Skript zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen (GYM/BA/RS)

(Sommersemester 2018)

Dieses Geheft enthält in kompakter Form die wesentlichen Inhalte, wie sie in der Vorlesung ,,Gewöhnliche Differentialgleichungen” vorgestellt werden.

Es ist zum Gebrauch neben der Vorlesung gedacht und erhebt nicht den Anspruch, ,,in sich selbst verständlich” oder vollständig zu sein.

S. Hilger

Inhaltsverzeichnis

1 Skalare Differentialgleichungen erster Ordnung

1.1 Beispiel

1.1.1 Beispiel Betrachte die Gleichung:

$$y' = -x \cdot y.$$

Gesucht ist eine Funktion y mit Variabler x, die diese Gleichung erfüllt.

Überprüfen Sie (mit Hilfe der Kettenregel), dass die *Gauß'sche Glockenfunktion*

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

eine Lösung darstellt.

1.1.2 Fragen

- Gibt es Verfahren, diese Lösung zu ermitteln?
- Gibt es weitere Lösungen?
- Gibt es Differentialgleichungen, die gar keine Lösung haben?
- Kann man Eigenschaften von Lösungen aus Eigenschaften der Differentialgleichung ableiten?

1.1.3 Beispiel

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = y + \sin x.$$

Für einen festen Parameter $C \in \mathbb{R}$ ist

$$y(x) = C \cdot e^x - \tfrac{1}{2} \cos x - \tfrac{1}{2} \sin x$$

eine Lösung. Die Differentialgleichung hat also unendlich viele Lösungen.

Diese Funktion hat als Ableitung

$$y'(x) = C \cdot e^x + \tfrac{1}{2} \sin x - \tfrac{1}{2} \cos x,$$

weshalb

$$y'(x) = y(x) + \sin x.$$

1.1.4 Beispiel

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = \alpha \cdot y.$$

Sie hat die Lösungen

$$y(x) = C \cdot e^{\alpha \cdot x},$$

wobei C ein Parameter ist.

Diese Differentialgleichung modelliert Vorgänge, bei denen die Ableitung (= Änderungsrate) direkt proportional zur Funktion (= Momentanzustand) ist. Wie gesehen resultiert daraus exponentielles Wachstum ($\alpha > 0$) bzw. exponentielles Abklingen ($\alpha < 0$).

1.2 Definitionen

1.2.1 Vorgaben

Es sei D eine ,,vernünftige" Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und

$$f : \begin{cases} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{cases}$$

eine stetige Funktion.

Das Attribut ,,vernünftig" lassen wir zunächst so stehen. Fast durchgängig werden wir die strengere Eigenschaft ,,D offen" als Voraussetzung oder Kontext setzen, sehr gelegentlich ist sie etwas zu engführend.

Der Buchstabe I ist fortan für (meist offene, echte) Intervalle reserviert.

1.2.2 Definition: Lösung einer Differentialgleichung

Eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ heißt *Lösung der Differentialgleichung*

$$y' = f(x,y),$$

wenn sie auf I differenzierbar ist und die folgende Gleichung erfüllt:

$$y'(x) = f(x, y(x)) \qquad \text{für alle } x \in I.$$

1.2.3 Bemerkungen

- Eine Differentialgleichung beschreibt also die Aufgabe, bei gegebener *Rechter Seite* f ein Intervall I und eine darauf definierte differenzierbare Funktion

  $$y : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y(x) \end{cases}$$

  zu finden. Bei Einsetzung dieser Funktion in die Rechte Seite soll auf der linken Seite die Ableitung (linke Seite) herauskommen.

- Gemäß neuer Rechtschreibung müsste ,,Differenzialgleichung" statt ,,Differentialgleichung" geschrieben werden. Dies fällt Mathematikern wegen der starken Präsenz der englischen Sprache schwer.

- Oft werden als Variablen auch t statt x und x statt y verwendet. Der Buchstabe t erinnert dann an ,,time (Zeit)". Der Ableitungsbeistrich wird bei dieser Notation durch einen Punkt ersetzt.

  Die Differentialgleichung aus Beispiel 1.1.1 würde dann als

  $$\dot{x} = -t \cdot x$$

  geschrieben. Eine Lösung ist $x(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

  In dieser Vorlesung werden wir fast durchgehend die aus der Schule bekannte Konvention mit x als Symbol für Elemente der Definitionsmenge (unabhängige Variable) und y als Symbol für die Elemente der Wertemenge (abhängige Variable) der gesuchten Funktionen durchhalten.

1.2.4 Maximales Definitionsintervall

Es ist klar, dass die Einschränkung $y|_{\widetilde{I}}$ einer Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ auf ein Teilintervall $\widetilde{I} \subseteq I$ ebenfalls eine Lösung ist.

Um solche Mehrdeutigkeiten in den Griff zu bekommen, vereinbart man:

Eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ heißt *maximal* oder mit *maximalem Definitionsintervall*, wenn es **keine** (umfassendere) Lösung $\widehat{y} : \widehat{I} \to \mathbb{R}$ gibt mit der Eigenschaft

$$I \subsetneqq \widehat{I} \qquad \text{und} \qquad y(x) = \widehat{y}(x) \quad \text{für} \quad x \in I.$$

Gelegentlich wird die Tatsache der Maximalität durch ein tiefergestelltes $_{\max}$ angedeutet: Eine maximale Lösung wird geschrieben als

$$y_{\max} : I_{\max} \to \mathbb{R}.$$

1.2.5 Beispiel

Die Differentialgleichung

$$y' = 1 + y^2$$

hat als eine Lösung

$$y : \begin{cases}]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x. \end{cases}$$

Das Definitionsintervall $I =]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ ist maximal, da es keine differenzierbare Funktion mit einer echt größeren Definitionsmenge gibt, die tan als Einschränkung hat.

1.2.6 Verallgemeinerungen

Die in der Definition 1.2.2 angegebene Differentialgleichung müsste genauer

gewöhnliche explizite skalare Differentialgleichung erster Ordnung.

heißen. Dies deutet darauf hin, dass es zahlreiche Verallgemeinerungen gibt, die wir kurz erläutern wollen.

- Ordnung: Als Ordnung wird der höchste in der Differentialgleichung vorkommende Ableitungsgrad bezeichnet. Wir haben es also zunächst mit Differentialgleichungen erster Ordnung zu tun. Später werden wir noch Differentialgleichungen höherer Ordnung studieren.

- Dimension: Ähnlich wie in der linearen Algebra unterscheidet man zwischen einzelnen Differentialgleichungen und Systemen von Differentialgleichungen. Die „einzelnen" sind dadurch gekennzeichnet, dass die Wertemenge der gesuchten Funktion y eindimensional ist. Sie heißen *skalare Differentialgleichungen*. Später werden wir noch Differentialgleichungssysteme studieren.

- Explizit / Implizit: Aufgrund der Eigenschaft, dass die Ableitung der gesuchten Funktion „explizit" auf der linken Seite der Differentialgleichung auftritt, heißt die Differentialgleichung auch *explizit*.

  Für die expliziten Differentialgleichungen existiert eine geschlossene Theorie.

  Eine nicht explizite Differentialgleichung (erster Ordnung) ist beispielsweise

  $$\sin[(y')^3] + y^2 \quad = \quad \cos x.$$

  Nicht–explizite Differentialgleichungen kann man unter Umständen mit ad–hoc Methoden lösen. Der Begriff „implizit" für solche Typen von Differentialgleichungen wird nicht immer ganz klar benutzt: Soll er explizite Differentialgleichungen umfassen oder echt alternativ zu ihnen sein?

  Mit echt impliziten Differentialgleichungen werden wir uns so gut wie nie befassen.

- Gewöhnlich / Partiell: Die Tatsache, dass die Definitionsmengen I der gesuchten Lösungen y eindimensionale Intervalle sind, ist für das Attribut „gewöhnlich" maßgeblich.

  Differentialgleichungen für Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen heißen naheliegend „partiell". Ihre Theorie ist entscheidend anders, umfassender, komplizierter, abstrakter.

- Differentialgleichungen im Komplexen: Die unabhängige Variable x ist dabei durch eine komplexe Variable z ersetzt. Der entscheidende strukturelle Unterschied zu „reellen Differentialgleichungen" besteht darin, dass die Definitionsmenge einer Lösungsfunktion nicht mehr ein (linear geordnetes) Intervall, sondern ein Gebiet in $\mathbb{C}$ ist.

1.3 Geometrische Interpretation

Wir beschreiben in diesem Abschnitt, wie eine skalare Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = f(x, y)$$

mit rechter Seite $f : D \to \mathbb{R}$ und zugehörige Lösungsfunktionen $y : I \to \mathbb{R}$ geometrisch interpretiert werden kann.

1.3.1 Definition: Linienelement Wir betrachten einen Punkt $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$. Eine Strecke

$$L = \{(x_\ell, y_\ell) + \lambda(x_r, y_r) \mid \lambda \in [0, 1]\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

mit linkem Endpunkt (x_ℓ, y_ℓ) und rechtem Endpunkt (x_r, y_r) heißt *Linienelement* (zum Punkt (x, y)), wenn sie durch (x, y) geht und ihre Steigung gleich der rechten Seite $f(x, y)$ in diesem Punkt ist, also

$$(x, y) \in L \qquad \text{und} \qquad \tfrac{y_r - y_\ell}{x_r - x_\ell} = f(x, y).$$

Die genaue Lage der beiden Endpunkte bzw. die Länge der Strecke sind nicht so wichtig. Hier spielen andere Gesichtspunkte wie Übersichtlichkeit und Genauigkeit eine Rolle.

1.3.2 Definition: Richtungsfeld Eine ,,geeignete Sammlung geeigneter Linienelemente" wird als *Richtungsfeld*, manchmal genauer als (x, y)-*Richtungsfeld*, bezeichnet.

1.3.3 Interpretation

Da ein Linienelement L an einer Stelle (x, y) genau die gleiche Steigung aufweist wie der Graph einer durch diesen Punkt gehenden Lösung der Differentialgleichung, enthält das Richtungsfeld entscheidende qualitative Informationen über die zu erwartenden Lösungen.

Das graphische Lösen der Differentialgleichung besteht darin, Funktionsgraphen zu finden, die sich an die Linienelemente anschmiegen. Evtl. kann man mit Hilfe des Richtungsfeldes auch Lösungen erraten.

1.3.4 Beispiel

Wir zeichnen das Richtungsfeld für die Differentialgleichung

$$y' = -x \cdot y$$

aus dem Anfangsbeispiel, einmal ohne, einmal mit Graphen einiger Lösungsfunktionen.

Dank an Frau Dr. Galina Filipuk (Warschau)

1.3.5 Definition: Isoklinen

Kurven in D, auf denen die Rechte Seite f konstant ist, heißen in diesem Zusammenhang *Isoklinen*.

Sie sind hilfreich, da man mit ihrer Hilfe evtl. bestimmte qualitative Verhaltensweisen der Lösungen (wie Monotonie) ohne eigentliche Kenntnis der Lösungen ablesen kann.

1.4 Anfangswertprobleme

1.4.1 Definition: Anfangswertproblem Es sei

$$y' = f(x,y)$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung und $(x_0, y_0) \in D$ ein Punkt in der Definitionsmenge der rechten Seite.

Stellt man an eine Lösung y der Differentialgleichung zusätzlich die *Anfangsbedingung*, dass

$$y(x_0) = y_0,$$

so spricht man von einem *Anfangswertproblem (AWP)*.

1.4.2 Darstellung

Wir werden die Zusammengehörigkeit der beiden Gleichungen eines AWPs oft durch die Schreibweise

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

unterstreichen.

Wir werden anhand zahlreicher Beispiele sehen, dass im ,,Normalfall" AWPe genau eine maximale Lösung besitzen.

Eine solche Lösungsfunktion wird dann oft als

$$x \mapsto y(x; x_0, y_0) \qquad \text{oder} \qquad x \mapsto \varphi(x; x_0, y_0)$$

angegeben. Der Wechsel vom Symbol y zum Symbol φ für die Lösungsfunktion ist manchmal günstiger.

1.5 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

1.5.1 Definition Eine (explizite) Differentialgleichung erster Ordnung heißt *mit getrennten Variablen*, wenn es zwei Funktionen $h : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ (D_1, D_2 offene Intervalle) gibt, so dass die rechte Seite die Form

$$f(x,y) \;=\; h(x) \cdot g(y), \qquad (x,y) \in D = D_1 \times D_2$$

annimmt. Es geht also um skalare Differentialgleichungen bzw. AWPe der Form

$$y' \;=\; h(x) \cdot g(y) \qquad\qquad \left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & h(x) \cdot g(y) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

1.5.2 Verfahren zur Lösung Anhand des konkreten Beispiels 1.1.1 und parallel dazu ganz allgemein wird nun das Verfahren geschildert, mit dem man — im Prinzip — Lösungen explizit bestimmen kann. Das Verfahren ist mathematisch zunächst nicht abgesichert, wir werden es aber anschließend mittels eines mathematischen Satzes begründen.

$\boxed{1}$ Ausgangspunkt ist das gegebene AWP

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & -x \cdot y \\ y(0) & = & 1. \end{array} \right. \qquad \Big\| \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & h(x) \cdot g(y) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

$\boxed{2}$ Wir schreiben die Differentialgleichung als

$$\frac{dy}{dx} \;=\; -x \cdot y \qquad \Big\| \qquad \frac{dy}{dx} \;=\; h(x) \cdot g(y)$$

$\boxed{3}$ und dann als Gleichung zwischen ,,Differentialen"

$$\frac{1}{y} \cdot dy \;=\; -x\,dx \qquad \Big\| \qquad \frac{1}{g(y)}\,dy \;=\; h(x) \cdot dx$$

$\boxed{4}$ die integriert werden können. Die Anfangsbedingung legt dabei Integrationsgrenzen fest:

$$\int_1^y \frac{1}{\hat{y}}\,d\hat{y} \;=\; \int_0^x (-\hat{x})\;d\hat{x} \qquad \Big\| \qquad \int_{y_0}^y \frac{1}{g(\hat{y})}\,d\hat{y} \;=\; \int_{x_0}^x h(\hat{x})\,d\hat{x}$$

(Der ,,Dach-Akzent" ist für die Unterscheidung von Integrationsvariablen und Integrationsgrenzen nötig).

$\boxed{5}$ Als Resultat erhalten wir:

$$\ln(y) - \ln(1) \;=\; -\frac{x^2}{2} + \frac{0^2}{2} \qquad \Big\| \qquad G(y) \;=\; H(x),$$

wobei G die Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ mit $G(y_0) = 0$ und H die Stammfunktion h mit $H(x_0) = 0$ ist.

$\boxed{6}$ Wir wenden – wenn möglich – die Umkehrfunktion der linken Seite an und erhalten:

$$y \;=\; e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \Big\| \qquad y \;=\; G^{-1}(H(x)).$$

1.5.3 Problematik Das allgemeine Verfahren auf der rechten Seite beinhaltet aber problematische Vorgehensweisen:

- Falls $g(y) = 0$ an einer Stelle y ist, darf man nicht einfach durch $g(y)$ dividieren.
- Existiert überhaupt die Umkehrfunktion von G?
- Man weiss aus der Theorie, dass die Stammfunktionen der stetigen Funktionen $\frac{1}{g}$ und h existieren, evtl. können sie aber nicht mit Hilfe von Kombinationen elementarer Funktionen dargestellt werden.

Der folgende Satz und sein Beweis stellen das Verfahren auf eine sichere Grundlage.

1.5.4 Satz: Lösung der Differentialgleichung mit getrennten Variablen

Es seien D_1, D_2 offene Intervalle, $x_0 \in D_1$, $y_0 \in D_2$ und $h : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Wir betrachten das AWP

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & h(x) \cdot g(y) \\ y(x_0) & = & y_0. \end{array} \right.$$

(i) Ist $g(y_0) \neq 0$, so gibt es ein offenes Intervall I mit $x_0 \in I \subseteq D_1$ und eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ des AWPs. Sie kann mit Hilfe des obigen Verfahrens konstruiert werden.

(ii) Die Lösung ist eindeutig in dem folgenden Sinne: Ist $\widetilde{y} : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ eine weitere Lösung mit $g(\widetilde{y}(x)) \neq 0$ für alle $x \in \widetilde{I}$, so stimmt sie auf dem Schnittintervall $I \cap \widetilde{I}$ mit y überein.

(iii) Ist $g(y_0) = 0$, so ist die konstante Funktion

$$y(x) \equiv y_0$$

eine Lösung des AWPs. Es kann auch andere Lösungen geben.

1.5.5 Beweis

Zu (i). (1) Da $g(y_0) \neq 0$ ist, gibt es ein offenes Intervall $J_1 \subseteq D_2$ um y_0 mit $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J_1$. Daher ist die Funktion $\frac{1}{g}$ auf J_1 definiert und stetig.

(2) $\frac{1}{g}$ ist stetig und besitzt daher gemäß HDI eine Stammfunktion G auf J_1 mit $G(y_0) = 0$.

(3) Wegen $G' = \frac{1}{g} \neq 0$ auf J_1 ist G streng monoton auf J_1, deshalb als Funktion

$$G : \left\{ \begin{array}{rcl} J_1 & \to & J_2 := G(J_1) \\ x & \mapsto & G(x) \end{array} \right.$$

umkehrbar. Wegen $G(y_0) = 0$ gilt $0 \in J_2$ und $G^{-1}(0) = y_0$.

(4) Die Funktion h ist stetig auf D_1, sie besitzt daher eine Stammfunktion H mit $H(x_0) = 0$. Es sei I ein offenes Intervall in D_1 mit $x_0 \in I$ und $H(I) \subseteq J_2$.

(5) Dann ist die Funktion

$$y = G^{-1} \circ H : I \to \mathbb{R}$$

wohldefiniert. Wir zeigen, dass es sich um eine Lösung des AWPs handelt.

(6) Die Anfangsbedingung ist erfüllt

$$y(x_0) = G^{-1}(H(x_0)) = G^{-1}(0) = y_0.$$

(7) Wegen

$$y'(x) = (G^{-1})'(H(x)) \cdot H'(x) = \frac{1}{G'(G^{-1}(H(x))} \cdot H'(x) = g(y(x)) \cdot h(x), \qquad x \in I$$

(Kettenregel) ist y auch Lösung der Differentialgleichung.

(ii) Ist $\widetilde{y} : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ eine weitere Lösung des AWPs wie im Satz angegeben, so gilt für $x \in I \cap \widetilde{I}$:

$$H(x) \quad = \quad \int_{x_0}^{x} h(\hat{x})\, d\hat{x} \overset{(*)}{=} \int_{x_0}^{x} \frac{\widetilde{y}'(\hat{x})}{g(\widetilde{y}(\hat{x}))}\, d\hat{x} \overset{(**)}{=} \int_{y_0}^{\widetilde{y}(x)} \frac{1}{g(z)}\, dz \quad = \quad G(\widetilde{y}(x)).$$

Die Umformung $(*)$ beruht darauf, dass $\widetilde{y}$ Lösung ist, in $(**)$ haben wir die Substitution $z = \widetilde{y}(x)$ durchgeführt. Die gesamte Gleichung besagt gerade, dass für $x \in I$

$$\widetilde{y}(x) \quad = \quad G^{-1}(H(x)) \quad = \quad y(x)$$

ist.

(iii) Die erste Aussage kann man direkt verifizieren. Die zweite Aussage werden wir weiter unten anhand des Beispiels 1.6.6 begründen.

1.5.6 Zwei Sonderfälle Die Differentialgleichung mit getrennten Variablen beinhaltet zwei interessante Sonderfälle:

- Die rechte Seite ist gar nicht von y abhängig: $f(x, y) = h(x)$. Siehe den nächsten Abschnitt 1.5.7.
- Die rechte Seite ist gar nicht von x abhängig: $f(x, y) = g(y)$. Diese große Klasse von Differentialgleichungen werden wir im nächsten Unterkapitel 1.6 angehen.

1.5.7 Sonderfall: Lösung ist Stammfunktion

Bei der Differentialgleichung

$$y' \quad = \quad h(x)$$

hängt die rechte Seite gar nicht von y ab. Als Lösung eines zugehörigen AWPs

$$\begin{cases} y' & = & h(x) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{cases}$$

ergibt sich die Stammfunktion von h:

$$y(x) \quad = \quad \int_{x_0}^{x} h(\hat{x})\, d\hat{x} + y_0$$

Dies würde sich auch bei Anwendung des obigen Satzes auf diese Situation ergeben. Die Linienelemente haben in diesem Fall entlang vertikaler Isoklinen konstante Steigung.

1.6 Autonome skalare Differentialgleichungen

1.6.1 Definition: Autonome skalare Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung

$$y' = g(y)$$

mit $D = \mathbb{R} \times D_2$ und dann einer von x unabhängigen rechten Seite heißt *autonom*.

1.6.2 Satz: Shift von Lösungen Ist $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der obigen autonomen Differentialgleichung, so ist für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ auch die verschobene („geshiftete") Funktion

$$\begin{cases} I + \xi & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y(x - \xi) \end{cases}$$

eine Lösung.

1.6.3 Beweis Dies ergibt sich aus der Kettenregel

$$\frac{d}{dx} y(x - \xi) = y'(x - \xi) = g(y(x - \xi)).$$

Dies wird auch bei Betrachtung des Richtungsfelds anschaulich klar. Es ist unabhängig von x. Deshalb kann der Graph einer Lösung in x–Richtung um ξ verschoben werden, er bleibt dabei Graph einer Lösung.

1.6.4 Bemerkung Die Lösung eines autonomen AWPs

$$\begin{cases} y' & = & g(y) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{cases}$$

ergibt sich gemäß obigen Satz als

$$y(x) = G^{-1}(x - x_0),$$

wobei G^{-1} die Umkehrfunktion der Funktion $y \mapsto \int_{y_0}^{y} \frac{d\hat{y}}{g(\hat{y})}$ mit geeignetem Definitionsintervall ist.

1.6.5 Beispiel Betrachte das AWP

$$\begin{cases} y' & = & y^2 \\ y(x_0) & = & y_0 \end{cases}$$

Für $y_0 = 0$ ist die Lösung trivial, im anderen Fall erhält man mit Hilfe des Verfahren bei getrennten Variablen zunächst die Gleichung

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\hat{y}}{\hat{y}^2} = \int_{x_0}^{x} 1 \, d\hat{x},$$

die mit Hilfe der Stammfunktionen in

$$-\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} = x - x_0$$

überführt wird. Als Lösung ergibt sich:

$$y(x) = \frac{1}{-x + x_0 + \frac{1}{y_0}}.$$

Diese Lösung hat für $x \to x_0 + \frac{1}{y_0}$ eine Polstelle.

1.6.6 Beispiel Wir betrachten das AWP

$$\begin{cases} y' &= 2\sqrt{|y|} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

und überzeugen uns davon, dass für je zwei reelle Zahlen $k \leq 0 \leq \ell$ die abschnittsweise durch Parabeläste definierte Funktion $y_{k,\ell} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$y_{k,\ell}(x) = \begin{cases} -(x-k)^2, & \text{falls } x < k, \\ 0, & \text{falls } k \leq x \leq \ell, \\ (x-\ell)^2, & \text{falls } x > \ell, \end{cases}$$

eine Lösung des AWPs darstellt. Die Anfangsbedingung ist erfüllt. Dass die drei Zeilen die Differentialgleichung erfüllen, weisen wir beispielhaft für den „schwierigsten" Fall der ersten Zeile nach: Die Ableitung der oberen Zeile ist

$$\left[-(x-k)^2\right]' = -2(x-k) = 2|x-k| = 2\sqrt{|-(x-k)^2|},$$

entsprechendes gilt für die mittlere und untere Zeile. Wir haben also ein Beispiel eines AWPs gefunden, das unendlich viele Lösungen hat. Später werden wir aufklären, das dies auf eine Eigenschaft der rechten Seite zurückzuführen ist, die mit der Nicht–Differenzierbarkeit von g an der Stelle $y_0 = 0$ zusammenhängt.

1.6.7 Transformation

Mit Hilfe der Methode 1.5.2 der Trennung der Variablen kann man für eine weitere Klasse von Differentialgleichungen Lösungen auffinden. Sie haben die Form

$$y' = f(ax + by + c),$$

wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ Konstanten sind. O.B.d.A. kann $b \neq 0$ angenommen werden.

Ist $y : I \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, so kann man ihr durch eine Transformation

$$u(x) := ax + by(x) \qquad y(x) = \frac{1}{b} \cdot (u(x) - ax)$$

eine andere Funktion $u : I \to \mathbb{R}$ bijektiv zuordnen. Ist y eine Lösung der obigen Differentialgleichung, so gilt

$$u'(x) = a + by'(x) = a + bf(ax + by(x) + c) = a + bf(u(x) + c),$$

u ist also Lösung der transformierten autonomen Differentialgleichung

$$u' = a + bf(u + c).$$

1.6.8 Beispiel Als Beispiel betrachten wir das AWP

$$\begin{cases} y' &= (x+y)^2 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Mit $a = b = 1, c = 0$ kann sie der obigen Beispielklasse zugeordnet werden. Mit der Transformation $u(x) = x + y(x)$ erhalten wir das transformierte AWP (vgl. 1.2.5)

$$\begin{cases} u' &= 1 + u^2 \\ u(0) &= 0 \end{cases}$$

mit der Lösung $u(x) = \tan(x)$. Also ist $y(x) = \tan(x) - x$ eine Lösung des ursprünglichen AWPs.

1.7 Lineare skalare Differentialgleichungen erster Ordnung

1.7.1 Definitionen

(i) Eine explizite Differentialgleichung erster Ordnung heißt *linear*, wenn die Definitionsmenge der rechten Seite f die Form $D = I \times \mathbb{R}$ hat und dann die rechte Seite sich als

$$y' = a(x)\, y + b(x) \qquad \text{(iLDG)}$$

darstellen lässt mit stetigen Funktionen $a : I \to \mathbb{R}$ und $b : I \to \mathbb{R}$.

(ii) Wegen des Terms $b(x)$ nennt man die Differentialgleichung zusätzlich *inhomogen*.

(iii) Wird der Term $b \equiv 0$ gesetzt, so spricht man von der (zugehörigen) *homogenen* Differentialgleichung

$$y' = a(x)y. \qquad \text{(hLDG)}$$

1.7.2 Übergangsfunktion Wir definieren für $x_1, x_2 \in I$ die *Übergangsfunktion*

$$\Phi_a(x_2, x_1) \;:=\; \exp\left(\int_{x_1}^{x_2} a(t)\, dt \right)$$

und notieren einige Eigenschaften (Nachrechnen!) für $x_1, x_2, x_3, x \in I$

$$\begin{aligned} \Phi_a(x_1, x_1) &= 1 \\ \Phi_a(x_1, x_2) \cdot \Phi_a(x_2, x_3) &= \Phi_a(x_1, x_3) \\ \Phi_a(x_1, x_2) &= \tfrac{1}{\Phi_a(x_2,x_1)} \\ \Phi_a'(x, x_1) &= a(x) \cdot \Phi_a(x, x_1) \qquad \text{(Ableitung nach } x\text{).} \end{aligned}$$

1.7.3 Satz: Lösungen der homogenen Differentialgleichung

(i) Das AWP

$$\begin{cases} y' = a(x)\, y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

hat die eindeutige Lösung auf I

$$y(x) = \Phi_a(x, x_0) \cdot y_0.$$

(ii) Die Menge aller Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = a(x)\, y$$

ist gegeben durch

$$y(x) = \Phi_a(x, x_0) \cdot C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Sie bildet einen 1-dimensionalen Untervektorraum des Vektorraums der differenzierbaren Funktionen $I \to \mathbb{R}$.

1.7.4 Beweis

(i) Der Satz 1.5.4 („getrennte Variablen”) würde es erlauben, die obige Lösung aufzufinden. Da wir aber die gesuchte Lösung schon zur Verfügung haben, rechnen wir die Lösungseigenschaft einfach nach:

$$y'(x) \;=\; \Phi'(x,x_0)\cdot y_0 \;=\; a(x)\cdot\Phi(x,x_0)\cdot y_0 \;=\; a(x)\cdot y(x).$$

Die Anfangsbedingung ist ebenfalls erfüllt.

Zur Eindeutigkeit bei (i). Dazu sei $y_0 \neq 0$, was bedeutet, dass y nirgends in I den Wert 0 annimmt. Ist $\widetilde{y} : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ mit $\widetilde{I} \subseteq I$ eine weitere Lösung des AWPs, so gilt für die Funktion $\frac{\widetilde{y}}{y} : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ gemäß Quotientenregel

$$\left(\frac{\widetilde{y}}{y}\right)'(x) \;=\; \frac{\widetilde{y}'(x)y(x)-\widetilde{y}(x)y'(x)}{y^2(x)} \;=\; \frac{a(x)\widetilde{y}(x)y(x)-\widetilde{y}(x)a(x)y(x)}{y^2(x)} \;=\; 0.$$

Deshalb ist die Funktion $\frac{\widetilde{y}}{y}$ konstant: Aufgrund von $\frac{\widetilde{y}}{y}(x_0) = \frac{y_0}{y_0} = 1$ ist die Konstante gleich 1. Also stimmen die Funktionen y und $\widetilde{y}$ auf $\widetilde{I}$ überein.

Die Eindeutigkeit im zweiten Fall $y_0 = 0$ überlege man selbst — oder warte auf den allgemeineren Existenz- und Eindeutigkeitssatz in Kapitel 2.

1.7.5 Variation der Konstanten Um eine Lösung für die inhomogene Differentialgleichung

$$y' = a(x)\,y + b(x)$$

zu finden, wendet man das Prinzip der

Variation der Konstanten
der Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

an. Dies bedeutet dass man als Ansatz für die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung die Konstante C in der Lösungsformel 1.7.3 (ii) durch eine Funktion $C(x)$ ersetzt:

$$y(x) \;=\; \Phi_a(x,x_0)\cdot C(x).$$

Man setzt diesen Ansatz in (iLDG) ein und erhält mit der Produktregel

$$\begin{aligned} a(x)\,y(x)+b(x) \;&=\; y'(x) \\ &=\; \Phi(x,x_0)\cdot C'(x) + a(x)\cdot\Phi_a(x,x_0)\cdot C(x) \\ &=\; a(x)\cdot y(x) + \Phi(x,x_0)\cdot C'(x), \end{aligned}$$

was auf die Gleichung

$$C'(x) \;=\; \Phi_a(x_0,x)\cdot b(x)$$

führt. Um die Funktion C zu erhalten, müssen wir also nur noch integrieren. Die Integrations–Konstante ist dabei durch die Anfangsbedingung festgelegt:

$$C(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} \Phi_a(x_0,t)\cdot b(t)\,dt + y_0$$

Die gesamte Lösung kann so in einem Satz notiert werden.

1.7.6 Satz: Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung

(i) Für die eindeutige Lösung des inhomogenen AWPs

$$\begin{cases} y' & = & a(x)y + b(x) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{cases}$$

gilt

$$\begin{aligned} y(x) &= \Phi_a(x, x_0) \cdot \left[\int_{x_0}^{x} \Phi_a(x_0, t) \cdot b(t)\, dt + y_0 \right] \\ &= \int_{x_0}^{x} \Phi_a(x, t) \cdot b(t)\, dt + \Phi_a(x, x_0) \cdot y_0. \end{aligned}$$

(Beachte die Besonderheit, dass die Variable x sowohl als Integrationsgrenze als auch im Integranden auftritt.)

(ii) Die Gesamtheit aller Lösungen der Differentialgleichung ist gegeben durch

$$y(x) = \underbrace{\int_{x_0}^{x} \Phi_a(x, t) \cdot b(t)\, dt}_{\text{spezielle Lösung inhomogen}} + \underbrace{\Phi_a(x, x_0) \cdot C}_{\text{allgemeine Lösung homogen}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung setzt sich aus einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung zusammen.

1.7.7 Lösungsformel zur Berechnung der Lösung des linearen AWP

$$\begin{cases} y' & = & a(x)y + b(x) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{cases}$$

1. Berechne eine Stammfunktion A von a.
2. Die Lösung des AWPs ist

$$y(x) = e^{A(x)} \cdot \left[\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{e^{A(t)}}\, dt + \frac{y_0}{e^{A(x_0)}} \right].$$

1.8 Die Bernoulli-Differentialgleichung

1.8.1 Einstieg Es handelt sich um die nichtlineare Differentialgleichung

$$y' = c(x) \cdot y + d(x) \cdot y^{\alpha}, \qquad (*)$$

wobei die folgenden Daten unterliegen:

- $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ist eine Konstante.
- I ist ein Intervall und $c, d : I \to \mathbb{R}$ sind stetige Funktionen.
- Die Definitionsmenge der rechten Seite ist $D = I \times \mathbb{R}^+$.

1.8.2 Transformation Mit Hilfe der Transformation

$$u(x) := y^{1-\alpha}(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y(x) := u^{\frac{1}{1-\alpha}}(x)$$

wird die Bernoulli-Differentialgleichung übergeführt in die linear-inhomogene Differentialgleichung

$$u' = (1-\alpha)c(x)u + (1-\alpha)d(x) \qquad (**),$$

was wir in einem ordentlichen Satz mit Beweis festhalten.

1.8.3 Satz: Transformation der Bernoulli-Gleichung

Die Funktion $y : I \to \mathbb{R}^+$ ist genau dann Lösung der Bernoulli-Differentialgleichung $(*)$, wenn die Funktion $u : I \to \mathbb{R}^+$ Lösung der linear-inhomogenen Differentialgleichung $(**)$ ist.

1.8.4 Bemerkungen

- Für $\alpha = 0$ ist die Transformation die identische Transformation: Uninteressant.
- Für $\alpha = 1$ ist die Bernoulli-Differentialgleichung linear-homogen: Uninteressant, die Transformation ist nicht definiert.
- Für $\alpha = 2$ ist die Transformation gleich der Kehrwertbildung. In diesem Fall ist der Satz auch für rechte Seiten mit $D = I \times \mathbb{R}^-$ und Lösungen $y : I \to \mathbb{R}^-$ richtig.
- Beachte, dass die Lösung $y \equiv 0$ nicht von den obigen Definitionen und Überlegungen erfasst wird.

1.8.5 Beweis

Es wird einfach nachgerechnet. Ist $y : I \to \mathbb{R}^+$ Lösung von $(*)$, so gilt für die Funktion $u = y^{1-\alpha}$

$$\begin{aligned} u'(x) &= [y^{1-\alpha}]'(x) \\ &= (1-\alpha) \cdot y^{-\alpha}(x) \cdot y'(x) \\ &= (1-\alpha) \cdot \tfrac{u(x)}{y(x)} \cdot [c(x) \cdot y(x) + d(x) \cdot y^{\alpha}(x)] \\ &= (1-\alpha) \cdot c(x) \cdot u(x) + (1-\alpha) \cdot d(x). \end{aligned}$$

Ist umgekehrt $u : I \to \mathbb{R}^+$ Lösung von $(**)$, so gilt für die Funktion $y = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$

$$\begin{aligned} y'(x) &= [u^{\frac{1}{1-\alpha}}]'(x) \\ &= \tfrac{1}{1-\alpha} \cdot u^{\frac{1}{1-\alpha}-1}(x) \cdot u'(x) \\ &= \tfrac{1}{1-\alpha} \cdot \tfrac{y(x)}{u(x)} \cdot [(1-\alpha) \cdot c(x) \cdot u(x) + (1-\alpha) \cdot d(x)] \\ &= c(x) \cdot y(x) + d(x) \cdot y^\alpha(x). \end{aligned}$$

1.8.6 Beispiel

Man ermittle mit Hilfe des Verfahrens Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \tfrac{2}{x}\, y - x^2\, y^2, \qquad D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

2.1 Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung

2.1.1 Vereinbarung

Wir verallgemeinern nun den bisherigen Begriff einer Differentialgleichung dahingehend, dass die Wertemenge der gesuchten Lösungsfunktionen nicht mehr $\mathbb{R}$ (skalar) ist, sondern ein i.a. höherdimensionaler Vektorraum $\mathbb{R}^n$.

Wir vereinbaren also für dieses Kapitel, dass n eine feste natürliche Zahl ist. In den meisten Beispielen wird $n = 2$ sein.

Es seien dann gegeben eine offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ und eine stetige Funktion

$$f : \begin{cases} D \to \mathbb{R}^n \\ (x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \\ \vdots \\ f_n(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix} \end{cases}$$

die wieder ,,Rechte Seite" genannt wird.

Das Symbol I stehe wieder für Intervalle von $\mathbb{R}$. Wir betonen hier stärker, dass I auch einseitig abgeschlossen sein kann. In diesem Fall schließt die Differenzierbarkeit einer Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ ein, dass sie an den Randstellen von I einseitig differenzierbar ist.

2.1.2 Definition

Eine differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ heißt *Lösung des Differentialgleichungssystems*

$$y' = f(x, y),$$

wenn für alle $x \in I$ gilt:

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

2.1.3 Bezug zu skalaren Gleichungen

Die Ausführungen in Kapitel 1.2 können mehr oder weniger direkt übernommen werden. Die Definition 1.2.4 einer maximalen Lösung mit maximalem Definitionsintervall kann abgeschrieben werden.

2.1.4 Graphische Deutung Der graphischen Deutung von Differentialgleichungssystemen sind Grenzen gesetzt. Lediglich bei $n = 2$ könnten noch räumlich-perspektivische Richtungsfelder gezeichnet werden. Bei ebenen autonomen Systemen, d.h. bei $n = 2$, stehen bestimmte zusätzliche Methoden zur Verfügung.

Man bewahre aber die Vorstellung, dass der Graph einer Lösung eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ ist, deren Tangentenvektoren durch die Rechte Seite vorgegeben sind.

2.1.5 Ausblick Während im ersten Kapitel über skalare Differentialgleichungen die Methoden zur expliziten Darstellung der Lösungen im Vordergrund standen, ist der Begriff des Systems die Grundlage für mehr theoretische, nichtsdestoweniger sehr nützliche und wichtige, Überlegungen.

2.2 Zusammenflicken von Lösungen

2.2.1 Satz: Zusammenflicken von Lösungen

Es sei I ein Intervall und $x_0 \in I^\circ$ eine Stelle im Inneren von I. Ist dann

- $y_\ell :]-\infty, x_0] \cap I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x,y)$,
- $y_r : [x_0, +\infty[\cap I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x,y)$,
- $y_\ell(x_0) \; = \; y_r(x_0)$,

so ist die *zusammengeflickte* Funktion

$$y(x) \; := \; \begin{cases} y_\ell(x), & \text{falls } x \in I,\, x \le x_0, \\ y_r(x), & \text{falls } x \in I,\, x \ge x_0, \end{cases}$$

eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ auf ganz I.

2.2.2 Beweis Die einzig etwas problematische Stelle ist x_0. Die Funktion y ist

- in x_0 linksseitig differenzierbar, da y_ℓ es ist, und
- in x_0 rechtsseitig differenzierbar, da y_r es ist.
- Außerdem stimmen die linksseitige und rechtsseitige Ableitung in x_0 überein:

$$y'^{\text{links}}(x_0) \; = \; y_\ell'^{\text{links}}(x_0) \; = \; f(x_0, y_\ell(x_0)) \; = \; f(x_0, y_r(x_0)) \; = \; y_r'^{\text{rechts}}(x_0) \; = \; y'^{\text{rechts}}(x_0).$$

Daraus folgt, dass y in x_0 differenzierbar ist mit

$$y'(x) \; = \; f(x_0, y(x_0)).$$

2.3 Transformation in Integralgleichung

2.3.1 Satz und Definition: Fundamentaltrick der Ex-Ein-Theorie

Gegeben seien eine Rechte Seite $f : D \to \mathbb{R}^n$, ein Intervall I, eine Stelle $x_0 \in I$ und ein Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}^n$, so dass $(x_0, y_0) \in D$.

Für eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(A) y ist Lösung des AWPs

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

(B) y ist stetig und genügt der Integralgleichung (für $x \in I$)

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$$

(C) Die Funktion y ist Fixpunkt der Abbildung

$$\begin{cases} \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) \\ y & \mapsto & y_0 + \int_{x_0}^{(\cdot)} f(t, y(t))\, dt \end{cases}$$

im Funktionenraum $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ der stetigen Funktionen $I \to \mathbb{R}^n$.

2.3.2 Beweis

(A) $\Rightarrow$ (B) Wenn die Funktion y Lösung ist, so gilt definitionsgemäß

$$y'(x) = f(x, y(x)) \qquad \text{für alle } x \in I.$$

Da y und f stetig sind, ist die Funktion auf der rechten Seite stetig. Damit ist auch y' stetig.

Wir bilden auf beiden Seiten gemäß HDI die Stammfunktion = Integralfunktion, die an der Stelle x_0 den Wert y_0 annimmt und erreichen so die Aussage (B).

(B) $\Rightarrow$ (A) Da y als stetig vorausgesetzt ist, ist die Integrandenfunktion auf der rechten Seite von (B) stetig. Dann ist aber die Integralfunktion rechts, damit auch die Funktion links, stetig differenzierbar. Differentiation unter Beachtung des HDI liefert die Behauptung (A).

Die Aussage (C) ist lediglich eine (reichlich abstrakte) Umformulierung der Aussage (B).

2.4 Der Satz von Picard–Lindelöf — globale Versionen

Der folgende erste Existenz- und Eindeutigkeitssatz ist noch schwach, da er eine starke (unpraktische) Voraussetzung hat. Dafür tritt aber die Anwendung des Banach'schen Fixpunktsatzes beim Beweis deutlich hervor.

2.4.1 Satz von Picard–Lindelöf — Globale Version I

Das AWP

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

mit stetiger rechter Seite $f : D \to \mathbb{R}^n$ erfülle die folgenden Voraussetzungen $(\mathcal{D})$ und $(\mathcal{L})$.

$(\mathcal{D})$ Es sei $J = [c,d]$ kompakt und $D = J \times \mathbb{R}^n$.

$(\mathcal{L})$ $f : D \to \mathbb{R}^n$ genüge einer *globalen Lipschitz–Bedingung (bzgl. der zweiten Variablen)*, d.h. es existiere eine Konstante $L \geq 0$, so dass für alle Punkte $(x,y),(x,\widetilde{y}) \in D$

$$\|f(x,y) - f(x,\widetilde{y})\|_{\mathbb{R}^n} \quad \leq \quad L \cdot \|y - \widetilde{y}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

$(\mathcal{X})$ Es gelte die Bedingung: $\quad L \cdot (d-c) \ < \ 1.$

$(\mathcal{E})$ Dann gibt es genau eine (globale) Lösung $y : J \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems.

2.4.2 Bemerkung

Der Zusatz „bzgl. der zweiten Variablen" wird oft weggelassen, insbesondere dann, wenn f (im autonomen Fall) gar nicht von der ersten Variablen x abhängt.

2.4.3 Beweis Nach dem Satz 2.3.1 ist eine Funktion y genau dann Lösung des im Satz gegebenen AWPs, wenn sie Fixpunkt der Abbildung

$$T : \begin{cases} \mathcal{C}(J,\mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{C}(J,\mathbb{R}^n) \\ y(\cdot) & \mapsto & y_0 + \int_{x_0}^{(\cdot)} f(t,y(t))\,dt \end{cases}$$

ist. Wir wissen bereits, dass der Vektorraum $\mathcal{C}(J,\mathbb{R}^n)$ durch die Supremumsnorm

$$\|y\|_\infty \quad = \quad \sup_{x \in J} \|y(x)\|_{\mathbb{R}^n}$$

zu einem vollständig–metrischen Raum (genauer: zu einem Banachraum) wird. Welche Norm $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ auf dem $\mathbb{R}^n$ verwendet wird, ist dabei unerheblich, es kann einfach die vertraute euklidische Norm herangezogen werden.

Wir brauchen also nur zu zeigen, dass T eine Kontraktion ist.

Es seien also $y, \widetilde{y}$ zwei Funktionen aus $\mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|(Ty)(x) - (T\widetilde{y})(x)\|_{\mathbb{R}^n} &= \left\| [y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))\, dt] - [y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \widetilde{y}(t))\, dt] \right\|_{\mathbb{R}^n} \\
&= \left\| \int_{x_0}^x [f(t, y(t)) - f(t, \widetilde{y}(t))]\, dt \right\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\le \left| \int_{x_0}^x \|f(t, y(t)) - f(t, \widetilde{y}(t))\|_{\mathbb{R}^n}\, dt \right| \\
&\le \left| \int_{x_0}^x L \cdot \|y(t) - \widetilde{y}(t)\|_{\mathbb{R}^n}\, dt \right| \\
&\le L \cdot \left| \int_{x_0}^x \|y(t) - \widetilde{y}(t)\|_{\mathbb{R}^n}\, dt \right| \\
&\le L \cdot \left| \int_{x_0}^x \|y - \widetilde{y}\|_\infty\, dt \right| \\
&= L \cdot |x - x_0| \cdot \|y - \widetilde{y}\|_\infty \\
&\le L \cdot (d - c) \cdot \|y - \widetilde{y}\|_\infty\,.
\end{aligned}$$

Da diese Abschätzung für alle $x \in J$ richtig ist, gilt

$$\begin{aligned}
\|(Ty) - (T\widetilde{y})\|_\infty &= \sup_{x \in J} \{\, \|(Ty)(x) - (T\widetilde{y})(x)\|_{\mathbb{R}^n} \,\} \\
&\le L \cdot (d - c) \cdot \|y - \widetilde{y}\|_\infty.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Voraussetzung des Satzes $L \cdot (d - c) < 1$ ist T eine Kontraktion. Gemäß dem Banachschem Fixpunktsatz (vgl. AYS2/SS2015, Satz 17.1.2) besitzt T genau einen Fixpunkt — und damit das AWP genau eine Lösung auf J. Der Beweis ist beendet.

2.4.4 Weiterführung

Dieser Satz kann als Ausgangsplattform einer ganzen Kaskade von Existenz– und Eindeutigkeitssätzen gesehen werden, die sich im Hinblick auf verschiedenste Gesichtspunkte unterscheiden:

- Unterschiedlich starke Voraussetzungen an die ,,Glattheit" der Rechten Seite:

  Stetigkeit — Lipschitz–Stetigkeit — Differenzierbarkeit

- Unterschiedlich starke Aussagen über das Existenzintervall:

  lokal — lokal quantitativ — global — global quantitativ

- Verwendung anderer Normen in den relevanten Funktionenräumen

- Mindestens Existenz: Existenzsatz von Peano.

Wir präsentieren im folgenden noch einige Beispiele für solche Weiterentwicklungen des Satzes von Picard-Lindelöf.

2.4.5 Satz: Existenz und Eindeutigkeit bei offener Überdeckung

Es sei J ein Intervall und $(J_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine offene Überdeckung, d.h. alle $J_i \subseteq \mathbb{R}$ sind offen und $J = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} J_i$.

Es sei $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig.

Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent.

(A) Für jedes $i \in \mathcal{I}$ und jedes $(\xi, \eta) \in J_i \times \mathbb{R}^n$ hat das AWP

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(\xi) &= \eta \end{cases}$$

eine eindeutige (maximale) Lösung mit Existenz-Intervall J_i.

(B) Für jedes $(x_0, y_0) \in J \times \mathbb{R}^n$ hat das AWP

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

eine eindeutige (maximale) Lösung mit Existenz-Intervall J.

2.4.6 Beweis

(A) $\Rightarrow$ (B).

(1) Hätte das AWP in (B) zwei Lösungen, so gäbe es eine minimale Verzweigungsstelle x^* rechts von x_0 oder eine maximale Verzweigungsstelle x^* links von x_0. In einem Intervall J_i mit $x^* \in J_i$ gäbe es dann zwei Lösungen des gleichen AWPs.

(2) Angenommen, das Existenz-Intervall I der eindeutigen maximalen Lösung φ des AWPs in (B) ist nicht ganz J.

(3) Es existiert dann ein $i \in \mathbb{I}$, so dass

$$J_i \cap I \neq \varnothing \qquad \text{und} \qquad J_i \cap (J \setminus I) \neq \varnothing.$$

(4) Ist nun $\xi \in J_i \cap I$, so hat das AWP

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(\xi) &= \varphi(\xi) \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung auf J_i. Diese kann mit φ zu einer Lösung mit Existenz-Intervall $I \cup J_i \supsetneqq I$ zusammengeflickt werden. Widerspruch.

(B) $\Rightarrow$ (A) ist trivial.

Im vorherigen Satz 2.4.1 kann die Bedingung $(\mathcal{X})$ einfach weggelassen werden.

2.4.7 Satz von Picard–Lindelöf — Globale Version II

Das AWP

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

mit stetiger rechter Seite $f : D \to \mathbb{R}^n$ erfülle die folgenden Voraussetzungen $(\mathcal{D})$ und $(\mathcal{L})$.

$(\mathcal{D})$ Es sei $J = [c,d]$ kompakt und $D = J \times \mathbb{R}^n$.

$(\mathcal{L})$ $f : D \to \mathbb{R}^n$ genüge einer *globalen Lipschitz–Bedingung* bzgl. der zweiten Variablen, d.h. es existiere eine Konstante $L \geq 0$, so dass für alle Punkte $(x,y), (x,\widetilde{y}) \in D$

$$\|f(x,y) - f(x,\widetilde{y})\|_{\mathbb{R}^n} \leq L \cdot \|y - \widetilde{y}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

$(\mathcal{E})$ Dann gibt es genau eine (globale) Lösung $y : J \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems.

2.4.8 Beweis — Erste Variante

Auf jedem kompakten Teilintervall $[c,d] \subseteq J$ der Länge $d - c < \frac{1}{L}$ hat jedes AWP gemäß Satz 2.4.1 eine eindeutige Lösung auf $[c,d]$. Die gleiche Aussage gilt dann für alle offenen Intervalle $]c,d[$, die eine offene Überdeckung von J bilden.

Der Satz 2.4.5 liefert dann die Behauptung.

2.4.9 Beweis — Zweite Variante

Es sei $(x_0, y_0) \in J \times \mathbb{R}^n$ vorgegeben. Der Beweistrick besteht darin, für ein festes $\alpha \geq 0$ eine Gewichtsfunktion auf J wie folgt zu definieren:

$$p(x) := e^{-\alpha|x-x_0|}.$$

Dann ergibt sich eine veränderte Norm auf $\mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n)$

$$\|y\|_{\infty,p} := \sup_{x \in J} \{ p(x) \cdot \|y(x)\|_{\mathbb{R}^n} \}.$$

Auch unter dieser Norm wird $\mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n)$ zum Banachraum.

Die Iterationsabbildung T wird genau so gewählt wie im Beweis 2.4.3 und einige Schritte weit abgeschätzt wie oben.

Dann aber weiter:

$$\begin{aligned}
\|(Ty)(x) - (T\widetilde{y})(x)\|_{\mathbb{R}^n} &\leq L \cdot \left| \int_{x_0}^{x} \|y(t) - \widetilde{y}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \, dt \right| \\
&= L \cdot \left| \int_{x_0}^{x} \|y(t) - \widetilde{y}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \cdot e^{-\alpha|t-x_0|} \cdot e^{+\alpha|t-x_0|} \, dt \right| \\
&\leq L \cdot \left| \int_{x_0}^{x} \|y - \widetilde{y}\|_{\infty,p} \cdot e^{\alpha|t-x_0|} \, dt \right| \\
&= L \cdot |y - \widetilde{y}\|_{\infty,p} \cdot \left| \int_{x_0}^{x} e^{\alpha|t-x_0|} \, dt \right| \\
&= L \cdot |y - \widetilde{y}\|_{\infty,p} \cdot \frac{e^{\alpha|x-x_0|}}{\alpha}
\end{aligned}$$

Daraus folgt aber zunächst für festes $x \in J$

$$\|(Ty)(x) - (T\widetilde{y})(x)\|_{\mathbb{R}^n} \cdot e^{-\alpha|x-x_0|} \quad \leq \quad \tfrac{L}{\alpha} \cdot \|y - \widetilde{y}\|_{\infty,p}$$

und dann durch Übergang zum Supremum

$$\|Ty - T\widetilde{y}\|_{\infty,p} \quad \leq \quad \tfrac{L}{\alpha} \cdot \|y - \widetilde{y}\|_{\infty,p}.$$

Das aber bedeutet, dass durch geeignete Wahl von α die Metrik so verändert wird, dass T zu einer Kontraktion wird.

Man kann dann wieder mit dem Banach'schen Fixpunktsatz den Beweis zu Ende bringen.

Im Satz 2.4.7 können die Bedingungen $(\mathcal{D})$ und $(\mathcal{L})$ wie folgt abgeschwächt werden.

2.4.10 Satz von Picard–Lindelöf — Globale Version III

Das AWP

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

mit stetiger rechter Seite $f : D \to \mathbb{R}^n$ erfülle die folgenden Voraussetzungen $(\mathcal{D})$ und $(\mathcal{L})$.

$(\mathcal{D})$ Es ist J ein beliebiges Intervall und $D = J \times \mathbb{R}^n$.

$(\mathcal{L})$ f erfülle auf jedem kompakten Teilintervall K von J eine Lipschitzbedingung, d.h. es existiert eine (i.a. von K abhängige) Konstante $L_K \geq 0$, so dass für alle $(x,y), (x,\widetilde{y}) \in K \times \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|f(x,y) - f(x,\widetilde{y})\|_{\mathbb{R}^n} \leq L_K \cdot \|y - \widetilde{y}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

$(\mathcal{E})$ Dann gibt es genau eine (globale) Lösung $y : J \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems.

2.4.11 Beweis

Die offenen Kerne der kompakten Teilintervalle bilden eine offene Überdeckung von J. Satz 2.4.7 liefert dann die Aussage (A) in Satz 2.4.5. Die dazu äquivalente Aussage (B) in Satz 2.4.5 ist die hier zu beweisende Behauptung.

2.5 Der Satz von Picard–Lindelöf — lokale Versionen

2.5.1 Hilfssatz: Abschneidefunktion

Wir definieren die Funktion

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \quad B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n \\ y & \mapsto \quad \begin{cases} y, & \text{falls } y \in B_1(0), \\ \frac{y}{\|y\|}, & \text{sonst.} \end{cases} \end{cases}$$

Diese Funktion hat die Lipschitz–Konstante 1.

2.5.2 Beweis

Es seien $y, \widetilde{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\widetilde{y}\| \leq \|y\|$.

Wir definieren durch Unterklammerung die Zahlen λ und Vektoren z

$$y = \underbrace{\max\{1, \|y\|\}}_{=:\lambda} \cdot \underbrace{\varphi(y)}_{=:z}, \qquad \widetilde{y} = \underbrace{\max\{1, \|\widetilde{y}\|\}}_{=:\widetilde{\lambda}} \cdot \underbrace{\varphi(\widetilde{y})}_{=:\widetilde{z}}$$

Es ist dann auch $\|\widetilde{z}\| \leq \|z\|$, aufgrund der Cauchy–Schwarz–Ungleichung

$$\langle z, \widetilde{z} \rangle \leq \|z\| \cdot \|\widetilde{z}\| \leq \|z\|^2 = \langle z, z \rangle.$$

Mit $\mu := \frac{\lambda}{\widetilde{\lambda}} \geq 1$ ist dann

$$\begin{aligned}
\|y - \widetilde{y}\|^2 - \|\varphi(y) - \varphi(\widetilde{y})\|^2 &= \|\lambda z - \widetilde{\lambda}\widetilde{z}\|^2 - \|z - \widetilde{z}\|^2 \\
&= \widetilde{\lambda} \cdot \|\mu \cdot z - \widetilde{z}\|^2 - \|z - \widetilde{z}\|^2 \\
&\geq \quad \|\mu \cdot z - \widetilde{z}\|^2 - \|z - \widetilde{z}\|^2 \\
&= \mu^2 \langle z, z \rangle - 2\mu \langle z, \widetilde{z} \rangle + \langle \widetilde{z}, \widetilde{z} \rangle - \langle z, z \rangle + 2\langle z, \widetilde{z} \rangle - \langle \widetilde{z}, \widetilde{z} \rangle \\
&= (\mu^2 - 1)\langle z, z \rangle - 2(\mu - 1)\langle z, \widetilde{z} \rangle \\
&= (\mu - 1)\left[(\mu + 1)\langle z, z \rangle - 2\langle z, \widetilde{z} \rangle\right] \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

2.5.3 Satz von Picard-Lindelöf: Lokal-quantitative Version

Das AWP

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

mit stetiger rechter Seite $f : D \to \mathbb{R}^n$ erfülle die folgenden Voraussetzungen $(\mathcal{D})$ und $(\mathcal{L})$.

$(\mathcal{D})$ Es ist $J = [c, d]$ kompakt. Es sei $D = J \times B_\varrho(y_0)$ ein „liegender Zylinder".

$(\mathcal{L})$ f genüge auf D einer Lipschitz–Bedingung bzgl. der zweiten Variablen, d.h. es existiere eine Konstante $L \geq 0$, so dass für alle $(x, y), (x, \widetilde{y}) \in D$ gilt:

$$\|f(x,y) - f(x,\widetilde{y})\|_{\mathbb{R}^n} \quad \leq \quad L \cdot \|y - \widetilde{y}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

$(\mathcal{E})$ Dann existiert auf dem Intervall

$$I \quad := \quad [x_0 - \tfrac{\varrho}{M}, x_0 + \tfrac{\varrho}{M}] \;\cap\; J \quad \text{mit} \;\; M \quad := \quad \max\left\{ \|f(x,y)\|_{\mathbb{R}^n} \;\middle|\; (x,y) \in D \right\}$$

genau eine Lösung des AWPs.

2.5.4 Beweis

(1) Wir modifizieren die Rechte Seite der Differentialgleichung

$$F(x,y) \;:=\; f(x, \varrho \cdot \varphi(\tfrac{y-y_0}{\varrho}) + y_0).$$

(2) Für $y \in B_\varrho(y_0)$ ist $\|\frac{y-y_0}{\varrho}\| \leq 1$ und deshalb

$$F(x,y) = f(x,y).$$

F erfüllt eine globale Lipschitz–Bedingung mit der gleichen Lipschitz–Konstante wie f, d.h. für alle $x \in J$ und $y, \widetilde{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} \|F(x,y) - F(x,\widetilde{y})\| \quad &= \quad \|f(x, \underbrace{\varrho \cdot \varphi(\tfrac{y-y_0}{\varrho}) + y_0}_{\in B_\varrho(y_0)}) - f(x, \underbrace{\varrho \cdot \varphi(\tfrac{\widetilde{y}-y_0}{\varrho}) + y_0}_{\in B_\varrho(y_0)})\| \\ &\leq \quad L \cdot \|(\varrho \cdot \varphi(\tfrac{y-y_0}{\varrho}) + y_0) - (\varrho \cdot \varphi(\tfrac{\widetilde{y}-y_0}{\varrho}) + y_0)\| \\ &= \quad L \cdot \varrho \cdot \|\varphi(\tfrac{y-y_0}{\varrho}) - \varphi(\tfrac{\widetilde{y}-y_0}{\varrho})\| \\ &\leq \quad L \cdot \varrho \cdot \|\tfrac{y-y_0}{\varrho} - \tfrac{\widetilde{y}-y_0}{\varrho}\| \\ &\leq \quad L \cdot \|y - \widetilde{y}\|. \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\sup\{\|F(x,y)\| \mid (x,y) \in J \times \mathbb{R}^n\} \quad = \quad \max\{\|f(x,y)\| \mid (x,y) \in J \times B_\varrho(y_0)\} \quad = \quad M.$$

(3) Es sei jetzt $y : J \to \mathbb{R}^n$ die gemäß Satz 2.4.7 existente und eindeutige Lösung des AWPs

$$\begin{cases} y' &= F(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

auf J. Für $x \in I = [x_0 - \frac{\varrho}{M}, x_0 + \frac{\varrho}{M}]$ gilt dann

$$\begin{aligned} \|y(x) - y_0\| &= \left\| \int_{x_0}^x y'(t)\, dt \right\| = \left\| \int_{x_0}^x F(t, y(t))\, dt \right\| \\ &\le \left| \int_{x_0}^x M\, dt \right| = |x - x_0| \cdot M \le \varrho. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass der Graph der auf I eingeschränkten Funktion $y\Big|_I$ ganz in $D = I \times B_\varrho(y_0)$ verläuft.

(5) Es folgt, dass $y\Big|_I$ auch Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung ist. Für $x \in I$ gilt nämlich $y\Big|_I(x) \in B_\varrho(y_0)$, deshalb

$$y'(x) = F(x, y(x)) = f(x, \varrho \cdot \varphi(\tfrac{y(x)-y_0}{\varrho}) + y_0) = f(x, y(x)).$$

(6) Die Eindeutigkeit ist ebenso einfach zu zeigen: Hätte das AWP aus dem Satz zwei verschiedene Lösungen auf I, so hätte auch das modifizierte AWP mit F als Rechter Seite zwei Lösungen, was aber unmöglich ist.

2.5.5 Satz von Picard-Lindelöf: Lokal-qualitative Version

Das AWP

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

mit stetiger rechter Seite $f : D \to \mathbb{R}^n$ erfülle die folgende Voraussetzung ($\mathcal{L}$).

($\mathcal{L}$) Das heißt, es gebe eine offene Umgebung U mit $(x_0, y_0) \in U \subseteq D$, so dass f auf U stetig ist und einer Lipschitz-Bedingung genügt, d.h. für alle $(x, y), (x, \widetilde{y}) \in U$ gilt:

$$\|f(x, y) - f(x, \widetilde{y})\|_{\mathbb{R}^n} \le L \cdot \|y - \widetilde{y}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

($\mathcal{E}$) Dann existieren ein offenes Intervall I mit $x_0 \in I$ und eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$, die eine eindeutige Lösung des AWPs auf I ist.

2.5.6 Beweis

Wähle $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c < x_0 < d$ und $\varrho > 0$, so dass $[c, d] \times B_\varrho(y_0) \subseteq U$ und wende dann Satz 2.5.3 an. Der Satz liefert eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$. Sie kann auf ein offenes Teilintervall eingeschränkt werden.

2.5.7 Definition: Lipschitz-Stetigkeit

(1) Die Rechte Seite $f : D \to \mathbb{R}^n$ einer Differentialgleichung heißt *Lipschitz-stetig (bzgl. der zweiten Variablen)* an der Stelle $(x_0, y_0) \in D$, wenn es eine offene Umgebung U mit $(x_0, y_0) \in U \subseteq D$ gibt, so dass f auf U einer Lipschitz-Bedingung genügt.

(2) Die Rechte Seite $f : D \to \mathbb{R}^n$ einer Differentialgleichung heißt *Lipschitz-stetig (bzgl. der zweiten Variablen)* (schlechthin), wenn sie an jeder Stelle $(x, y) \in D$ Lipschitz-stetig ist.

Gelegentlich findet man auch die Begriffe ,,erfüllt lokale Lipschitz-Bedingung" oder ,,lokal Lipschitz" o.ä.

2.5.8 Satz: Lipschitz-Stetigkeit

Es sei die Rechte Seite $f : D \to \mathbb{R}^n$, D offen, einer Differentialgleichung gegeben.

(i) Ist f auf D stetig differenzierbar (kurz: f ist $\mathcal{C}^1$-Funktion), so ist f auf D Lipschitz-stetig.

(ii) Ist $f : D \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig bzgl. der zweiten Variablen, so genügt f auf jedem Kompaktum $K \subseteq D$ einer (globalen) Lipschitz-Bedingung.

(iii) Satz (von Rademacher, spielt in GDG keine Rolle): Genügt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, einer Lipschitz-Bedingung, so ist f fast-überall differenzierbar.

2.5.9 Beweis

(i) Es sei $(x_0, y_0) \in D$ und $K \subseteq D$ eine kompakte Umgebung von (x_0, y_0). Gemäß Mittelwertsatz der mehrdimensionalen Differentialrechnung gilt für $(x, y), (x, \widetilde{y}) \in K$

$$\|f(x, y - f(x, \widetilde{y})\| \quad \leq \quad \underbrace{\max_{(x,y)\in K} \{\|Df(x, y)\|\}}_{=:L_K} \cdot \|(x, y) - (x, \widetilde{y})\| \quad = \quad L_K \cdot \|y - \widetilde{y}\|.$$

(ii) (1) Würde f nicht einer Lipschitz-Bedingung genügen, so gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ zwei Punkte (x_n, y_n) und $(x_n, \widetilde{y}_n)$, so dass

$$\|f(x_n, y_n) - f(x_n, \widetilde{y}_n)\| \quad \geq \quad n \cdot \|y_n - \widetilde{y}_n\|. \qquad (*)$$

(2) Aufgrund der Kompaktheit von D können wir — gegebenenfalls durch Übergang zu Teilfolgen — annehmen, dass die Folgen $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_n, \widetilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Wir bezeichnen die Grenzwerte mit

$$x^* \quad := \quad \lim_{n\to\infty} x_n, \qquad y^* \quad := \quad \lim_{n\to\infty} y_n, \qquad \widetilde{y}^* \quad := \quad \lim_{n\to\infty} \widetilde{y}_n.$$

(3) Mit Grenzwertbildung in $(*)$ folgt, dass

$$\|y^* - \widetilde{y}^*\| \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \|y_n - \widetilde{y}_n\| \quad \leq \quad \lim_{n\to\infty} [\tfrac{1}{n} \cdot \|f(x_n, y_n) - f(x_n, \widetilde{y}_n)\|] \quad = \quad 0,$$

also $y^* = \widetilde{y}^*$.

(4) Aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit von f gibt es eine Umgebung U mit $(x^*, y^*) \in U \subseteq D$ und ein $L \geq 0$, so dass

$$\|f(x, y) - f(x, \widetilde{y})\| \quad \leq \quad L \cdot \|y - \widetilde{y}\| \qquad \text{für alle} \quad (x, y), (x, \widetilde{y}) \in U. \qquad (**)$$

(5) Für genügend große $n \in \mathbb{N}$ gilt $(x_n, y_n), (x_n, \widetilde{y}_n) \in U$, so dass ein Widerspruch zwischen $(*)$ und $(**)$ hergestellt ist.

(iii) wird hier nicht bewiesen.

2.6 Der Satz von Picard-Lindelöf bei Linearer Beschränktheit

2.6.1 Satz von Picard–Lindelöf bei linearer Beschränktheit

Das AWP

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

mit stetiger rechter Seite $f : D \to \mathbb{R}^n$ erfülle die folgenden Voraussetzungen $(\mathcal{D})$ und $(\mathcal{L})$.

$(\mathcal{D})$ Es ist J ein beliebiges Intervall und $D = J \times \mathbb{R}^n$.

$(\mathcal{L})$ f sei Lipschitz-stetig. Weiter sei f linear beschränkt, d.h. es gelte

$$\|f(x,y)\| \leq a(x) \cdot \|y\| + b(x) \qquad \text{für alle} \quad (x,y) \in D$$

mit stetigen Funktionen $a, b : J \to \mathbb{R}_0^+$.

$(\mathcal{E})$ Dann gibt es zu jedem $(x_0, y_0) \in D$ genau eine (globale) Lösung $y : J \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

2.6.2 Beweis

(1) Wir nehmen zunächst an, J sei kompakt. Wir definieren

$$A := \sup\{\|a(x)\| \mid x \in J\}, \qquad B := \sup\{\|b(x)\| \mid x \in J\}$$

und wählen $h \in \,]0, \frac{1}{A}[$.

(2) Wir zeigen nun, dass für beliebiges fixiertes $(\xi, \eta) \in J \times \mathbb{R}^n$ das AWP

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(\xi) &= \eta \end{cases}$$

eine Lösung mit Existenz-Intervall $[\xi - h, \xi + h] \cap J$ besitzt.

(3) Dazu sei

$$\varrho_\eta := \tfrac{(A\|\eta\|+B)h}{1-Ah} > 0.$$

Es gilt umgekehrt

$$B = \tfrac{1-Ah}{h}\varrho_\eta - A\|\eta\| = \tfrac{\varrho_\eta}{h} - A(\|\eta\| + \varrho_\eta).$$

und deshalb wegen der Linearen Beschränktheit

$$\begin{aligned} M_\eta &:= \max\{\|f(x,y)\| \mid (x,y) \in J \times B_{\varrho_\eta}(\eta)\} \\ &\leq A(\|\eta\| + \varrho_\eta) + B = \tfrac{\varrho_\eta}{h}, \end{aligned}$$

also

$$\tfrac{\varrho_\eta}{M_\eta} \geq h.$$

(4) Gemäß Satz 2.5.3 in Verbindung mit Satz 2.5.8 (ii) existiert die eindeutige Lösung des AWPs mindestens auf dem Intervall

$$[\xi - \tfrac{\varrho_\eta}{M_\eta}, \xi + \tfrac{\varrho_\eta}{M_\eta}] \ \cap \ J \ \ \supseteq \ \ [\xi - h, \xi + h] \ \cap \ J.$$

(5) Die offenen Intervalle $]\xi - \frac{\varrho_\eta}{M_\eta}, \xi + \frac{\varrho_\eta}{M_\eta}[\ \cap \ J^\circ$ bilden eine offene Überdeckung von J. Der Satz 2.4.5 liefert die Behauptung für kompaktes J.

(6) Ist J nicht kompakt, so gibt es eine offene Überdeckung von J mit Intervallen $]c, d[$, mit $c, d \in J$. Da gemäß dem eben gezeigten auf den Intervallen $[c, d]$ alle AWPe eine eindeutige Lösung mit gesamtem Existenz-Intervall $[c, d]$ haben, liefert wieder der Satz 2.4.5 die Behauptung.

2.7 Der Existenzsatz von Peano

2.7.1 Satz von Peano: Lokal-quantitativ

Das AWP

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

mit stetiger rechter Seite $f : D \to \mathbb{R}^n$ erfülle die folgende Voraussetzung $(\mathcal{D})$.

$(\mathcal{D})$ Es ist $J = [c,d]$ kompakt. Es sei $D = J \times B_\varrho(y_0)$ ein „liegender Zylinder".

$(\mathcal{E})$ (Lokal-quantitativ) Dann existiert auf dem Intervall

$$I \quad := \quad [x_0 - \tfrac{\varrho}{M}, x_0 + \tfrac{\varrho}{M}] \cap J \quad \text{mit} \quad M \quad := \quad \max \left\{ \|f(x,y)\|_{\mathbb{R}^n} \;\middle|\; (x,y) \in D \right\}$$

eine Lösung des AWPs.

2.7.2 Beweis

Er beruht auf dem Satz von Arzela-Ascoli, der bestimmte Teilmengen des Funktionenraums $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, I kompakt, als „relativ-kompakt" charakterisiert.

2.7.3 Satz von Peano: Lokal-qualitativ

Das AWP

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

mit stetiger rechter Seite $f : D \to \mathbb{R}^n$ erfülle die folgende Voraussetzung $(\mathcal{D})$.

$(\mathcal{D})$ Es sei D offen.

$(\mathcal{E})$ Dann existieren ein Intervall I und eine Lösung $y : I \to D$ des AWPs.

3 Lineare Differentialgleichungssysteme

3.1 Einstieg

3.1.1 Vorbemerkung Der in diesem Kapitel 3 immer wieder auftretende $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ kann ohne weiteres durch den $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^n$ ersetzt werden.

3.1.2 Definitionen

(i) Ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung heißt *linear*, wenn die Definitionsmenge der rechten Seite f die Form $D = I \times \mathbb{R}^n$ hat und es sich darstellen lässt als

$$y' \;=\; A(x)\,y + b(x) \qquad \text{(iLDGS)}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

mit einer stetigen matrixwertigen Funktion $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und einer stetigen vektorwertigen Funktion $b : I \to \mathbb{R}^n$.

(ii) Wegen des Terms $b(x)$ nennt man das Differentialgleichungssystem zusätzlich *inhomogen.*

(iii) Wird der Term $b \equiv 0$ gesetzt, so spricht man vom (zugehörigen) *homogenen* Differentialgleichungssystem

$$y' \;=\; A(x)y. \qquad \text{(hLDGS)}$$

3.1.3 Satz: Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen linearer Differentialgleichungssysteme

Ein lineares AWP

$$\begin{cases} y' &= A(x)y + b(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

mit stetigen Funktionen $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b : I \to \mathbb{R}^n$, $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ hat genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}^n$.

3.1.4 Beweis

Da die Normfunktion

$$\|A\| : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto & \|A(x)\| \end{cases}$$

stetig ist, nimmt sie auf jedem kompakten Teilintervall $J \subseteq I$ einen Maximalwert

$$L_J \quad := \quad \max_{x \in J}\{\|A(x)\|\} \ \geq \ 0$$

an. Deshalb erfüllt die Rechte Seite auf jedem solchen J eine Lipschitz-Bedingung:

$$\begin{aligned} \|[A(x)y + b(x)] - [A(x)\widetilde{y} + b(x)]\| \quad &= \quad \|A(x)(y - \widetilde{y})\| \\ &\overset{(*)}{\leq} \quad \|A(x)\| \cdot \|y - \widetilde{y}\| \leq L_J \cdot \|y - \widetilde{y}\|. \end{aligned}$$

Die Ungleichung $(*)$ gründet auf die ,,Submultiplikativität" der Matrixnorm.

Der Satz 2.4.10 liefert dann die Behauptung.

Oder aber: Wende einfach den Satz 2.6.1 über die Existenz und Eindeutigkeit bei linearer Beschränktheit an.

3.2 Die Struktur der Lösungsmenge

3.2.1 Definition

Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetig-differenzierbaren vektorwertigen Funktionen $y : I \to \mathbb{R}^n$.

3.2.2 Satz: Struktur der Lösungsmenge

(i) Die Menge der Lösungen des homogenen Differentialgleichungssystems (hLDGS) ist ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$, d.h.

- Die Summe zweier Lösungen $y_1 + y_2$ ist wieder eine Lösung.
- Das skalare Vielfache einer Lösung $\alpha \cdot y$ ist wieder eine Lösung.

(ii) Es sei y_{bs} eine (bestimmte oder besondere) Lösung von (iLDGS). Dann sind die folgenden Aussagen über eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ äquivalent:

(A) y ist eine Lösung von (iLDGS).

(B) Die Differenz $y - y_{\text{bs}}$ ist eine Lösung von (hLDGS).

(C) y lässt sich darstellen als Summe von y_{bs} und einer Lösung von (hLDGS).

(iii) Die Menge der Lösungen des inhomogenen Differentialgleichungssystems (iLDGS) ist ein affiner Unterraum von $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.

3.2.3 Beweis

(i) Sind y und $\widetilde{y}$ Lösungen von (hLDGS), so gilt

$$y'(x) = A(x)y(x) \qquad \text{und} \qquad \widetilde{y}'(x) = A(x)\widetilde{y}(x)$$

und deshalb

$$\begin{aligned}(\alpha y + \beta \widetilde{y})'(x) &= \alpha y'(x) + \beta \widetilde{y}'(x) = \alpha A(x)y(x) + \beta A(x)\widetilde{y}(x) \\ &= A(x)(\alpha y + \beta \widetilde{y})(x).\end{aligned}$$

Also ist auch die Linearkombination eine Lösung.

(ii) Ist (A) erfüllt, so ist die Differenz

$$(y - y_{\text{bs}})'(x) = [A(x)y(x) + b(x)] - [A(x)y_{\text{bs}}(x) + b(x)] = A(x) \cdot [y - y_{\text{bs}}](x).$$

eine Lösung von (hLDGS), also gilt (B).

Ist umgekehrt (B) erfüllt, so gilt

$$\begin{aligned}y'(x) &= [y - y_{\text{bs}}]'(x) + y_{\text{bs}}'(x) = A(x)[y - y_{\text{bs}}](x) + A(x)y_{\text{bs}} + b(x) \\ &= A(x)y(x) + b(x)\end{aligned}$$

und das ist die Aussage (A).

Die Aussagen (B) und (C) sind simple Umformulierungen voneinander.

Die letzte Aussage (iii) versieht die Aussage (ii) nur mit einem schlanken Fachbegriff.

3.3 Die Übergangsfunktion

3.3.1 Entscheidende Beobachtung

Wir betrachten das linear homogene AWP

$$\begin{cases} y' &= A(x)y \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

Für festes $x, x_0 \in I$ ist die Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ y_0 &\mapsto y(x), \quad \text{wobei } y \text{ Lösung des AWPs ist,} \end{cases}$$

linear.

3.3.2 Begründung ist einfach. Sind y und $\widetilde{y}$ zwei Lösungen zu den Anfangswerten y_0 bzw. $\widetilde{y}_0$, so ist die Funktion $\alpha y + \beta\widetilde{y}$ Lösung zum Anfangswert $\alpha y_0 + \beta\widetilde{y}_0$.

3.3.3 Definition: Übergangsmatrix

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass jede lineare Abbildung $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ als Matrix darstellbar ist.

Deshalb kann der Wert $y(x)$ der eindeutigen Lösung y an der Stelle x geschrieben werden als

$$y(x) = \Phi_A(x, x_0)\, y_0,$$

wobei $\Phi_A(x, x_0)$ eine quadratische $(n \times n)$-Matrix ist.

Dadurch ist insgesamt eine matrixwertige Funktion

$$\Phi_A : \begin{cases} I \times I &\to \mathbb{R}^{n \times n} \\ (x, x_0) &\mapsto \Phi_A(x, x_0) \end{cases}$$

wohldefiniert. Zwei Stellen x_0 und x im Intervall I wird also eine Matrix zugeordnet. Sie heißt *Übergangsmatrix* („von x_0 nach x"). Die gesamte Funktion heißt *Übergangsfunktion*.

Anders als im skalaren Fall (siehe Abschnitt 1.7.2) kann die Übergangsfunktion i.a. nicht als Exponentialfunktion mit einer Stammfunktion von A als Exponenten angegeben werden. Nichtsdestoweniger kann man zahlreiche Aussagen über die Übergangsfunktion machen, die wertvolle Einsichten hervorbringen.

3.3.4 Satz: Lösungen des linear-homogenen Differentialgleichungssystems

(i) Für festes $x_0 \in I$ und festes $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ist die Funktion

$$\Phi_A(\cdot\,, x_0)\, y_0 : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & \Phi_A(x, x_0)\, y_0 \end{cases}$$

Lösung des Vektor-AWPs

$$\begin{cases} y' & = & A(x)y \\ y(x_0) & = & y_0 \end{cases}$$

mit $D = I \times \mathbb{R}^n$.

(ii) Für festes $x_0 \in I$ ist die Menge der Funktionen

$$\Phi_A(\cdot\,, x_0)\, c : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & \Phi_A(x, x_0)\, c, \end{cases} \qquad c \in \mathbb{R}^n$$

die Lösungsmenge des linear homogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = A(x)y$$

mit $D = I \times \mathbb{R}^n$.

(iii) Der in Satz 3.2.2 (i) beschriebene Untervektorraum der Lösungen hat die Dimension n.

3.3.5 Begründung

(i) und (ii) sind direkte Konsequenzen der Definition von $\Phi_A(x, x_0)$.

(iii) folgt daraus, dass die Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) \\ c & \mapsto & \Phi_A(\cdot\,, x_0)\, c \end{cases}$$

aufgrund der Eindeutigkeit von AWP-Lösungen injektiv ist.

3.3.6 Satz: Eigenschaften der Übergangsmatrizen

Die Übergangsmatrizen haben die folgenden Eigenschaften.

(i) Für $x_1 \in I$ ist

$$\Phi_A(x_1, x_1) \;=\; \mathbf{1} \qquad \text{(Einheitsmatrix)}.$$

(ii) Für $x_1, x_2, x_3 \in I$ gilt die Koyzklus-Eigenschaft

$$\Phi_A(x_1, x_2) \cdot \Phi_A(x_2, x_3) \;=\; \Phi_A(x_1, x_3).$$

(iii) Für alle $x_1, x_2 \in I$ ist die Matrix $\Phi_A(x_1, x_2)$ invertierbar und es gilt

$$\Phi_A(x_1, x_2)^{-1} \;=\; \Phi_A(x_2, x_1).$$

3.3.7 Beweis

(i) ist eine direkte Folgerung aus der Definition.

(ii) Für festes x_2, x_3 und beliebiges $c \in \mathbb{R}^n$ sind die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} x &\mapsto \Phi_A(x, x_2) \cdot \Phi_A(x_2, x_3)c \\ x &\mapsto \Phi_A(x, x_3)c \end{aligned}$$

Lösungen des AWPs

$$\begin{cases} y' &= A(x)y \\ y(x_2) &= \Phi_A(x_2, x_3)c \end{cases}$$

und stimmen deshalb — insbesondere an der Stelle x_1 — überein.

Da also

$$\Phi_A(x_1, x_2) \cdot \Phi_A(x_2, x_3)c \;=\; \Phi_A(x_1, x_3)c$$

für alle $c \in \mathbb{R}^n$, müssen auch die Matrizen übereinstimmen.

(iii) Setzt man in der Aussage (ii) $x_3 = x_1$, so folgt mit (i)

$$\Phi_A(x_1, x_2) \cdot \Phi_A(x_2, x_1) \;=\; \Phi_A(x_1, x_1) \;=\; \mathbf{1}.$$

Also sind $\Phi_A(x_1, x_2)$ und $\Phi_A(x_2, x_1)$ zueinander inverse Matrizen.

3.4 Die Fundamentalmatrix

3.4.1 Satz und Definition: Fundamentalsystem und Fundamentalmatrix

Wir betrachten wieder das linear-homogene Differentialgleichungssystem

$$y' = A(x)\,y \qquad \text{(hLDGS)}$$

(i) Die folgenden Aussagen über n Lösungsfunktionen von (hLDGS)

$$y_1(\cdot\,), \ldots, y_n(\cdot\,)$$

sind äquivalent.

(A) Die Menge der Lösungsfunktionen $\{y_1(\cdot\,), \ldots, y_n(\cdot\,)\}$ heißt ein *Fundamentalsystem* für (hLDGS).

(B) Die Funktionen $y_1(\cdot\,), \ldots, y_n(\cdot\,)$ sind linear unabhängig in $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$.

(C) Die Funktionen $y_1(\cdot\,), \ldots, y_n(\cdot\,)$ bilden eine Basis des Lösungsraums aller Lösungen.

(D) Für ein $x \in I$ sind die Vektoren $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$.

(E) Für alle $x \in I$ sind die Vektoren $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$.

(ii) Die folgenden Aussagen über eine Matrixfunktion (manchmal auch ,,Wronski-Matrix" genannt)

$$Y : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R}^{n\times n} \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} y_1(\cdot\,), \ldots, y_n(\cdot\,) \end{pmatrix} \end{cases}$$

mit Lösungsfunktionen $y_i(\cdot\,)$ von (hLDGS) als Spalten sind äquivalent.

(A) Y heißt *Fundamentalmatrix* für (hLDGS).

(B) Für ein $x \in I$ ist die Matrix $Y(x)$ invertierbar.

(C) Für alle $x \in I$ ist die Matrix $Y(x)$ invertierbar.

(D) Für ein $x \in I$ ist die Determinante $\det Y(x)$ ungleich Null.

(E) Für alle $x \in I$ ist die Determinante $\det Y(x)$ ungleich Null.

3.4.2 Beweis

Das ist alles lineare Algebra. Aufgrund der Injektivität der Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) \\ y_0 & \mapsto & \Phi_A(\cdot\,, x_0)\, y_0 \end{cases}$$

sind der Untervektorraum der Lösungen und der Raum der Anfangswerte $\mathbb{R}^n$ an einer Stelle x_0 isomorph zueinander.

3.4.3 Beobachtung

Die Tatsache, dass jede der Funktionen $y_i(\cdot)$ Lösung ist, können wir zusammenfassen zu

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1'(\cdot) & \cdots & y_n'(\cdot) \end{pmatrix} &= A(x) \begin{pmatrix} y_1(\cdot) & \cdots & y_n(\cdot) \end{pmatrix} \qquad \text{bzw. zu} \\ Y' &= A(x)\,Y. \end{aligned}$$

Dahinter steckt die Erkenntnis aus der linearen Algebra, dass die Links-Multiplikation einer Matrix Y mit einer Matrix A gleich ist der Linksmultiplikation der Spaltenvektoren von Y.

Die zweite Zeile enthält eine linear homogene Differentialgleichung für eine matrixwertige Funktion. Das hört sich ziemlich exotisch-unzugänglich an, tatsächlich wird aber die Theorie durch diese Betrachtungsweise einfacher und schlank.

3.4.4 Satz: Zusammenhang von Fundamentalmatrix und Übergangsmatrix

Wir betrachten wieder das linear-homogene Differentialgleichungssystem

$$y' = A(x)\,y \qquad \text{(hLDGS)}$$

(i) (Übergangsmatrix → Fundamentalmatrix) Für festes $x_0 \in I$ und jede beliebige invertierbare Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist

$$Y(x) \quad := \Phi_A(x, x_0) \cdot C$$

eine Fundamentalmatrix.

(ii) (Fundamentalmatrix → Übergangsmatrix) Ist Y eine beliebige Fundamentalmatrix, so gilt

$$\Phi_A(x, x_0) = Y(x) \cdot Y(x_0)^{-1}.$$

3.4.5 Beweis

Obwohl das aufgrund der bisherigen Theorie klar sein sollte, rechnen wir das noch einmal nach.

(i) Die Matrix $Y(x) = \Phi_A(x, x_0) \cdot C$ ist als Produkt invertierbarer Matrizen selbst invertierbar und es gilt mit der mehrdimensionalen Leibniz-Produktregel

$$Y'(x) = (\Phi_A(x, x_0) \cdot C)' = \Phi_A(x, x_0)' \cdot C = A(x) \cdot \Phi_A(x, x_0) \cdot C = A(x) \cdot Y(x).$$

(ii) Es sei für $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ die eindeutige Lösung des AWPs

$$\begin{cases} y' &= A(x)y \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}.$$

Es gibt dann einen Vektor $c \in \mathbb{R}^n$, so dass $y(x) = Y(x) \cdot c$ für alle $x \in I$, deswegen ist

$$\begin{aligned} Y(x) \cdot Y(x_0)^{-1} y_0 &= Y(x) \cdot Y(x_0)^{-1} Y(x_0) \cdot c = Y(x) \cdot c = y(x) \\ &\overset{\text{Def 3.3.3}}{=} \Phi_A(x, x_0) \cdot y_0. \end{aligned}$$

Da dies für alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$ zutrifft, muss $Y(x) \cdot Y(x_0)^{-1} = \Phi_A(x, x_0)$ sein.

3.5 Die Wronski-Determinante

3.5.1 Definitionen

Es sei das linear homogene Differentialgleichungssystem

$$y' \quad = \quad A(x)\, y \qquad\qquad \text{(hLDGS)}.$$

gegeben.

(i) Sind $y_1(\cdot\,), \ldots, y_n(\cdot\,)$ Lösungen von (hLDGS), so heißt die Abbildung

$$w : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \det Y(x) \quad = \quad \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \end{pmatrix} \end{cases}$$

die zugehörige *Wronski-Determinante*.

(ii) Die Spur von A ist die Abbildung

$$\operatorname{spur} A : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{spur} A(x) \quad = \quad a_{11}(x) + \ldots + a_{nn}(x). \end{cases}$$

3.5.2 Satz: Wronski-Determinante

(i) Die Wronski-Determinante $w : I \to \mathbb{R}$ ist Lösung des skalaren linear homogenen AWPs

$$\begin{cases} w' & = & (\operatorname{spur} A(x))\, w \\ w(x_0) & = & \det \begin{pmatrix} y_1(x_0) & \cdots & y_n(x_0). \end{pmatrix} \end{cases}$$

(ii) Es gilt die Liouville'sche Formel

$$w(x) \quad = \quad \exp\left(\int_{x_0}^{x} \operatorname{spur} A(t)\, dt \right) \cdot w(x_0).$$

3.5.3 Beweis

(0) Wir können O.B.d.A. voraussetzen, dass die Matrix $Y(x)$ für ein (und damit alle) $x \in I$ invertierbar ist.

(1) Es sei

$$\widetilde{A}(x) \quad := \; Y^{-1}(x) \cdot A(x) \cdot Y(x)$$

die mit $Y(x)$ zu $A(x)$ konjugierte Matrix. Man weiß aus der linearen Algebra, dass die (charakteristischen Polynome und damit die) Spuren übereinstimmen:

$$\operatorname{spur} \widetilde{A}(x) \quad = \quad \operatorname{spur} A(x).$$

Wir multiplizieren die Konjugationsgleichung mit $Y(x)$ von links

$$Y(x)\widetilde{A}(x) \quad := \quad A(x) \cdot Y(x)$$

und betrachten dann die k-te Spalte:

$$\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{jk}(x) y_j(x) \quad = \quad A(x) y_k(x) \quad = \quad y_k'(x). \qquad (*)$$

(2) Wir differenzieren die Wronski-Determinante w gemäß Produktregel und erhalten

$$\begin{aligned}
w'(x) \quad &= \quad [\det Y]'(x) \\
&= \quad [\sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \sigma(\pi) \cdot y_{1,\pi(1)} \cdot \ldots \cdot y_{k,\pi(k)} \cdot \ldots \cdot y_{n,\pi(n)}]'(x) \\
&= \quad \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \sigma(\pi) \cdot [y_{1,\pi(1)} \cdot \ldots \cdot y_{k,\pi(k)} \cdot \ldots \cdot y_{n,\pi(n)}]'(x) \\
&= \quad \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \sigma(\pi) \cdot y_{1,\pi(1)}'(x) \cdot \ldots \cdot y_{k,\pi(k)}(x) \cdot \ldots \cdot y_{n,\pi(n)}(x) \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad + \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \sigma(\pi) \cdot y_{1,\pi(1)}(x) \cdot \ldots \cdot y_{k,\pi(k)}'(x) \cdot \ldots \cdot y_{n,\pi(n)}(x) \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad + \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \sigma(\pi) \cdot y_{1,\pi(1)}(x) \cdot \ldots \cdot y_{k,\pi(k)}(x) \cdot \ldots \cdot y_{n,\pi(n)}'(x) \\
&= \quad \det \begin{pmatrix} y_1'(x) & \cdots & y_k(x) & \cdots & y_n(x) \end{pmatrix} \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad + \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_k'(x) & \cdots & y_n(x) \end{pmatrix} \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad + \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_k(x) & \cdots & y_n'(x) \end{pmatrix} \\
&\overset{(*)}{=} \quad \det \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{j1}(x) y_j(x) & \cdots & y_k(x) & \cdots & y_n(x) \end{pmatrix} \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad + \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{jk}(x) y_j(x) & \cdots & y_n(x) \end{pmatrix} \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad + \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_k(x) & \cdots & \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{jn}(x) y_j(x) \end{pmatrix} \\
&= \quad \det \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11}(x) y_1(x) & \cdots & y_k(x) & \cdots & y_n(x) \end{pmatrix} \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad + \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & \widetilde{a}_{kk}(x) y_k(x) & \cdots & y_n(x) \end{pmatrix} \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad + \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_k(x) & \cdots & \widetilde{a}_{nn}(x) y_n(x) \end{pmatrix} \\
&= \quad (\widetilde{a}_{11}(x) + \ldots + \widetilde{a}_{nn}(x)) \cdot \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_k(x) & \cdots & y_n(x) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \quad \operatorname{spur} \widetilde{A}(x) \cdot \det Y(x)$$

$$= \quad \operatorname{spur} A(x) \cdot w(x).$$

Die Anfangsbedingung ist trivialerweise erfüllt.

(ii) ist klar mit Satz 1.7.3 (i).

3.5.4 Beispiel

Das zweidimensionale linear-homogene Differentialgleichungssystem

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix}}_{=A(x)} y$$

auf $D =]0, \infty[\times \mathbb{R}^2$ hat als eine Fundamentalmatrix

$$Y(x) = \begin{pmatrix} x^2 & -x^2 \ln x \\ -x & x + x \ln x \end{pmatrix}.$$

1. Rechne nach, dass für $x > 0$ die Matrix $Y(x)$ invertierbar ist.
2. Rechne nach, dass Y die Matrix-Differentialgleichung

   $$Y' = A(x) \cdot Y$$

   erfüllt.
3. Berechne die Wronski-Determinante w zu Y.
4. Teste die skalare Differentialgleichung für w.

3.6 Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

3.6.1 Variation der Konstanten

Wir können hier die Ausführungen aus dem Abschnitt 1.7.5 in den Vektorfall übersetzen.

Um eine Lösung für das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$y' \;=\; A(x)\,y + b(x) \qquad \text{(iLDGS)}$$

zu finden, wendet man das Prinzip der

> *Variation der Konstanten*
> der Lösung des zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystems

an. Dies bedeutet dass man als Ansatz für die Lösung der inhomogenen Differentialgleichungssystems den konstanten Vektor c in der Lösungsformel 3.3.4 (ii) durch eine Vektorfunktion $c(x)$ ersetzt:

$$y(x) \;=\; \Phi_A(x, x_0) \cdot c(x).$$

Man setzt diesen Ansatz in (iLDGS) ein und erhält mit der Produktregel, die für die Matrixmultiplikation genauso gilt

$$\begin{aligned} A(x)\,y(x) + b(x) &= y'(x) \\ &= \Phi_A(x, x_0) \cdot c'(x) + A(x) \cdot \Phi_A(x, x_0) \cdot c(x) \\ &= \Phi_A(x, x_0) \cdot c'(x) + A(x) \cdot y(x), \end{aligned}$$

was auf die Gleichung

$$c'(x) \;=\; \Phi_A(x_0, x) \cdot b(x)$$

führt. Um die Funktion c zu erhalten, müssen wir also nur noch komponentenweise integrieren. Die Integrations–Konstante ist dabei durch die Anfangsbedingung festgelegt:

$$c(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} \Phi_A(x_0, t) \cdot b(t)\,dt + y_0$$

Die gesamte Lösung kann so in einem Satz notiert werden.

3.6.2 Satz: Lösungen des inhomogenen Differentialgleichungssystems

(i) Für die eindeutige Lösung des inhomogenen AWPs

$$\begin{cases} y' &= A(x)y + b(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

gilt

$$\begin{aligned} y(x) &= \Phi_A(x, x_0) \cdot \left[\int_{x_0}^{x} \Phi_A(x_0, t) \cdot b(t)\, dt + y_0 \right] \\ &= \int_{x_0}^{x} \Phi_A(x, t) \cdot b(t)\, dt + \Phi_A(x, x_0) \cdot y_0. \end{aligned}$$

(Beachte die Besonderheit, dass die Variable x sowohl als Integrationsgrenze als auch im Integranden auftritt.)

(ii) Die Gesamtheit aller Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung ist gegeben durch

$$y(x) = \underbrace{\int_{x_0}^{x} \Phi_A(x, t) \cdot b(t)\, dt}_{\text{spezielle Lösung inhomogen}} + \underbrace{\Phi_A(x, x_0) \cdot c}_{\text{allgemeine Lösung homogen}}, \qquad c \in \mathbb{R}^n.$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems setzt sich aus einer speziellen Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems und der allgemeinen Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems zusammen.

(iii) Der in Satz 3.2.2 (iii) beschriebene affine Unterraum der Lösungen hat die Dimension n.

4 Skalare Differentialgleichungen höherer Ordnung

4.1 Definitionen

4.1.1 Vorgaben

Wir vereinbaren zunächst für dieses Kapitel, dass N eine feste natürliche Zahl (ungleich Null) ist, die in diesem Kontext *Ordnung* heißt. Unterscheide sie von der Dimension n von Systemen.

Es sei weiter D eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+N}$ und

$$f : \begin{cases} D & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, y', \dots, y^{(N-1)}) & \mapsto & f(x, y, y', \dots, y^{(N-1)}) \end{cases}$$

eine stetige Funktion.

Die ungewöhnliche Schreibweise für einen Vektor $y \in \mathbb{R}^N$ als

$$y = (y, y', y'', \dots, y^{(N-1)})$$

erfolgt im Hinblick auf die nachfolgende Definition.

4.1.2 Hilfestellung

Man betrachte die folgenden Definitionen und Überlegungen für den Fall $N = 1$, also $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Es handelt sich dann um Wiederholungen aus Kapitel 1.

Erinnern Sie sich daran, dass $y^{(i)}$ die *i–te Ableitung* der Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ bezeichnet.

4.1.3 Satz und Definition: Lösung einer skalaren Differentialgleichung N-ter Ordnung

Es sei eine skalare Differentialgleichung N-ter Ordnung

$$y^{(N)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(N-1)}).$$

mit stetiger Rechter Seite $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben.

Die folgenden Aussagen über eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$, wobei I ein Intervall, sind äquivalent.

(A) (Def) y ist *Lösung der skalaren Differentialgleichung N-ter Ordnung*

$$y^{(N)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(N-1)})$$

auf I.

(B) y ist N–mal differenzierbar und es gilt for alle $x \in I$:

$$y^{(N)}(x) = f\,\underbrace{(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(N-1)}(x))}_{\in D}.$$

(C) Die Vektorfunktion

$$\mathbf{y}: \begin{cases} I & \to & \mathbb{R}^N \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(x) \end{pmatrix} \end{cases}$$

ist Lösung des Differentialgleichungssystems 1. Ordnung mit Dimension $n = N$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{N-2} \\ \mathbf{y}_{N-1} \end{pmatrix}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y}) := \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{N-1} \\ f(x, \mathbf{y}) \end{pmatrix},$$

wobei die Rechte Seite $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^N$ des Systems die gleiche Definitionsmenge hat wie f.

4.1.4 Beweis

Anstelle eines formalen Beweises der Äquivalenz (B) $\Leftrightarrow$ (C) kann man sich mit einem Erläutern begnügen.

(B) $\Rightarrow$ (C)
Wird eine Lösung y der skalaren Differentialgleichung zusammen mit ihren Ableitungen der Ordnung $1, \ldots, N-1$ in eine Vektorfunktion eingetragen, so enthält die Ableitung dieser Vektorfunktion gerade die Ableitungen der Ordnungen $1, \ldots, N$. Wegen $y^{(N)}(x) = f(x, y(x), \ldots, y^{(N-1)}(x))$ folgt insgesamt

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(x) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ \vdots \\ y^{(N)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ \vdots \\ f(x, y(x), \ldots, y^{(N-1)}(x)) \end{pmatrix},$$

also ist die Vektorfunktion Lösung des Systems erster Ordnung in (C).

(C) $\Rightarrow$ (B)
Hat man eine Vektorfunktion $\mathbf{y}$ als Lösung des Systems erster Ordnung, so ist die erste Komponente $\mathbf{y}_0$ differenzierbar und gleich der zweiten Komponente $\mathbf{y}_1$. Diese ist wieder differenzierbar und gleich der dritten. Undsoweiter. Insgesamt ist $\mathbf{y}_0$ also N-mal differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_0^{(N)}(x) &= (\mathbf{y}_0^{(N-1)})'(x) = f(x, \mathbf{y}_0(x), \ldots, \mathbf{y}_{N-1}(x)) \\ &= f(x, y(x), \ldots, y^{(N-1)}(x)), \end{aligned}$$

also ist $\mathbf{y}_0$ Lösung der skalaren Differentialgleichung N-ter Ordnung in (B).

4.1.5 Bemerkungen

- Eine Differentialgleichung N-ter Ordnung beschreibt also die Aufgabe, bei gegebener *Rechter Seite* f eine unbekannte N-mal differenzierbare Funktion $x \mapsto y$ zu finden. Bei Einsetzung dieser Funktion und ihrer Ableitungen in die Rechte Seite soll auf der linken Seite die N-te Ableitung (linke Seite) herauskommen.

- Da auf der linken Seite die N-te Ableitung explizit (aufgelöst) auftritt, spricht man auch hier wieder von einer *expliziten* Differentialgleichung N-ter Ordnung.

- Eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ heißt wieder *maximal* oder mit *maximaler Definitionsmenge*, wenn es eine ,,umfassendere" weitere Lösung $\widetilde{y} : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ mit

  $$I \subsetneqq \widetilde{I} \qquad \text{und} \qquad y(x) = \widetilde{y}(x) \quad \text{für} \quad x \in I$$

  nicht gibt.

- Es sei $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{N-1})$ ein Punkt in der Definitionsmenge D der gegebenen Differentialgleichung N-ter Ordnung. Stellt man an eine Lösung y der Differentialgleichung zusätzlich die *Anfangsbedingung*, dass

  $$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_1, \qquad \ldots \qquad y^{(N-1)}(x_0) = y_{N-1},$$

  so spricht man von einem *Anfangswertproblem N-ter Ordnung.*

  Eine solche Anfangsbedingung wird unter Transformation (B) $\Leftrightarrow$ (C) des Satzes in die Anfangsbedingung

  $$\mathbf{y}(x_0) \quad = \quad \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}$$

  transformiert.

- Die Transformation (B) $\Leftrightarrow$ (C) ermöglicht es, die Existenz- und Eindeutigkeitssätze aus Kapitel 2 für skalare Differentialgleichungen höherer Ordnung nutzbar zu machen. Wir nehmen davon Abstand, alle diese Sätze hier erneut zu formulieren, wollen nur erwähnen, dass sich qualitative Eigenschaften wie Stetigkeit, Lipschitz-Bedingungen, stetige Differenzierbarkeit oder Autonomie der originalen rechten Seite f in entsprechende Eigenschaften der transformierten rechten Seite $\mathbf{F}$ übertragen lassen.

4.1.6 Beispiel

Es sei die skalare Differentialgleichung 3. Ordnung

$$y''' = (y')^2 + x \cdot y \cdot \cos y''$$

vorgegeben. Nach Definition der („transformierten") Funktionen innerhalb des Funktionenraums $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_0(x) &:= y(x) \\ \mathbf{y}_1(x) &:= y'(x) \\ \mathbf{y}_2(x) &:= y''(x) \end{aligned}$$

ist sie äquivalent zum Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ (\mathbf{y}_1)^2 + x \cdot \mathbf{y}_0 \cdot \cos \mathbf{y}_2 \end{pmatrix}.$$

4.2 Lineare skalare Differentialgleichungen höherer Ordnung

4.2.1 Beispiel: Die gedämpfte Schraubenfeder

Zur Abwechslung mal ein Beispiel. Wir wechseln hier das Symbolsystem. Anstelle der unabhängigen Variablen x wird t verwendet. Statt y verwenden wir dann x. Das ist seltsam und lästig, aber in der Physik so üblich.

Es seien K und R zwei positive Konstanten. Die Differentialgleichung

$$\ddot{x} \;=\; -Kx - R\dot{x}$$

beschreibt die Bewegung eines Körpers, der von einer Schraubenfeder angetrieben wird und dabei einer Reibung unterliegt.

- Die Variable x steht für die momentane Auslenkung der Schraubenfeder aus der Ruhelage.
- Der einfache bzw. doppelte Punkt über dem x bedeutet die erste bzw. zweite Ableitung nach der Zeitvariablen t. Die Ausdrücke $\dot{x}$ bzw. $\ddot{x}$ stehen also für die Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung des Körpers.
- Die Beschleunigung (Bremsung) $\ddot{x}$ wird einmal hervorgerufen durch die Federkraft $-Kx$. Gemäß Hooke'schem Gesetz ist sie proportional zur Dehnung x der Feder und dabei der aktuellen Auslenkung der Feder entgegengerichtet.
- Der zweite Term $-R\dot{x}$ steht für die Reibungskraft, die als proportional zur Geschwindigkeit modelliert wird. Die Reibung wirkt immer entgegen der Geschwindigkeitsrichtung.
- Die Gewichtskraft spielt keine Rolle. Notfalls denke man sich die Bewegung des Körpers horizontal.

4.2.2 Transformation

Die skalare Differentialgleichung zweiter Ordnung ist äquivalent zu dem System der Dimension 2

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \end{pmatrix}^{\bullet} \;=\; \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ -K\,\mathbf{x}_0 - R\,\mathbf{x}_1 \end{pmatrix}.$$

4.2.3 Ansatz Ohne Bezugnahme auf die Transformation probieren wir einen Ansatz:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\varrho t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ \dot{x}(t) &= -\varrho e^{-\varrho t} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \omega e^{-\varrho t} \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ \ddot{x}(t) &= \varrho^2 e^{-\varrho t} \cdot \sin(\omega \cdot t) - 2\varrho\omega e^{-\varrho t} \cdot \cos(\omega \cdot t) - \omega^2 e^{-\varrho t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{aligned}$$

Setzen wir diese Funktion und ihre Ableitungen in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \varrho^2 e^{-\varrho t} \cdot \sin(\omega \cdot t) - 2\varrho\omega e^{-\varrho t} \cdot \cos(\omega \cdot t) - \omega^2 e^{-\varrho t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ = \; & -Ke^{-\varrho t} \cdot \sin(\omega \cdot t) - R[-\varrho e^{-\varrho t} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \omega e^{-\varrho t} \cdot \cos(\omega \cdot t)] \end{aligned}$$

und damit, da dies für alle $t \in \mathbb{R}$ gültig sein muss,

$$\varrho^2 - \omega^2 \;=\; -K + R\varrho, \qquad -2\varrho\omega \;=\; -R\omega$$

und daraus, wenn $K \geq \frac{R^2}{4}$,

$$\varrho \;=\; \frac{R}{2}, \qquad \omega \;=\; \pm\sqrt{K - \frac{R^2}{4}}.$$

4.2.4 Eine Lösung

Man kann dann direkt nachweisen, dass die gedämpfte Schwingung

$$x(t) \;=\; e^{-\frac{Rt}{2}} \cdot \sin\left(\sqrt{K - \frac{R^2}{4}} \cdot t\right)$$

eine Lösung der Differentialgleichung darstellt. Ihr Graph ist hier abgebildet.

Dank an Frau Dr. Galina Filipuk (Warschau).

4.2.5 Definition Eine (explizite) Differentialgleichung N–ter Ordnung heißt *linear*, wenn die Definitionsmenge der Rechten Seite f die Form $D = I \times \mathbb{R}^N$, I ein Intervall, hat und dann die rechte Seite sich als

$$y^{(N)} \;=\; -a_0(x)y - a_1(x)y' - \ldots - a_{N-1}(x)y^{(N-1)} + b(x) \qquad \text{(iLDGO)}$$

darstellen lässt mit stetigen Funktionen $a_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, N-1$ und $b : I \to \mathbb{R}$.

Wegen des Terms $b(x)$ nennt man die Differentialgleichung zusätzlich *inhomogen*. Wird die Funktion $b \equiv 0$ gesetzt, so spricht man von einer (zugehörigen) *homogenen* Differentialgleichung

$$y^{(N)} \;=\; -a_0(x)y - a_1(x)y' - \ldots - a_{N-1}(x)y^{(N-1)}. \qquad \text{(hLDGO)}$$

Dass die Koeffizienten mit Minuszeichen versehen sind, hat einen Grund, den wir später kennenlernen werden.

4.2.6 Satz und Definition

Es sei die lineare skalare Differentialgleichung (iLDGO) N-ter Ordnung gegeben.

Die folgenden Aussagen über eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ sind äquivalent.

(A) (Def) y ist Lösung der linearen skalaren Differentialgleichung N-ter Ordnung

$$y^{(N)} \;=\; -a_0(x)y - a_1(x)y' - \ldots - a_{N-1}(x)y^{(N-1)} + b(x).$$

(B) Die Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ ist N-mal differenzierbar und die Vektorfunktion

$$\mathbf{y} : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R}^N \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(x) \end{pmatrix} \end{cases}$$

ist Lösung des linearen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung mit Dimension $n = N$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{N-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & \cdots & \cdots & -a_{N-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{N-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}.$$

4.2.7 Beweis

Es handelt sich um die Transformation aus Satz 4.1.3 (B) $\Leftrightarrow$ (C). Es ist etwas ausführlicher

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{N-2} \\ \mathbf{y}_{N-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{N-1} \\ -a_0(x)\mathbf{y}_0 - a_1(x)\mathbf{y}_1 - \ldots - a_{N-1}(x)\mathbf{y}_{N-1} + b(x) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & \cdots & \cdots & -a_{N-1}(x) \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}(x)} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{N-2} \\ \mathbf{y}_{N-1} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}(x)}.$$

4.2.8 Satz: Existenz und Eindeutigkeit

Ein zu einer linearen skalaren Differentialgleichung höherer Ordnung gehöriges AWP

$$\begin{cases} y^{(N)} & = & -a_0(x)y - a_1(x)y' - \ldots - a_{N-1}(x)y^{(N-1)} + b(x) \\ y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_1 \\ & \vdots & \\ y^{(N-1)}(x_0) & = & y_{N-1} \end{cases}$$

mit stetigen Funktionen $a_0, \ldots, a_{N-1}, b : I \to \mathbb{R}$ hat eine eindeutige Lösung $y : I \to \mathbb{R}$.

4.2.9 Beweis Man wende einfach nach der Transformation (A) $\Leftrightarrow$ (B) aus Satz 4.2.6 den Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare System 3.1.3 an.

4.2.10 Satz: Lösungsraum bei linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung

(i) Superpositionsprinzip für homogene Differentialgleichungen: Sind die Funktionen y und $\widetilde{y}$ zwei Lösungen von (hLDGO), so ist auch die Linearkombination

$$\alpha \cdot y + \widetilde{\alpha} \cdot \widetilde{y}$$

eine Lösung.

(ii) Die Lösungen bilden einen $\mathbb{R}$-Untervektorraum der Dimension N von $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

(iii) Ist $\widehat{y}$ eine fest vorgegeben Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (iLDGO), so lässt sich jede Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung (iLDGO) in der Form

$$y = \widehat{y} + \widetilde{y}$$

darstellen, wobei $\widetilde{y}$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung (hLDGO) ist.

4.2.11 Beweis

Dies folgt eigentlich sofort daraus, dass man die allgemeine Theorie über lineare Systeme mittels der Transformation aus Satz 4.2.6 überträgt. Nichtsdestoweniger rechnen wir das nochmal nach.

(i):

$$\begin{aligned}
(\alpha y + \beta \widetilde{y})^{(N)}(x) &= \alpha y^{(N)}(x) + \beta \widetilde{y}^{(N)}(x) \\
&= -\alpha \left[a_0(x) y(x) + a_1(x) y'(x) + \ldots + a_{N-1}(x) y^{(N-1)}(x) \right] \\
&\quad - \beta \left[a_0(x) \widetilde{y}(x) + a_1(x) \widetilde{y}'(x) + \ldots + a_{N-1}(x) \widetilde{y}^{(N-1)}(x) \right] \\
&= -a_0(x)(y + \widetilde{y})(x) - a_1(x)(y + \widetilde{y})'(x) - \ldots - a_{N-1}(x)(y + \widetilde{y})^{(N-1)}(x).
\end{aligned}$$

(ii) Man überlege, dass eine Menge $\{y_1, \ldots, y_k\}$ von Lösungen von (hLDGO) genau dann linear unabhängig in $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ist, wenn die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \vdots \\ y_1^{(N-1)} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} y_k \\ y_k' \\ \vdots \\ y_k^{(N-1)} \end{pmatrix} \right\}$$

von Lösungen des zugehörigen Systems erster Ordnung linear unabhängig in $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$ ist.

Damit kann die Aussage aus Satz 3.3.4 (iii) über die Dimension des Lösungsraums übertragen werden.

(iii): Tatsächlich ist die Differenz zweier Lösungen y und $\widehat{y}$ der inhomogenen Differentialgleichung (iLDGO) eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

$$\begin{aligned}(y-\widehat{y})^{(N)}(x) &= y^{(N)}(x)-\widehat{y}^{(N)}(x)\\ &= -\big[a_0(x)y(x)+a_1(x)y'(x)+\ldots+a_{N-1}(x)y^{(N-1)}(x)+b(t)\big]\\ &\quad +\big[a_0(x)\widetilde{y}(x)+a_1(x)\widetilde{y}'(x)+\ldots+a_{N-1}(x)\widetilde{y}^{(N-1)}(x)+b(t)\big]\\ &= -a_0(x)(y-\widetilde{y})(x)-a_1(x)(y-\widetilde{y})'(x)-\ldots-a_{N-1}(x)(y-\widetilde{y})^{(N-1)}(x)\end{aligned}$$

4.2.12 Satz: Wronski-Determinante bei linearen Differentialgleichungen N-ter Ordnung

Sind $y_1,\ldots,y_N$ Lösungen der linear-homogenen Differentialgleichung N-ter Ordnung

$$y^{(N)} = -a_0(x)y-a_1(x)y'-\ldots-a_{N-1}(x)y^{(N-1)},$$

so ist die Wronski-Determinante

$$w(x) = \det\mathbf{Y}(x) = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_N\\ y_1' & y_2' & \cdots & y_N'\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ y_1^{(N-1)} & y_2^{(N-1)} & \cdots & y_N^{(N-1)}\end{pmatrix}(x)$$

Lösung der skalaren linear-homogenen Differentialgleichung

$$w' = -a_{N-1}(x)\,w.$$

Es gilt also für ein $x_0\in I$

$$w(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^x a_{N-1}(t)\,dt\right)\cdot w(x_0).$$

4.2.13 Beweis

Es ist

$$-a_{N-1}(x) = \operatorname{Spur}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ -a_0(x) & -a_1(x) & \cdots & \cdots & -a_{N-1}(x)\end{pmatrix}.$$

Damit können die Aussagen aus Satz 3.5.2 über die Wronski-Determinante bei linear-homogenen Differentialgleichungssystemen übertragen werden.

4.2.14 Satz: Lösung des inhomogenen AWPs N-ter Ordnung

Wir betrachten zur inhomogenen Differentialgleichung N-ter Ordnung ein AWP

$$\left\{\begin{array}{rcl} y^{(N)} & = & -a_0(x)y - a_1(x)y' - \ldots - a_{N-1}(x)y^{(N-1)} + b(x) \\ y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_1 \\ & \vdots & \\ y^{(N-1)}(x_0) & = & y_{N-1}. \end{array}\right.$$

Die nach Satz 4.2.8 existente und eindeutige Lösung des AWPs ist gegeben durch

$$y(x) \quad = \quad \Phi_A(x,x_0)_{\text{Zeile 1}} \cdot \Big[\int_{x_0}^{x} \Phi_A(x_0,t) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} \Big]$$

wobei $\Phi_A(x,x_0)$ die Übergangsmatrix des zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung ist.

Es sei daran erinnert, dass

$$\Phi_A(x,x_0) \quad = \quad \mathbf{Y}(x) \cdot \mathbf{Y}(x_0)^{-1},$$

wobei $\mathbf{Y}$ eine Fundamentalmatrix des zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung ist. Das heißt es ist

$$\mathbf{Y}(x) \quad = \quad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_N \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_N' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(N-1)} & y_2^{(N-1)} & \cdots & y_N^{(N-1)} \end{pmatrix}(x)$$

mit N linear unabhängigen Lösungen $y_1, y_2, \ldots, y_N$ von (hLDGO).

4.2.15 Beweis

Wir wenden den Satz 3.6.2 über die Lösung eines linear inhomogenen Differentialgleichungssystems auf das System in Satz 4.2.6 (B) an, das durch Umschreiben der ursprünglichen Differentialgleichung N-ter Ordnung entsteht.

Damit erhalten wir

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(x) \end{pmatrix} \quad = \quad \Phi_A(x,x_0) \cdot \Big[\int_{x_0}^{x} \Phi_A(x_0,t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \Big]$$

Die erste Zeile dieser Gleichung ist gerade die Aussage des Satzes.

4.2.16 Bemerkungen

1. Im allgemeinen kann die Berechnung einer speziellen Lösung der inhmogenen Gleichung gemäß Satz 4.2.14 sehr aufwändig werden. Oft ist es so, dass man mit einem geeigneten Ansatz eine Lösung schneller auffinden kann.

2. Einen Alternativzugang zur Berechnung der speziellen Lösung bietet das Reduktionsverfahren von d'Alembert. Es wird in dieser Vorlesung nicht behandelt.

4.3 Exkurs: Nullstellen von Polynomen

Es sei

$$p(z) \quad = \quad a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

ein Polynom mit Koeffizienten $a_N, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$. Im Fall $a_N \neq 0$ hat es den Grad N, es kann dann

$$p(z) \quad = \quad a_N \cdot (z^N + \tfrac{a_{N-1}}{a_N}\, z^{N-1} + \ldots + \tfrac{a_1}{a_N}\, z + \tfrac{a_0}{a_N})$$

geschrieben werden. Der Koeffizient von z^N in dem Polynom in Klammern ist 1. Ein solches Polynom heißt *normiert*. Da dieser Übergang zum normierten Polynom die Nullstellen nicht verändert, beschränken wir uns im folgenden nur auf solche normierten Polynome.

4.3.1 Satz und Definition Es sei

$$p(z) \quad = \quad z^N + \tfrac{a_{N-1}}{a_N}\, z^{N-1} + \ldots + \tfrac{a_1}{a_N}\, z + \tfrac{a_0}{a_N}$$

ein normiertes Polynom N–ten Grades und $1 \leq \ell \leq N$. Die folgenden Aussagen über eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ sind äquivalent:

(i) (Def) λ ist eine ℓ–fache Nullstelle des Polynoms.

(ii) λ ist Nullstelle der Polynome $p, p', p'', \ldots, p^{(\ell-1)}$, aber nicht von $p^{(\ell)}$.

(iii) Es gibt ein normiertes Polynom q_ℓ vom Grad $N - \ell$, so dass

$$p(z) \quad = \quad (z-\lambda)^\ell \cdot q_\ell(z) \qquad \text{und} \qquad q_\ell(\lambda) \neq 0.$$

Anders formuliert: Aus p können genau ℓ Linearfaktoren $(z-\lambda)$ *abgespalten* werden.

4.3.2 Beweis

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Es habe p die Darstellung von (iii). Wir zeigen per Induktion über $j = 0, \ldots, \ell - 1$, dass für die j-te Ableitung ein Polynom $q_{j,\ell}$ vom Grad $N - \ell$ existiert mit:

$$p^{(j)}(z) \quad = \quad (z-\lambda)^{\ell-j} \cdot q_{j,\ell}(z) \qquad \text{und} \qquad q_{j,\ell}(\lambda) \neq 0.$$

Daraus folgt dann die Aussage (ii).

Der Induktionsanfang steht in der Aussage (iii). Zur Durchführung des Induktionsschritts wende man die Leibniz–Produktregel an, es folgt

$$\begin{aligned} p^{(j+1)}(z) \quad &= \quad (\ell-j)(z-\lambda)^{\ell-(j+1)} \cdot q_{j,\ell}(z) + (z-\lambda)^{\ell-j} \cdot q'_{j,\ell}(z) \\ &= \quad (z-\lambda)^{\ell-(j+1)} \cdot \underbrace{[(\ell-j)q_{j,\ell}(z) + (z-\lambda) \cdot q'_{j,\ell}(z)]}_{=:\, q_{j+1,\ell}(z)}. \end{aligned}$$

Es ist weiter zusehen, dass $q_{j+1,\ell}$ den Grad $N - \ell$ hat und dass

$$q_{j+1,\ell}(\lambda) \quad = \quad (\ell-j)q_{j,\ell}(\lambda) + (\lambda-\lambda) \cdot q'_{j,\ell}(\lambda) \;\neq\; 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Wir zeigen mit Induktion über $j = 1, \ldots, \ell$: Aus p können j Linearfaktoren $(z - \lambda)$ *abgespalten* werden. Induktionsanfang $j = 1$: Es gilt

$$\begin{aligned} p(z) &= p(z) - p(\lambda) = \\ &= a_1(z-\lambda) + \ldots + a_{N-1}(z^{N-1} - \lambda^{N-1}) + (z^N - \lambda^N). \end{aligned}$$

Für $k = 1, \ldots, N$ ist aber weiter

$$z^k - \lambda^k = (z - \lambda) \cdot (\underbrace{z^{k-1} + z^{k-2}\lambda^1 + z^{k-2}\lambda^2 + \ldots + z\lambda^{k-2} + \lambda^{k-1}}_{=: e_k(z,\lambda)})$$

und deshalb

$$p(z) = (z - \lambda) \cdot (\underbrace{a_1 + a_2 e_2(z,\lambda) + \ldots + a_{N-1}e_{N-1}(z,\lambda) + e_N(z,\lambda)}_{=: q_1(z)}).$$

Wir nehmen jetzt an, dass die Aussage für $j < \ell$ bewiesen ist. Das Polynom hat also die Darstellung

$$p(z) = (z - \lambda)^j \cdot q_j(z).$$

Es ist $j \le \ell - 1$ und daher nach Voraussetzung in (ii): $p^{(j)}(\lambda) = 0$. Eine genauere Überlegung mit Hilfe einer j–fachen Anwendung der Leibniz–Produktregel (oder mit den Satz von Taylor) zeigt, dass dann

$$q_j(\lambda) = 0$$

sein muss. Das aber bedeutet (vgl. Induktionsanfang), dass aus dem Polynom q_j ein Faktor $z - \lambda$ abgespalten werden kann. Insgesamt kann also

$$p(z) = (z - \lambda)^j \cdot q_j(z) = (z - \lambda)^j \cdot (z - \lambda)\, q_{j+1}(z) = (z - \lambda)^{j+1}\, q_{j+1}(z)$$

mit einem Polynom q_{j+1} vom Grad $N - (j + 1)$ geschrieben werden.

4.3.3 Satz: Fundamentalsatz der Algebra

Es sei p ein normiertes Polynom vom Grad $N \ge 1$ mit komplexen Koeffizienten.

(i) Das Polynom p hat eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$.

(ii) Es gibt einen Datensatz

$$(\ell_1, \lambda_1), (\ell_2, \lambda_2), \ldots, (\ell_q, \lambda_q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}$$

mit paarweise verschiedenen λ_j und

$$\ell_1 + \ldots + \ell_q = N,$$

so dass

$$p(z) = (z - \lambda_1)^{\ell_1} \cdot (z - \lambda_2)^{\ell_2} \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_q)^{\ell_q}.$$

Das Polynom zerfällt also komplett in Linearfaktoren.

4.3.4 Beweis

Die Aussage (i) können wir hier nicht beweisen.

(ii) folgt aus (i) aufgrund des vorhergehenden Satzes.

Die letzte Aussage kann auch auf Polynome mit reellen Koeffizienten angewandt werden. Über die komplexen Nullstellen λ_j, die in den Linearfaktoren auftreten, kann man hier genaueres sagen:

4.3.5 Satz:

Es sei p ein normiertes Polynom vom Grad $N \geq 1$ mit **reellen** Koeffizienten.

(i) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine ℓ–fache Nullstelle, so ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{\lambda}$ eine ℓ–fache Nullstelle. Das ist natürlich nur für echt komplexe Zahlen (mit Imaginärteil ungleich Null) interessant.

(ii) Es gibt einen Datensatz, bestehend aus

$$\begin{array}{cl} (\mathrm{I}) & (\ell_1, \lambda_1), (\ell_2, \lambda_2), \ldots, (\ell_r, \lambda_r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \\ (\mathrm{II}) & (m_1, \mu_1), (m_2, \mu_2), \ldots, (m_s, \mu_s) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \\ (\overline{\mathrm{II}}) & (m_1, \overline{\mu}_1), (m_2, \overline{\mu}_2), \ldots, (m_s, \overline{\mu}_s) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \end{array}$$

mit paarweise verschiedenen zweiten Komponenten $\lambda_*, \mu_*, \overline{\mu}_*$ und

$$\ell_1 + \ldots + \ell_r + 2(m_1 + \ldots + m_s) = N,$$

so dass

$$\begin{aligned} p(z) &= (z-\lambda_1)^{\ell_1} \cdot (z-\lambda_2)^{\ell_2} \cdot \ldots \cdot (z-\lambda_r)^{\ell_r} \cdot \\ &\qquad (z-\mu_1)^{m_1} \cdot (z-\overline{\mu_1})^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z-\mu_s)^{m_s} \cdot (z-\overline{\mu_s})^{m_s} \\ &= (z-\lambda_1)^{\ell_1} \cdot (z-\lambda_2)^{\ell_2} \cdot \ldots \cdot (z-\lambda_r)^{\ell_r} \cdot \\ &\qquad (z^2 - 2\,\mathrm{Re}(\mu_1) + |\mu_1|^2)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z^2 - 2\,\mathrm{Re}(\mu_s) + |\mu_s|^2)^{m_s}. \end{aligned}$$

Das Polynom zerfällt also komplett in reelle Linearfaktoren und reelle quadratische Faktoren.

4.3.6 Beweis

(i) Ist $p(\lambda) = 0$, so ist auch $p(\overline{\lambda}) = \overline{p(\lambda)} = 0$. Die gleiche Überlegung gilt für die Ableitungen.

(ii) Je zwei Potenzen von Linearfaktoren $(z-\mu_j)^{m_j}$ und $(z-\overline{\mu_j})^{m_j}$ für $j = 1, \ldots, s$ mit echt–komplexen μ_j können zur Potenz der quadratischen Faktoren

$$(z-\mu_j)^{m_j}(z-\overline{\mu_j})^{m_j} = (z^2 - 2\,\mathrm{Re}(\mu_j)z + |\mu_j|^2)^{m_j}$$

zusammengefasst werden.

4.4 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

4.4.1 Definition Eine lineare skalare Differentialgleichung, die in der Form

$$y^{(N)} + a_{N-1}\, y^{(N-1)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y \quad = \quad 0$$

mit Konstanten $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$ dargestellt werden kann, heißt *mit konstanten Koeffizienten*.

4.4.2 Bemerkungen

- Eine solche Differentialgleichung kann natürlich auch explizit geschrieben werden.
- Man beachte, dass die Rechte Seite

  $$-\big(a_{N-1}\, y^{(N-1)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y\big)$$

  auf ganz $I = \mathbb{R}$ definiert ist.
- Aus den Koeffizienten a_i kann das so genannte *charakteristische Polynom*

  $$p(z) \quad = \quad z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

  gebildet werden. Setzt man umgekehrt in das Polynom den Differentialoperator ∂_x ein, so kann die obige Differentialgleichung kompakter und abstrakter geschrieben werden als

  $$p(\partial_x) y \quad = \quad 0.$$

Der im Beispiel 4.2.1 erfolgreiche Ansatz führt insgesamt auf den Lösungsraum in dem folgenden Satz.

4.4.3 Satz: Lösungsraum für linear homogene Differentialgleichung N-ter Ordnung

Es sei

$$p(\partial_x)y = y^{(N)} + a_{N-1}y^{(N-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

eine linear homogene skalare Differentialgleichung N-ter Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten.

Betrachte für das charakteristische Polynom p den in Satz 4.3.5 beschriebenen Datensatz.

(i) Gehört (ℓ, λ) zum Datensatz (I), so sind die ℓ Funktionen

$$\begin{aligned} y^{\mathrm{I}}_{(0,\lambda)}(x) &= e^{\lambda x} \\ y^{\mathrm{I}}_{(1,\lambda)}(x) &= x \cdot e^{\lambda x} \\ y^{\mathrm{I}}_{(2,\lambda)}(x) &= x^2 \cdot e^{\lambda x} \\ &\vdots \\ y^{\mathrm{I}}_{(\ell-1,\lambda)}(x) &= x^{\ell-1} \cdot e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Lösungen der Differentialgleichung.

(ii) Gehört (m, μ) mit $\mu = \varrho + i\omega$ zum Datensatz (II), so sind die $2m$ Funktionen

$$\begin{aligned} y^{\mathrm{II}}_{(0,\mu)}(x) &= e^{\varrho x}\cos(\omega x) & y^{\overline{\mathrm{II}}}_{(0,\mu)}(x) &= e^{\varrho x}\sin(\omega x) \\ y^{\mathrm{II}}_{(1,\mu)}(x) &= x \cdot e^{\varrho x}\cos(\omega x) & y^{\overline{\mathrm{II}}}_{(1,\mu)}(x) &= x \cdot e^{\varrho x}\sin(\omega x) \\ y^{\mathrm{II}}_{(2,\mu)}(x) &= x^2 \cdot e^{\varrho x}\cos(\omega x) & y^{\overline{\mathrm{II}}}_{(2,\mu)}(x) &= x^2 \cdot e^{\varrho x}\sin(\omega x) \\ &\vdots & &\vdots \\ y^{\mathrm{II}}_{(m-1,\mu)}(x) &= x^{m-1} \cdot e^{\varrho x}\cos(\omega x) & y^{\overline{\mathrm{II}}}_{(m-1,\mu)}(x) &= x^{m-1} \cdot e^{\varrho x}\sin(\omega x) \end{aligned}$$

Lösungen der Differentialgleichung.

(iii) In (i) und (ii) sind insgesamt

$$\ell_1 + \ldots + \ell_r + 2(m_1 + \ldots + m_s) = N,$$

Lösungen aufgelistet. Sie bilden eine Basis des gesamten Lösungsraums.

4.4.4 Beweis von Satz 4.4.3 (i)

Es sei λ eine fixierte ℓ-fache reelle Nullstelle des charakteristischen Polynoms p. Es gilt dann

$$\begin{aligned} p(\partial_x)[x^j \cdot e^{\lambda x}] &= p(\partial_x)\,[\partial_\lambda^j\, e^{\lambda x}] \\ &\quad \text{(Die Ableitungen vertauschen)} \\ &= \partial_\lambda^j\,[p(\partial_x)\, e^{\lambda x}] = \partial_\lambda^j\,[p(\lambda)\, e^{\lambda x}] \\ &\quad \text{(Leibniz Produktregel für höhere Ableitungen)} \\ &= \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \underbrace{p^{(i)}(\lambda)}_{=0}\, \partial_\lambda^{j-i} e^{\lambda x} = 0. \end{aligned}$$

4.4.5 Vorbereitung 1

Es ist

$$p(\partial_x)\begin{pmatrix} e^{\varrho x}\cos(\omega x) \\ e^{\varrho x}\sin(\omega x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} p(\varrho+i\omega) & -\operatorname{Im} p(\varrho+i\omega) \\ \operatorname{Im} p(\varrho+i\omega) & \operatorname{Re} p(\varrho+i\omega)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\varrho x}\cos(\omega x) \\ e^{\varrho x}\sin(\omega x)\end{pmatrix}.$$

4.4.6 Beweis

Die Aussage muss nur für Monome $p(z) = z^j$, $j \in \mathbb{N}$, gezeigt werden.

Der Induktionsanfang $j = 1$:

$$\partial_x\begin{pmatrix} e^{\varrho x}\cos(\omega x) \\ e^{\varrho x}\sin(\omega x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho & -\omega \\ \omega & \varrho\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\varrho x}\cos(\omega x) \\ e^{\varrho x}\sin(\omega x)\end{pmatrix}.$$

Induktionsschritt $j \to j+1$:

$$\begin{aligned}
\partial_x^{j+1}\begin{pmatrix} e^{\varrho x}\cos(\omega x) \\ e^{\varrho x}\sin(\omega x)\end{pmatrix} &= \partial_x\,\partial_x^j\begin{pmatrix} e^{\varrho x}\cos(\omega x) \\ e^{\varrho x}\sin(\omega x)\end{pmatrix} \\
= \partial_x\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\varrho+i\omega)^j & -\operatorname{Im}(\varrho+i\omega)^j \\ \operatorname{Im}(\varrho+i\omega)^j & \operatorname{Re}(\varrho+i\omega)^j\end{pmatrix}&\begin{pmatrix} e^{\varrho x}\cos(\omega x) \\ e^{\varrho x}\sin(\omega x)\end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\varrho+i\omega)^j & -\operatorname{Im}(\varrho+i\omega)^j \\ \operatorname{Im}(\varrho+i\omega)^j & \operatorname{Re}(\varrho+i\omega)^j\end{pmatrix}&\partial_x\begin{pmatrix} e^{\varrho x}\cos(\omega x) \\ e^{\varrho x}\sin(\omega x)\end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\varrho+i\omega)^j & -\operatorname{Im}(\varrho+i\omega)^j \\ \operatorname{Im}(\varrho+i\omega)^j & \operatorname{Re}(\varrho+i\omega)^j\end{pmatrix}&\begin{pmatrix} \varrho & -\omega \\ \omega & \varrho\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\varrho x}\cos(\omega x) \\ e^{\varrho x}\sin(\omega x)\end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\varrho+i\omega)^{j+1} & -\operatorname{Im} p(\varrho+i\omega)^{j+1} \\ \operatorname{Im}(\varrho+i\omega)^{j+1} & \operatorname{Re} p(\varrho+i\omega)^{j+1}\end{pmatrix}&\begin{pmatrix} e^{\varrho x}\cos(\omega x) \\ e^{\varrho x}\sin(\omega x)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4.4.7 Matrix-Differentiation

Der Beweis von Aussage (ii) liesse sich ,,vernünftig" und ,,einfach" erbringen, wenn man Differentialrechnung für Funktionen mit komplexer **Variabler** anwenden könnte. Da wir darauf nicht darauf zurückgreifen wollen, müssen wir einen ziemlichen Aufwand betreiben.

Wir ,,imitieren" die Differentiation nach einer komplexen Variablen μ durch eine ,,Matrix-Differentiation" für $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} \varrho \\ \omega \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} f_1(\varrho,\omega) \\ f_2(\varrho,\omega)\end{pmatrix} \end{cases},$$

die wie folgt definiert ist:

$$\partial_\mu : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2) \\ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \partial_\varrho & \partial_\omega \\ -\partial_\omega & \partial_\varrho \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(\varrho,\omega) \\ f_2(\varrho,\omega)\end{pmatrix}. \end{cases}$$

4.4.8 Vorbereitung 2

Ein sei p ein reelles Polynom. Es ist bei Anwendung von ∂_μ auf die in den beiden Spalten stehenden $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\partial_\mu \begin{pmatrix} \operatorname{Re} p(\varrho + i\omega) & -\operatorname{Im} p(\varrho + i\omega) \\ \operatorname{Im} p(\varrho + i\omega) & \operatorname{Re} p(\varrho + i\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} p'(\varrho + i\omega) & -\operatorname{Im} p'(\varrho + i\omega) \\ \operatorname{Im} p'(\varrho + i\omega) & \operatorname{Re} p'(\varrho + i\omega) \end{pmatrix}.$$

Hier kommt komplexer Kalkül vor, nicht aber die Differentiation nach einer komplexen Variablen.

4.4.9 Beweis

Mit sorgfältiger Nachrechnung sieht man

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_\varrho & \partial_\omega \\ -\partial_\omega & \partial_\varrho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} p(\varrho + i\omega) & -\operatorname{Im} p(\varrho + i\omega) \\ \operatorname{Im} p(\varrho + i\omega) & \operatorname{Re} p(\varrho + i\omega) \end{pmatrix} \\
= \;& \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_\varrho \operatorname{Re} p(\varrho + i\omega) + \partial_\omega \operatorname{Im} p(\varrho + i\omega) & -\partial_\varrho \operatorname{Im} p(\varrho + i\omega) + \partial_\omega \operatorname{Re} p(\varrho + i\omega) \\ -\partial_\omega \operatorname{Re} p(\varrho + i\omega) + \partial_\varrho \operatorname{Im} p(\varrho + i\omega) & \partial_\varrho \operatorname{Re} p(\varrho + i\omega) + \partial_\omega \operatorname{Im} p(\varrho + i\omega) \end{pmatrix} \\
& \text{(Real- und Imaginärteilbildung sind } \mathbb{R}\text{-linear)} \\
= \;& \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \partial_\varrho p(\varrho + i\omega) + \operatorname{Im} \partial_\omega p(\varrho + i\omega) & -\operatorname{Im} \partial_\varrho p(\varrho + i\omega) + \operatorname{Re} \partial_\omega p(\varrho + i\omega) \\ -\operatorname{Re} \partial_\omega p(\varrho + i\omega) + \operatorname{Im} \partial_\varrho p(\varrho + i\omega) & \operatorname{Re} \partial_\varrho p(\varrho + i\omega) + \operatorname{Im} \partial_\omega p(\varrho + i\omega) \end{pmatrix} \\
= \;& \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}[p'(\varrho + i\omega)] + \operatorname{Im}[ip'(\varrho + i\omega)] & \operatorname{Re}[ip'(\varrho + i\omega)] - \operatorname{Im}[p'(\varrho + i\omega)] \\ -\operatorname{Re}[ip'(\varrho + i\omega)] + \operatorname{Im}[p'(\varrho + i\omega)] & \operatorname{Re}[p'(\varrho + i\omega)] + \operatorname{Im}[ip'(\varrho + i\omega)] \end{pmatrix} \\
= \;& \begin{pmatrix} \operatorname{Re} p'(\varrho + i\omega) & -\operatorname{Im} p'(\varrho + i\omega) \\ \operatorname{Im} p'(\varrho + i\omega) & \operatorname{Re} p'(\varrho + i\omega) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4.4.10 Beweis von Satz 4.4.3 (ii)

Es gehöre also (m, μ) mit $\mu = \varrho + i\omega$ zum Datensatz (II). Es ist dann für $j = 0, \ldots, m-1$

$$\begin{aligned}
& p(\partial_x) \begin{pmatrix} x^j e^{\varrho x} \cos(\omega x) \\ x^j e^{\varrho x} \sin(\omega x) \end{pmatrix} \\
& \text{(Nachrechnen für } j = 1) \\
= \;& p(\partial_x) \left[\partial_\mu^j \begin{pmatrix} e^{\varrho x} \cos(\omega x) \\ e^{\varrho x} \sin(\omega x) \end{pmatrix} \right] \\
& \text{(Die Ableitungen vertauschen)} \\
= \;& \partial_\mu^j \left[p(\partial_x) \begin{pmatrix} e^{\varrho x} \cos(\omega x) \\ e^{\varrho x} \sin(\omega x) \end{pmatrix} \right] \\
& \text{(Vorbereitung 4.4.5)} \\
= \;& \partial_\mu^j \left[\begin{pmatrix} \operatorname{Re} p(\varrho + i\omega) & -\operatorname{Im} p(\varrho + i\omega) \\ \operatorname{Im} p(\varrho + i\omega) & \operatorname{Re} p(\varrho + i\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\varrho x} \cos(\omega x) \\ e^{\varrho x} \sin(\omega x) \end{pmatrix} \right] \\
& \text{(Leibniz Produktregel für höhere Ableitungen)} \\
= \;& \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \left[\partial_\mu^i \begin{pmatrix} \operatorname{Re} p(\varrho + i\omega) & -\operatorname{Im} p(\varrho + i\omega) \\ \operatorname{Im} p(\varrho + i\omega) & \operatorname{Re} p(\varrho + i\omega) \end{pmatrix} \partial_\mu^{j-i} \begin{pmatrix} e^{\varrho x} \cos(\omega x) \\ e^{\varrho x} \sin(\omega x) \end{pmatrix} \right] \\
& \text{(Vorbereitung 4.4.8)} \\
= \;& \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \left[\underbrace{\begin{pmatrix} \operatorname{Re} p^{(i)}(\varrho + i\omega) & -\operatorname{Im} p^{(i)}(\varrho + i\omega) \\ \operatorname{Im} p^{(i)}(\varrho + i\omega) & \operatorname{Re} p^{(i)}(\varrho + i\omega) \end{pmatrix}}_{=0} \partial_\mu^{j-i} \begin{pmatrix} e^{\varrho x} \cos(\omega x) \\ e^{\varrho x} \sin(\omega x) \end{pmatrix} \right] \\
= \;& 0.
\end{aligned}$$

4.4.11 Beweis von Satz 4.4.3 (iii)

Eine beliebige Linearkombination aus den in (i) und (ii) aufgelisteten Funktionen kann geschrieben werden als

$$\begin{array}{rcccl} q_1^{\mathrm{I}}(x)e^{\lambda_1 x} & + & \ldots & + & q_r^{\mathrm{I}}(x)e^{\lambda_r x} \\ +\, q_1^{\mathrm{II}}(x)e^{\varrho_1 x}\cos(\omega_1 x) & + & \ldots & + & q_s^{\mathrm{II}}(x)e^{\varrho_s x}\cos(\omega_s x) \\ +\, q_1^{\overline{\mathrm{II}}}(x)e^{\varrho_1 x}\sin(\omega_1 x) & + & \ldots & + & q_s^{\overline{\mathrm{II}}}(x)e^{\varrho_s x}\sin(\omega_s x) \end{array}$$

mit Polynomen q_j^{I} vom Grad $\leq \ell_j$ und q_j^{II}, $q_j^{\overline{\mathrm{II}}}$ vom Grad $\leq m_j$.

Es ist zu zeigen, dass diese Linearkombination nur dann gleich Null sein kann, wenn alle Polynome q_j^{I}, q_j^{II}, $q_j^{\overline{\mathrm{II}}}$ gleich Null sind.

Wegen

$$\begin{aligned} & q_j^{\mathrm{II}}(x)\cdot e^{\varrho_j x}\cdot\cos(\omega_j x) + q_j^{\overline{\mathrm{II}}}(x)\cdot e^{\varrho_j x}\cdot\sin(\omega_j x) \\ = \; & q_j^{\mathrm{II}}(x)\cdot e^{\varrho_j x}\cdot\tfrac{e^{\omega_j x}+e^{-\omega_j x}}{2} + q_j^{\overline{\mathrm{II}}}(x)\cdot e^{\varrho_j x}\cdot\tfrac{e^{\omega_j x}-e^{-\omega_j x}}{2i} \\ = \; & \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(q_j^{\mathrm{II}}(x) - i q_j^{\overline{\mathrm{II}}}(x)\right)}_{=:\,\tilde{q}_j^{\mathrm{II}}(x)} e^{\mu_1 x} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(q_j^{\mathrm{II}}(x) + i q_j^{\overline{\mathrm{II}}}(x)\right)}_{=:\,\tilde{q}_j^{\overline{\mathrm{II}}}(x)} e^{\overline{\mu_1} x} \end{aligned}$$

kann die Linearkombination umgeschrieben werden in

$$\begin{array}{l} q_1^{\mathrm{I}}(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + q_r^{\mathrm{I}}(x)e^{\lambda_r x} \\ +\, \tilde{q}_1^{\mathrm{II}}(x)e^{\mu_1 x} + \ldots + \tilde{q}_s^{\mathrm{II}}(x)e^{\mu_s x} \\ +\, \tilde{q}_1^{\overline{\mathrm{II}}}(x)e^{\overline{\mu_1} x} + \ldots + \tilde{q}_s^{\overline{\mathrm{II}}}(x)e^{\overline{\mu_s} x} \end{array}$$

mit (veränderten, jetzt komplexen) Polynomen $\tilde{q}_j^{\mathrm{II}}$ und $\tilde{q}_j^{\overline{\mathrm{II}}}$ vom Grad m_j. Es ist klar, dass die Polynome q_j^{II} und $q_j^{\overline{\mathrm{II}}}$ genau dann verschwinden, wenn die Polynome $\tilde{q}_j^{\mathrm{II}}$ und $\tilde{q}_j^{\overline{\mathrm{II}}}$ verschwinden.

Es bleibt also noch zu zeigen, dass eine Funktion

$$\sum_{j=1}^{k} \hat{q}_j(x)\cdot e^{\tau_j x}$$

mit Polynomen $\hat{q}_j$ und paarweise verschiedenen komplexen Zahlen τ_j genau dann gleich der Nullfunktion ist, wenn alle Polynome $\hat{q}_j$ gleich Null sind. Wir führen diesen Beweis per Induktion über $k \in \mathbb{N}$.

Für $k = 1$ ist die Aussage klar. Wir nehmen an, dass sie für $k \in \mathbb{N}$ gezeigt ist.

Wir multiplizieren den Null-Ansatz

$$\sum_{j=1}^{k+1} \hat{q}_j(x)\cdot e^{\tau_j x} \quad = \quad 0$$

mit $e^{-\tau_{k+1}x}$ und erhalten

$$\sum_{j=1}^{k} \hat{q}_j(x)e^{(\tau_j-\tau_{k+1})x} + \hat{q}_{k+1}(x) \quad = \quad 0.$$

Es sei $K := \operatorname{grad} q_{k+1} + 1$. Wir differenzieren K-mal nach x und erhalten wieder mit der Leibniz Produktregel für höhere Ableitungen

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{m=0}^{K} \partial_x^m \hat{q}_j(x) \cdot \partial_x^{K-m} e^{(\tau_j - \tau_{k+1})x} \quad = \quad 0$$

und dann

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{m=0}^{K} \partial_x^m \hat{q}_j(x) \cdot (\tau_j - \tau_{k+1})^{K-m} e^{(\tau_j - \tau_{k+1})x} \quad = \quad 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung sind die Polynome

$$\sum_{m=0}^{K} \partial_x^m \hat{q}_j(x) \cdot (\tau_j - \tau_{k+1})^{K-m} \quad = \quad 0$$

für $j = 1, \ldots, k$. Lösen wir für beliebiges und festes j diese letzte Gleichung nach $\hat{q}_j(x)$ auf, so ergibt sich

$$\hat{q}_j(x) \quad = \quad -(\tau_j - \tau_{k+1})^{-K} \sum_{m=1}^{K} \partial_x^m \hat{q}_j(x) \cdot (\tau_j - \tau_{k+1})^{K-m}$$

Also ist das Polynom $\hat{q}_j$ eine Linearkombination seiner Ableitungen. Das geht aber nur, wenn $\hat{q}_j = 0$.

Weiter wissen wir aus Satz 4.2.10 (ii), dass es höchstens N linear unabhängige Lösungen geben kann. Damit bilden die N Lösungen eine Basis des Lösungsraums.

4.4.12 Bemerkung

Die gemäß Satz 4.2.8 existierende eindeutige Lösung y des linear homogenen AWPs N-ter Ordnung

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y^{(N)} + a_{(N-1)} y^{(N-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y & = & 0 \\ y(x_0) & = & y_0 \\ & \vdots & \\ y^{(N-1)}(x_0) & = & y_{N-1} \end{array} \right.$$

mit N Anfangsbedingungen kann mit Hilfe der in Satz 4.4.3 angegebenen Basis

$$\langle \tilde{y}_1, \ldots\ldots, \tilde{y}_N \rangle$$

des Lösungsraums als Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcccrcl} \tilde{y}_1(x_0) \cdot C_1 & + & \tilde{y}_2(x_0) \cdot C_2 & + & \ldots & + & \tilde{y}_N(x_0) \cdot C_N & = & y_0 \\ & & & & & & & \vdots & \\ \tilde{y}_1^{(N-1)}(x_0) \cdot C_1 & + & \tilde{y}_2^{(N-1)}(x_0) \cdot C_2 & + & \ldots & + & \tilde{y}_N^{(N-1)}(x_0) \cdot C_N & = & y_{N-1} \end{array}$$

gewonnen werden.

5 Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

5.1 Einstieg

5.1.1 Definition

Ein linear-homogenes Differentialgleichungssystem heißt *mit konstanten Koeffizienten*, wenn die Matrixfunktion $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ konstant ist.

In diesem Fall kann O.B.d.A. $I = \mathbb{R}$ und $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ gesetzt werden.

Es geht also um Systeme der Form

$$y' = A\,y \qquad \text{(kLDGS)}$$

5.1.2 Autonomie

Da ein linear-homogenes Differentialgleichungssystem *mit konstanten Koeffizienten* autonom ist, gelten die folgenden Aussagen. Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ fixiert.

(i) Ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung, so ist auch $y(\cdot - x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung.

(ii) Ist $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Wronski-Matrix (bzw. Fundamental-Matrix), so ist auch $Y(\cdot - x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Wronski-Matrix (bzw. Fundamental-Matrix).

(iii) Für Übergangsmatrizen gilt:

$$\Phi_A(x, x_0) = \Phi_A(x - x_0, 0).$$

5.2 Ähnlichkeitstransformation und Blockzerlegung

5.2.1 Satz: Ähnlichkeitstransformation

Es seien die beiden linear-homogenen Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} y' &= A\,y, \qquad (*_A) \\ z' &= J\,z \qquad (*_J) \end{aligned}$$

mit $A, J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben. Es existiere eine reelle invertierbare (Transformations-)Matrix E, so dass

$$J = E^{-1}\,A\,E \qquad \text{bzw.} \qquad A = E\,J\,E^{-1}$$

d.h. die beiden Matrizen A und J sind ähnlich (= konjugiert)[†].

Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Ist $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $(*_J)$, so ist $y := Ez : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $(*_A)$.

(ii) Ist $Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Wronski-Matrix (bzw. Fundamental-Matrix) für $(*_J)$, so ist $Y := E\,Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Wronski-Matrix (bzw. Fundamental-Matrix) für $(*_A)$.

(iii) Für Übergangsmatrizen gilt:

$$\Phi_A(x, x_0) = E\,\Phi_J(x, x_0)\,E^{-1}.$$

(iv) Ist $z : I \to \mathbb{R}^n$ die (eindeutige) Lösung des inhomogenen AWPs

$$\begin{cases} z' = J\,y + \widetilde{b}(x) \\ z(x_0) = z_0 \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} \widetilde{b} : I &\to \mathbb{R}^n \\ z_0 &\in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

so ist die Funktion $y = Ez : I \to \mathbb{R}^n$ die (eindeutige) Lösung des inhomogenen AWPs

$$\begin{cases} y' = A\,y + b(x) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \qquad \text{wobei} \qquad \begin{aligned} b(x) &:= E\,\widetilde{b}(x), \\ y_0 &:= Ez_0. \end{aligned}$$

5.2.2 Beweis

(iv) Existenz und Eindeutigkeit sind im Satz 3.1.3 über allgemeine lineare Systeme enthalten. Wir rechnen nach

$$\begin{aligned} y'(x) &= (Ez)'(x) = Ez'(x) = E[Jz(x) + \widetilde{b}(x)] = EJE^{-1}Ez(x) + E\widetilde{b}(x) \\ &= Ay(x) + b(x). \end{aligned}$$

Die Aussagen (i) und (ii) sind harmlos-andere Versionen oder Spezialisierungen dieser Aussage (iv).

Ist Z eine Fundamentalmatrix für $(*_J)$, so gilt mit $Y := EZ$ gemäß (ii)

$$\begin{aligned} \Phi_A(x, x_0) &= Y(x) \cdot Y(x_0)^{-1} = EZ(x) \cdot (EZ(x_0))^{-1} \\ &= EZ(x) \cdot Z(x_0)^{-1}E^{-1} = E\,\Phi_J(x, x_0)\,E^{-1} \end{aligned}$$

und das ist (iii).

[†] In der SH-linearen Algebra ist $T := E^{-1}$

5.2.3 Satz: Blockzerlegung

Zu dem linear-homogenen Differentialgleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}'}_{=y} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}}_{=y} \qquad (*)$$

mit quadratischen Matrizen $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ und $n_1 + \ldots + n_r = n$ betrachten wir die Komponenten-Systeme

$$y_i' = A_i \, y_i \qquad (*_i)$$

(i) Die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ist eine Lösung von $(*)$ genau dann, wenn für jedes $i = 1, \ldots, r$ die Komponentenfunktion y_i Lösung der Differentialgleichung $(*_i)$ ist.

(ii) Die Matrixfunktion

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & & & \\ & Y_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Y_r \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$$

ist genau dann eine Wronski-Matrix (bzw. Fundamental-Matrix) für $(*)$, wenn für jedes $i = 1, \ldots, r$ die Matrixfunktion Y_i eine Wronski-Matrix (bzw. Fundamental-Matrix) für $(*_i)$ ist.

(iii) Für Übergangsmatrizen gilt:

$$\Phi_A(x, x_0) = \begin{pmatrix} \Phi_{A_1}(x, x_0) & & & \\ & \Phi_{A_2}(x, x_0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Phi_{A_r}(x, x_0) \end{pmatrix}.$$

(iv) Die Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann die (eindeutige) Lösung des inhomogenen AWPs

$$\begin{cases} y' = A\, y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{mit} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n, \quad y_0 = \begin{pmatrix} y_{01} \\ \vdots \\ y_{0r} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

wenn für jedes $i = 1, \ldots, r$ die Funktion $y_i : I \to \mathbb{R}^{n_i}$ die (eindeutige) Lösung des folgenden inhomogenen AWPs ist:

$$\begin{cases} y_i' = A_i\, y_i + b_i(x) \\ y_i(x_0) = y_{0i}. \end{cases}$$

5.2.4 Beweis ist nicht nötig.

5.3 Lösung bei Komplex-Diagonalisierbarkeit

5.3.1 Satz: Komplex-Diagonalisierbarkeit

Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei

$$(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{\mu_1, \ldots, \mu_m}_{\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}, \underbrace{\overline{\mu_1}, \ldots, \overline{\mu_m}}_{\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}), \qquad \ell + 2m = n,$$

die n-Folge der Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_A.

A sei komplex-diagonalisierbar, das heißt, es existiert eine n-Folge von $\mathbb{R}$-linear unabhängigen Vektoren

$$\{v_1, \ldots, v_\ell, w_1, \ldots, w_m, \overline{w_1}, \ldots, \overline{w_m}\} \subseteq \mathbb{C}^n,$$

so dass die folgenden äquivalenten Aussagen gelten:

(A) Es ist

$$\begin{array}{rcll} A\,v_j &=& \lambda_j\,v_j, & j = 1, \ldots, \ell, \\ A\,w_j &=& \mu_j\,w_j, & j = 1, \ldots, m, \\ A\,\overline{w_j} &=& \overline{\mu_j}\,\overline{w_j}, & j = 1, \ldots, m. \end{array}$$

(A′) Es ist

$$J_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \lambda_\ell &&&&&& \\ &&& \mu_1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& \mu_m &&& \\ &&&&&& \overline{\mu_1} && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& \overline{\mu_m} \end{pmatrix} = E_{\mathbb{C}}^{-1}\, A\, E_{\mathbb{C}},$$

wobei

$$E_{\mathbb{C}} = (v_1, \ldots, v_\ell, w_1, \ldots, w_m, \overline{w_1}, \ldots, \overline{w_m}).$$

(B) Es ist

$$\begin{array}{rcll} A\,v_j &=& \lambda_j\,v_j, & j = 1, \ldots, \ell, \\ A\,\mathrm{Re}\,w_j &=& \varrho_j\,\mathrm{Re}\,w_j - \omega_j\,\mathrm{Im}\,w_j, & j = 1, \ldots, m, \\ A\,\mathrm{Im}\,w_j &=& \varrho_j\,\mathrm{Im}\,w_j + \omega_j\,\mathrm{Re}\,w_j, & j = 1, \ldots, m. \end{array}$$

(B′) Es ist

$$J_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && \lambda_\ell &&&&&&& \\ &&& \varrho_1 & \omega_1 &&&&& \\ &&& -\omega_1 & \varrho_1 &&&&& \\ &&&&& \ddots &&&& \\ &&&&&& \ddots &&& \\ &&&&&&& \varrho_m & \omega_m & \\ &&&&&&& -\omega_m & \varrho_m & \end{pmatrix} = E_{\mathbb{R}}^{-1}\, A\, E_{\mathbb{R}},$$

wobei

$$E_{\mathbb{R}} = (v_1, \ldots, v_\ell, \mathrm{Re}\,w_1, \mathrm{Im}\,w_1, \ldots\ldots, \mathrm{Re}\,w_m, \mathrm{Im}\,w_m).$$

5.3.2 Beweis

Die Spalten in der Matrix-Gleichung aus (A′)

$$E_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_\ell & & & & & & \\ & & & \mu_1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \mu_m & & & \\ & & & & & & \overline{\mu_1} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \overline{\mu_m} \end{pmatrix} = A\,E_{\mathbb{C}}$$

geben genau die Gleichungen in (A) wieder.

Genauso geben die Spalten in der Matrix-Gleichung aus (B′)

$$E_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_\ell & & & & & \\ & & & \varrho_1 & \omega_1 & & & \\ & & & -\omega_1 & \varrho_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \varrho_m & \omega_m \\ & & & & & & -\omega_m & \varrho_m \end{pmatrix} = A\,E_{\mathbb{R}}$$

die Gleichungen in (B) wieder.

Die Implikation (A) $\Rightarrow$ (B) wird so gezeigt:

$$A \cdot \operatorname{Re} w_j = A \cdot \tfrac{w_j + \overline{w_j}}{2} = \tfrac{1}{2}(\mu_j\, w_j + \overline{\mu_j}\,\overline{w_j}) = \varrho_j\ \operatorname{Re} w_j - \omega_j\ \operatorname{Im} w_j$$

$$A \cdot \operatorname{Im} w_j = A \cdot \tfrac{w_j - \overline{w_j}}{2i} = \tfrac{1}{2i}(\mu_j\, w_j - \overline{\mu_j}\,\overline{w_j}) = \varrho_j\ \operatorname{Im} w_j + \omega_j\ \operatorname{Re} w_j$$

Die Implikation (B) $\Rightarrow$ (A) wird so gezeigt:

$$\begin{aligned} A \cdot w_j &= A \cdot (\operatorname{Re} w_j + i \operatorname{Im} w_j) \\ &= (\varrho_j\ \operatorname{Re} w_j - \omega_j \operatorname{Im} w_j) + i(\varrho_j\ \operatorname{Im} w_j + \omega_j \operatorname{Re} w_j) \\ &= \varrho_j\,(\operatorname{Re} w_j + i \operatorname{Im} w_j) + i\omega_j(\operatorname{Re} w_j + i \operatorname{Im} w_j) \\ &= \mu_j\, w_j. \end{aligned}$$

5.3.3 Satz: Übergangsmatrix bei Komplex-Diagonalisierbarkeit

Das linear-homogene Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_\ell & & & & & & \\ & & & \varrho_1 & \omega_1 & & & & \\ & & & -\omega_1 & \varrho_1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \varrho_m & \omega_m \\ & & & & & & & -\omega_m & \varrho_m \end{pmatrix}}_{=J} y$$

hat als Übergangsmatrix

$$\Phi_J(x,0) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & e^{\lambda_\ell x} & & & & & & \\ & & & e^{\varrho_1 x}\cos(\omega_1 x) & e^{\varrho_1 x}\sin(\omega_1 x) & & & & \\ & & & -e^{\varrho_1 x}\sin(\omega_1 x) & e^{\varrho_1 x}\cos(\omega_1 x) & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & e^{\varrho_m x}\cos(\omega_m x) & e^{\varrho_m x}\sin(\omega_m x) \\ & & & & & & & -e^{\varrho_m x}\sin(\omega_m x) & e^{\varrho_m x}\cos(\omega_m x) \end{pmatrix}.$$

5.3.4 Beweis

Wir brauchen das nur für einen einzelnen 2×2-Block nachzurechnen. Es ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e^{\varrho x}\cos(\omega x) & e^{\varrho x}\sin(\omega x) \\ -e^{\varrho x}\sin(\omega x) & e^{\varrho x}\cos(\omega x) \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} \varrho e^{\varrho x}\cos(\omega x) - \omega e^{\varrho x}\sin(\omega x) & \varrho e^{\varrho x}\sin(\omega x) + \omega e^{\varrho x}\cos(\omega x) \\ -\varrho e^{\varrho x}\sin(\omega x) - \omega e^{\varrho x}\cos(\omega x) & \varrho e^{\varrho x}\cos(\omega x) - \omega e^{\varrho x}\sin(\omega x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varrho & \omega \\ -\omega & \varrho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\varrho x}\cos(\omega x) & e^{\varrho x}\sin(\omega x) \\ -e^{\varrho x}\sin(\omega x) & e^{\varrho x}\cos(\omega x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5.3.5 Algorithmus

Insgesamt ergibt sich ein Algorithmus für die Lösung eines linear-homogenen Differentialgleichungssystems mit konstanter komplex-diagonalisierbarer Matrix A.

1. Berechne mit Hilfe des charakteristischen Polynoms die reellen und echt-komplexen Eigenwerte.
2. Berechne zu jedem Eigenwert eine Basis des zugehörigen Eigenraums.
3. Befülle mit den (Real- und Imaginärteilen der) Eigenwerten die reelle Normalform-Matrix $J_{\mathbb{R}}$.
4. Befülle mit den (Real- und Imaginärteilen der) Eigenvektoren die Transformationsmatrix $E_{\mathbb{R}}$.
5. Ermittle die Übergangsmatrix $\Phi_{J_{\mathbb{R}}}(x,0)$ für das System $z' = J_{\mathbb{R}} z$.
6. Berechne eine Fundamentalmatrix für das System $y' = Ay$ als $E_{\mathbb{R}} \cdot \Phi_{J_{\mathbb{R}}}(x,0)$.
7. Wenn gewünscht, berechne die Matrix $E_{\mathbb{R}}^{-1}$.
8. Berechne die Übergangsmatrix $\Phi_A(x,0) = E_{\mathbb{R}} \cdot \Phi_{J_{\mathbb{R}}}(x,0) \cdot E_{\mathbb{R}}^{-1}$.

5.4 Beispiel eines linear-homogenen Differentialgleichungssystems

Wir betrachten das im StEx (nv) F05 T3 A4 aufgetretene Beispiel eines linear homogenen Differentialgleichungssystems, das zweidimensional, erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist. Ein weiteres Beispiel ist H02 T3 A5.

5.4.1 Aufgabe

Bestimmen Sie die Menge der auf $\mathbb{R}$ definierten Lösungsfunktionen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) + 4y_2(t) \\ y_2'(t) &= 2y_1(t) + 3y_2(t) \end{aligned}$$

5.4.2 Lösung 1

Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} \chi_A(z) &= \det \begin{pmatrix} 1-z & 4 \\ 2 & 3-z \end{pmatrix} = (1-z)(3-z) - 8 \\ &= z^2 - 4z - 5 \end{aligned}$$

und hat die beiden Nullstellen $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = -1$.

Zugehörige Eigenvektoren werden so ermittelt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1-5 & 4 \\ 2 & 3-5 \end{pmatrix} v_1 &= \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1+1 & 4 \\ 2 & 3+1 \end{pmatrix} v_2 &= \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es sind also

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also eine Fundamentalmatrix für das System aus der Aufgabenstellung

$$Y(t) = E\,\Phi_J(t,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ e^{5t} & -\frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Die beiden Spalten spannen den Lösungsraum auf.

5.4.3 Lösung 2

Leite die erste Gleichung ein weiters Mal ab und eliminiere die zweite Funktion.

$$\begin{aligned} y_1'' &= y_1' + 4y_2' = y_1' + 4[2y_1 + 3y_2] \\ &= y_1' + 4[2y_1 + \frac{3}{4}(y_1' - y_1)] = 4y_1' + 5y_1. \end{aligned}$$

Wir erhalten eine skalare linear-homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y_1'' - 4y_1' - 5y_1 = 0 \qquad (*)$$

die wir mit Hilfe des Satzes 4.4.3 lösen. Das charakteristische Polynom

$$p(z) = z^2 - 4z - 5 = (z+1) \cdot (z-5)$$

hat die beiden Nullstellen

$$\lambda_1 = 5, \qquad \lambda_2 = -1,$$

so dass sich die beiden Funktionen

$$y_{11}(t) = e^{5t}, \qquad y_{12}(t) = e^{-t}$$

als Basis des Lösungsraums der Differentialgleichung $(*)$ ergeben. Die Menge aller Lösungen von $(*)$ ist somit gegeben durch

$$y_1(t) = e^{5t} \cdot C_1 + e^{-t} \cdot C_2$$

Daraus kann die Funktion

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \tfrac{1}{4}[y_1'(t) - y_1(t)] = \tfrac{1}{4}[(5e^{5t} \cdot C_1 - e^{-t} \cdot C_2) - (e^{5t} \cdot C_1 + e^{-t} \cdot C_2)] \\ &= e^{5t} \cdot C_1 - \tfrac{1}{2}e^{-t} \cdot C_2 \end{aligned}$$

berechnet werden. Es ergibt sich dann als Lösungsraum des gegebenen Differentialgleichungssystems

$$\left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{5t} \cdot C_1 + e^{-t} \cdot C_2 \\ e^{5t} \cdot C_1 - \frac{1}{2}e^{-t} \cdot C_2 \end{pmatrix}, C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

5.5 Lösung bei Nicht-Diagonalisierbarkeit

5.5.1 Satz aus der Linearen Algebra: Jordan-Normalform

Das charakteristische Polynom einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ zerfällt über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren mit paarweise verschiedenen Eigenwerten:

$$\chi_A(x) \;=\; (-1)^n\,(x-\lambda_1)^{\ell_1}\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_t)^{\ell_t}.$$

Dann gibt es eine endliche Folge von natürlichen Zahlen

$$(\underbrace{\underbrace{\ell_{11},\ldots,\ell_{1N_1}}_{\sum=\ell_1},\underbrace{\ell_{21},\ldots,\ell_{2N_2}}_{\sum=\ell_2},\ldots,\ldots,\ldots,\underbrace{\ell_{t1},\ldots,\ell_{tN_t}}_{\sum=\ell_t}}_{\sum=n}),$$

eine invertierbare (Transformations-)Matrix $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und eine Matrix $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit den folgenden Unterteilungen in ,,Spaltenmatrizen” bzw. Blöcke:

$$E \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{E}_t \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

$$J \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathbf{J}_t \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

mit

$$\mathbf{E}_j \;=\; \begin{pmatrix} E_{j1} & \cdots & \cdots & \cdots & E_{j,N_j} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times \ell_j}$$

$$\mathbf{J}_j \;=\; \begin{pmatrix} J_{j1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & J_{j2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & J_{j,N_j} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{\ell_j\times \ell_j},$$

$(j=1,\ldots,t)$ und dann

$$E_{jk} \;=\; \begin{pmatrix} v_{j,k,1} & \cdots & \cdots & \cdots & v_{j,k,\ell_{jk}} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times \ell_{jk}}$$

$$J_{jk} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{\ell_{jk}\times \ell_{jk}},$$

so dass

$$A\,E \;=\; E\,J \quad \text{oder äquivalent} \quad \left\{ \begin{array}{l} A\,v_{j,k,m} \;=\; \begin{cases} \lambda_j\,v_{j,k,m}, & \text{falls } i=1, \\ \lambda_j\,v_{j,k,m} + v_{j,k,m-1}, & \text{falls } i \in \{2,\ldots,\ell_{jk}\}, \end{cases} \\ \text{für alle } j=1,\ldots,t \text{ und } k=1,\ldots,N_j. \end{array} \right.$$

5.5.2 Zusatz: Reelle Normalform bei reeller Matrix

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reelle Matrix. Das charakteristische Polynom zerfällt über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren mit paarweise verschiedenen Eigenwerten:

$$\begin{aligned}\chi_A(z) \;=\; & (z-\lambda_1)^{\ell_1} \cdot (z-\lambda_2)^{\ell_2} \cdot \ldots \cdot (z-\lambda_r)^{\ell_r} \cdot \\ & (z-\mu_1)^{m_1} \cdot (z-\overline{\mu_1})^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z-\mu_s)^{m_s} \cdot (z-\overline{\mu_s})^{m_s}.\end{aligned}$$

Wir nehmen Bezug auf den vorherigen Satz 5.5.1.

(i) Die Transformationsmatrix E und die Jordan-Normalform J können so gewählt werden, dass die den einzelnen Eigenwerten zugeordneten (i.a. komplexen) Spalten-Untermatrizen $\mathbf{E}_j$ und Diagonal-Untermatrizen $\mathbf{J}_j$ in der folgenden Reihenfolge auftreten.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_j &= \overline{\mathbf{E}_j} \\ \mathbf{J}_j &= \overline{\mathbf{J}_j} \quad j = 1, \ldots, r \qquad \text{(bei reellen Eigenwerten)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{j+1} &= \overline{\mathbf{E}_j} \\ \mathbf{J}_{j+1} &= \overline{\mathbf{J}_j} \quad j = r+1, r+3, \ldots, r+2s-1 \qquad \text{(bei echt-komlexen Eigenwerten)}.\end{aligned}$$

(ii) Die Transformationsmatrix E und die Jordan-Normalform J können so gewählt werden, dass nur noch Spalten-Untermatrizen bzw. Diagonal-Untermatrizen der folgenden Form auftreten:

$$E_{jk} = \begin{pmatrix} v_{j,k,1} & \cdots & \cdots & \cdots & v_{j,k,\ell_{jk}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times \ell_{jk}},$$

$$J_{jk} = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell_{jk} \times \ell_{jk}}$$

oder

$$\begin{pmatrix} E_{jk} & E_{j+1,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{j,k,1} & \cdots & \cdots & \cdots & v_{j,k,\ell_{jk}} & \overline{v_{j,k,1}} & \cdots & \cdots & \cdots & \overline{v_{j,k,\ell_{jk}}} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times (2\ell_{jk})}$$

$$\begin{pmatrix} J_{jk} & 0 \\ 0 & J_{j+1,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_j & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_j & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mu_j & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \overline{\mu_j} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & 0 & \overline{\mu_j} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \overline{\mu_j} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(2\ell_{jk}) \times (2\ell_{jk})}.$$

(iii) Die Transformationsmatrix E und die (jetzt: reelle) Normalform J können als **reelle** Matrizen gewählt werden, so dass nur noch Spalten-Untermatrizen bzw. Diagonal-Untermatrizen der folgenden Form auftreten:

$$E_{jk} = \begin{pmatrix} v_{j,k,1} & \cdots & \cdots & \cdots & v_{j,k,\ell_{jk}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times \ell_{jk}}$$

$$J_{jk} = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell_{jk} \times \ell_{jk}},$$

oder

$$\widetilde{E}_{jk} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} v_{j,k,1} & \operatorname{Im} v_{j,k,1} & \cdots & \cdots & \operatorname{Re} v_{j,k,\ell_{jk}} & \operatorname{Im} v_{j,k,\ell_{jk}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (2\ell_{jk})}$$

$$\widetilde{J}_{jk} = \begin{pmatrix} (\mu_j) & (1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\mu_j) & (1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & (1) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & (\mu_j) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2\ell_{jk}) \times (2\ell_{jk})},$$

wobei

$$(\mu_j) = \begin{pmatrix} \varrho_j & \omega_j \\ -\omega_j & \varrho_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad (1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

5.5.3 Beweis

(i) Ist μ_j ein echt-komplexer Eigenwert, so wende man auf die zugehörigen Gleichungen

$$A\,v_{j,k,m} = \begin{cases} \mu_j\, v_{j,k,m}, & \text{falls } m = 1, \\ \mu_j\, v_{j,k,m} + v_{j,k,m-1}, & \text{falls } m \in \{2, \ldots, \ell_{jk}\}, \end{cases}$$

für alle $k = 1, \ldots, N_j$

aus Satz 5.5.1 die Komplex-Konjugation an. Man erhält die Gleichungen

$$A\,\overline{v_{j,k,m}} = \begin{cases} \overline{\mu_j}\, \overline{v_{j,k,m}}, & \text{falls } m = 1, \\ \overline{\mu_j}\, \overline{v_{j,k,m}} + \overline{v_{j,k,m-1}}, & \text{falls } m \in \{2, \ldots, \ell_{jk}\}, \end{cases}$$

für alle $k = 1, \ldots, N_j$

und diese beschreiben genau die Untermatrizen $\overline{\mathbf{E}_j}$ und $\overline{\mathbf{J}_j}$, die zu $\overline{\mu_j}$ gehören. Durch entsprechendes Umordnen der Spalten-Untermatrizen in E und Diagonal-Untermatrizen in J kann man erreichen, dass $\mathbf{E}_{j+1} = \overline{\mathbf{E}_j}$ und $\mathbf{J}_{j+1} = \overline{\mathbf{J}_j}$.

(ii) Das folgt aus (i), indem man einfach die Spalten-Untermatrizen in $\begin{pmatrix} \mathbf{E}_j & \overline{\mathbf{E}_j} \end{pmatrix}$ und Diagonal-Untermatrizen in $\begin{pmatrix} \mathbf{J}_j & 0 \\ 0 & \overline{\mathbf{J}_j} \end{pmatrix}$ umordnet.

(iii) Wir betrachten also für festes (j,k) eine einzelne Spalten-Untermatrix $\begin{pmatrix} E_{jk} & E_{j+1,k} \end{pmatrix}$ und Diagonal-Untermatrix $\begin{pmatrix} J_{jk} & 0 \\ 0 & J_{j+1,k} \end{pmatrix}$ wie in (ii).

Die Gleichungen

$$A \begin{pmatrix} E_{jk} & E_{j+1,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{jk} & E_{j+1,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{jk} & 0 \\ 0 & J_{j+1,k} \end{pmatrix}$$

lauten ausgeschrieben

$$A\, v_{j,k,m} = \begin{cases} \mu_j\, v_{j,k,m}, & \text{falls } m = 1, \\ \mu_j\, v_{j,k,m} + v_{j,k,m-1}, & \text{falls } m \in \{2, \ldots, \ell_{jk}\}, \end{cases}$$

$$A\, \overline{v_{j,k,m}} = \begin{cases} \overline{\mu_j}\, \overline{v_{j,k,m}}, & \text{falls } m = 1, \\ \overline{\mu_j}\, \overline{v_{j,k,m}} + \overline{v_{j,k,m-1}}, & \text{falls } m \in \{2, \ldots, \ell_{jk}\}. \end{cases}$$

Es gilt dann für $m = 1$

$$\begin{aligned} A\, \mathrm{Re}\, v_{j,k,m} &= A\, \tfrac{1}{2}(v_{j,k,m} + \overline{v_{j,k,m}}) \\ &= \tfrac{1}{2}(\mu_j\, v_{j,k,m} + \overline{\mu_j}\, \overline{v_{j,k,m}}) \\ &= \varrho_j\, \mathrm{Re}\, v_{j,k,m} - \omega_j\, \mathrm{Im}\, v_{j,k,m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\, \mathrm{Im}\, v_{j,k,m} &= A\, \tfrac{1}{2i}(v_{j,k,m} - \overline{v_{j,k,m}}) \\ &= \tfrac{1}{2i}(\mu_j\, v_{j,k,m} - \overline{\mu_j}\, \overline{v_{j,k,m}}) \\ &= \omega_j\, \mathrm{Re}\, v_{j,k,m} + \varrho_j\, \mathrm{Im}\, v_{j,k,m} \end{aligned}$$

und für $m \in \{2, \ldots, \ell_{jk}\}$

$$\begin{aligned} A\, \mathrm{Re}\, v_{j,k,m} &= A\, \tfrac{1}{2}(v_{j,k,m} + \overline{v_{j,k,m}}) \\ &= \tfrac{1}{2}(\mu_j\, v_{j,k,m} + v_{j,k,m-1} + \overline{\mu_j}\, \overline{v_{j,k,m}} + \overline{v_{j,k,m-1}}) \\ &= \varrho_j\, \mathrm{Re}\, v_{j,k,m} - \omega_j\, \mathrm{Im}\, v_{j,k,m} + \mathrm{Re}\, v_{j,k,m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\, \mathrm{Im}\, v_{j,k,m} &= A\, \tfrac{1}{2i}(v_{j,k,m} - \overline{v_{j,k,m}}) \\ &= \tfrac{1}{2i}(\mu_j\, v_{j,k,m} + v_{j,k,m-1} - \overline{\mu_j}\, \overline{v_{j,k,m}} - \overline{v_{j,k,m-1}}) \\ &= \omega_j\, \mathrm{Re}\, v_{j,k,m} + \varrho_j\, \mathrm{Im}\, v_{j,k,m} + \mathrm{Im}\, v_{j,k,m}. \end{aligned}$$

Das ist aber genau die Gleichung

$$A\, \widetilde{E}_{jk} = \widetilde{E}_{jk}\, \widetilde{J}_{jk}.$$

5.5.4 Satz: Übergangsmatrix bei reellem Jordan-Block

In der Jordan-Normalform für A trete ein reeller Block der Form

$$J^* \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell\times\ell}$$

auf. Die zugehörige Übergangsmatrix ist

$$\Phi_{J^*}(x,0) \quad = \quad e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \cdots & \frac{x^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \\ 0 & \ddots & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{x^2}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell\times\ell}.$$

5.5.5 Beweis

Es ist $\Phi_{J^*}(0,0) = I$ und

$$\begin{aligned}
\Phi'_{J^*}(x,0) \quad &= \quad [e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \cdots & \frac{x^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \\ \vdots & \ddots & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{x^2}{2} \\ \vdots & & & \ddots & x \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}]' \\
&= \quad \lambda e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \cdots & \frac{x^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \\ \vdots & \ddots & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{x^2}{2} \\ \vdots & & & \ddots & x \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} + e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 0 & 1 & x & \cdots & \frac{x^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
&= \quad e^{\lambda x} \begin{pmatrix} \lambda & \lambda x + 1 & \lambda\frac{x^2}{2} + x & \cdots & \lambda\frac{x^{\ell-1}}{(\ell-1)!} + \frac{x^{\ell-2}}{(\ell-2)!} \\ \vdots & \ddots & \lambda x + 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda\frac{x^2}{2} + x \\ \vdots & & & \ddots & \lambda x + 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \\
&= \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \cdots & \frac{x^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \\ \vdots & \ddots & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{x^2}{2} \\ \vdots & & & \ddots & x \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

5.5.6 Satz: Übergangsmatrix bei echt-komplexem Jordan-Block

In der reellen Normalform für A trete eine Untermatrix der Form

$$\widetilde{J}^* \;=\; \begin{pmatrix} (\mu) & (1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\mu) & (1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & (1) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & (\mu) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2\ell)\times(2\ell)}$$

mit 2×2-Untermatrizen

$$(\mu) \;=\; \begin{pmatrix} \varrho & \omega \\ -\omega & \varrho \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad (1) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

auf. Die zugehörige Übergangsmatrix ist

$$\Phi_{\widetilde{J}^*}(x,0) \;=\; \begin{pmatrix} E_{(\mu)}(x) & x\,E_{(\mu)}(x) & \frac{x^2}{2}\,E_{(\mu)}(x) & \cdots & \frac{x^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\,E_{(\mu)}(x) \\ 0 & \ddots & x\,E_{(\mu)}(x) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{x^2}{2}\,E_{(\mu)}(x) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x\,E_{(\mu)}(x) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & E_{(\mu)}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2\ell)\times(2\ell)},$$

wobei die Matrix $E_{(\mu)}(x) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben ist durch

$$E_{(\mu)}(x) \;=\; e^{\varrho\, x} \begin{pmatrix} \cos(\omega x) & \sin(\omega x) \\ -\sin(\omega x) & \cos(\omega x) \end{pmatrix}.$$

5.5.7 Beweis

Es ist leicht zu sehen, dass $\Phi_{\widetilde{J}^*}(0,0) = I \in \mathbb{R}^{(2\ell)\times(2\ell)}$. Weiter ist, siehe 5.3.4,

$$\begin{aligned} E'_{(\mu)}(x) \;&=\; [e^{\varrho x} \begin{pmatrix} \cos(\omega x) & \sin(\omega x) \\ -\sin(\omega x) & \cos(\omega x) \end{pmatrix}]\,' \\ &=\; \varrho \cdot e^{\varrho x} \begin{pmatrix} \cos(\omega x) & \sin(\omega x) \\ -\sin(\omega x) & \cos(\omega x) \end{pmatrix} + \omega \cdot e^{\varrho x} \begin{pmatrix} -\sin(\omega x) & \cos(\omega x) \\ -\cos(\omega x) & -\sin(\omega x) \end{pmatrix} \\ &=\; \varrho \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot E_{(\mu)}(x) + \omega \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot E_{(\mu)}(x) \;=\; (\mu) \cdot E_{(\mu)}(x). \end{aligned}$$

Dann rechnen wir mit Hilfe der Leibniz-Produktregel nach

$$
\begin{aligned}
\Phi'_{\widetilde{J}^*}(x,0) &= \left[\begin{pmatrix}
E_{(\mu)}(x) & x\,E_{(\mu)}(x) & \frac{x^2}{2}\,E_{(\mu)}(x) & \cdots & \frac{x^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\,E_{(\mu)}(x) \\
0 & \ddots & x\,E_{(\mu)}(x) & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{x^2}{2}\,E_{(\mu)}(x) \\
\vdots & & \ddots & \ddots & x\,E_{(\mu)}(x) \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & E_{(\mu)}(x)
\end{pmatrix}\right]' \\
&= \begin{pmatrix}
0 & E_{(\mu)}(x) & xE_{(\mu)}(x) & \cdots & \frac{x^{\ell-2}}{(\ell-2)!}\,E_{(\mu)}(x) \\
\vdots & \ddots & E_{(\mu)}(x) & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & x\,E_{(\mu)}(x) \\
\vdots & & & \ddots & E_{(\mu)}(x) \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix} \\
&\qquad + \begin{pmatrix}
(\mu)E_{(\mu)}(x) & x(\mu)E_{(\mu)}(x) & \frac{x^2}{2}(\mu)E_{(\mu)}(x) & \cdots & \frac{x^{\ell-1}}{(\ell-1)!}(\mu)E_{(\mu)}(x) \\
\vdots & \ddots & x(\mu)E_{(\mu)}(x) & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \frac{x^2}{2}(\mu)E_{(\mu)}(x) \\
\vdots & & & \ddots & x(\mu)E_{(\mu)}(x) \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & (\mu)E_{(\mu)}(x)
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
(\mu)E_{(\mu)}(x) & [x(\mu)+(1)]E_{(\mu)}(x) & [\frac{x^2}{2}(\mu)+x(1)]E_{(\mu)}(x) & \cdots & [\frac{x^{\ell-1}}{(\ell-1)!}(\mu)+\frac{x^{\ell-2}}{(\ell-2)!}(1)]E_{(\mu)}(x) \\
\vdots & \ddots & [x(\mu)+(1)]E_{(\mu)}(x) & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & [\frac{x^2}{2}(\mu)+x(1)]E_{(\mu)}(x) \\
\vdots & & & \ddots & [x(\mu)+(1)]E_{(\mu)}(x) \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & (\mu)E_{(\mu)}(x)
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
(\mu) & (1) & 0 & \cdots & 0 \\
0 & (\mu) & (1) & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & \ddots & \ddots & (1) \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & (\mu)
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}
E_{(\mu)}(x) & x\,E_{(\mu)}(x) & \frac{x^2}{2}\,E_{(\mu)}(x) & \cdots & \frac{x^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\,E_{(\mu)}(x) \\
0 & \ddots & x\,E_{(\mu)}(x) & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{x^2}{2}\,E_{(\mu)}(x) \\
\vdots & & \ddots & \ddots & x\,E_{(\mu)}(x) \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & E_{(\mu)}(x)
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
(\mu) & (1) & 0 & \cdots & 0 \\
0 & (\mu) & (1) & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & \ddots & \ddots & (1) \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & (\mu)
\end{pmatrix} \cdot \Phi_{\widetilde{J}^*}(x,0).
\end{aligned}
$$

5.5.8 Beispiel 1 aus H10 T3 A4

Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$$

ist

$$\chi(z) = (8-z)(-6-z)+50 = z^2 - 2z + 2$$

und die beiden Nullstellen sind

$$\mu = 1+i, \qquad \overline{\mu} = 1-i.$$

Damit lautet die reelle Normalform

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und es ist

$$\Phi_J(t,0) = e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen einen Eigenvektor v zum Eigenwert μ,

$$\begin{pmatrix} 8-(1+i) & 10 \\ -5 & -6-(1+i) \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 7-i & 10 \\ -5 & -7-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Setzt man $v_1 = 10$, so erhält man

$$v = \begin{pmatrix} 10 \\ -7+i \end{pmatrix}.$$

Der konjugiert komplexe Vektor $\begin{pmatrix} 10 \\ -7-i \end{pmatrix}$ ist dann ein Eigenvektor zu $\overline{\mu}$.

Setze jetzt

$$E = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} v & \operatorname{Im} v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

So können wir ein Fundamentalsystem berechnen

$$\begin{aligned} Y(t) &= E\Phi_J(t,0) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \cdot e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} 10\cos t & 10\sin t \\ -7\cos t - \sin t & -7\sin t + \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ist die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung gleich

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 10\cos t & 10\sin t \\ -7\cos t - \sin t & -7\sin t + \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Man kann jetzt die Probe machen:

$$\begin{aligned} Y'(t) &= e^t [\begin{pmatrix} 10\cos t & 10\sin t \\ -7\cos t - \sin t & -7\sin t + \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10\sin t & 10\cos t \\ 7\sin t - \cos t & -7\cos t - \sin t \end{pmatrix}] \\ &= e^t \begin{pmatrix} 10\cos t - 10\sin t & 10\cos t + 10\sin t \\ -8\cos t + 6\sin t & -8\sin t - 6\cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \cdot e^t \begin{pmatrix} 10\cos t & 10\sin t \\ -7\cos t - \sin t & -7\sin t + \cos t \end{pmatrix} \\ &= AY(t). \end{aligned}$$

5.5.9 Beispiel 2 aus F14 T3 A5

Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist

$$\begin{aligned} \chi_A(z) &= \det \begin{pmatrix} -z & 1 & 2 \\ 1 & -z & 1 \\ 0 & 0 & 1-z \end{pmatrix} \\ &= (1-z)(z^2-1) = -(z-1)^2(z+1), \end{aligned}$$

es gibt also zwei Eigenwerte mit algebraischen Vielfachheiten

$$\begin{aligned} \lambda_1 = +1, &\qquad \ell_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1, &\qquad \ell_2 = 1. \end{aligned}$$

Wir berechnen einen Eigenvektor zu $\lambda_2 = -1$. Es ist

$$\ker(A+1) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Wir betrachten den Eigenwert $\lambda_1 = +1$. Es ist

$$\ker(A-1) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

und dann

$$\ker(A-1)^2 = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle.$$

Damit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Hauptvektor 1. Ordnung, der zugehörige Eigenvektor ist

$$(A-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit können wir die (eine) Transformationsmatrix E und die zugehörige (reelle) Jordan Normalform hinschreiben:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter sind

$$\Phi_J(t,0) \quad = \quad \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

die Übergangsmatrix zu J und

$$\begin{aligned} Y(t) \quad &= \quad E\,\Phi_J(t,0) \quad = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 6e^t & 6te^t + e^t \\ -e^{-t} & 6e^t & 6te^t - e^t \\ 0 & 0 & 4e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

eine Fundamentalmatrix des Originalsystems. Man kann noch checken:

$$\begin{aligned} Y'(t) \quad &= \begin{pmatrix} -e^{-t} & 6e^t & 6te^t + 7e^t \\ e^{-t} & 6e^t & 6te^t + 5e^t \\ 0 & 0 & 4e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 6e^t & 6te^t + e^t \\ -e^{-t} & 6e^t & 6te^t - e^t \\ 0 & 0 & 4e^t \end{pmatrix} \\ &= A\,Y(t). \end{aligned}$$

5.6 Die Matrix-Exponentialfunktion

5.6.1 Definition: Matrix-Exponentialfunktion

Für eine gegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definieren wir die Exponentialfunktion

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{R}^{n\times n} & \to & \mathbb{R}^{n\times n} \\ A & \mapsto & \exp(A) \ = \ e^A \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \end{cases}$$

5.6.2 Bemerkung

Der Ausdruck auf der rechten Seite entsteht also dadurch, dass die quadratische Matrix A in die Potenzreihe der Exponentialfunktion eingesetzt wird. Tatsächlich ist auf diese Weise der Reihenwert wohldefiniert, was wir noch kurz auf zwei verschiedene Weisen erläutern — und nicht vollständig beweisen — wollen.

- Für jede fixierte Position $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ bilden die Zahlen

  $$(s_{i,j})_\ell \quad := \quad \left(\sum_{k=0}^{\ell} \frac{A^k}{k!}\right)_{i,j}$$

  eine Zahlenfolge

  $$\begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ \ell & \mapsto & (s_{i,j})_\ell. \end{cases}$$

  Man kann zeigen, dass diese Zahlenfolge gegen einen Grenzwert $e_{i,j}$ konvergiert. Diese Grenzwerte sind die Einträge in der Matrix e^A.

- Die Partialsummenfolge

  $$\begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^{n\times n} \\ \ell & \mapsto & \sum_{k=0}^{\ell} \frac{A^k}{k!}. \end{cases}$$

  ist eine Folge im endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{n\times n}$. Man kann zeigen, dass diese Matrixfolge bzgl. der euklidischen Norm (oder bzgl. jeder anderen Norm) konvergiert. e^A ist dann der Grenzwert.

Es stellt sich in der Folge heraus, dass man vernünftig und solide mit dieser Definition arbeiten kann. Es lassen sich die wesentlichen Eigenschaften der skalaren Exponentialfunktion — geeignet modifiziert — auf die Matrix-Exponentialfunktion übertragen.

5.6.3 Satz

Für die Lösung des autonomen Matrix-AWPs

$$\begin{cases} Y' & = & AY \\ Y(x_0) & = & I \qquad \text{(Einheitsmatrix)} \end{cases}$$

gilt

$$Y(x) \ = \ \Phi_A(x,x_0) \ = \ \exp(A(x-x_0)).$$

5.6.4 Beweis

Wir akzeptieren, dass die Exponentialreihe gliedweise differenziert werden darf. Dann ist

$$\begin{aligned}
\exp(A(x-x_0))' &= \sum_{k=0}^{\infty} [\tfrac{A^k (x-x_0)^k}{k!}]' \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{k \cdot A^k (x-x_0)^{k-1}}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} A \cdot \tfrac{A^{k-1} (x-x_0)^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= A \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{A^k (x-x_0)^k}{k!} \\
&= A \cdot \exp(A(x-x_0))
\end{aligned}$$

und $\exp(A(x_0 - x_0)) = I$. Also löst diese Funktion das AWP. Aus der Eindeutigkeit der Lösung ergibt sich der Satz.

5.6.5 Bemerkung

Zum Beweis der nun folgenden Sätze über die Matrix-Exponentialfunktion stehen nun zwei Methoden-Stränge zur Verfügung. Wir können jeweils die Definition 5.6.1 über die Exponentialreihe oder die bereits bewiesenen Sätze über die Übergangsmatrix $\Phi_A(x, x_0)$ (bei konstanter Matrix A) verwenden.

5.6.6 Satz: Eigenschaften der Matrix-Exponentialfunktion

(i) Kommutieren die beiden Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, d.h. $AB = BA$, so gilt die Funktionalgleichung

$$\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B).$$

(ii) Es ist

$$\exp(0) = I.$$

(iii) Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $\exp(A)$ invertierbar und es gilt

$$\exp(A)^{-1} = \exp(-A).$$

(iv) Für eine Blockdiagonalmatrix A gilt

$$\exp(\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \exp(A_1) & & & \\ & \exp(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp(A_r) \end{pmatrix}.$$

(v) Ist $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so gilt

$$\exp(E^{-1}AE) \;=\; E^{-1}\exp(A)E.$$

(vi) Für die transponierte Matrix A^T gilt

$$\exp(A^T) \;=\; \exp(A)^T.$$

(vii) Es ist

$$\det\exp(A) \;=\; \exp(\operatorname{spur}(A)).$$

5.6.7 Beweis

(i) Wegen $AB = BA$ gilt auch

$$\exp(A)B \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{A^k B}{k!} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{BA^k}{k!} \;=\; B\exp(A).$$

Die Funktion $\tilde{e} : x \mapsto \exp(Ax)\exp(Bx)$ löst das AWP

$$\begin{cases} Y' &= (A+B)Y \\ Y(x_0) &= I, \end{cases}$$

da mit der Leibniz-Produktregel

$$\tilde{e}'(x) \;=\; A\cdot\exp(Ax)\cdot\exp(Bx) + \exp(Ax)\cdot B\cdot\exp(Bx) \;=\; (A+B)\exp(Ax)\exp(Bx)$$

und $\tilde{e}(0) = I$. Auch die Funktion $x \mapsto \exp((A+B)x)$ löst dieses AWP. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung müssen beide Funktionen übereinstimmen.

(ii) Setze $A = 0$ in die Matrix-Exponentialfunktion ein!

(iii) Es ist aufgrund von (i) und (ii)

$$\exp(A)\cdot\exp(-A) \;=\; \exp(A-A) \;=\; \exp(0) = I.$$

(iv), (v), (vi). Man rechne das mit der Definition der Matrix-Exponentialfunktion einfach nach.

(vii) Aufgrund des Satzes 3.5.2 (ii) über die Wronski-Determinante ist

$$\det(\exp(Ax)) \;=\; \exp\left(\int_0^x \operatorname{spur} A\,dt\right)\cdot\det(\exp(A\cdot 0) \;=\; \exp(\operatorname{spur}(Ax)).$$

Setze dann $x = 1$.

5.6.8 Satz: Berechnung von Matrix-Exponentialfunktionen

(i) Es ist

$$\exp\begin{pmatrix} \varrho & \omega \\ -\omega & \varrho \end{pmatrix} = e^{\varrho} \cdot \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}.$$

(ii) Für Matrizen in $\mathbb{R}^{\ell\times\ell}$ gilt

$$\exp\begin{pmatrix} \lambda & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = e^{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & a & \frac{a^2}{2} & \cdots & \frac{a^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \\ \vdots & \ddots & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{a^2}{2} \\ \vdots & & & \ddots & a \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) Für Matrizen in $\mathbb{R}^{(2\ell)\times(2\ell)}$ gilt

$$\exp\begin{pmatrix} (\mu) & (a) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\mu) & (a) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & (a) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & (\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{(\mu)} & a\,E_{(\mu)} & \frac{a^2}{2}\,E_{(\mu)} & \cdots & \frac{a^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\,E_{(\mu)} \\ 0 & \ddots & a\,E_{(\mu)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{a^2}{2}\,E_{(\mu)} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a\,E_{(\mu)} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & E_{(\mu)} \end{pmatrix},$$

wobei die 2×2-Untermatrizen definiert sind durch

$$(\mu) = \begin{pmatrix} \varrho & \omega \\ -\omega & \varrho \end{pmatrix}, \qquad (a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$
$$E_{(\mu)} = e^{\varrho}\begin{pmatrix} \cos(\omega) & \sin(\omega) \\ -\sin(\omega) & \cos(\omega) \end{pmatrix}.$$

5.6.9 Beweis

Zum Beweis würde der Verweis auf die entsprechenden Aussagen über $\Phi_A(x,0)$ (bei konstanter Matrix A) genügen. Nichtsdestoweniger zeigen wir die Aussagen (i) und (ii) nochmals direkt mit Hilfe der Definition 5.6.1.

(i) Setze zunächst $\varrho = 0$ und $A := \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$. Es ist leicht per Induktion zu zeigen, dass für $k \in \mathbb{Z}$

$$A^{2k} = (-1)^k\omega^{2k}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{2k+1} = (-1)^k\omega^{2k+1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demzufolge ist

$$
\begin{aligned}
\exp(A) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = \sum_{j\in 2\mathbb{N}_0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} + \sum_{j\in 2\mathbb{N}_0+1}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = \sum_{k\in\mathbb{N}_0}^{\infty} \frac{A^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k\in\mathbb{N}_0}^{\infty} \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}_0}^{\infty} \frac{(-1)^k\omega^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k\in 2\mathbb{N}_0+1}^{\infty} \frac{(-1)^k\omega^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\omega & 0 \\ 0 & \cos\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sin\omega \\ -\sin\omega & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Weiter ist dann

$$
\begin{aligned}
\exp\begin{pmatrix} \varrho & \omega \\ -\omega & \varrho \end{pmatrix} &= \exp(\begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}) \\
&= \exp\begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix} \cdot \exp\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^\varrho & 0 \\ 0 & e^\varrho \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \\
&= e^\varrho \cdot \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(ii) Es ist leicht per Induktion zu sehen, dass

$$
\begin{pmatrix}
0 & a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & & & \ddots & a \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}^k
=
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & a^k & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & & & \ddots & a^k \\
\vdots & & & & & & 0 \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix},
$$

wobei die Zahlen a^k in der Nebendiagonale stehen, die die Positionen $(1, k+1)$ und $(n-k, n)$ verbindet. Setzt man diese Matrixpotenzen in die Matrix-Exponentialfunktion ein, so folgt

$$
\exp\begin{pmatrix}
0 & a & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & a \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & a & \frac{a^2}{2} & \cdots & \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\
\vdots & \ddots & a & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \frac{a^2}{2} \\
\vdots & & & \ddots & a \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1
\end{pmatrix}.
$$

Da die beiden Matrizen

$$
\begin{pmatrix}
\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda
\end{pmatrix}
\quad \text{und} \quad
\begin{pmatrix}
0 & a & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & a \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

vertauschen, folgt mit Satz 5.6.6 (i) schließlich die Behauptung:

$$
\begin{aligned}
\exp(\begin{pmatrix} \lambda & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}) &= \exp(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}) \cdot \exp(\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}) \\
&= e^{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & a & \frac{a^2}{2} & \cdots & \frac{a^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \\ \vdots & \ddots & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{a^2}{2} \\ \vdots & & & \ddots & a \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

5.7 Rückbezug: Skalare autonome Gleichungen höherer Ordnung

Zu einer linear-homogenen skalaren autonomen Differentialgleichung

$$y^{(N)} = -a_{N-1}y^{(N-1)} - \ldots - a_1 y' - a_0 y$$

betrachten wir das N-dimensionale Differentialgleichungssystem

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{N-1} \end{pmatrix} Y$$

das ja beim Umwandeln der Gleichung N-ter Ordnung in ein System der Dimension N entsteht.

(1) Wir berechnen das charakteristische Polynom durch Entwicklung nach der letzten Zeile. Es treten dabei (Unter-)Determinanten von unteren $(N-1)\times(N-1)$-Dreiecksmatrizen auf, die gleich dem Produkt der Diagonaleinträge sind.

$$\begin{aligned}
\chi_A(z) &= \det(A-z) \\
&= \det \begin{pmatrix} -z & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -z & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{N-1}-z \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{N+1}(-a_0)\det\operatorname{diag}(1,1,\ldots,1) \\
&\quad + (-1)^{N+2}(-a_1)\det\operatorname{diag}(-z,1,\ldots,1 \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (-1)^{N+N-1}(-a_{N-2})\det\operatorname{diag}(-z,\ldots,-z,1) \\
&\quad + (-1)^{N+N}(-a_{N-1}-z)\det\operatorname{diag}(-z,\ldots,-z) \\
&= (-1)^N \cdot (a_0 + a_1 z + \ldots + a_{N-2}z^{N-2} + a_{N-1}z^{N-1} + z^N).
\end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom ist also — abgesehen von einem Vorzeichen — gleich dem charakteristischen Polynom der ursprünglichen Gleichung N-ter Ordnung.

(2) Die obere linke/rechte $(N-1)\times(N-1)$-Untermatrix der Matrix $A-\lambda$ ist im Fall $\lambda \neq 0/\lambda = 0$ invertierbar. Deshalb gilt für alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{rang}(A-\lambda) = N-1, \qquad \text{deshalb} \quad \ker(A-\lambda) = 1.$$

(3) Damit ist die Jordan'sche Normalform gegeben durch eine Blockdiagonalmatrix mit Jordan-Blöcken

$$J_1, J_2, \ldots, J_t$$

zu paarweisen verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{C}$.

(!) Wie nehmen nun an, dass alle Eigenwerte reell sind.

(4) Ist $\lambda_j \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert mit geometrischer Vielfachheit $\ell_j \geq 1$, so konstatieren wir ohne Beweis, dass die zugehörige $N \times \ell_j$-Matrix aus Eigenvektor und Hauptvektoren in der Form

$$E_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda_j & 1 & \ddots & & \vdots \\ \lambda_j^2 & * & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & & & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_j^{N-1} & * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

($*$ heißt: beliebiger Eintrag) gewählt werden kann.

(5) Eine Fundamentalmatrix des ursprünglichen Systems hat dann die Gestalt

$$\begin{aligned} E \cdot \Phi_J(x,0) &= \begin{pmatrix} E_1 & \cdots & E_t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_{J_1}(x,0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Phi_{J_t}(x,0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_1 \Phi_{J_1}(x,0) & \cdots & E_t \Phi_{J_t}(x,0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(7) Wegen

$$\Phi_{J_j}(x,0) = e^{\lambda_j x} \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \cdots & \frac{x^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \\ 0 & \ddots & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{x^2}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist aber

$$E_j \Phi_{J_j}(x,0) = e^{\lambda_j x} \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \cdots & \frac{x^{\ell_j-1}}{(\ell_j-1)!} \end{pmatrix}$$

in Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus Satz 4.4.3 (i).