$, wobei $\tilde{\Omega}$ ein Gebiet und $K \subseteq \tilde{\Omega}$ nicht-leer und kompakt ist.

Dann gibt es einen geschlossenen Weg in Ω , der nicht nullhomolog in Ω ist.

9.3.8 Satz: Abstand kompakt — abgeschlossen

Es seien $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt, nicht-leer und $A \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen mit

$$K \cap A = \emptyset.$$

(Anstelle von \mathbb{C} kann hier auch ein beliebiger \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n den Kontext bilden.) Dann ist der Abstand der beiden Mengen positiv.

$$\operatorname{dist}(K, A) := \inf\{|z - w| \mid z \in K, w \in A\} > 0.$$

9.3.9 Beweis

Wäre der Abstand gleich Null, so könnte man eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A finden mit

$$\operatorname{dist}(K, a_n) := \inf\{|a_n - z| \mid z \in K\} < \frac{1}{n}.$$

Da die Folge in einer kompakten Teilmenge von \mathbb{C} enthalten ist, gibt es eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert a .

Da A abgeschlossen ist, muss $a \in A$ gelten. Weiter ist

$$\operatorname{dist}(K, a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{dist}(K, a_n) = 0$$

und deshalb $a \in K$. Widerspruch.

9.3.10 Beweis des Saks-Zygmund-Lemmas 9.3.7

(0) Gemäß 9.3.8 ist

$$\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \tilde{\Omega}) > 0.$$

Wir führen eine zentrische Streckung $z \mapsto \lambda z$ mit $\lambda > 0$ durch, so dass O.B.d.A.

$$\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \tilde{\Omega}) = 2.$$

(1) Vorbereitung. Es sei P die Menge der Quadrate mit Seitenlänge 1, deren Eckpunkte ganzzahlige Real- und Imaginärteile haben. Wir betrachten eine „Pflasterung“ P , das ist eine endliche Vereinigung von Quadraten aus P .

(2) Wir definieren für P einen umschließenden reduzierten Streckenzug $\sigma(P)$ und dessen Spur gemäß folgender Schritte:

(a) Für ein einzelnes Quadrat Q aus \mathcal{Q} sei

$$\begin{aligned} & \sigma(a, a+1) + \sigma(a+1, a+1+i) + \sigma(a+1+i, a+i) + \sigma(a+i, a), \\ & \text{wobei } a = \min \text{Re}(Q) + i \min \text{Im}(Q), \end{aligned}$$

der Q umschließende Streckenzug mit positiver Orientierung.

(b) Ist $P = Q_1 \cup \dots \cup Q_n$ mit paarweise verschiedenen Quadraten aus \mathcal{Q} , so bilde die formale Summe $\sigma_1 + \dots + \sigma_n$ der zugehörigen umschließenden Streckenzüge.

(c) In dieser Summe tritt eine Verbindungsstrecke $[b, \tilde{b}]$ zweier benachbarter Gitterpunkte höchstens zweimal als Spur auf.

(d) Im Fall, dass eine Verbindungsstrecke $[b, \tilde{b}]$ zweimal auftritt, sind die zugehörigen Summanden in der formalen Summe entgegengesetzt orientiert. Wir setzen dann eine solche Teilsumme der Form $\sigma(b, \tilde{b}) + \sigma(\tilde{b}, b)$ gleich Null.

(e) Die gesamte reduzierte Summe stellt einen geschlossenen Weg dar, der zum ursprünglichen Streckenzug (b) äquivalent ist. Wir bezeichnen ihn mit $\sigma(P)$.

(f) In $\sigma(P)$ treten Verbindungsstrecken $[b, \tilde{b}]$ zweier benachbarter Gitterpunkte höchstens einmal als Spur auf. Wir definieren daher spur $\sigma(P)$ als Vereinigung dieser Verbindungsstrecken.

(2) Da K nicht-leer ist, existiert ein $w \in K$.

Wir konstruieren nun rekursiv eine streng monoton wachsende endliche Folge P_0, P_1, \dots, P_k von Pflasterungen, so dass

$$\chi(\text{spur } \sigma(P_j), w) = 1, \quad \text{spur } \sigma(P_j) \subseteq \tilde{\Omega} \quad (*)$$

gilt und zusätzlich der letzte Streckenzug die Eigenschaft

$$\text{spur } \sigma(P_k) \subseteq \tilde{\Omega} \setminus K = \Omega \quad (**)$$

hat. Dies ist dann der gesuchte nicht-nullhomologe Weg in Ω .

(3) Anfang. Wir definieren die Pflasterung P_0 als die Vereinigung der 1, 2 oder 4 Quadrate, die w enthalten:

$$P_0 := \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}, w \in Q} Q.$$

Es ist klar, dass die Eigenschaften (*) erfüllt sind, insbesondere ist $\text{spur } \sigma(P_0) \subseteq \tilde{\Omega}$, da ja $\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \tilde{\Omega}) = 2$ ist.

(4) Es sei nun eine Pflasterung P_j mit den Eigenschaften (*) konstruiert, die noch nicht die Eigenschaft (**) hat, also

$$\text{spur } \sigma(P_k) \cap K \neq \emptyset \quad (***)$$

erfüllt. Dann sei P_{j+1} die Menge der Quadrate, die mit $P_j \cap K$ gemeinsame Punkte haben, also

$$P_{j+1} := \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}, Q \cap P_j \cap K \neq \emptyset} Q.$$

Es ist klar, dass $P_j \subseteq P_{j+1}$, wegen (***) gibt es mindestens ein Quadrat $Q \in \mathcal{Q}$ mit $Q \subseteq P_{j+1}$ und $Q \not\subseteq P_j$.

(5) Da K kompakt ist, gibt es nur endlich viele Quadrate, die mit K nicht-leeren Schnitt haben. Es muss also irgendwann — nach endlich vielen Schritten — eine Pflasterung P_k entstanden sein, für die auch die Eigenschaft (**) zutrifft.

In Freitag/Busam S. 246/247 wird die Implikation $\neg(\mathbf{E}_{10}) \Rightarrow \neg(\mathbf{E}_2)$ mit Hilfe der so genannten „Pflaster-Konstruktion (pavement construction)“ bewiesen, das heißt:

Existiert in Ω ein Loch, d.h. eine nicht-leere kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$, so gibt es einen Weg in Ω , der nicht „nullhomolog in Ω “ ist.

Diese Implikation heißt auch „Lemma von Saks-Zygmund“.

9.3.11 $(\mathbf{E}_{10}) \Rightarrow (\mathbf{E}_2)$

Es sei also ω ein geschlossener Weg in Ω . Wir definieren eine Zerlegung des Komplements von Ω in die zwei Teilmengen

$$\begin{aligned} K &:= \{z \in \mathbb{C} \setminus \Omega \mid \chi(\omega, z) \neq 0\} \\ A &:= \{z \in \mathbb{C} \setminus \Omega \mid \chi(\omega, z) = 0\}. \end{aligned}$$

Beide Teilmengen sind Schnittmengen der abgeschlossenen Menge $\mathbb{C} \setminus \Omega$ mit den Urbildern der abgeschlossenen Mengen $\{0\}$ bzw. \mathbb{Z}^\times unter der stetigen Abbildung $\chi(\omega, \cdot)$ und damit selbst abgeschlossen.

Da die Teilmenge K beschränkt ist, ist sie kompakt.

Nach Voraussetzung (\mathbf{E}_{10}) muss $K = \emptyset$ sein, also ist

$$\text{Int}(\omega) = \{z \in \mathbb{C} \mid \chi(\omega, z) \neq 0\} \subseteq \Omega$$

und das bedeutet „ ω nullhomolog in Ω “.

9.3.12 (E₉) ⇒ (E₁₁)

Die Begründung besteht darin, dass es einen Homöomorphismus

$$\left\{ \begin{array}{l}] - 1, +1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{(x-1)(x+1)} \end{array} \right.$$

und es dann — via Polarkoordinaten — auch einen Homöomorphismus $\mathbb{C} \rightarrow U_1(0)$ gibt.

9.3.13 (E₁₁) ⇒ (E₁₂)

Es seien $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ eine stetige Kurve und $H : \Omega \rightarrow U_1(0)$ der Homöomorphismus gemäß (E₁₁).

Es ist dann $\tilde{\gamma} := H \circ \gamma$ eine stetige geschlossene Kurve in $U_1(0)$, die vermöge der Abbildung

$$\tilde{\eta} : \left\{ \begin{array}{l} [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U_1(0) \\ (t, s) \mapsto (1 - s) \cdot \tilde{\gamma}(t) \end{array} \right.$$

nullhomotop (bzgl. $0 \in U_1(0)$) ist.

Dann ist aber

$$\eta : \left\{ \begin{array}{l} [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega \\ (t, s) \mapsto (H^{-1} \circ \tilde{\eta})(t, s) = H^{-1}((1 - s)H(\gamma(t))) \end{array} \right.$$

eine stetige Abbildung, die γ als nullhomotop (bzgl. $H^{-1}(0) \in \Omega$) erweist.

9.3.14 (E₁₂) ⇒ (E₂)

Es kann gezeigt werden (vgl. Freitag/Busam Thm IV, A.5), dass für eine fest gegebene geschlossene Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ die Implikation

$$\gamma \text{ nullhomotop} \implies \gamma \text{ nullhomolog}$$

gilt. Dazu ist es vorab nötig, die Definition des Kurvenintegrals $\int_{\gamma} f$ dahingehend zu verallgemeinern, dass f holomorph und γ stetig und rektifizierbar, nicht aber notwendig stetig differenzierbar, ist (vgl. Freitag/Busam p. 233f).

Da dies vergleichsweise aufwändig ist, führen wir das hier nicht aus.

9.3.15 Bemerkungen

1. Ist ein Gebiet Ω sternförmig, so gilt aufgrund des Rundum-Satzes die Aussage (E_3) . Also ist ein sternförmiges Gebiet einfach zusammenhängend.
2. Man lasse sich von der Implikation $(E_2) \Rightarrow (E_{12})$ nicht dazu verleiten, dass in einem beliebigen Gebiet Ω für eine konkrete Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ die Implikation

$$\gamma \text{ nullhomolog} \implies \gamma \text{ nullhomotop}$$

gilt. Die gezeichnete \mathcal{C}^1 -Kurve ist nullhomolog in $\mathbb{C} \setminus \{-1, +1\}$, nicht aber nullhomotop in $\mathbb{C} \setminus \{-1, +1\}$.

