

Skript zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen 2 (GYM/BA)

(Wintersemester 2017/18)

Dieses Geheft enthält in kompakter Form die wesentlichen Inhalte, wie sie in der Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ vorgestellt werden.

Es ist zum Gebrauch neben der Vorlesung gedacht und erhebt nicht den Anspruch, „in sich selbst verständlich“ oder vollständig zu sein.

S. Hilger

Inhaltsverzeichnis

6	Wh: Systeme von Differentialgleichungen	4
6.1	Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung	4
6.2	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen — Wh	5
6.3	Lösungs-Halbgraph verlässt jedes Kompaktum	6
7	Autonome Systeme	9
7.1	Symbol-System	9
7.2	Einführung	9
7.3	Trajektorien	12
7.4	Skalare autonome Differentialgleichungen	14
7.5	Beispiel: Die logistische Differentialgleichung [⊖]	16
8	Ebene autonome Systeme	18
8.1	Matrix-Exponentialfunktionen	18
8.2	Lineare ebene autonome Systeme	19
8.3	Transformation	29
8.4	Elimination bei ebenen autonomen Systemen	32
8.5	Transformation auf Polarkoordinaten	35
9	Autonome Systeme II	38
9.1	Erste Integrale	38
9.2	Hamiltonsche Systeme	41
10	Stabilitätstheorie	44
10.1	Begriffe	44
10.2	Zusammenhang von Attraktivität und Stabilität	45
10.3	Attraktivität und Stabilität bei Linearen Differentialgleichungen	47
10.4	Linearisierung und asymptotische Stabilität	54
10.5	Die direkte Methode von Ljapunov	59

Literatur

- [Ama83] Herbert Amann. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Walter de Gruyter, Berlin, 1983.
- [Aul97] Bernd Aulbach. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1997.
- [KP91] Walter G. Kelley and Allan C. Peterson. *The Theory of Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1991.
- [Wal00] Wolfgang Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 2000.
- [Wir06] Guenther Wirsching. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Teubner, 2006.

6 Wh: Systeme von Differentialgleichungen

Es handelt sich hier um eine Wiederholung einiger Aussagen aus GDG1 Abschnitt 2.

6.1 Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung

6.1.1 Vereinbarung

Wir verallgemeinern nun den bisherigen Begriff einer Differentialgleichung dahingehend, dass die Wertemenge der gesuchten Lösungsfunktionen nicht mehr \mathbb{R} (skalar) ist, sondern ein i.a. höherdimensionaler Vektorraum \mathbb{R}^n .

Wir vereinbaren also für dieses Kapitel, dass n eine feste natürliche Zahl ist. In den meisten Beispielen wird $n = 2$ sein.

Es seien dann gegeben eine offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ und eine stetige Funktion

$$f : \begin{cases} D \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \\ \vdots \\ f_n(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix} \end{cases}$$

die wieder „Rechte Seite“ genannt wird.

Das Symbol I stehe wieder für Intervalle von \mathbb{R} . Wir betonen hier stärker, dass I auch einseitig abgeschlossen sein kann. In diesem Fall schließt die Differenzierbarkeit einer Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein, dass sie an den Randstellen von I einseitig differenzierbar ist.

6.1.2 Definition

Eine differenzierbare Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Lösung des Differentialgleichungssystems*

$$y' = f(x, y),$$

wenn für alle $x \in I$ gilt:

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Beachte, dass der Begriff „Lösung“ hier immer eine Funktion meint.

6.1.3 Graphische Deutung

Der graphischen Deutung von Differentialgleichungssystemen sind Grenzen gesetzt. Lediglich bei $n = 2$ könnten noch räumlich-perspektivische Richtungsfelder gezeichnet werden. Bei ebenen autonomen Systemen, d.h. bei $n = 2$, stehen bestimmte zusätzliche Methoden zur Verfügung.

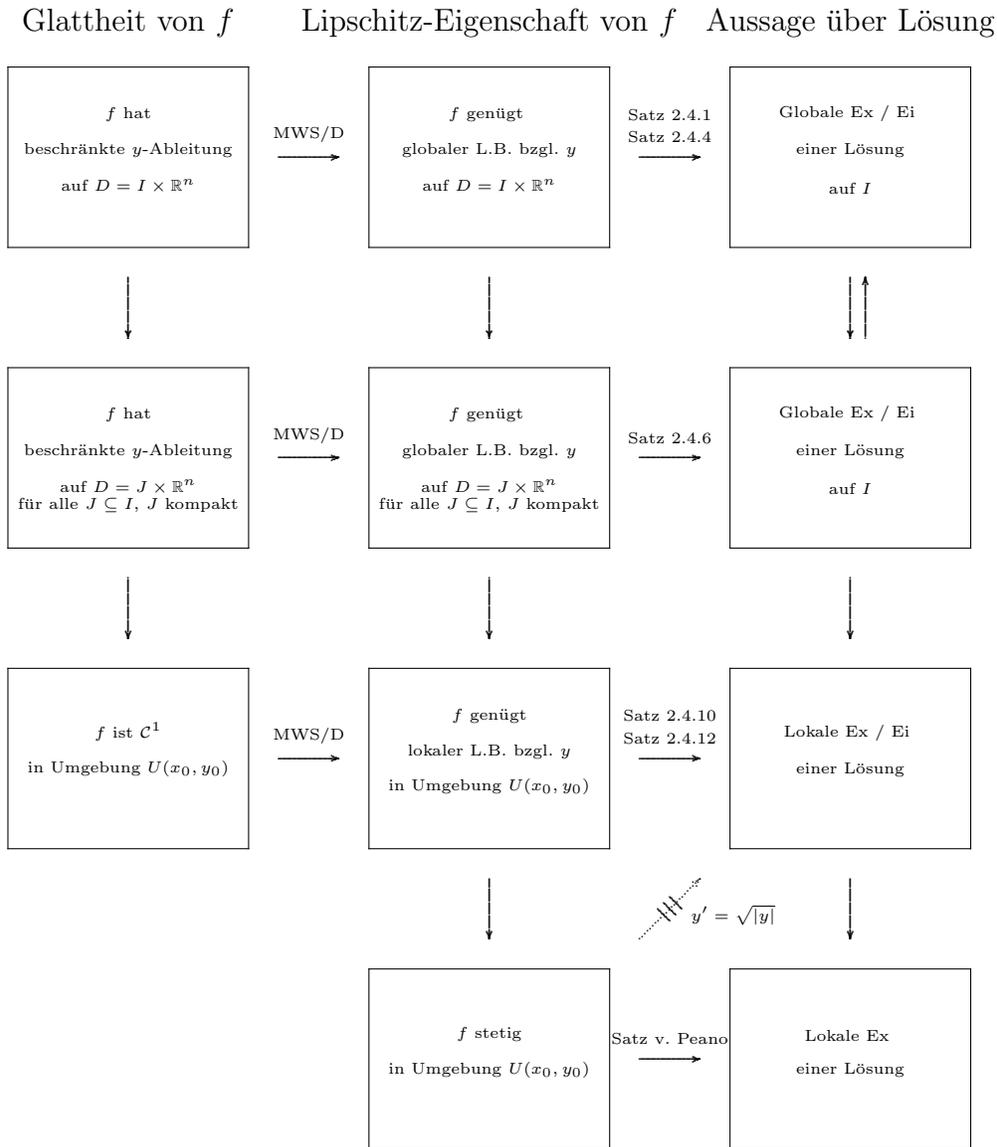
Man bewahre aber die Vorstellung, dass der Graph einer Lösung eine Kurve im \mathbb{R}^n ist, deren Tangentenvektoren durch die Rechte Seite vorgegeben sind.

6.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen — Wh

Das folgende Diagramm gibt einen Überblick über die wichtigsten Existenz- und Eindeutigkeitsätze. Beachte, dass die Beschreibung der mathematischen Eigenschaften abgekürzt ist. Das Diagramm bezieht sich auf ein AWP

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

wobei die Rechte Seite auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mit $(x_0, y_0) \in D$ definiert ist.



Das Kürzel MWS/D steht für „Mittelwertsatz der Differentialrechnung“. Ist die y -Ableitung von f beschränkt, d.h.

$$|D_y f(x, y)| \leq M, \quad \text{für } (x, y) \in D \text{ bzw. } (x, y) \in U(x_0, y_0),$$

so folgt mit dem MWS/D die Lipschitz-Bedingung:

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq M \cdot |y - \tilde{y}| \quad \text{für } (x, y), (x, \tilde{y}) \in D \text{ bzw. } (x, y), (x, \tilde{y}) \in U(x_0, y_0).$$

6.3 Lösungs-Halbgraph verlässt jedes Kompaktum

6.3.1 Bezeichnung für liegenden Zylinder

Sind $(x, y) \in \mathbb{R}^{1+n}$ und $\delta, \varepsilon > 0$, so bezeichnen wir mit

$$Z_{\delta, \varepsilon}(x, y) = [x - \delta, x + \delta] \times B_\varepsilon(y)$$

den kompakten liegenden Zylinder mit Mittelpunkt (x, y) , Radius ε und Länge (= Höhe) 2δ .

6.3.2 Satz: Lokale Mindestlänge von Existenzintervallen

Es sei eine Lipschitz-stetige Rechte Seite $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ offen, gegeben. Weiter sei $(a, b) \in D$ fixiert.

Dann existieren $\xi > 0$ und $\varepsilon > 0$, so dass $Z_{\xi, \varepsilon}(a, b) \subseteq D$ und dass für jedes

$$(x_0, y_0) \in Z_{\xi, \varepsilon}(a, b)$$

das AWP

$$(*) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

eine (eindeutige) Lösung $\varphi_0 : [x_0 - \xi, x_0 + \xi] \rightarrow B_\varepsilon(y_0)$ hat.

6.3.3 Kommentar

Das Bemerkenswerte an diesem technischen Satz ist, dass die Mindestlänge $2\xi > 0$ des Existenzintervalls von φ_0 nur von dem Punkt (a, b) abhängt, dann aber für alle (x_0, y_0) aus einer Umgebung von (a, b) gleich bleibt.

6.3.4 Beweis

(0) Es sei O.B.d.A. $f(a, b) \neq \vec{0}$. Es seien $\delta, \varepsilon > 0$ so gewählt, dass der liegende Zylinder $Z_{2\delta, 2\varepsilon}(a, b)$ in D enthalten ist und dort eine globale Lipschitz-Bedingung für f erfüllt ist.

(1) Für beliebiges und fixiertes

$$(x_0, y_0) \in Z_{\delta, \varepsilon}(a, b)$$

betrachten wir nun das AWP $(*)$ auf dem liegenden Zylinder $Z_{\delta, \varepsilon}(x_0, y_0)$.

(2) Man kann leicht überlegen, dass

$$(a, b) \in Z_{\delta, \varepsilon}(x_0, y_0) \subseteq Z_{2\delta, 2\varepsilon}(a, b).$$

(3) Gemäß dem Satz 2.4.10 (Picard-Lindelöf, lokal-quantitative Version) hat das AWP eine (eindeutige) Lösung $\varphi : I_0 \rightarrow B_\varepsilon(y_0)$, wobei

$$I_0 := [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [x_0 - \frac{\varepsilon}{M_0}, x_0 + \frac{\varepsilon}{M_0}]$$

$$M_0 := \max \left\{ \|f(x, y)\|_{\mathbb{R}^n} \mid (x, y) \in Z_{\delta, \varepsilon}(x_0, y_0) \right\} > 0.$$

(4) Definiert man nun

$$\begin{aligned} M &:= \max \left\{ \|f(x, y)\|_{\mathbb{R}^n} \mid (x, y) \in Z_{2\delta, 2\varepsilon}(a, b) \right\} > 0 \\ \xi &:= \min \left\{ \delta, \frac{\varepsilon}{M} \right\}, \end{aligned}$$

so gilt für alle $(x_0, y_0) \in Z_{\delta, \varepsilon}(a, b)$

$$\xi \leq \delta \quad \text{und} \quad \xi \leq \frac{\varepsilon}{M} \leq \frac{\varepsilon}{M_0},$$

also existieren die Lösungen aller AWP's (*) mit $(x_0, y_0) \in Z_{\delta, \varepsilon}(a, b)$ auf $[x_0 - \xi, x_0 + \xi]$.

(5) Dann existieren die Lösungen aller AWP's (*) mit $(x_0, y_0) \in Z_{\xi, \varepsilon}(a, b)$ auf $[x_0 - \xi, x_0 + \xi]$.

6.3.5 Satz: Lösungs-Halbgraph verlässt jedes Kompaktum

Es sei

$$y' = f(x, y)$$

eine Differentialgleichung mit Lipschitz-stetiger Rechter Seite $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ offen. Weiter sei $K \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ kompakt.

Ist nun $\varphi : I \rightarrow D$ eine **maximale** Lösung der Differentialgleichung und $x_0 \in I$, so gilt

$$\text{graph } \varphi|_{x \geq x_0} \not\subseteq K, \quad \text{und} \quad \text{graph } \varphi|_{x \leq x_0} \not\subseteq K.$$

In Worten: Ein „Halbgraph“ einer maximalen Lösung kann nicht in der kompakten Menge eingeschlossen werden, er kann nicht in der kompakten Menge „versickern“.

6.3.6 Beweis

(0) Wir nehmen an, dass der Halbgraph $\text{graph } \varphi|_{x \geq x_0}$ doch eingeschlossen werden kann, also

$$\text{graph } \varphi|_{x \geq x_0} \subseteq K.$$

(1) Es sei dann $J := [x_0, \sup I] \subseteq \mathbb{R}$. Es gibt dann eine kompakte Kugel $B \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass

$$\text{graph } \varphi|_{x \geq x_0} \subseteq J \times B.$$

(2) Es sei jetzt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge in I mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a := \sup I$.

(3) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $\varphi(x_n) \in B$. Da B kompakt ist, muss eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ existieren, es sei $b \in B$ deren Grenzwert.

(4) Zu $(a, b) \in J \times B \subseteq D$ wählen wir jetzt $\xi, \varepsilon > 0$ gemäß Satz 6.3.2.

(5) Wegen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k}, \varphi(x_{n_k})) = (a, b)$$

gibt es ein $\tilde{k} \in \mathbb{N}$, so dass

$$(x_0, y_0) := (x_{n_{\tilde{k}}}, \varphi(x_{n_{\tilde{k}}})) \in Z_{\xi, \varepsilon}(a, b).$$

(6) Gemäß Satz 6.3.2 umfasst die (eindeutige) Lösung $\tilde{\varphi} : \tilde{I} \rightarrow B_\varepsilon$ des AWP

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

das Intervall $[x_0 - \xi, x_0 + \xi]$.

(7) Wegen $x_0 \in [a - \xi, a + \xi]$ ist umgekehrt $a \in [x_0 - \xi, x_0 + \xi]$. Das heißt, dass die Lösung $\tilde{\varphi}$ an der Stelle $a = \sup I$ definiert ist.

(8) Damit kann die ursprüngliche Lösung $\varphi : I \rightarrow D$ mit Hilfe der Lösung $\tilde{\varphi}$ gemäß Satz 2.2.1 zu einer Lösung zusammengeflocht werden, deren offenes maximales Existenzintervall a enthält. Das steht im Widerspruch dazu, dass a das Supremum des Existenzintervalls der maximalen Lösung ist.

(9) Für den anderen Halbgraph $\text{graph } \varphi|_{x \leq x_0}$ verfähre man analog.

6.3.7 Korollar: Beschränkte Lösungen existieren unendlich lange

Es sei $\varphi : I \rightarrow D$ **maximale** Lösung des AWP

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

mit Lipschitz-stetiger Rechter Seite $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ offen, $(x_0, y_0) \in D$.

(A) Ist $\|\varphi(x)\| \leq M$ für alle $x \in I$ mit $x \geq x_0$, so ist $\sup I = +\infty$.

(B) Ist $\|\varphi(x)\| \leq M$ für alle $x \in I$ mit $x \leq x_0$, so ist $\inf I = -\infty$.

Dieser Satz ist insbesondere für autonome Differentialgleichungen interessant. Ist die (positive oder negative) „Hälfte“ einer Trajektorie beschränkt, so ist jede zugehörige Lösung für $t \rightarrow +\infty$ bzw. $t \rightarrow -\infty$ definiert.

6.3.8 Beweis

Anderenfalls könnte der „halbe Graph“ in $[x_0, \sup I] \times B_M(0)$ bzw. in $[\inf I, x_0] \times B_M(0)$ eingeschlossen werden.

7 Autonome Systeme

7.1 Symbol-System

In einer Vielzahl von Beispielen der Wirklichkeit, die durch Differentialgleichungen modelliert werden, entspricht die Variable x der ablaufenden Zeit. Dies stellt auch eine Verbindung zu den so genannten „dynamischen Systemen“ (Genauere Definition später) her. Deshalb werden Differentialgleichungen häufig in der Form

$$\dot{x} = f(t, x)$$

geschrieben. Die folgende Tabelle stellt die beiden Variablensysteme einander gegenüber

	Unabhängige Variable	Abhängige Variable	Ableitungssymbole
Bisher (GDG1)	x	y	y', y''
Dyn. Systeme	t	x	\dot{x}, \ddot{x}

Wir werden in diesem Kapitel über autonome Systeme vor allem das t - x -System benutzen. Im Staatsexamen treten beide Symbol-Systeme mit gleicher Gewichtung auf.

7.2 Einführung

7.2.1 Definition

Vgl. Abschnitt 6.1.1 Eine Differentialgleichung heißt *autonom*, wenn

- die Definitionsmenge der zugehörigen Rechten Seite die Gestalt $D = \mathbb{R} \times X$ mit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen hat und
- die Rechte Seite $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ gar nicht von der ersten Variablen abhängt, d.h. es ist

$$f(t, x) = f(\tilde{t}, x) \quad \text{für alle } (t, x), (\tilde{t}, x) \in \mathbb{R} \times X.$$

Das bedeutet, dass die Rechte Seite eigentlich „nur“ von den x -Variablen abhängt und deshalb mit Definitions- und Wertemenge

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$$

geschrieben werden kann.

Eine autonome Differentialgleichung hat also die Form

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

7.2.2 Weitere Bezeichnungen

- (1) Die Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt in diesem Zusammenhang der *Phasenraum* (oder *Zustandsraum*) des autonomen Systems.
- (2) Eigentlich geht es um autonome Systeme von Differentialgleichungen. Es hat sich aber der Kurzbegriff „Autonome Systeme“ eingebürgert.
- (3) Da durch die stetige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen jedem n -Vektor aus X ein n -Vektor aus \mathbb{R}^n zugeordnet wird, spricht man auch von einem stetigen *Vektorfeld* auf X .
- (4) Man kann ein Vektorfeld graphisch darstellen, indem man sich an jeden Punkt von D einen Pfeil geeigneter Richtung und Länge angeheftet denkt. Dies ist für $n = 1$ oder $n = 2$ gut möglich. Für $n = 3$ wird diese Veranschaulichung noch durch das räumliche Vorstellungsvermögen unterstützt, einer räumlich-perspektivischen Zeichnung sind hier Grenzen gesetzt. Man nennt ein solches Diagramm ein *Phasenportrait*. Beispiele folgen später.

7.2.3 Satz: Translationsinvarianz

Es sei eine autonome Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

und $\tau \in \mathbb{R}$ gegeben. Ist $\varphi : I \rightarrow X$ eine Lösung, so ist auch die um τ verschobene Lösung

$$\varphi_\tau : \begin{cases} I + \tau \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto \varphi(t - \tau) \end{cases}$$

eine Lösung.

Wir haben dabei die gängige Schreibweise $I + \tau := \{t + \tau \mid t \in I\}$ benutzt.

Man mache sich klar, dass der Graph der Funktion φ_τ gegenüber dem der Funktion φ um τ nach rechts verschoben ist.

7.2.4 Beweis

Er besteht in einer simplen Anwendung der Kettenregel. Ist $\varphi : I \rightarrow X$ Lösung, so ist wegen

$$\dot{\varphi}_\tau(t) = \dot{\varphi}(t - \tau) = f(\varphi(t - \tau)) = f(\varphi_\tau(t))$$

auch φ_τ eine Lösung.

7.2.5 Bemerkung

Aufgrund der Translationsinvarianz ist man bei der Analyse einer autonomen Differentialgleichung an den Eigenschaften einer Lösungsschar $(\varphi_\tau)_{\tau \in \mathbb{R}}$, und nicht so sehr an denen einer einzelnen Lösung interessiert. Solche Eigenschaften sind Trajektorien, die Orientierung, verschiedene Formen von Stabilität, Periodizität und so genannte Grenzmengen.

7.2.6 Interpretation der Translationsinvarianz

Ist ein „Dynamisches System“ sich selbst überlassen, d.h. unabhängig von äußeren Parametern, so kann der Zeitnullpunkt keine Rolle spielen. Das System läuft — unabhängig davon, wann es startet — in gleicher Weise ab.

Da bei AWPen mit autonomen Differentialgleichungen der Anfangszeitpunkt völlig unerheblich ist, wird er oft gleich Null gesetzt.

7.2.7 Definitionen: Eigenschaften von Lösungen

Es sei eine autonome Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

mit $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, gegeben.

(1) Ist $x_0 \in X$ eine Nullstelle von f , so ist die konstante Funktion

$$\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow X \\ t \mapsto x_0 \end{cases}$$

eine Lösung. Deswegen heißt x_0 *Ruhelage* (oder *stationärer Punkt* oder *singulärer Punkt*) der Differentialgleichung. Die Lösung heißt dann auch *stationär*.

(2) Eine (maximale) Lösung $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow X$ der Differentialgleichung heißt *periodisch*, wenn sie nicht stationär ist und es eine Zahl $T > 0$ gibt, so dass $\varphi(t + T) = \varphi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Das minimal mögliche T heißt die *Periode* der Lösung.

7.3 Trajektorien

7.3.1 Definition:

Es sei eine autonome Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

mit $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, gegeben.

Eine Teilmenge $\mathcal{O} \subseteq X$ heißt *Trajektorie* (oder *Orbit*, *Bahn*), falls es eine maximale Lösung $\varphi : I \rightarrow X$ der Differentialgleichung gibt, so dass \mathcal{O} das Bild dieser Abbildung ist:

$$\mathcal{O} := \{\varphi(t) | t \in I\}.$$

7.3.2 Satz: Zerlegung des Phasenraums in Trajektorien

Es sei eine autonome Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

mit **Lipschitz-stetiger** rechter Seite $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, gegeben.

(i) Die Relation auf dem Phasenraum X

$$x \sim \tilde{x} \iff \text{Es ex. Trajektorie } \mathcal{O}, \text{ so dass } \{x, \tilde{x}\} \subseteq \mathcal{O}$$

ist eine Äquivalenzrelation auf X .

(ii) Demzufolge bilden die Trajektorien ein System von Äquivalenzklassen.

(iii) Das heißt, der Phasenraum besitzt eine Zerlegung (= Partition = disjunkte Vereinigung) in Trajektorien.

In diesem Fall kann also jedem $x_0 \in X$ eindeutig eine Trajektorie zugeordnet werden, wir bezeichnen sie mit $\mathcal{O}(x_0)$.

7.3.3 Beweis

Die Aussagen (ii) und (iii) sind Folgerungen aus (i) gemäß der allgemeinen Theorie der Äquivalenzrelationen. Wir zeigen also (i). Reflexivität und Symmetrie sind unmittelbare Folgerungen aus der Definition.

Zur Transitivität: Es seien $x, \tilde{x}, \tilde{\tilde{x}} \in X$ mit $x \sim \tilde{x}$ und $\tilde{x} \sim \tilde{\tilde{x}}$. Es sei $\varphi : I \rightarrow X$ die eindeutige maximale Lösung des AWP

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = \tilde{x}. \end{cases}$$

Wegen der Eindeutigkeit von Lösungen von AWPen mit Lipschitz-Stetiger Rechter Seite ist die Trajektorie \mathcal{O} zu dieser Lösung die einzige Trajektorie mit $\tilde{x} \in \mathcal{O}$. Sie muss daher x und $\tilde{\tilde{x}}$ enthalten. Damit liegen auch x und $\tilde{\tilde{x}}$ auf einer gemeinsamen Trajektorie.

7.3.4 Satz: Klassifizierung von Trajektorien

Es sei eine autonome Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

mit Lipschitz-stetiger rechter Seite vorgegeben. Dann gehört eine maximale Lösung φ bzw. die zugehörige Trajektorie zu genau einem der drei folgenden Typen:

- (A) Die maximale Lösung $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow X$ ist stationär, die Trajektorie ist ein Punkt.
- (B) Die maximale Lösung $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow X$ ist echt periodisch, die Trajektorie ist eine geschlossene doppeltpunktfreie Kurve.
- (C) Die maximale Lösung $\varphi : I \rightarrow X$ ist injektiv, wobei I ein offenes Intervall ist. Die Trajektorie ist Bild (= Spur) einer stetig differenzierbaren doppeltpunktfreien Kurve.

Ist die maximale Lösung in positiver Zeitrichtung beschränkt, d.h.

$$\sup \{ \|\varphi(t)\| \mid t \in I, t \geq T \} < \infty \text{ für ein } T \in I, \text{ so gilt } \sup I = +\infty.$$

Ist die maximale Lösung für in negative Zeitrichtung beschränkt, d.h.

$$\sup \{ \|\varphi(t)\| \mid t \in I, t \leq T \} < \infty \text{ für ein } T \in I, \text{ so gilt } \inf I = -\infty.$$

7.3.5 Beweis

Es sei die maximale Lösung $\varphi : I \rightarrow X$ weder stationär noch periodisch. Gäbe es $t, t+T \in I$ mit $\varphi(t) = \varphi(t+T)$, so wäre die „periodisch fortgesetzte“ Funktion

$$\varphi_{\mathbb{R}} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow X \\ s \mapsto \varphi(t), \text{ wobei } t \text{ so, dass } s = t + kT, k \in \mathbb{Z}, \text{ und } t \in I \end{cases}$$

eine maximale stationäre oder periodische Lösung des AWP's. Widerspruch. Also ist φ injektiv.

Hätte das Definitionsintervall I der maximalen Lösung φ ein Maximum τ , so könnte man mit einer lokalen Lösung des AWP's

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(\tau) = \varphi(\tau) \end{cases}$$

die maximale Lösung φ echt fortsetzen — im Widerspruch zur Definition von „maximal“. Analog für Minimum.

Die zwei Aussagen über die Unbeschränktheit wurden bereits in Korollar 6.3.7 erwähnt.

7.3.6 Orientierung

Ist eine Trajektorie \mathcal{O} gemäß der Fälle (B) und (C) des obigen Satzes gegeben, so ist die zugehörige Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathcal{O}$ wegen der Translationsinvarianz nicht eindeutig „rückermittelbar“. Eindeutig ist jedoch die Orientierung (= Zeitrichtung), in der die Trajektorie von jeder Lösung durchlaufen wird. Deshalb kann man auch von *orientierten Trajektorien* sprechen. Zeichnerisch werden sie gerade von den Pfeilen des Vektorfeldes (vgl. 7.2.2) wiedergegeben.

7.4 Skalare autonome Differentialgleichungen

Es geht also um Differentialgleichungen

$$\dot{x} = f(x)$$

mit einer stetigen Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $X \subseteq \mathbb{R}$ offen.

7.4.1 Erinnerung: Trennung der Variablen

Eine solche Differentialgleichung bzw. ein zugehöriges AWP kann mit der Methode der Trennung der Variablen gelöst werden. Es kann allerdings sein, dass die explizite Angabe einer Lösung daran scheitert, dass das dabei auftretende Integral

$$\int_{x_0}^x \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}}$$

nicht explizit angegeben werden kann.

7.4.2 Satz: Klassifizierung von Lösungen und Trajektorien

Es sei eine skalare autonome Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

mit **Lipschitz-stetiger** Rechter Seite vorgegeben.

- (i) Dann gehört eine maximale Lösung φ bzw. die zugehörige Trajektorie zu genau einem der folgenden Typen:

F16 T1 A4a)

- (A) Die maximale Lösung $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow X$ ist stationär, die Trajektorie ist ein Punkt.
- (C) Die maximale Lösung $\varphi : I \rightarrow X$ ist injektiv, wobei I ein offenes Intervall ist. Die Trajektorie ist ein offenes Intervall $\mathcal{O} \subseteq X$.

Diese Lösung ist entweder streng monoton steigend oder streng monoton fallend.

- (ii) Der Phasenraum besitzt eine Zerlegung in stationäre Punkte und „dazwischenliegende“ offene Intervalle.

7.4.3 Beweis

Der Satz ist im wesentlichen ein Spezialfall von Satz 7.4.2. Die zweite Aussage bei (C) ist elementare Analysis 1.

7.4.4 Gegenbeispiel

Wir betrachten die skalare autonome Differentialgleichung (vgl. Abschnitt 1.6.6 GDG1)

$$\dot{x} = 2\sqrt{|x|}.$$

Für je zwei reelle Zahlen $k \leq 0 \leq \ell$ ist die abschnittsweise durch Parabeläste definierte Funktion $\varphi_{k,\ell} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi_{k,\ell}(t) = \begin{cases} -(t-k)^2, & \text{falls } t < k, \\ 0, & \text{falls } k \leq t \leq \ell, \\ (t-\ell)^2, & \text{falls } t > \ell, \end{cases}$$

eine Lösung. Diese Beobachtung ist in vielfältiger Hinsicht Gegenbeispiel:

- Die Funktion $\varphi_{k,\ell}$ ist weder stationär noch streng monoton.
- (Wh:) Das AWP mit $x(0) = 0$ hat unendlich viele Lösungen.

F16 T1 A4b)

H12 T3 A2

Dass diese (leicht pathologischen) Phänomene auftreten, liegt daran, dass die Rechte Seite in $x_0 = 0$ nicht Lipschitz-stetig, geschweige denn stetig differenzierbar, ist.

7.4.5 Beispiele

Zeichne die Phasenportraits (und evtl. Richtungsfelder) der autonomen skalaren Differentialgleichungen

$$\dot{x} = f(x)$$

mit Rechter Seite

$$x, \quad 1 + x^2, \quad \sin x.$$

7.5 Beispiel: Die logistische Differentialgleichung[⊖]

7.5.1 Situation in der Wirklichkeit

In einer Petrischale mit kontinuierlicher Nährstoffzufuhr ist eine Fläche mit Bakterien besiedelt. Es wird beobachtet, wie sich die besiedelte Fläche verändert.

7.5.2 Modellierung

Die vergangene Zeit wird mit t bezeichnet, die aktuell besiedelte Fläche mit A . Die Wachstumsrate bei Nahezu-Null-Besiedelung werde mit α bezeichnet. Bei Erreichen der Gesamtfläche F der Petrischale soll die Wachstumsrate Null werden. Dazwischen werde sie linear interpoliert. Das heißt, abhängig von der aktuell besiedelten Fläche A sei die Wachstumsrate $\alpha \frac{F-A}{F}$.

Damit lautet das dem Bakterienwachstum zugrundeliegende AWP

$$\begin{cases} \dot{A} = \alpha \frac{F-A}{F} \cdot A \\ A(0) = A_0. \end{cases}$$

Die eigentlich wesentliche Information steckt nicht in der absoluten besiedelten Fläche, sondern eher in der relativen besiedelten Fläche $x = \frac{A}{F}$. Transformiert man das AWP dementsprechend, so erhält man

$$\dot{x} = \frac{1}{F} \dot{A} = \frac{1}{F} \alpha \frac{F-A}{F} \cdot A = \alpha(1-x)x.$$

Damit lautet das AWP für die relative Fläche x

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(1-x) \cdot x \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Ihr Phasenportait ist



7.5.3 Mathematische Lösung

Man kann dem Phasenportrait oder direkt der rechten Seite entnehmen, dass es zwei Ruhelagen gibt:

$$x(t; 0, 0) = 0 \quad x(t; 0, 1) = 1.$$

Für $x_0 \notin \{0, 1\}$ erhält man mit Hilfe der Methode der Trennung der Variablen (GDG1, Unterkapitel 1.5) die Lösung

$$x(t; 0, x_0) = \frac{1}{1 + e^{-\alpha t} \left(\frac{1}{x_0} - 1 \right)}.$$

Man rechne nach, dass die translatierte Funktion x_τ mit

$$x_\tau(t) = \frac{1}{1 + e^{-\alpha(t-\tau)} \left(\frac{1}{x_0} - 1 \right)}$$

ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung darstellt.

7.5.4 Interpretation

Ist am Anfang der Beobachtung eine positive Fläche besiedelt, so wächst die Fläche an, bis die gesamte Fläche besiedelt ist.

Nicht wirklichkeitskonform sind die Lösungen für $x_0 < 0$ (negative Fläche) bzw. Fläche $x_0 > 1$ (Fläche größer als die der Petrischale).

7.5.5 Namensgebung

Die vorgestellte Differentialgleichung heißt die *logistische Differentialgleichung*. Sie wird zur Modellierung von Wachstumsvorgängen bei Kapazitätsgrenze herangezogen.

7.5.6 Bemerkung: Diskretisierung

Diskretisiert man die Zeit (mit Schrittweite h), so gelangt man zu der so genannten logistischen Differenzgleichung

$$\frac{x_{t+h} - x_t}{h} = \alpha(1 - x_t) \cdot x_t.$$

bzw. zu der Iterationsgleichung

$$x_{t+h} = x_t + h\alpha(1 - x_t) \cdot x_t.$$

Die Analyse und numerische Auswertung dieser iterativ definierten Folge führt zu interessanten Phänomenen, die vor etwa 40 Jahren die Anfänge der Chaos-Theorie motiviert haben. (Vgl. W Die logistische Gleichung)

8 Ebene autonome Systeme

8.1 Matrix-Exponentialfunktionen

Es werden hier ein Satz über Matrix-Exponentialfunktionen aus Unterkapitel 5.4 präsentiert.

8.1.1 Definition und Satz: Matrix-Exponentialfunktion

Für eine gegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die Exponentialfunktion

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{R}^{n \times n} & \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \\ A & \mapsto \exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \end{cases}$$

„vernünftig“ definiert.

8.1.2 Satz: Eigenschaften der Matrix-Exponentialfunktion

- (i) Kommutieren die beiden Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, d.h. $AB = BA$, so gilt die Funktionalgleichung

$$\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B).$$

- (ii) Es ist

$$\exp(0) = I$$

- (iii) Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $\exp(A)$ invertierbar und es gilt

$$\exp(A)^{-1} = \exp(-A).$$

- (iv) Ist $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so gilt

$$\exp(TAT^{-1}) = T \exp(A) T^{-1}.$$

- (v) Für die transponierte Matrix A^T gilt

$$\exp(A^T) = \exp(A)^T.$$

- (vi) Es ist

$$\det \exp(A) = \exp(\text{spur}(A)).$$

8.2 Lineare ebene autonome Systeme

8.2.1 Einführung

Gegenstand dieses Kapitels sind Differentialgleichungen der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{1}$$

wobei die Rechte Seite $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine (durch eine reelle (2×2) -Matrix gegebene) lineare Abbildung ist.

Wir wollen Lösungen, Trajektorien und deren Orientierung bestimmen. Es wird sich zeigen, dass dabei eine Hierarchie von Fällen auftritt, die wir gleich hier mittels eines Diagramms überblicken wollen.

Lösungen	Trajektorien	Orientierungen	Name oder Phrase	Stabilität
(D) (diagonal)	$(D^{\times \times})$	(D^{--})	Stabiler Knoten	as
		(D^{++})	Instabiler Knoten	
		(D^{-+})	Sattelpunkt	
	$(D^{\times 0})$	(D^{-0})	Horizontale Halbgeraden, stabil	s
		(D^{+0})	Horizontale Halbgeraden, instabil	
		(D^{00})	Meer von Ruhelagen	s
(T) (triangle)	(T^{\times})	(T^{-})	Stabiler eintangentiger Knoten	as
		(T^{+})	Instabiler eintangentiger Knoten	
	(T^0)	(T^0)	Horizontale Geraden	s
(S) (schiefsymmetrisch)	(S^{\times})	(S^{-})	Stabiler Strudel	as
		(S^{+})	Instabiler Strudel	
		(S^0)	Zentrum (= Wirbel)	s

× (Realteil) Eigenwert $\neq 0$

0 (Realteil) Eigenwert = 0

as asymptotisch stabil

s stabil

8.2.2 Satz: Reelle Normalform

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ habe die beiden Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Es tritt genau einer der drei folgenden Fälle auf.

(D) Die Matrix A ist reell-diagonalisierbar. Dies ist genau dann der Fall, wenn

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ oder
- $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $A = \lambda \cdot I$.

In diesem Fall gilt $J = TAT^{-1}$, wobei

$$J := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$T^{-1} := \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \in \text{Eig}(A, \lambda_i), \quad i = 1, 2, \quad \ell.u.$$

(T) Die Matrix ist nicht-reell-diagonalisierbar und ähnlich zu einer reellen oberen Dreiecksmatrix. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\dim \ker(A - \lambda) = 1$.

In diesem Fall gilt $J = TAT^{-1}$, wobei

$$J := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} := \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \ker(A - \lambda)^2 \setminus \ker(A - \lambda),$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} := (A - \lambda) \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

(S) Die Matrix ist nicht reell-diagonalisierbar und ähnlich zu einer reellen schief-symmetrischen Matrix. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\varrho + i\omega = \lambda := \lambda_1 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

In diesem Fall gilt $J = TAT^{-1}$, wobei

$$J := \begin{pmatrix} \varrho & -\omega \\ \omega & \varrho \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} := \begin{pmatrix} \text{Re } u & -\text{Im } u \\ \text{Re } v & -\text{Im } v \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \text{Eig}(A, \lambda) \subseteq \mathbb{C}^2.$$

8.2.3 Beweis

(1) Dass durch die drei Aussagen alle Fälle echt alternativ erfasst werden, entnehmen wir der Linearen Algebra 2.

Wir müssen nur noch jeweils die Aussage $J = TAT^{-1}$ nachrechnen. Dazu kürzen wir ab

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad w_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

(D) Es ist

$$\begin{aligned} AT^{-1} &= A \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aw_1 & Aw_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 w_1 & \lambda_2 w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = T^{-1}J. \end{aligned}$$

(T) Aufgrund der Wahl von w_2 und Definition von w_1 ist

$$\begin{aligned} Aw_2 &= w_1 + \lambda w_2 \\ (A - \lambda)w_1 &= (A - \lambda)^2 w_2 = \vec{0}, \quad \text{also } Aw_1 = \lambda w_1 \end{aligned}$$

und dann

$$\begin{aligned} AT^{-1} &= A \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aw_1 & Aw_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda w_1 & w_1 + \lambda w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = T^{-1}J. \end{aligned}$$

(S) Es ist

$$\begin{aligned} AT^{-1} &= A \begin{pmatrix} \operatorname{Re} w, -\operatorname{Im} w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \frac{w+\bar{w}}{2}, -A \frac{w-\bar{w}}{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Aw+\overline{Aw}}{2}, -\frac{Aw-\overline{Aw}}{2i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\lambda w+\overline{\lambda w}}{2}, -\frac{\lambda w-\overline{\lambda w}}{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\lambda w), -\operatorname{Im}(\lambda w) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda \operatorname{Re} w - \operatorname{Im} \lambda \operatorname{Im} w, -(\operatorname{Re} \lambda \operatorname{Im} w + \operatorname{Im} \lambda \operatorname{Re} w) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} w, -\operatorname{Im} w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda & -\operatorname{Im} \lambda \\ \operatorname{Im} \lambda & \operatorname{Re} \lambda \end{pmatrix} = T^{-1}J. \end{aligned}$$

8.2.4 Satz: Lösung bei reeller Normalform Es sei das AWP

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

gegeben, wobei die Matrix J die Gestalt aus einem der Fälle (D), (T), (S) des letzten Satzes 8.2.2 hat. Das AWP hat die Lösung

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \exp(Jt) \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix},$$

bezogen auf die Fälle gilt genauer

$$\begin{aligned} \text{(D)} \quad \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} u(0) \\ e^{\lambda_2 t} v(0) \end{pmatrix} \\ \text{(T)} \quad \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} &= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} u_0 + t e^{\lambda t} v_0 \\ e^{\lambda t} v_0 \end{pmatrix} \\ \text{(S)} \quad \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} &= e^{\omega t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\omega t} \cos(\omega t) u_0 - e^{\omega t} \sin(\omega t) v_0 \\ e^{\omega t} \sin(\omega t) u_0 + e^{\omega t} \cos(\omega t) v_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8.2.5 Beweis

Wir haben nur die Matrix-Exponentialfunktionen für die verschiedenen Fälle zu berechnen.

(D) ist trivial.

(T) Es ist zunächst

$$\exp\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t\right] = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^0 + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^1 + \underbrace{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2}_{=0} + \dots = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der allgemein Fall $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt dann so mit Satz 8.1.2 (i)

$$\begin{aligned} \exp\left[\begin{pmatrix} \lambda & t \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} t\right] &= \exp\left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= \exp\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \exp\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(S) Es ist leicht per Induktion zu zeigen, dass für $\ell \in \mathbb{Z}$ und $J = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$

$$J^{2\ell} = (-1)^\ell \omega^{2\ell} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J^{2\ell+1} = (-1)^\ell \omega^{2\ell+1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demzufolge ist

$$\begin{aligned} \exp(Jt) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k t^k}{k!} = \sum_{k \in 2\mathbb{N}_0} \frac{J^k t^k}{k!} + \sum_{k \in 2\mathbb{N}_0+1} \frac{J^k t^k}{k!} \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} \frac{(-1)^\ell (\omega t)^{2\ell}}{(2\ell)!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{\ell \in 2\mathbb{N}_0+1} \frac{(-1)^\ell (\omega t)^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & \cos(\omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der allgemeine Fall $J = \begin{pmatrix} \varrho & -\omega \\ \omega & \varrho \end{pmatrix}$ folgt dann leicht mit Satz 8.1.2 (i).

8.2.6 Satz: Klassifizierung der Trajektorien als Mengen bei reeller Normalform

Es sei das lineare ebene autonome System (2) in reeller Normalform gegeben:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Bei der Zerlegung des Phasenraums in Trajektorien treten Unterfälle der Fälle (D), (T) und (S) in Erscheinung, die im wesentlichen dadurch charakterisiert sind, dass die (Realteile der) Eigenwerte λ_1 und λ_2 ungleich oder gleich Null sind.

Wir beschreiben all dieser Fälle innerhalb der folgenden Liste. Einige Beschreibungen beruhen darauf, dass die u -Achse horizontal und die v -Achse vertikal verläuft.

(D^{××}) Im Fall einer Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$$

sind die Trajektorien gegeben durch

$$\begin{aligned} &\mathcal{O}(u_0, v_0) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} u = v = 0, & \text{falls } u_0 = 0, v_0 = 0, \\ u = 0, \frac{v}{v_0} > 0, & \text{falls } u_0 = 0, v_0 \neq 0, \\ \frac{u}{u_0} > 0, v = 0, & \text{falls } u_0 \neq 0, v_0 = 0, \\ \left(\frac{v}{v_0}\right)^{\lambda_1} = \left(\frac{u}{u_0}\right)^{\lambda_2}, \frac{u}{u_0}, \frac{v}{v_0} > 0, & \text{falls } u_0 \neq 0, v_0 \neq 0, \end{cases} \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Es handelt sich also um den Ursprung, die vier Halbachsen und Kurven, die jeweils innerhalb der vier Quadranten verlaufen. Man mache sich klar, dass die Kurven innerhalb der Quadranten als Graphen von Potenzfunktionen $u(v)$ oder $v(u)$ darstellbar sind.

Zweitangentiger Knoten Im Fall $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ haben die Trajektorien innerhalb der Quadranten einen „parabelastförmigen“ Verlauf. Beim Ursprung haben sie als Tangente die u -Achse, wenn $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ und die v -Achse im Fall $|\lambda_1| > |\lambda_2|$.

Vieltangentiger Knoten Im Fall $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1$ sind die Trajektorien Strahlen mit dem Ursprung als Begrenzungspunkt.

Sattelpunkt Im Fall $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}^-$ haben die Trajektorien innerhalb der Quadranten einen „hyperbelastförmigen“ Verlauf.

(D^{×0}) Horizontale Halbgeraden Im Fall

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \neq 0$$

sind die Trajektorien gegeben durch

$$\mathcal{O}(u_0, v_0) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} u = 0, v = v_0, & \text{falls } u_0 = 0 \\ \frac{u}{u_0} > 0, v = v_0, & \text{falls } u_0 \neq 0 \end{cases} \right\}. \quad (4)$$

Die v -Achse besteht also aus Ruhelagen. Alle anderen Trajektorien sind Halbgeraden parallel zur u -Achse, deren Begrenzungspunkt auf der v -Achse liegt.

(D^{00}) Meer von Ruhelagen Im Fall

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind alle Trajektorien Ruhelagen.

(T^\times) Eintangentiger Knoten Im Fall einer Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \neq 0$$

sind die Trajektorien gegeben durch

$$\mathcal{O}(u_0, v_0) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} u = v = 0, & \text{falls } u_0 = 0, v_0 = 0, \\ \frac{u}{u_0} > 0, v = 0, & \text{falls } u_0 \neq 0, v_0 = 0, \\ u = \frac{u_0}{v_0} v + \frac{v}{\lambda} \ln \frac{v}{v_0}, & \text{falls } v_0 \neq 0, \end{cases} \right\}. \quad (5)$$

Es handelt sich also um den Ursprung, die zwei u -Halbachsen und Kurven, die bogenförmig oberhalb oder unterhalb der u -Achse verlaufen. Ein Begrenzungspunkt dieser Kurven ist der Ursprung, sie haben dort die u -Achse als Tangente.

(T^0) Horizontale Geraden Im Fall

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind die Trajektorien gegeben durch

$$\mathcal{O}(u_0, v_0) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} u = u_0, v = 0, & \text{falls } v_0 = 0 \\ u \in \mathbb{R}, v = v_0, & \text{falls } v_0 \neq 0 \end{cases} \right\}. \quad (6)$$

Die u -Achse besteht aus Ruhelagen. Alle anderen Trajektorien sind Geraden parallel zur u -Achse.

(S^\times) Strudel Im Fall

$$J = \begin{pmatrix} \varrho & -\omega \\ \omega & \varrho \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varrho \neq 0, \omega \neq 0,$$

verzichten wir auf eine aufwendige formelmäßige Beschreibung der Trajektorien als Nullstellenmenge.

Die Trajektorien sind der Ursprung und Spiralen, die vom Ursprung aus ins Unendliche verlaufen.

(S⁰) Zentrum Im Fall

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \omega \neq 0$$

sind die Trajektorien gegeben durch

$$\mathcal{O}(u_0, v_0) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} u = 0, v = 0, & \text{falls } (u_0, v_0) = (0, 0), \\ u^2 + v^2 = u_0^2 + v_0^2, & \text{falls } (u_0, v_0) \neq (0, 0). \end{cases} \right\}. \quad (7)$$

Es handelt sich also um den Ursprung als Ruhelage und konzentrische Kreise mit dem Ursprung als Mittelpunkt.

8.2.7 Satz: Orientierung der Trajektorien bei reeller Normalform

Es sei wieder das lineare ebene autonome System (2) in reeller Normalform gegeben:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Abhängig von den Vorzeichen $+$, $-$, 0 der (Realteile der) Eigenwerte λ_1 und λ_2 haben die in Satz 8.2.6 beschriebenen Trajektorien treten bzgl. der Orientierungen weitere Unterfälle in Erscheinung. Wenn in der folgenden Liste von „allen echten Trajektorien“ die Rede ist, so sind jeweils die Ruhelagen ausgeschlossen.

Einige Beschreibungen beruhen darauf, dass die u -Achse horizontal nach rechts und die v -Achse vertikal nach oben verläuft. Beachte, dass einige zusätzliche Fälle von Vorzeichenkonstellationen durch Vertauschung der Achsen entstehen.

(D⁻⁻) Stabiler Knoten Im Fall

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0.$$

verlaufen alle echten Trajektorien in den Ursprung hinein.

(D⁺⁺) Instabiler Knoten Im Fall

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0.$$

verlaufen alle echten Trajektorien aus dem Ursprung heraus.

(D⁻⁺) Sattelpunkt Im Fall

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

verlaufen alle echten Trajektorien entlang/auf der u -Achse in Richtung der v -Achse und entfernen sich dann entlang/auf der v -Achse von der u -Achse.

(D⁻⁰) Horizontale Halbgeraden, stabil Im Fall

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda < 0$$

verlaufen alle echten Trajektorien zur v -Achse hin.

(D⁺⁰). Horizontale Halbgeraden, instabil Im Fall

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda > 0$$

verlaufen alle echten Trajektorien von der v -Achse weg.

(D^{00}) Meer von Ruhelagen Im Fall

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind alle Trajektorien Ruhelagen und haben deshalb keine ausgezeichnete Orientierung.

(T^-) Stabiler eintangentiger Knoten Im Fall

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda < 0$$

verlaufen alle echten Trajektorien in den Ursprung hinein.

(T^+) Instabiler eintangentiger Knoten Im Fall

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda > 0$$

verlaufen alle echten Trajektorien aus dem Ursprung heraus.

(T^0) Horizontale Geraden Im Fall

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

verlaufen alle echten Trajektorien oberhalb der u -Achse in positive u -Richtung, die unterhalb in negative u -Richtung.

(S^-) Stabiler Strudel Im Fall

$$J = \begin{pmatrix} \varrho & -\omega \\ \omega & \varrho \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varrho < 0, \omega > 0$$

verlaufen alle echten Trajektorien spiralförmig im mathematisch positiven Sinn in den Ursprung hinein.

(S^+) Instabiler Strudel Im Fall

$$J = \begin{pmatrix} \varrho & -\omega \\ \omega & \varrho \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varrho > 0, \omega > 0$$

verlaufen alle echten Trajektorien spiralförmig im mathematisch positiven Sinn aus dem Ursprung heraus.

(S^0) Zentrum Im Fall

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \omega > 0$$

verlaufen alle echten Trajektorien kreisförmig im mathematisch positiven Sinn.

8.3 Transformation

8.3.1 Ähnlichkeits-Transformation

Wir betrachten zur Differentialgleichung (1) ein AWP

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Mit Hilfe der in Satz 8.2.2 angegebenen Transformationsmatrix T führen wir eine Transformation

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

im Phasenraum durch. Gemäß

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} &= \left(T \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \right) = T \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \\ &= T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T A T^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} &= T \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

wird das ursprüngliche AWP transformiert in das AWP

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

mit der zugehörigen „reellen Normalform“ aus Satz 8.2.2 in der Rechten Seite.

Ist dann eine Lösung $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ des transformierten AWP's gegeben, so ist die Lösung des ursprünglichen AWP's gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

Die (orientierten) Trajektorien des ursprünglichen Systems ergeben sich aus dem des transformierten Systems durch

$$\mathcal{O}_A(x_0, y_0) = T^{-1}(\mathcal{O}_{TAT^{-1}}(Tx_0, Ty_0)) = T^{-1}(\mathcal{O}_J(u_0, v_0)).$$

8.3.2 Kommentar

Bei dieser linearen Transformation bleiben natürlich die Typen von Trajektorien (Ruhelage, geschlossene Kurve, injektives Bild eines offenen Intervalls) erhalten.

Beachte, dass sich die Orientierung von Trajektorien ändert, wenn die Transformationen T bzw. T^{-1} negative Determinante haben.

Um zu sehen, welche Lage und Form die Spiralen bzw. Kreise in den Fällen (S^-) , (S^+) bzw. (S^0) unter der Abbildung T^{-1} annehmen, fügen wir noch den folgenden Satz über die sog. Hauptachsentransformation hinzu.

8.3.3 Vorbereitung: Ellipse

Wir betrachten den Vektorraum \mathbb{R}^2 mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sind v_1, v_2 zwei orthogonale Vektoren, so heißt die Teilmenge

$$E(v_1, v_2) := \left\{ v_1 \cos \alpha + v_2 \sin \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

die *Ellipse mit den Halbachsen* v_1 und v_2 .

8.3.4 Satz: Hauptachsentransformation

Es seien $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine invertierbare lineare Abbildung. Weiter seien $\{w_1, w_2\}$ eine Orthonormalbasis, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $E(\lambda_1 w_1, \lambda_2 w_2)$ die zugehörige Ellipse.

Die beiden folgenden Aussagen über eine Beziehung zwischen der Abbildung T und der Ellipse sind äquivalent.

(A) T bildet die Ellipse bijektiv auf den Einheitskreis ab,

$$E(\lambda_1 w_1, \lambda_2 w_2) \xrightleftharpoons[T^{-1}]{T} E(e_1, e_2).$$

(B) Es gilt

$$w_i \in \text{Eig}(T^t T, \lambda_i^{-2}) = \text{Eig}(T^{-1} T^{-t}, \lambda_i^2) \quad \text{für } i = 1, 2.$$

8.3.5 Beweis

(B) \Rightarrow (A). Es sei also $\{w_1, w_2\}$ eine ONB mit

$$T^t T w_i = \lambda_i^{-2} w_i \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Für $p = \lambda_1 w_1 \cos \alpha + \lambda_2 w_2 \sin \alpha \in E(\lambda_1 w_1, \lambda_2 w_2)$ gilt dann

$$\begin{aligned} \|Tp\|^2 &= \langle Tp, Tp \rangle = \langle p, T^t T p \rangle \\ &= \langle \lambda_1 w_1 \cos \alpha + \lambda_2 w_2 \sin \alpha, T^t T (\lambda_1 w_1 \cos \alpha + \lambda_2 w_2 \sin \alpha) \rangle \\ &= \langle \lambda_1 w_1 \cos \alpha + \lambda_2 w_2 \sin \alpha, \frac{1}{\lambda_1} w_1 \cos \alpha + \frac{1}{\lambda_2} w_2 \sin \alpha \rangle \\ &= \langle w_1, w_1 \rangle \cos^2 \alpha + \langle w_2, w_2 \rangle \sin^2 \alpha = 1, \end{aligned}$$

also ist das Bild unter T im Einheitskreis enthalten.

Ist umgekehrt $q \in E(e_1, e_2)$, so entwickeln wir das Urbild nach der ONB

$$T^{-1}q = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \left(\frac{\gamma_1}{\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_2}{\lambda_2}\right)^2 &= \langle \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2, \frac{\gamma_1}{\lambda_1} w_1 + \frac{\gamma_2}{\lambda_2} w_2 \rangle \\ &= \langle \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2, T^t T (\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2) \rangle \\ &= \langle T(\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2), T(\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2) \rangle = \langle q, q \rangle = 1. \end{aligned}$$

Deshalb existiert $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $\frac{\gamma_1}{\lambda_1} = \cos \alpha$ und $\frac{\gamma_2}{\lambda_2} = \sin \alpha$ und dann

$$T^{-1}q = \lambda_1 w_1 \cos \alpha + \lambda_2 w_2 \sin \alpha.$$

also ist das Bild unter T^{-1} in der Ellipse.

(A) \Rightarrow (B). Es sei die lineare Abbildung Λ wie folgt durch die Bilder der Basisvektoren definiert

$$\Lambda : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ w_1 & \mapsto \lambda_1 w_1 \\ w_2 & \mapsto \lambda_2 w_2. \end{cases}$$

Weiter setzen wir $\tilde{T} := T \Lambda$.

Da die Abbildung T die Ellipse auf den Einheitskreis abbildet, gilt für einen beliebigen Punkt $p = \lambda_1 \cos \alpha w_1 + \lambda_2 \sin \alpha w_2 \in E(\lambda_1 w_1, \lambda_2 w_2)$

$$\begin{aligned} 1 &= \|Tp\|^2 \\ &= \langle T(\lambda_1 w_1) \cos \alpha + T(\lambda_2 w_2) \sin \alpha, T(\lambda_1 w_1) \cos \alpha + T(\lambda_2 w_2) \sin \alpha \rangle \\ &= \langle \tilde{T}(w_1), \tilde{T}(w_1) \rangle \cos^2 \alpha + 2 \langle \tilde{T}(w_1), \tilde{T}(w_2) \rangle \cos \alpha \sin \alpha + \langle \tilde{T}(w_2), \tilde{T}(w_2) \rangle \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Setzt man hier $\alpha = 0$ bzw. $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so folgt

$$\langle \tilde{T}(w_1), \tilde{T}(w_1) \rangle = \langle \tilde{T}(w_2), \tilde{T}(w_2) \rangle = 1.$$

Setzt man das oben ein, so ergibt sich weiter

$$\langle \tilde{T}(w_1), \tilde{T}(w_2) \rangle = 0.$$

Das bedeutet, dass die Abbildung \tilde{T} orthonormal ist. Es folgt

$$I = (\tilde{T})^t \tilde{T} = (T \Lambda)^t (T \Lambda) = \Lambda^t T^t T \Lambda.$$

Es ist offensichtlich, dass Λ bzgl. der Basis (w_1, w_2) diagonal ist, deshalb bzgl. der kanonischen Basis symmetrisch. Wir folgern weiter, dass

$$T^t T = \Lambda^{-2}.$$

Damit ist (B) gezeigt.

8.4 Elimination bei ebenen autonomen Systemen

8.4.1 Satz: Elimination

Wir betrachten ein ebenes autonomes System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

mit Lipschitz-stetiger Rechter Seite auf offenem $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Es sei $f(x, y) \neq 0$ auf D . Für jedes $(x_0, y_0) \in D$ gilt dann

$$\mathcal{O}(x_0, y_0) = \text{graph } \gamma = \left\{ (x, \gamma(x)) \mid x \in J \right\},$$

wobei $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}$ die maximale Lösung der (i.a. nicht-autonomen) skalaren AWP

$$\begin{cases} y' = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (*)$$

mit Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}^{1+1}$ ist.

8.4.2 Kommentar

Sollte f bei einem gegebenen ebenen autonomen System eine Nullstelle in D haben, so lässt sich der Satz anwenden, wenn die Definitionsmenge eingeschränkt wird auf die offene Teilmenge

$$\tilde{D} = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) \neq 0\} \subseteq D.$$

8.4.3 Beweis

Es sei $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} : I \rightarrow D$ die (maximale) Lösung des AWP

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Dann gilt für alle $t \in I$

$$\dot{\varphi}_1(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \neq 0.$$

Deshalb ist φ_1 auf D streng monoton und besitzt demzufolge eine Umkehrfunktion auf $J = \varphi_1(I)$

$$\varphi_1^{-1} : \begin{cases} J \rightarrow I \\ x \mapsto \varphi_1^{-1}(x) = t \end{cases}$$

mit $\varphi_1^{-1}(x_0) = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(x_0, y_0) &= \left\{ \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \in D \mid t \in I \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \varphi_1(\varphi_1^{-1}(x)) \\ \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x)) \end{pmatrix} \in D \mid x \in J \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x)) \end{pmatrix} \in D \mid x \in J \right\}.\end{aligned}$$

Wir zeigen noch, dass die Funktion

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \begin{cases} J & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x)) \end{cases}$$

Lösung des AWP's (*) ist. Tatsächlich ist mit Kettenregel und Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion

$$\begin{aligned}(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})'(x) &= \varphi_2'(\varphi_1^{-1}(x)) \cdot (\varphi_1^{-1})'(x) = \varphi_2'(\varphi_1^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi_1'((\varphi_1^{-1}(x)))} \\ &= \varphi_2'(t) \cdot \frac{1}{\varphi_1'(t)} = \frac{g(\varphi_1(t), \varphi_2(t))}{f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))} = \frac{g(x, (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})'(x))}{f(x, (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})'(x))} \\ (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x_0) &= \varphi_2(0) = y_0.\end{aligned}$$

8.4.4 Beispiel 1

Wir betrachten ein lineares ebenes autonomes System vom Typ (D)

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_1 \in \mathbb{R}^\times, \lambda_2 \in \mathbb{R}.^1$$

Es ist $f(u, v) = \lambda_1 \cdot u \neq 0$ auf $D = \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$ (ohne v -Achse).

Auf D hat die durch Elimination zugeordnete Differentialgleichung

$$v' = \frac{g(u, v)}{f(u, v)} = \frac{\lambda_2 v}{\lambda_1 u}$$

die Lösungen

$$v(u) = C \cdot |u|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

Bei genauerer Betrachtung stimmt dies mit der Charakterisierung der Trajektorien in Satz 8.2.6, Fälle $(D^{\times \times})$ und $(D^{\times 0})$, überein.

8.4.5 Beispiel 2

Wir betrachten ein lineares ebenes autonomes System vom Typ (S^0)

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{mit } \omega \in \mathbb{R}^\times.$$

Es ist $f(u, v) = -\omega \cdot v \neq 0$ auf $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times$ (ohne u -Achse).

Auf D hat die durch Elimination zugeordnete Differentialgleichung

$$v' = \frac{g(u, v)}{f(u, v)} = -\frac{u}{v}$$

die Lösungen

$$v(u) = \pm \sqrt{C^2 - u^2}$$

mit maximalem Intervall $I =] - C, +C[$.

Bei genauerer Betrachtung stimmt dies mit der Charakterisierung der Trajektorien in Satz 8.2.6, Fall (S^0), überein.

8.5 Transformation auf Polarkoordinaten

8.5.1 Vorbereitung: Polarkoordinaten

Wir betrachten die Abbildung

$$T : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (r, \vartheta) & \mapsto (x, y) = (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta). \end{cases}$$

Sie wickelt die rechte Halbebene unendlich oft um den Ursprung.

Die Abbildung ist ein surjektiver *lokaler* \mathcal{C}^∞ -Diffeomorphismus, d.h. zu jedem $(r_0, \vartheta_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ mit $(x_0, y_0) := T(r_0, \vartheta_0)$ gibt es offene Umgebungen U, V mit $(r_0, \vartheta_0) \in U \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ und $(x_0, y_0) \in V \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, so dass die Abbildung $T|_U$ bijektiv wird mit der \mathcal{C}^∞ -Umkehrabbildung

$$\begin{cases} V & \rightarrow U \\ (x, y) & \mapsto (r, \vartheta) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \vartheta), \\ & \text{wobei } \vartheta \in \mathbb{R} \text{ so, dass } (\cos \vartheta, \sin \vartheta) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \text{ und } (r, \vartheta) \in U. \end{cases}$$

8.5.2 Rückholung auf Polarkoordinaten

Ist nun ein ebenes autonomes System in kartesischen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \quad (*)$$

gegeben, so kann man die Transformation $(x, y) = (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$ einfach einsetzen

$$\begin{pmatrix} (r \cos \vartheta) \cdot \\ (r \sin \vartheta) \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \\ g(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \end{pmatrix},$$

mit der Kettenregel umformen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{pmatrix}}_{T'(r, \vartheta)} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \\ g(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \end{pmatrix},$$

und dann mit der inversen Matrix $T'(r, \vartheta)^{-1}$ von links multiplizieren. Es entsteht das neue ebene autonome System

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\frac{1}{r} \sin \vartheta & \frac{1}{r} \cos \vartheta \end{pmatrix}}_{T'(r, \vartheta)^{-1}} \begin{pmatrix} f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \\ g(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \end{pmatrix} \quad (**)$$

Es ist sozusagen mit Hilfe von T auf Polarkoordinaten *zurückgeholt* worden.

8.5.3 Satz

Es sei die ebene autonome Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \quad (*)$$

auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ vorgegeben. Ist die Funktion

$$\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \end{pmatrix} : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ t \mapsto (r(t), \vartheta(t)) \end{cases}$$

eine Lösung der rückgeholten Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\frac{1}{r} \sin \vartheta & \frac{1}{r} \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \\ g(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \end{pmatrix}, \quad (**)$$

so ist die Funktion

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r(t) \cos \vartheta(t) \\ r(t) \sin \vartheta(t) \end{pmatrix}$$

eine Lösung der Differentialgleichung (*).

8.5.4 Kommentare

(1) Die Methode bietet sich vor allem dann an, wenn die rechte Seite des originalen Problems (*) „rotationsinvariante Anteile“ aufweist oder bereits rotationsinvariant ist. Das heißt, dass die Abhängigkeit der Funktionen f und g von (x, y) letztlich eine Abhängigkeit von $x^2 + y^2$ ist.

(2) Bei konkreten Beispielen ist es nicht so sehr notwendig, den theoretischen Satz vor Augen zu haben. Besser ist es, die Transformationen T bzw. T^{-1} „von Hand“ auszuführen.

8.5.5 Beweis

Man könnte sich einfach auf die Transformation in Abschnitt 8.5.2 berufen. Nichtsdestoweniger rechnen wir das einfach nach. Es ist

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} [r(t) \cos \vartheta(t)]^\bullet \\ [r(t) \sin \vartheta(t)]^\bullet \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{r}(t) \cos \vartheta(t) \\ \dot{r}(t) \sin \vartheta(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r(t) \dot{\vartheta}(t) \sin \vartheta(t) \\ r(t) \dot{\vartheta}(t) \cos \vartheta(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [f(T(r(t), \vartheta(t)) \cos \vartheta(t) + g(T(r(t), \vartheta(t)) \sin \vartheta(t)] \cos \vartheta(t) \\ [f(T(r(t), \vartheta(t)) \cos \vartheta(t) + g(T(r(t), \vartheta(t)) \sin \vartheta(t)] \sin \vartheta(t) \end{pmatrix} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -[g(T(r(t), \vartheta(t)) \cos \vartheta(t) - f(T(r(t), \vartheta(t)) \sin \vartheta(t)] \sin \vartheta(t) \\ [g(T(r(t), \vartheta(t)) \cos \vartheta(t) - g(T(r(t), \vartheta(t)) \sin \vartheta(t)] \cos \vartheta(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f(T(r(t), \vartheta(t)) \\ g(T(r(t), \vartheta(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x(t), y(t)) \\ g(x(t), y(t)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8.5.6 Beispiel

Wir betrachten das lineare ebene autonome AWP in reeller Normalform (S).
Das polarkoordinaten-transformierte System lautet

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\frac{1}{r} \sin \vartheta & \frac{1}{r} \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho & -\omega \\ \omega & \varrho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho r \\ \omega \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des transformierten AWP's ist also

$$\begin{pmatrix} r(t) \\ \vartheta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\varrho t} \\ \omega t \end{pmatrix}.$$

Es bestätigt sich die Lösung des ursprünglichen AWP's

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\varrho t} \cos(\omega t) \\ e^{\varrho t} \sin(\omega t) \end{pmatrix}.$$

9 Autonome Systeme II

9.1 Erste Integrale

9.1.1 Einstieg

Die Rechte Seite $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, des autonomen Systems

$$\dot{x} = f(x)$$

sei Lipschitz-stetig.

9.1.2 Satz und Definition

Es sei $E : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare (skalarwertige) Funktion auf dem Phasenraum.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (A) (Def) E heißt *erstes Integral* des autonomen Systems.
- (B) Es ist für alle $x \in D$

$$\underbrace{E'(x)}_{1 \times n} \cdot \underbrace{f(x)}_{n \times 1} = 0.$$

- (C) Für jede Lösung $\varphi : I \rightarrow D$ des autonomen Systems gilt

$$E(\varphi(t)) \equiv \text{const.}$$

Das heißt die skalare Funktion E bleibt konstant längs der Lösung.

- (D) Die Trajektorien sind in Niveau-Mengen von E enthalten, d.h. zu jedem $\xi \in \mathbb{D}$ es ein $c \in \mathbb{R}$, so dass

$$\mathcal{O}(\xi) \subseteq E^{-1}(c).$$

9.1.3 Kommentar

Der Buchstabe E für diese Funktion steht in dreifacher Weise für den Inhalt des Satzes: **E**rstes Integral — **E**rhaltungsgröße — **E**nergieerhaltung.

9.1.4 Beweis

(B) \Rightarrow (C). Ist $\varphi : I \rightarrow D$ eine Lösung, so gilt für $t \in I$ gemäß (mehrdimensionaler) Kettenregel

$$(E \circ \varphi)'(t) = E'(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) = E'(\varphi(t)) \cdot f(\varphi(t)) = 0,$$

also ist $E \circ \varphi$ konstant.

(C) \Rightarrow (B). Ist umgekehrt ein beliebiges $a \in D$ gegeben, so betrachte man dazu die (eindeutige) Lösung φ des AWP

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = a \end{cases}$$

Da E längs φ konstant ist, gilt für $t \in I$

$$0 = (E \circ \varphi)'(t) = E'(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) = E'(\varphi(t)) \cdot f(\varphi(t)).$$

Diese Gleichung ist insbesondere für $t = 0$ richtig, also

$$0 = E'(\varphi(0)) \cdot f(\varphi(0)) = E'(a) \cdot f(a).$$

(D) ist nur eine Umformulierung der Aussage (C).

9.1.5 Beispiele

(1) Wir betrachten das Zentrum (S^0) in reeller Normalform

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega v \\ \omega u \end{pmatrix}.$$

Wir überzeugen uns davon, dass die Abbildung

$$E : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto u^2 + v^2 \end{cases}$$

ein erstes Integral ist. Die Aussage (B) des obigen Satzes ist hier erfüllt, da

$$E'(x) \cdot \underbrace{f(x)}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} 2u & 2v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\omega v \\ \omega u \end{pmatrix} = 0.$$

Die Lösungen des autonomen Systems sind, wie wir aus Satz 8.2.4 wissen,

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t)u_0 - \sin(\omega t)v_0 \\ \sin(\omega t)u_0 + \cos(\omega t)v_0 \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich ist E entlang dieser Lösungen konstant:

$$E(\varphi(t)) = [\cos(\omega t)u_0 - \sin(\omega t)v_0]^2 + [\sin(\omega t)u_0 + \cos(\omega t)v_0]^2 = u_0^2 + v_0^2 = \text{const.}$$

(2) Wir betrachten das Meer der Ruhelagen (D^{00}) in reeller Normalform

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jede \mathcal{C}^1 -Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein erstes Integral.

(3) Wir betrachten den vieltangentigen stabilen Knoten (D^{--}) in reeller Normalform

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u \\ \lambda v \end{pmatrix}, \quad \lambda < 0.$$

Die Lösung zur Anfangsbedingung $\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ ist

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Ist $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ein erstes Integral, so gilt zunächst

$$E(u_0, v_0) = E(\varphi(t)) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

und dann, da E stetig ist,

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \lim_{t \rightarrow \infty} E(\varphi(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(e^{\lambda t} u_0, e^{\lambda t} v_0) \\ &= E(\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} u_0, \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} v_0) = E(0, 0). \end{aligned}$$

Dies ist für alle $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ richtig, also ist E konstant auf \mathbb{R}^2 .

(4) Wir betrachten wieder den vieltangentigen stabilen Knoten (D^{--}) in reeller Normalform, schränken diesmal aber die Definitionsmenge ein auf die obere Halbebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Dann ist

$$E : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto \frac{u}{v} \end{cases}$$

ein erstes Integral, da

$$E'(u, v) \cdot f(u, v) = \left(\frac{1}{v} \quad -\frac{u}{v^2} \right) \cdot \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \left(\frac{u}{v} - \frac{u}{v} \right) = 0.$$

9.1.6 Satz

Es sei $\mathcal{E}(D) \subseteq \mathcal{C}^1(D)$ die Menge der ersten Integrale eines autonomen Systems mit Lipschitz-stetiger rechter Seite $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- (i) \mathcal{E} ist ein \mathbb{R} -Vektorraum.
- (ii) \mathcal{E} ist abgeschlossen unter Multiplikation zweier Funktionen.
- (iii) \mathcal{E} enthält alle konstanten Funktionen.
- (iv) Ist $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{C}^1 -Funktion, so ist $g \circ E \in \mathcal{E}$ für alle $E \in \mathcal{E}$.

Die Aussagen (i) – (iii) lassen sich auch zusammenfassen in der Aussage, dass $\mathcal{E}(D)$ eine Unter algebra der unitalen \mathbb{R} -Algebra $\mathcal{C}^1(D)$ ist.

9.1.7 Beweis Alle Aussagen sind ganz einfach einzusehen.

9.2 Hamiltonsche Systeme

9.2.1 Vorbemerkung

Die Überlegungen in diesem Kapitel sind — vor allem im Hinblick auf das Staatsexamen — für $k = 1$ interessant.

9.2.2 Definition: Hamiltonsches System

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^{2k}$ und

$$\left\{ \begin{array}{l} D \rightarrow \mathbb{R}^{2k} \\ (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

eine stetige Rechte Seite. Das autonome System auf D

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

heißt *Hamiltonsch*, wenn es eine \mathcal{C}^1 -Funktion $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} H'(x, y) &= \left(\partial_{x_1} H \quad \cdots \quad \partial_{x_k} H \quad \partial_{y_1} H \quad \cdots \quad \partial_{y_k} H \right) (x, y) \\ &= \left(-g^t(x, y) \quad f^t(x, y) \right) \quad \text{für alle } (x, y) \in D. \end{aligned}$$

Dies Funktion H heißt dann auch *Hamilton-Funktion*.

9.2.3 Satz: Hamilton-Funktion ist Erstes Integral

Ist ein autonomes System Hamiltonsch, so ist die Hamilton-Funktion ein Erstes Integral.

9.2.4 Beweis

Einfach Nachrechnen. Es ist für $(x, y) \in D$

$$H'(x, y) \cdot f(x, y) = \left(-g^t(x, y) \quad f^t(x, y) \right) \cdot \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} = 0.$$

9.2.5 Satz: Bedingungen für die Existenz einer Hamilton-Funktion

Für ein autonomes System mit \mathcal{C}^1 -Rechter Seite $f : D \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$ bestehen die Implikationen (A) \Rightarrow (B) \Rightarrow (C) zwischen den folgenden Aussagen.

(A) Das System ist Hamiltonsch.

(B) Es gilt

$$\partial_{x_j} f(x, y) + \partial_{y_j} g(x, y) = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \dots, k, (x, y) \in D.$$

(C) Das System ist *lokal Hamiltonsch*, d.h. zu jedem $(a, b) \in D$ gibt es eine Umgebung U mit $(a, b) \in U \subseteq D$, so dass das auf U eingeschränkte autonome System Hamiltonsch ist.

9.2.6 Beweis

(A) \Rightarrow (B). Da die Funktionen g und f in der Ableitung

$$H'(x, y) = \begin{pmatrix} -g^t(x, y) & f^t(x, y) \end{pmatrix}$$

stetig differenzierbar sind, ist die Hamilton-Funktion eine \mathcal{C}^2 -Funktion. Deshalb vertauschen die zweiten Ableitungen von H und es gilt

$$\partial_y h^t(x, y) = \partial_y(-\partial_x H(x, y)) = -\partial_x \partial_y H(x, y) = -\partial_x g^t(x, y).$$

(B) \Rightarrow (C) nur für $k = 1$, $n = 2$. Wähle für U ein offenes Rechteck $U = I_x \times I_y \subseteq D$ und setze

$$H(x, y) := \int_b^y f(x, v) dv - \int_a^x g(u, b) du.$$

Wir rechnen nach, dass für alle $(x, y) \in D$

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} H(x, y) &= \int_b^y \partial_{x_1} f(x, v) dv - g(x, b) = - \int_b^y \partial_{x_2} g(x, v) dv - g(x, b) \\ &= -g(x, y) + g(x, y_0) - g(x, y_0) = -g(x, y) \end{aligned}$$

$$\partial_{x_2} H(x, y) = f(x, y).$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass die Ableitung nach einem Parameter in einem Integral (mit stetiger Integrandenfunktion und kompaktem Integrationsintervall) in das Integral hineingezogen werden kann.

(B) \Rightarrow (C) für beliebige k , $n = 2k$.

9.2.7 Beispielklasse

Hat ein ebenes autonomes System die Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(y) \\ g(x) \end{pmatrix},$$

so ist, wenn F eine Stammfunktion von f und G eine Stammfunktion von g ist, die Funktion

$$H(x, y) = F(y) - G(x)$$

eine Hamiltonfunktion.

9.2.8 Beispiel

Wir betrachten eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} + K(x) = 0$$

Es handelt sich dabei um das zweite Newtonsche Gesetz (= Grundgesetz der Mechanik). Ein Teilchen der Masse $m = 1$ bewegt sich reibungsfrei mit der Zeit $t \in \mathbb{R}$ auf einem Intervall $D \ni x$ unter der von x stetig abhängigen Kraft $-K(x)$.

Wir schreiben diese Differentialgleichung mit $y := \dot{x}$ in das zugehörige System erster Ordnung um:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -K(x) \end{pmatrix}.$$

Ist nun $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von K , so ist

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x)$$

eine Hamilton-Funktion, da

$$\partial_x H(x, y) = K(x) \quad \text{und} \quad \partial_y H(x, y) = y.$$

Die Hamilton-Funktion ist die Gesamtenergie, sie setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie $\frac{y^2}{2}$ und der potentiellen Energie $V(x)$. Sie bleibt erhalten.

Wir tragen noch einige Beispiele zusammen.

$K(x)$	$V(x)$	D	Beschreibung
g	gx	\mathbb{R}^+	Homogenes Schwerfeld (Freier Fall)
Dx	$D\frac{x^2}{2}$	\mathbb{R}	Schraubenfeder Fadenpendel Kleinwinkelnäherung
$\sin x$	$-\cos x$	\mathbb{R}	Fadenpendel <small>F16 T2 A2</small>
$\cos x$	$\sin x$	\mathbb{R}	Fadenpendel <small>F14 T1 A3</small>
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{R} - \frac{1}{x}$	$[R, \infty[$	Schwerfeld der Erde außerhalb der Erde

10 Stabilitätstheorie

10.1 Begriffe

10.1.1 Kontext

Es sei eine Rechte Seite $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ offen, gegeben, die stetig und bzgl. x Lipschitz-stetig ist. Es ist dann

$$\dot{x} = f(t, x)$$

eine (nicht notwendig autonome, nicht notwendig lineare) Differentialgleichung.

Wir bezeichnen die maximale Lösung des AWP

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{mit} \quad \varphi(\cdot; t_0, x_0) : \begin{cases} J \rightarrow D \\ t \mapsto \varphi(t; t_0, x_0). \end{cases}$$

10.1.2 Definitionen

Es sei $\mu : I \rightarrow D$ eine Lösung der obigen Differentialgleichung mit $\sup I = +\infty$.

- (i) Die Lösung μ heißt *stabil*, wenn es zu jedem $t_0 \in I$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x_0 \in B_\delta(\mu(t_0))$ gilt:

- $x_0 \in D$.
- Das (maximale) Intervall der Lösung $\varphi(\cdot; t_0, x_0) : J \rightarrow D$ erfüllt $\sup J = +\infty$.
- Es gilt $\|\varphi(t; t_0, x_0) - \mu(t)\| < \varepsilon$ für alle $t \in J$.

Plastischer (Man denke an das Richtungsfeld):

Zu jedem ε -Schlauch **um** und jedem Punkt **auf** dem Graphen von μ gibt es eine Scheibe $\{t_0\} \times B_\delta(\mu(t_0)) \subseteq D$, so dass der Graph jeder anderen Lösung, die in dieser Scheibe startet, im Schlauch bleibt.

- (ii) Die Lösung μ heißt *attraktiv*, wenn es zu jedem $t_0 \in I$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x_0 \in B_\delta(\mu(t_0))$ gilt:

- $x_0 \in D$.
- Das (maximale) Intervall der Lösung $\varphi(\cdot; t_0, x_0) : J \rightarrow D$ erfüllt $\sup J = +\infty$.
- Es gilt $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\varphi(t; t_0, x_0) - \mu(t)) = 0$.

Plastischer (Man denke an das Richtungsfeld):

Zu jedem Punkt **auf** dem Graphen von μ gibt es eine Scheibe $\{t_0\} \times B_\delta(\mu(t_0)) \subseteq D$, so dass der Graph jeder anderen Lösung, die in dieser Scheibe startet, sich dem Graphen von μ annähert.

- (iii) Die Lösung μ heißt *asymptotisch stabil*, wenn sie sowohl stabil als auch attraktiv ist.

10.1.3 Bemerkung

(1) Diese Definitionen sind vor allem relevant, wenn es sich bei der Lösung $\mu : I \rightarrow D$ um eine Ruhelage $\mu(t) = \mu_0 = \text{const}$ mit $I = \mathbb{R}$ handelt.

(2) Ist die Lösung μ nicht stabil, so heißt sie *instabil*.

10.2 Zusammenhang von Attraktivität und Stabilität

10.2.1 Satz

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(t, x)$$

mit Rechter Seite $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ offen, die stetig und bzgl. x Lipschitz-stetig ist.

Zu einer gegebenen Lösung $\mu : I \rightarrow D$ mit $\sup I = +\infty$ betrachten wir die beiden Aussagen

(St) μ ist stabil.

(At) μ ist attraktiv.

Dann

(i) Im allgemeinen gilt nicht (St) \Rightarrow (At).

(ii) Im allgemeinen gilt nicht (At) \Rightarrow (St).

(iii) Ist $n = 1$ (skalärer Fall), so gilt für alle Lösungen (At) \Rightarrow (St) .

(iv) Ist die Differentialgleichung linear, d.h.

$$\dot{x} = A(t)x + b(t),$$

so gilt für alle Lösungen (At) \Rightarrow (St).

10.2.2 Beweis

(i) Die Null-Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = 0$ ist stabil, aber nicht attraktiv.

(ii) Wir betrachten als Beispiel das ebene nicht-lineare System in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1-r) \\ \dot{\vartheta} &= \sin^2 \frac{\vartheta}{2}. \end{aligned}$$

mit $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

Der Einheitskreis enthält genau zwei Trajektorien, nämlich die Ruhelage $\mathcal{O}_1 = \{(1, 0)\}$ und die Trajektorie \mathcal{O}_2 auf dem Restbogen, deren zugehörige Lösungen sowohl für $t \rightarrow +\infty$ als auch für $t \rightarrow -\infty$ gegen diese Ruhelage streben.

Das zeigt sofort, dass diese Ruhelage nicht stabil ist. In jeder (genügend kleinen) Kreisscheibe um die Ruhelage startet eine Lösung, die diese Kreisscheibe verlässt.

Andererseits ist die Ruhelage attraktiv. Es gilt für alle Anfangspunkte $(r_0, \vartheta_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} r(t) \\ \vartheta(t) \end{pmatrix} = \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{r_0}{r_0 + (1-r_0)e^{-t}} \\ 2 \arctan\left(\frac{2 \sin \vartheta_0}{2 \cos \vartheta_0 - t \sin \vartheta_0 + 2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass für $t \rightarrow \infty$ das Argument des arctan betragsmäßig sehr klein wird und deswegen ohne Bedenken der Hauptzweig der arctan-Funktion verwendet werden kann.

Phasenportrait in Aulbach, Abb. 7.20

(iii) Der Beweis von (iii) folgt über mehrere Schritte hinweg.

(0) Es sei $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stabile Lösung der skalaren Differentialgleichung. Weiter seien $t_0 \in I$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

(1) Aufgrund der Attraktivität von μ gibt es ein $\tilde{\varepsilon} > 0$, so dass für alle Lösungen $\varphi(\cdot; t_0, x_0)$ mit $\|\xi - \mu(t_0)\| < \tilde{\varepsilon}$ gilt, dass

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\varphi(t; t_0, x_0) - \mu(t) \right) = 0.$$

(2) Es seien jetzt $x'_0 := \mu(t_0) - \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$ und $x''_0 := \mu(t_0) + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$.

(3) Es gibt ein $T \geq t_0$, so dass gilt

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq T} \|\varphi(t; t_0, x'_0) - \mu(t)\| &< \varepsilon \\ \sup_{t \geq T} \|\varphi(t; t_0, x''_0) - \mu(t)\| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

(4) Da sich Lösungsgraphen nicht schneiden können, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass für alle $x_0 \in]x'_0, x''_0[$

$$\sup_{t \geq T} \|\varphi(t; t_0, x_0) - \mu(t)\| < \varepsilon.$$

(5) Aufgrund der Stetigkeit der Abbildung $(t_0, x_0) \mapsto \varphi(t; t_0, x_0)$ für fixiertes t (wurde bisher nicht bewiesen) und der Kompaktheit des Intervalls $[t_0, T]$ ist die Abbildung

$$\begin{cases}]x'_0, x''_0[\rightarrow \mathbb{R} \\ x_0 \mapsto \sup_{t \in [t_0, T]} \|\varphi(t; t_0, x_0) - \mu(t)\| \end{cases}$$

stetig. Zu $\varepsilon > 0$ existiert also ein $\delta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \delta < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$, so dass

$$\sup_{t \in [t_0, T]} \|\varphi(t; t_0, x_0) - \mu(t)\| < \varepsilon,$$

falls $x_0 \in]x'_0, x''_0[$.

(6) Zusammengefasst ist dies

$$\sup_{t \geq t_0} \|\varphi(t; t_0, x_0) - \mu(t)\| < \varepsilon.$$

(iv) Diese Aussage erscheint weiter unten als Satz 10.3.6 und wird dann bewiesen.

10.3 Attraktivität und Stabilität bei Linearen Differentialgleichungen

10.3.1 Kontext

Wir betrachten in diesem Unterkapitel die inhomogene und zugehörige homogene lineare Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t)x + b(t) \quad (\text{inh})$$

$$\dot{x} = A(t)x \quad (\text{hom})$$

mit stetigen Funktionen $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Das Intervall I ist dabei nach oben unbeschränkt.

10.3.2 Satz: Attraktivität und Stabilität bei Linearen Differentialgleichungen

Es sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (A) Die Null-Lösung der homogenen Differentialgleichung ist stabil / attraktiv / asymptotisch stabil.
- (B) Eine beliebige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist stabil / attraktiv / asymptotisch stabil.

Es sei daran erinnert, dass lineare auf einem Intervall I definierte AWPe auf ganz I definierte eindeutige Lösungen haben.

10.3.3 Beweis

Ist $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine beliebige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Vergleichs-Lösung, so ist die Differenz eine Vergleichs-Lösung für die Null-Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$\underbrace{\varphi(t)}_{\text{Lsg inh}} - \underbrace{\mu(t)}_{\text{Lsg inh}} = \underbrace{\varphi(t) - \mu(t)}_{\text{Lsg hom}} - \underbrace{0}_{\text{Lsg hom}}$$

Da die definierenden Aussagen für „stabil / attraktiv / asymptotisch stabil“ genau diese Differenzen in den Blick nehmen, folgen die Aussagen des Satzes.

10.3.4 Satz: Attraktivität und Stabilität bei Linearen Differentialgleichungen

Wir betrachten eine linear-homogene Differentialgleichung in \mathbb{R}^n

$$\dot{x} = A(t)x$$

mit nach oben unbeschränktem Definitionsintervall I .

(i) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(A) Die Null-Lösung ist stabil.

(B) Übergangsmatrizen sind für $t \rightarrow \infty$ beschränkt. Für jedes fixierte $t_0 \in I$ existiert ein $M \geq 1$, so dass

$$\|\Phi_A(t, t_0)\| \leq M \quad \text{für } t \geq t_0.$$

(C) Alle Lösungen sind beschränkt. Für jedes fixierte $t_0 \in I$ existiert ein $M \geq 1$, so dass

$$\|\varphi(t; t_0, x_0)\| \leq M \cdot \|x_0\| \quad \text{für } t \geq t_0 \quad \text{und alle } x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(A) Die Null-Lösung ist attraktiv.

(B) Die Übergangsmatrizen gehen für $t \rightarrow \infty$ gegen Null. Für jedes fixierte $t_0 \in I$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi_A(t, t_0)\| = 0.$$

(C) Alle Lösungen gehen für $t \rightarrow \infty$ gegen Null. Für jedes fixierte $t_0 \in I$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t; t_0, x_0)\| = 0.$$

10.3.5 Beweis

Beide Implikationen (B) \Rightarrow (C) folgen aus der Gleichung

$$\varphi(t; t_0, x_0) = \Phi_A(t, t_0) \cdot x_0.$$

Beide Implikationen (C) \Rightarrow (B) folgen daraus, dass die Spalten von Übergangsmatrizen Lösungen sind.

Wir zeigen für (i) die Implikation (B) \Rightarrow (A). Dazu seien wie in der Definition der Stabilität ein $t_0 \in I$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Gemäß (B) ist

$$\|\Phi(t; t_0)\| \leq M \quad \text{für } t \geq t_0.$$

Setzt man nun $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$, so gilt für alle Lösungen $\varphi(\cdot; t_0, x_0)$ mit $\|x_0\| \leq \delta$ die Abschätzung

$$\|\varphi(t; t_0, x_0)\| = \|\Phi(t, t_0) \cdot x_0\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \cdot \|x_0\| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Sei umgekehrt die Aussage (A) in (i) erfüllt. Da die Null-Lösung stabil ist, gibt es zu $t_0 \in I$ und einem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass

$$\|\varphi(t; t_0, x_0)\| \leq \varepsilon, \quad \text{falls } \|x_0\| \leq \delta.$$

Für ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt dann

$$\|\varphi(t; t_0, x_0)\| = \frac{\|x_0\|}{\delta} \cdot \|\varphi(t; t_0, \frac{\delta}{\|x_0\|} x_0)\| \leq \frac{\|x_0\|}{\delta} \cdot \varepsilon,$$

also ist $\varphi(t; t_0, x_0)$ beschränkt.

(ii) Die Äquivalenz (A) \Leftrightarrow (B) zeigt man analog.

10.3.6 Folgerung: Attraktivität und Stabilität bei Linearen Differentialgleichungen

Ist die Null-Lösung der linear-homogenen Differentialgleichung im \mathbb{R}^n

$$\dot{x} = A(t)x$$

attraktiv, so ist sie auch stabil.

10.3.7 Beweis

Ist die Null-Lösung attraktiv, so ist aufgrund der Implikation (A) \Rightarrow (C) in Satz 10.3.6(ii)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t; t_0, x_0) = 0.$$

Daraus folgt aber, dass $\varphi(t; t_0, x_0)$ auf $[t_0, \infty[$ beschränkt ist. Aufgrund der Implikation (C) \Rightarrow (A) in Satz 10.3.6(i) ist die Null-Lösung stabil. Die anderen technischen Bedingungen für Attraktivität sind wegen der Linearität automatisch erfüllt.

10.3.8 Satz: Attraktivität und Stabilität bei Linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten die linear-homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\dot{x} = Ax.$$

Es sei Σ_A das Spektrum der $(n \times n)$ -Matrix A .

(i) Es sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(A) Die Null-Lösung ist stabil.

(B) Die Übergangsmatrix ist für $t \geq 0$ beschränkt, d.h. es gibt eine Konstante $M > 0$, so dass

$$\sup_{t \geq 0} \|e^{At}\| \leq M.$$

(C) Alle Lösungen sind beschränkt. Es gibt eine Konstante $M > 0$, so dass

$$\sup_{t \geq 0} \|\varphi(t; 0, x_0)\| \leq M \cdot \|x_0\| \quad \text{für alle } x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

(D) Für alle $\lambda \in \Sigma_A$ gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda &\leq 0 \quad \text{und} \\ \text{bei } \operatorname{Re} \lambda = 0 : \text{Geom. Vielfachheit}(\lambda) &= \text{Alg. Vielfachheit}(\lambda). \end{aligned}$$

(ii) Es sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(A) Die Null-Lösung ist attraktiv, also asymptotisch stabil.

(B) Die Übergangsmatrix geht für $t \rightarrow \infty$ gegen Null. Es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{At}\| = 0.$$

(B') Die Übergangsmatrix ist für $t \geq 0$ exponentiell abklingend, d.h. es gibt $\alpha > 0$ und $K \geq 1$, so dass

$$\|e^{At}\| \leq K \cdot e^{-\alpha t} \quad \text{für } t \geq 0.$$

(C) Alle Lösungen gehen für $t \rightarrow \infty$ gegen Null. Es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t; 0, x_0)\| = 0.$$

(C') Alle Lösungen sind exponentiell abklingend. Es gibt Konstanten $\alpha > 0$ und $K \geq 1$, so dass

$$\|\varphi(t; 0, x_0)\| \leq K \cdot e^{-\alpha t} \cdot \|x_0\| \quad \text{für } t \geq 0 \quad \text{und alle } x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

(D) Für alle $\lambda \in \Sigma_A$ gilt

$$\operatorname{Re} \lambda < 0.$$

10.3.9 Bemerkung

Man überlege, dass damit die Aussagen über Stabilität und asymptotische Stabilität in der Tabelle der linearen ebenen autonomen Systeme in Abschnitt 8.2.1 gezeigt sind.

10.3.10 Beweis

(1) Der Satz braucht nur für lineare Systeme in Jordan-Normalform gezeigt zu werden.

Dass die Aussagen (D) über die Eigenwerte invariant unter der Transformation $A \mapsto J = TAT^{-1}$ sind, ist aus der Linearen Algebra bekannt.

Für die zugehörigen Übergangsmatrizen gilt

$$\begin{aligned} \|e^{Jt}\| &= \|e^{TAT^{-1}t}\| = \|T e^{At} T^{-1}\| \leq \|T\| \cdot \|e^{At}\| \cdot \|T^{-1}\| \\ \|e^{At}\| &= \|e^{T^{-1}ATt}\| = \|T^{-1} e^{At} T\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|e^{At}\| \cdot \|T\|, \end{aligned}$$

also sind auch die Aussagen (B) und (B') unabhängig von Ähnlichkeitstransformationen.

Weiter ist die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ genau dann Lösung von (*), wenn die transformierte Lösung $\psi := T \cdot \varphi$ Lösung der transformierten Differentialgleichung

$$\dot{y} = Jy$$

ist. Wegen

$$\begin{aligned} \|\psi(t)\| &= \|T \cdot \varphi(t)\| \leq \|T\| \cdot \|\varphi(t)\| \\ \|\varphi(t)\| &= \|T^{-1} \cdot \psi(t)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|\psi(t)\| \end{aligned}$$

sind Lösungen der Original-Differentialgleichung genau dann beschränkt/stabil/exponentiell-abklingend/attractiv, wenn die Lösungen der transformierten Differentialgleichung beschränkt/stabil/exponentiell-abklingend/attractiv ist. Also sind die Aussagen (A), (C) und (C') unabhängig von Ähnlichkeitstransformationen.

(2) Der Satz braucht nur für lineare Systeme mit einem Jordan-Block als Matrix gezeigt zu werden.

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass es zu der Jordan-Normalform J Jordanblöcke J_1, \dots, J_ℓ gibt, die in die Blockdiagonal-Darstellung

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & J_\ell \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

eingehen.

Es ist klar, dass die Aussagen (D) für die gesamte Matrix J genau dann gelten, wenn sie für jeden einzelnen Jordanblock gelten.

Wegen

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & e^{J_\ell t} \end{pmatrix}$$

gelten die Aussagen (B) und (B') genau dann für die Matrix J , wenn sie für alle Jordanblöcke gelten.

Eine beliebige Lösung der transformierten Differentialgleichung lässt sich entsprechend unterteilen in die Komponenten

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \vdots \\ \psi_\ell(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wegen (wir gehen von euklidischen Normen aus)

$$\|\psi(t)\| = \sqrt{\|\psi_1(t)\|^2 + \dots + \|\psi_\ell(t)\|^2},$$

$$\|\psi_k(t)\| \leq \|\psi(t)\| \quad \text{für alle } k \in \{1, \dots, \ell\}$$

sind die Lösungen der transformierten Differentialgleichung beschränkt/stabil/exponentiell-abklingend/attractiv genau dann, wenn die Lösungen aller Jordan-Block-unterteilten Differentialgleichungen

$$\dot{z}_k = J_k \cdot z_k, \quad k = 1, \dots, \ell$$

beschränkt/stabil/exponentiell-abklingend/attractiv sind. Also sind die Aussagen (A), (C) und (C') invariant unter Blockzerlegung.

(3) Wir betrachten also einen einzelnen Jordanblock

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times m}.$$

Die zugehörige $m \times m$ -Übergangsmatrix ist gegeben durch

$$e^{\tilde{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} & \dots & \dots & t^{m-1} e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & \ddots & & t^{m-2} e^{\lambda t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Sie erfüllt die Abschätzung für $t \geq 1$

$$\|e^{\tilde{J}t}\| \leq e^{\operatorname{Re} \lambda t} \cdot t^{m-1} \cdot \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|}_{=:\tilde{K}}. \quad (**)$$

(i) Die Äquivalenzen (A) \Leftrightarrow (B) \Leftrightarrow (C) sind dem Satz 10.3.6 (i) zu entnehmen.

Diese drei Aussagen seien erfüllt und wir nehmen an, es gelte nicht (D). Dann hat der Eigenwert λ im Jordanblock \tilde{J} einen positiven Realteil oder es gilt bei Realteil Null $m \geq 2$. In beiden Fällen ist die Übergangsmatrix (*) für $t \geq 0$ unbeschränkt im Widerspruch zu (B).

Ist die Aussage (D) erfüllt, so gilt in den beiden dort genannten Fällen, dass die rechte Seite der Ungleichung (**) für $t \geq 0$ durch ein $M \geq 1$ beschränkt ist. Das ist die Aussage (B).

(ii) Die Äquivalenzen (A) \Leftrightarrow (B) \Leftrightarrow (C) sind dem Satz 10.3.6 (ii) zu entnehmen.

Die Äquivalenz (B') \Leftrightarrow (C') ist ganz leicht — wie im Beweis 10.3.5 — einzusehen. Weiter ist klar, dass (B') die Aussage (B) des Satzes 10.3.6 (ii) impliziert.

Es bleibt noch (B) \Rightarrow (D) \Rightarrow (B') zu zeigen.

Um die linke Implikation zu zeigen, nehmen wir an, es gelte nicht (D). Dann hat der Eigenwert λ im Jordanblock \tilde{J} einen Realteil ≥ 0 . In diesem Fall kann die Übergangsmatrix (*) für $t \geq 0$ nicht gegen Null gehen im Widerspruch zu (B).

Es sei (D) erfüllt. Dann existiert ein $\alpha > 0$ mit $\operatorname{Re} \lambda + \alpha < 0$ und deswegen gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\operatorname{Re} \lambda + \alpha)t} \cdot t^{m-1} = 0.$$

Deshalb existiert weiter $T \geq 1$, so dass

$$e^{(\operatorname{Re} \lambda + \alpha)t} \cdot t^{m-1} \leq 1 \quad \text{für alle } t \in [T, \infty[$$

dann

$$e^{(\operatorname{Re} \lambda + \alpha)t} \cdot t^{m-1} \leq T^{m-1} \quad \text{für alle } t \geq 0,$$

und weiter

$$e^{\operatorname{Re} \lambda t} \cdot t^{m-1} \cdot \tilde{K} \leq \underbrace{\tilde{K} \cdot T^{m-1}}_{=:K} e^{-\alpha t} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Zusammen mit (**) ist das die Aussage (B').

10.4 Linearisierung und asymptotische Stabilität

10.4.1 Satz: Gronwall Ungleichung

Es seien $\tau \in \mathbb{R}$ und $a, b, c : [\tau, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Die Funktion c sei nicht-negativ:

$$c(t) \geq 0, \quad t \in [\tau, \infty[.$$

Wenn für die Funktion a die **implizite** Abschätzung

$$a(t) \leq b(t) + \int_{\tau}^t c(s)a(s) ds, \quad t \in [\tau, \infty[, \quad (*)$$

gilt, dann gilt für sie die folgende **explizite** Abschätzung:

$$\begin{aligned} a(t) &\leq b(t) + \int_{\tau}^t e^{C(t)-C(s)} c(s)b(s) ds \\ &= e^{C(t)} \left[b(t) + \int_{\tau}^t e^{-C(s)} b'(s) ds \right], \quad t \in [\tau, \infty[, \end{aligned}$$

wobei die Funktion C Stammfunktion von c zur unteren Grenze τ ist: $C(t) := \int_{\tau}^t c(s) ds$.

Die Umformung der zweiten Zeile ist nur möglich, wenn b stetig differenzierbar ist.

10.4.2 Bemerkung

Der obige Satz bleibt richtig, wenn man das Intervall $[\tau, \infty[$ durch das Intervall $] -\infty, \tau]$ ersetzt und dann die Funktion c als nicht-positiv auf $] -\infty, \tau]$ voraussetzt.

10.4.3 Beweis

Wir definieren die stetig differenzierbare Funktion

$$w(t) := e^{-C(t)} \cdot \int_{\tau}^t c(s)a(s) ds$$

und schätzen die Ableitung mit Hilfe der impliziten Ungleichung (*) ab:

$$\begin{aligned} w'(t) &= e^{-C(t)} \cdot c(t)a(t) - c(t)e^{-C(t)} \cdot \int_{\tau}^t c(s)a(s) ds \\ &= e^{-C(t)} c(t) \cdot \left[a(t) - \int_{\tau}^t c(s)a(s) ds \right] \\ &\stackrel{(*)}{\leq} e^{-C(t)} c(t) \cdot b(t). \end{aligned}$$

Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt dann:

$$w(t) - \underbrace{w(\tau)}_{=0} \leq \int_{\tau}^t e^{-C(s)} c(s)b(s) ds.$$

Die Funktion a in der impliziten Ungleichung (*) kann jetzt weiter abgeschätzt werden:

$$a(t) \stackrel{(*)}{\leq} b(t) + e^{C(t)} w(t) \leq b(t) + \int_{\tau}^t e^{C(t)-C(s)} c(s)b(s) ds.$$

Wenn b differenzierbar ist, kann der Ausdruck rechts weiter mit partieller Integration umgeformt werden

$$\begin{aligned}
 \dots &= b(t) - \int_{\tau}^t \left[-c(s)e^{C(t)-C(s)} \right] b(s) ds \\
 &= b(t) + \int_{\tau}^t e^{C(t)-C(s)} b'(s) ds - \left[e^{C(t)-C(s)} b(s) \right]_{s=\tau}^{s=t} \\
 &= \int_{\tau}^t e^{C(t)-C(s)} b'(s) ds + e^{C(t)} b(\tau) \\
 &= e^{C(t)} \cdot \left[\int_{\tau}^t e^{-C(s)} b'(s) ds + b(\tau) \right].
 \end{aligned}$$

10.4.4 Folgerung: Spezialfall der Gronwall Ungleichung

Es seien $\tau \in \mathbb{R}$ und $a : [\tau, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Weiter seien $b \in \mathbb{R}$ und $c \geq 0$ Konstanten. Wenn für die Funktion a die **implizite** Abschätzung

$$a(t) \leq b + c \int_{\tau}^t a(s) ds, \quad t \in [\tau, \infty[, \quad (*)$$

gilt, dann gilt für sie die folgende **explizite** Abschätzung:

$$a(t) \leq e^{c(t-\tau)} b, \quad t \in [\tau, \infty[.$$

10.4.5 Beweis

Setze in Satz 10.4.1 einfach $b(t) = b$ und $c(t) = c$.

10.4.6 Satz: Asymptotische Stabilität und Instabilität bei einer gestörten linear-homogenen Gleichung

Es sei das autonome System

$$\dot{x} = Ax + r(x) \quad (*)$$

mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben. Die „Nicht-Linearität“ $r : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ erfülle die folgenden Voraussetzungen:

- Die Definitionsmenge D von r ist offen und es sei $0 \in D$.
 - Es gelte $r(0) = 0$ ($\in \mathbb{R}^n$).
 - r sei stetig differenzierbar mit $r'(0) = 0$ ($\in \mathbb{R}^{n \times n}$).
- (i) Sind die Realteile aller Eigenwerte der Matrix A negativ, so ist die Null-Lösung des nicht-linearen Systems $(*)$ asymptotisch stabil.
- (ii) Ist der Realteil mindestens eines Eigenwerts der Matrix A positiv, so ist die Null-Lösung des nicht-linearen Systems $(*)$ instabil.

10.4.7 Beweis

Wir beweisen nur (i).

(1) Nach Satz 10.3.8 (D) \Rightarrow (C') gibt es zwei Konstanten $\alpha > 0$ und $K \geq 1$, so dass

$$\|e^{At}\| \leq K \cdot e^{-\alpha t} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Es sei weiter $L \in \mathbb{R}$ mit $0 < L < \frac{\alpha}{K}$.

(2) Da r' stetig ist, gibt es ein $\varrho > 0$, so dass

$$\|r'(x)\| \leq L \quad \text{für alle } x \in \tilde{D} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \varrho\}.$$

Aufgrund des Mittelwertsatzes der mehrdimensionalen Differentialrechnung ist dann für alle $x \in \tilde{D}$

$$\|r(x)\| = \|r(x) - r(0)\| \leq \sup_{\|\tilde{x}\| < \varrho} \{\|r'(\tilde{x})\|\} \cdot \|x - 0\| \leq L \cdot \|x\|.$$

Ab sofort betrachten wir die Differentialgleichung als auf \tilde{D} eingeschränkt.

(3) Ist jetzt $\varphi : I \rightarrow \tilde{D}$ eine maximale Lösung von $(*)$, so ist φ auch eine Lösung der linear-inhomogenen auf $I \times \tilde{D}$ definierten Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax + r(\varphi(t)),$$

gemäß dem Satz 3.6.2 (Variation der Konstanten) ist dann

$$\varphi(t) = e^{At} \cdot \varphi(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} \cdot r(\varphi(s)) ds$$

und daraus folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|\varphi(t)\| &= \|e^{At}\| \cdot \|\varphi(0)\| + \int_0^t \|e^{A(t-s)}\| \cdot \|r(\varphi(s))\| ds \\ &\leq Ke^{-\alpha t} \cdot \|\varphi(0)\| + \int_0^t Ke^{-\alpha(t-s)} \cdot L\|\varphi(s)\| ds.\end{aligned}$$

Wir multiplizieren diese Ungleichung mit der Funktion $e^{\alpha t}$, erhalten so die implizite Abschätzung für $\|\varphi(t)\|$

$$\underbrace{e^{\alpha t}\|\varphi(t)\|}_{a(t)} \leq \underbrace{K\|\varphi(0)\|}_{b} + \int_0^t \underbrace{K \cdot L}_{c} \underbrace{e^{\alpha s}\|\varphi(s)\|}_{a(s)} ds,$$

und dann gemäß der Folgerung 10.4.4 über die Gronwall-Ungleichung zunächst

$$e^{\alpha t}\|\varphi(t)\| \leq K\|\varphi(0)\| \cdot e^{KLt}$$

und dann

$$\|\varphi(t)\| \leq K\|\varphi(0)\| \cdot e^{(KL-\alpha)t}.$$

(4) Wegen $KL - \alpha < 0$, siehe Schritt (1), existiert die Lösung $\varphi : I \rightarrow \tilde{D}$ auf ganz $I = \mathbb{R}$ und konvergiert dabei gegen 0. Die Ruhelage ist also attraktiv.

(5) Wählt man zu einem vorgegebene $\varepsilon > 0$ die Konstante $\delta := \min\{\frac{\varepsilon}{K}, \frac{\rho}{K}\}$, so gilt für eine Lösung φ mit $\|\varphi(0)\| \leq \delta$

$$\|\varphi(t)\| \leq K\|\varphi(0)\| \cdot e^{(KL-\alpha)t} \leq K\|\varphi(0)\| \leq \varepsilon.$$

Also ist die Ruhelage stabil.

10.4.8 Folgerung: Linearisierung um eine Ruhelage

Es sei eine autonome Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x) \quad (*)$$

mit einer C^1 -Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ als Rechter Seite gegeben. Für $a \in D$ sei $f(a) = 0$.

- (i) Sind die Realteile aller Eigenwerte der Ableitung $f'(a)$ negativ, so ist die Ruhelage a asymptotisch stabil.
- (ii) Ist der Realteil eines Eigenwerts der Ableitung $f'(a)$ positiv, so ist die Ruhelage a instabil.

10.4.9 Beweis

Wir führen die Transformation $y = x - a$ im Phasenraum durch und erhalten so die die Differentialgleichung

$$y' = (x - a)' = x' = f(x) = f(y + a) = \underbrace{f'(a)}_A y + \underbrace{f(y + a) - f'(a) y}_{=:r(y)},$$

also

$$y' = Ay + r(y). \quad (**)$$

Es ist dann r stetig differenzierbar mit

$$\begin{aligned} r(0) &= f(a) - f'(a) \cdot 0 = 0 \\ r'(0) &= f'(0 + a) - f'(a) = 0. \end{aligned}$$

Jetzt kann der Satz 10.4.6 angewandt werden. Die Ruhelage 0 von (**) ist asymptotisch stabil bzw. instabil. Damit hat auch die Ruhelage der ursprünglichen Differentialgleichung (*) diese Eigenschaften.

10.4.10 Beispiel

Wir betrachten die skalare autonome lineare Differentialgleichung

$$\dot{x} = 0 \cdot x$$

mit der (1×1) -Matrix 0. Die Null-Lösung ist stabil.

Man kann sich leicht überlegen, dass die Störung $r(x) := \pm x^3$ in der Gleichung

$$\dot{x} = 0 \cdot x \pm \underbrace{x^3}_{r(x)}$$

die Voraussetzungen des Satzes über Linearisierte (asymptotische bzw. In-)Stabilität erfüllt.

Im Fall + ist die Null-Lösung der gestörten Differentialgleichung instabil, im Fall – ist sie asymptotisch stabil. Die ursprünglich Stabilität wurde also durch die Störung in „zwei Richtungen“ verändert.

10.5 Die direkte Methode von Ljapunov

Es sei wieder ein autonomes System

$$\dot{x} = f(x)$$

mit einer Lipschitz-stetigen Rechten Seite $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben.

10.5.1 Definition: Lyapunov-Funktion

Eine C^1 -Funktion $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Ljapunov-Funktion* (bzgl. der Rechten Seite f), wenn die Funktion

$$\dot{V} : \begin{cases} D \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \underbrace{V'(x)}_{1 \times n} \cdot \underbrace{f(x)}_{n \times 1} \end{cases}$$

nur Werte ≤ 0 annimmt.

10.5.2 Bemerkungen

(1) Beachte, dass der Punkt im Symbol \dot{V} **hier nicht** die Bedeutung der **Zeit-Ableitung** hat. Die Funktion \dot{V} kann man als *orbitale Ableitung* (längs der Orbits) bezeichnen. Wir werden im folgenden diese gängige Notation nicht verwenden.

(2) Man mache sich die folgenden Implikationen klar:

$$\text{Hamilton-Funktion} \implies \text{Erstes Integral} \implies \text{Ljapunov-Funktion.}$$

(3) Für eine skalare autonome Differentialgleichung kann man immer gleich eine Ljapunov-Funktion angeben. Ist F eine Stammfunktion von f , so wähle $V = -F$. Es ist dann $V'(x) \cdot f(x) = -f(x)^2 \leq 0$ für alle $x \in D$.

10.5.3 Beobachtung: Lyapunov-Funktion monoton fallend

Ist φ eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$, so ist die Funktion $V \circ \varphi$ (Lyapunov-Funktion V entlang der Lösung) monoton fallend, da

$$(V \circ \varphi)^\cdot = V'(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) = V'(\varphi(t)) \cdot f(\varphi(t)) \leq 0.$$

10.5.4 Satz: Stabilität gemäß direkter Methode von Lyapunov

Es sei ein autonomes System

$$\dot{x} = f(x)$$

mit Lipschitz-stetiger rechter Seite $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben. Es sei $a \in D$ mit $f(a) = 0$.

Ist dann $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{C}^1 -Funktion mit

$$V(x) > V(a) \quad \text{für alle } x \in D \setminus \{a\} \quad (\text{strenges Minimum in } a)$$

$$V'(x) \cdot f(x) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in D,$$

so ist die Ruhelage a stabil.

10.5.5 Beweis

(0) Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so dass $B_\varepsilon(a) \subseteq D$.

(1) Definiere

$$M := \min \left\{ V(x) - V(a) \in \mathbb{R} \mid \|x - a\| = \varepsilon \right\} > 0.$$

(2) Nach Voraussetzung gibt es dann ein $\delta > 0$ mit

$$V(a) \leq V(x) \leq V(a) + \frac{M}{2} \quad \text{für alle } x \in U_\delta(a).$$

Wir betrachten nun zu einem beliebigen $x_0 \in U_\delta(a)$ die Lösung φ mit $\varphi(0) = x_0$.

(3) Wir nehmen an, dass φ den Rand von $B_\varepsilon(a)$ zu einem Zeitpunkt $\tau \geq 0$ erreicht, d.h. es ist

$$\|\varphi(\tau) - a\| = \varepsilon \quad \text{und deshalb} \quad M \leq V(\varphi(\tau)) - V(a).$$

(4) Es folgt

$$M \leq V(\varphi(\tau)) - V(a) \stackrel{10.5.3}{\leq} V(x_0) - V(a) \stackrel{(2)}{\leq} \frac{M}{2}.$$

Widerspruch. Die Lösung verbleibt also in $U_\varepsilon(a)$.

(4) Sie ist damit beschränkt und existiert deshalb für $t \rightarrow \infty$. Das war's.

10.5.6 Folgerung

Es sei ein autonomes System

$$\dot{x} = f(x)$$

mit Lipschitz-stetiger rechter Seite $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben. Es sei $a \in D$ mit $f(a) = 0$.

Ist dann $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ ein erstes Integral, das in a ein strenges Minimum oder ein strenges Maximum hat, so ist die Ruhelage stabil.

10.5.7 Beweis

Im ersten Fall erfüllt die Funktion V die Voraussetzungen des Satzes 10.5.4, im zweiten Fall die Funktion $-V$.

10.5.8 Satz: Asymptotische Stabilität und Instabilität gemäß direkter Methode von Lyapunov

Es sei ein autonomes System

$$\dot{x} = f(x)$$

mit Lipschitz-stetiger Rechter Seite $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben. Es sei $a \in D$ mit $f(a) = 0$.

Ist dann $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{C}^1 -Funktion mit

$$V'(x) \cdot f(x) < 0 \quad \text{für alle } x \in D \setminus \{a\}$$

und

$$\begin{array}{l} V(x) > V(a) \quad \text{für alle } x \in D \setminus \{a\}, \\ \text{(strenges Minimum in } a\text{)} \end{array} \quad \left\| \begin{array}{l} V(x_n) < V(a) \text{ für eine Folge} \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \\ \text{(kein Minimum in } a\text{)} \end{array} \right.$$

so ist die Ruhelage a

$$\begin{array}{l} \text{asymptotisch stabil} \\ \text{instabil.} \end{array}$$

10.5.9 Beweis

(0) Es sei $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \subseteq D$.

(1) Wir nehmen an, die Ruhelage sei

$$\begin{array}{l} \text{nicht attraktiv} \\ \text{sie ist aber gemäß Satz 10.5.4 stabil,} \end{array} \quad \left\| \begin{array}{l} \text{stabil,} \end{array} \right.$$

so dass eine Lösung φ mit den folgenden Eigenschaften existiert:

$$\begin{array}{l} \|\varphi(t) - a\| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \geq 0 \\ V^* := \inf_{t \geq 0} \{V(\varphi(t))\} > V(a) \end{array} \quad \left\| \begin{array}{l} \|\varphi(t) - a\| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \geq 0 \\ V^* := V(\varphi(0)) < V(a). \end{array} \right.$$

(2) Es gibt ein $\delta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \delta < \varepsilon$, so dass für alle $x \in U_\delta(a)$

$$\begin{array}{l} V(x) < V^* \\ V(x) > V^*. \end{array}$$

(3) Da V gemäß 10.5.3 längs der Lösung monoton fallend ist, folgt für alle $t \geq 0$

$$\begin{array}{l} V(\varphi(t)) \geq V^* \\ V(\varphi(t)) \leq V^* \end{array}$$

und damit, dass

$$\varphi(t) \in B_\varepsilon(a) \setminus U_\delta(a).$$

(4) Dieser Kreisring ist kompakt, wir setzen

$$\begin{aligned} m &:= \min\{V(x) \mid x \in B_\varepsilon(a)\} \\ M &:= \max\{V'(x) \cdot f(x) \mid x \in B_\varepsilon(a) \setminus U_\delta(a)\} < 0. \end{aligned}$$

(5) Es folgt für $t > \frac{V(\varphi(0))-m}{-M} \geq 0$

$$\begin{aligned} m &\leq V(\varphi(t)) = V(\varphi(0)) + \int_0^t (V \circ \varphi)'(s) \, ds \\ &= V(\varphi(0)) + \int_0^t V'(\varphi(s)) \cdot f(\varphi(s)) \, ds \\ &\leq V(\varphi(0)) + \int_0^t M \, ds = V(\varphi(0)) + M \cdot t < m. \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch. Die in Schritt (1) gemachte Annahme muss verworfen werden.