Skript zur

Didaktik der Geometrie

(WS 2019/20)

Dieses Geheft enthält in kompakter, manchmal nur stichpunktartig aufzählender Form, die wesentlichen fachlichen und fachdidaktischen Grundlagen der Schulgeometrie.

Es ist zum Gebrauch neben der Vorlesung gedacht und erhebt nicht den Anspruch, ,,in sich selbst verständlich" oder vollständig zu sein.

S. Hilger

Literatur

Hans-Georg Weigand et. al., *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*, Spektrum – Akademischer Verlag, Berlin 2009.

Inhaltsverzeichnis

1 Einstieg **6**
1.1 Ziele zum Geometrieunterricht 6
1.2 Räumliche Vorstellung 8
1.3 Anregungen 9

2 Die Zeichenebene — wesentliche Begriffe **10**
2.1 Menge von Punkten 10
2.2 Strecken, Halbgeraden, Geraden 11

3 Winkel, Lot und Parallele **12**
3.1 Winkel 12
3.2 Konstruktionen mit Winkeln 15
3.3 Rechter Winkel und Lot 19
3.4 Parallelität 22
3.5 Winkel an einer Einfach-Kreuzung 27
3.6 Winkel an einer Doppel-Kreuzung 29

4 Abbildungen der Zeichenebene **32**
4.1 Grundlagen 32
4.2 Überblick über die Abbildungen der Schulgeometrie 33
4.3 Achsenspiegelung 34
4.4 Punktspiegelung 38
4.5 Drehungen 40
4.6 Verschiebungen 45
4.7 Gleitspiegelungen 48
4.8 Kongruenzabbildungen 49
4.9 Zentrische Streckung 51
4.10 Ähnlichkeitssabbildungen 54
4.11 Diagramm der Kongruenz- und Ähnlichkeits-Abbildungen 55

5 Ebene Figuren **56**
5.1 Grundlagen 56
5.2 Ebene Figuren in der Schulwelt 57
5.3 Vielecke 60
5.4 Regelmäßige Vielecke 59
5.5 Kreise 61

6 Symmetrie bei ebenen Figuren **66**
6.1 Achsensymmetrie 66
6.2 Achsensymmetrie in der Schulwelt 67
6.3 Ebenensymmetrie 70
6.4 Punktsymmetrie 71
6.5 Punktsymmetrie in der Schulwelt 71
6.6 Drehsymmetrie 73
6.7 Drehsymmetrie in der Schulwelt 73
6.8 Parkettierungen 74

6.9 Parkettierungen in der Schulwelt . . . 76
6.10 Bandornamente . . . 79
6.11 Kongruenz . . . 80
6.12 Beweise der Dreiecks-Kongruenzsätze . . . 84

7 Ähnlichkeit und Strahlensätze 88
7.1 Ähnlichkeit . . . 88
7.2 Die Strahlensätze . . . 92

8 Geometrie der Dreiecke 95
8.1 Grundlagen und Überblick . . . 95
8.2 Der Satz über die Innenwinkelsumme . . . 97
8.3 Innenwinkelsumme bei einem n-Eck . . . 101
8.4 Transversalen . . . 102
8.5 Spezielle Dreieckstypen . . . 108
8.6 Der Satz von Thales . . . 113

9 Geometrie der Vierecke 117
9.1 Das allgemeine Viereck . . . 117
9.2 Das Quadrat . . . 119
9.3 Das Rechteck . . . 120
9.4 Die Raute . . . 122
9.5 Das Parallelogramm . . . 123
9.6 Das Drachenviereck . . . 124
9.7 Das allgemeine Trapez . . . 126
9.8 Das gleichschenklige Trapez . . . 128
9.9 Das Sehnenviereck . . . 129
9.10 Das Tangentenviereck . . . 130
9.11 Das Haus der Vierecke . . . 131
9.12 Eigenschaften der Vierecke . . . 132
9.13 Eigenschaften der Vierecke — Lösung . . . 133

10 Geometrie der Kreise 134
10.1 Fasskreisbogen und Peripheriewinkel . . . 134
10.2 Tangenten an einen Kreis . . . 135
10.3 Tangenten an zwei Kreise . . . 137

11 Der Flächeninhalt ebener Figuren 140
11.1 Grundlegung der schulischen Flächenlehre . . . 140
11.2 Relationen zwischen ebenen Figuren . . . 142
11.3 Aufbau der schulischen Flächenlehre . . . 144
11.4 Flächeninhalt von Quadraten . . . 145
11.5 Metrische Flächeneinheiten $^{\ominus}$ . . . 147
11.6 Flächeninhalt von Rechtecken . . . 149
11.7 Bestimmung von Flächeninhalten — vom Rechteck ausgehend . . . 151
11.8 Bestimmung von Flächeninhalten — vom Dreieck ausgehend . . . 154
11.9 Bestimmung von Flächeninhalten — vom Parallelogramm ausgehend . . . 156
11.10 Besonderheit bei Parallelogrammen und Dreiecken . . . 157

11.11 Flächeninhalt bei Ähnlichkeitsabbildungen 158
11.12 Empirisch-Experimentelle Methoden zur Bestimmung von Flächeninhalten 160

12 Die Satzgruppe des Pythagoras 161
12.1 Überblick über die Satzgruppe 161
12.2 Arithmetische Beweise / mittels Ähnlichkeit 164
12.3 Beweise des Hypotenusensatzes 166
12.4 Beweis des Kathetensatzes 168
12.5 Beweise des Höhensatzes 169
12.6 Beweis der Kehrsätze 171
12.7 Kontextfelder zum Hypotenusensatz 173
12.8 Kontextfelder zum Höhensatz 176

13 Trigonometrie 178
13.1 Überblick 178
13.2 Einführung mittels rechtwinkliger Dreiecke 178
13.3 Exkurs: Kartesisches Koordinatensystem $^{\ominus}$ 182
13.4 Weiterführung mittels Einheitskreis 184
13.5 Der Sinussatz 187
13.6 Der Kosinussatz 188
13.7 Die Additionstheoreme 191
13.8 Übergang zu Funktionsgraphen $^{\ominus}$ 193
13.9 Trigonometrische Beziehungen $^{\ominus}$ 196
13.10 Kontextfelder 200

14 Umfang und Flächeninhalt des Kreises 202
14.1 Approximation des Kreisumfangs 202
14.2 Approximation der Kreisfläche 204
14.3 Monte-Carlo-Methode zur Bestimmung von π 207

15 Lagebeziehungen im Raum 210
15.1 Geraden 210
15.2 Ebenen 212

16 Körper 215
16.1 Grundsätzliche Begriffe 215
16.2 Ein Überblick über die Körpertypen 217
16.3 Körper in der Schul-Welt 218
16.4 Schrägbild-Darstellungen 221

17 Polyeder 223
17.1 Einstieg 223
17.2 Die Euler'sche Polyederformel 224
17.3 Quader 226
17.4 Würfel 231
17.5 Prismen 235
17.6 Pyramiden 238
17.7 Platonische Körper 244

18 Drehkörper **248**
18.1 Allgemeine Drehkörper . . . 248
18.2 Der Zylinder . . . 249
18.3 Der Kegel . . . 251
18.4 Die Kugel . . . 254
18.5 Der Torus . . . 255

19 Das Volumen eines Körpers **256**
19.1 Grundlegung . . . 256
19.2 Das Volumen von Quadern und Prismen . . . 257
19.3 Das Prinzip von Cavalieri . . . 259
19.4 Das Prinzip von Cavalieri für Spitzkörper . . . 261
19.5 Das Volumen von Spitzkörpern . . . 263
19.6 Das Volumen der Kugel . . . 266

20 Der Oberflächeninhalt eines Körpers **268**
20.1 Der Oberflächeninhalt eines Körpers mit Netz . . . 268
20.2 Der Oberflächeninhalt der Kugel . . . 270

21 Konstruieren **273**
21.1 Konstruieren mit Zirkel und Lineal . . . 273
21.2 Überblick über die Konstruktionen der Schulmathematik . . . 276
21.3 Algebraisierung der Konstruierbarkeit . . . 278
21.4 Klassische Fragen der Konstruierbarkeit . . . 280

1 Einstieg

1.1 Ziele zum Geometrieunterricht

1.1.1 Persönlich-psychologisch

Das mathematische Denken ist an Raumvorstellung und Raumorientierung geknüpft. Eine Förderung des geometrischen Denkens ist zugleich Förderung des mathematischen Denkens — und damit eines wesentlichen Anteils der ,,kognitiven Persönlichkeit”.

1.1.2 Sicht der Welt

- Geometrie in der Natur: Achsensymmetrie bei Schmetterlingen, festgelegte Formen bei Kristallen.
- Geometrie im Alltag: Kuchenformen, Wohnzimmerparkett, DIN A Papier.
- Geometrie in der Kunst: Zeichnen, Bildhauerei, Architektur.
- Geometrie in der Technik:
  - Handwerk: Fliesenlegen, Pflastern, Hausbau, Gartenbau, Tapezieren, Schreiner.
  - Technik: Maschinenbau, Fahrzeuge.

Viele andere Beispiele werden wir noch kennenlernen.

1.1.3 Propädeutik und Grundlegung der ,,höheren Mathematik”

- Griechisch-klassische Mathematik,
- Geometrie ist in der Fachmathematik eng mit Analysis und Algebra verknüpft (Analytische Geometrie, Differentialgeometrie).
- Kombinatorik.
- Grundlegende Fertigkeiten des mathematischen Denkens (Logik, Abstraktion, Idealisierung) werden gefördert.

1.1.4 Unterrichtsprinzipien

Viele übergeordnete Unterrichtsprinzipien lassen sich zwanglos einbringen:

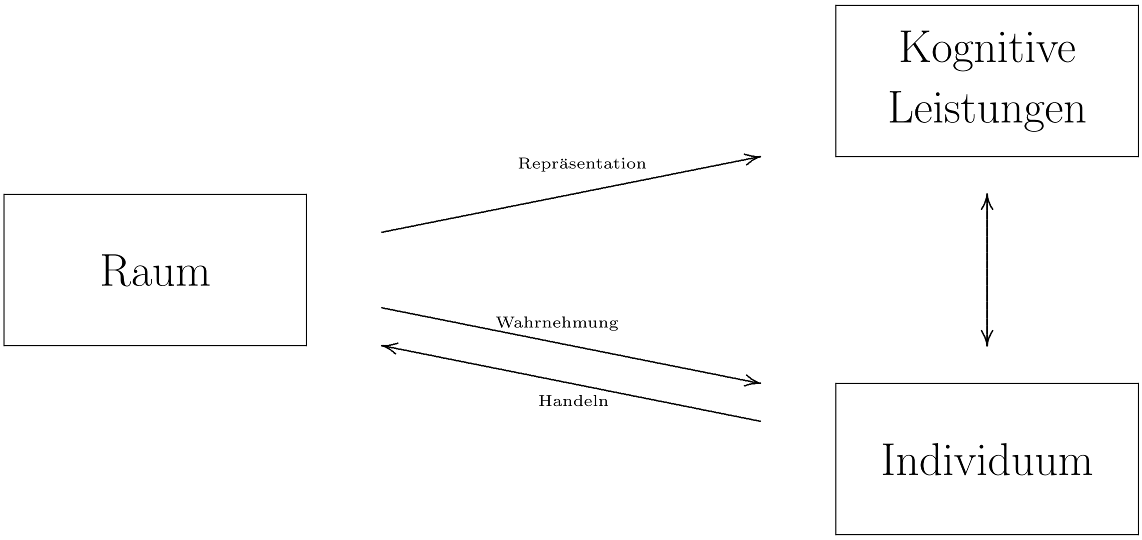
- Kreativität: Vielfältige Materialien können eingebracht werden (Eine umfangreiche Sammlung ist wunderbar).
- Handeln (Motorik): Umgang mit Lineal, Zirkel und anderen Zeichengeräten.
- Abwechslung von sonst eher strenger aufgebauten Lehrgängen, ,,Farbe” in der Unterrichtsgestaltung.

- Soziale Lernziele: Gruppenarbeit, Freiarbeit.
- Sprachliche Fertigkeiten im Hinblick auf die Beschreibung des uns umgebenden Raumes.
- Fachübergreifender Unterricht: Erdkunde, Werken/Textiles Gestalten, Kunst.
- Differenzierung: Beispielsweise erfahren rechenschwächere Kinder Erfolg, damit Motivation und dann eine andere Sichtweise der Mathematik.
- Lernorte außerhalb des Klassenzimmers finden Eingang in das Unterrichtsgeschehen: Turnhalle, Schulhof, Gemeinde, Gebäude in der Stadt.

Im folgenden werden wir die geometrischen Teilgebiete, die in der Schule wirksam werden, elementar-fachlich und dann im Hinblick auf Ideen zur schulpraktischen Umsetzung beschreiben. Der Gesichtspunkt eines nach Jahrgangsstufen geordneten Lehrgangs tritt hier nicht so klar wie bisher hervor.

1.2 Räumliche Vorstellung

1.2.1 Beschreibung Unter räumlicher Vorstellung versteht man die Repräsentation von Situationen und Prozessen in dem uns umgebenden Raum durch innere kognitive Leistungen.



1.2.2 Der ,,uns umgebende Raum" meint dabei genauer den dreidimensionalen Raum, mit dem wir als Individuum dadurch interagieren, dass wir

- (INPUT) ihn mit Hilfe von Sinnesorganen wahrnehmen, insbesondere
  - sehen (mit den Augen)
  - tasten (mit Händen, Füßen, Haut)
  - hören (mit den Ohren)
  - ein Gleichgewicht empfinden (Organ im Innenohr)

  und
- (OUTPUT) in ihm mit Hilfe unseres ganzen Körpers operieren, insbesondere
  - uns in ihm bewegen,
  - materielle Dinge und Abläufe gestalten.

1.2.3 Die inneren kognitiven Leistungen umfassen dabei genauer

- die Herstellung innerer mentaler Objekte, beispielsweise von
  - elementaren Handlungen
  - Wörtern, Sätzen, Sprache
  - allgemeineren Symbolen
  - mathematisch-abstrakten Objekten
- das Bewahren solcher Objekte (im Gedächtnis)
- das Denken als kognitives Operieren (Kombinieren, Verknüpfen, Assoziieren) mit den Objekten.

1.3 Anregungen

- Ist ein Parallelogramm symmetrisch?
- Warum ist ein DIN A4 Blatt so und ,,net anders"?
- Braucht man zum Würfeln unbedingt einen Würfel?
- Beschreiben Sie mit Worten eine Wendeltreppe!
- Warum vertauscht ein Spiegel ,,Links" und ,,Rechts", nicht aber ,,Oben" und ,,Unten"?
- Mit welcher Drehrichtung öffnen Sie eine Schraube an Ihrem Fahrrad?
- Mit welcher Drehrichtung spitzen Sie Ihren Bleistift?
- Ein Kind der fünften Klasse fragt Sie nach dem Satz des Pythagoras?
- Kann man den Boden eines Bades mit lauter gleichen Dreiecken fliesen?
- Warum sind Kanaldeckel kreisförmig?
- Ist der Regenbogen kreisförmig?
- Sie drehen einen Spielwürfel erst nach rechts, kippen ihn dann nach oben; bei einem anderen mit gleicher Ausgangslage führen Sie die Bewegungen in umgekehrter Reihenfolge aus. Sind anschließend beide Würfel in gleicher Lage?
- Sie sehen einen Spielwürfel an. Vorne ist ,,Eins", ,,Zwei" ist auf der rechten Seite. Welche Zahl ist oben?
- Warum ist unsere Welt dreidimensional?
- Beschreiben Sie mit Worten den Vorgang des Schuhebindens!
- Welchen Winkel nimmt die Sonnenscheibe (oder Mondscheibe) am Himmel ein?
- Welche n-zählige Drehsymmetrie sieht man bei Autorad-Felgen?
- Was bedeutet geometrisch Frühlingsanfang, Sommeranfang, Vollmond, Neumond, Sonnenfinsternis, Mondfinsternis ...?
- Warum gibt es Jägerstände?
- Warum sind in einem Tangentenviereck die ,,Gegenseitenlängensummen" gleich?
- Können Sie ein Viereck mit einer Linie in drei Teile teilen?
- Warum sind Spielkarten punktsymmetrisch?
- Ein Dreieck wird entlang einer Gerade durch den Schwerpunkt geteilt. Sind die Teile flächengleich?
- Kann ein regelmäßiges n-Eck mit $n = 15$, 17 oder 18 konstruiert werden?

2 Die Zeichenebene — wesentliche Begriffe

2.1 Menge von Punkten

2.1.1 Punkte in der Zeichenebene

Die *Zeichenebene* $\mathbb{E}$ kann als Menge von unendlich vielen Punkten aufgefasst werden.

Dies ist alles andere als eine korrekte vollständige mathematische Definition. Innerhalb der Fachmathematik wird die Zeichenebene als affine euklidische Ebene $\mathbb{A}^2$ modelliert.

2.1.2 Unendlichkeit Die Zeichenebene enthält in zweifacher Hinsicht unendlich viele Punkte

- Sie ist ,,im Großen" unendlich. Die Zeichenebene ist in alle Richtungen unendlich ausgedehnt
- Sie ist ,,im Kleinen" unendlich. Jede kleine Umgebung eines Punktes kann unendlich vergrößert (herausgezoomt) werden.

Beide Unendlichkeitseigenschaften vereinfachen die mathematische Auseinandersetzung mit der Geometrie. In der Wirklichkeit ,,stößt die Unendlichkeit an Grenzen". Zeichenblätter, Landkarten oder Grundstücke können weder unendlich ausgedehnt noch unendlich vergrößert werden.

2.1.3 Markierung Die *Punkte* der Zeichenebene werden — je nach Zweckmäßigkeit und Genauigkeitsanspruch — durch

$+$ gerade Kreuze,

$\times$ schrägstehende Kreuze,

$\circ$ Kreise oder

$\bullet$ Kreisscheiben

markiert und durch Großbuchstaben $A, B, C, P, Q, \ldots$ bezeichnet.

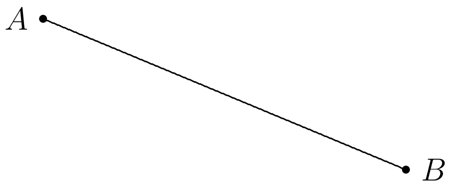
2.1.4 Ebene Figur

Eine beliebige Teilmenge der Zeichenebene, also eine Menge von Punkten, heißt *ebene Figur*. Aufgrund der Bildungsstandards hat auch der Begriff ,,Form" Eingang in die Schulpraxis gefunden.

Weiteres zu ebenen Figuren in Kapitel 5.

2.2 Strecken, Halbgeraden, Geraden

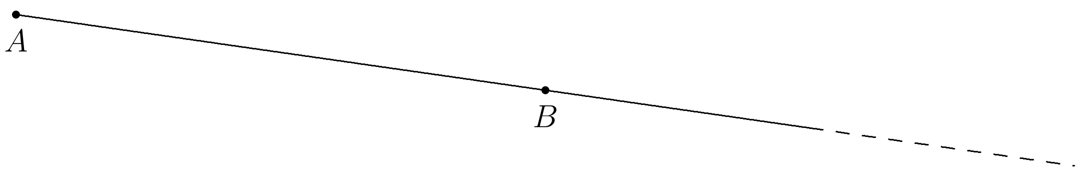
2.2.1 Definition: Strecke Die Menge aller genau zwischen zwei gegebenen Punkten A und B liegenden Punkte zusammen mit den Endpunkten wird bezeichnet mit *Strecke* $[AB]$. Es gilt also $[AB] = [BA]$.



2.2.2 Länge Die *Länge der Strecke* $[AB]$ wird mit $\overline{AB}$ bezeichnet. Im Beispiel: $\overline{AB} = 5,2\,\text{cm}$.

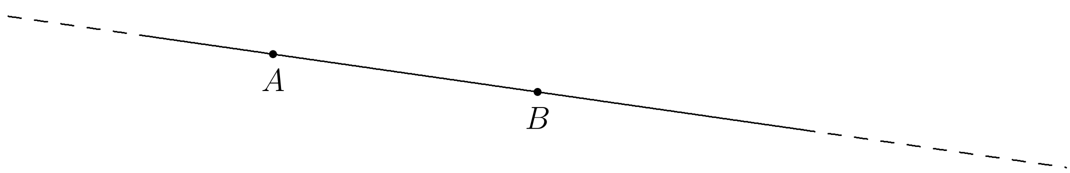
2.2.3 Definition: Halbgerade Verlängert man die Strecke $[AB]$ über B hinaus unbegrenzt und geradlinig, so entsteht die *Halbgerade* $[AB$.

Gelegentlich werden Halbgeraden — wie früher — als *Strahlen* bezeichnet.



Beachte: $[AB \neq [BA$.

2.2.4 Definition: Gerade Verlängert man die Strecke $[AB]$ über A und B hinaus unbegrenzt und geradlinig, so entsteht die *Gerade* AB. Es gilt $AB = BA$.



2.2.5 Kommentare

- Kleinbuchstaben werden sowohl für Strecken als Punktmengen, für Streckenlängen, für Halbgeraden und Geraden als Symbole benutzt. Man sollte sich dieser unglücklich-verwirrenden, gleichwohl unabänderlichen Tatsache bewusst sein.
- Die gestrichelte Darstellung erhöht den Eindruck der unendlichen Fortsetzung. Oft werden aber (Halb-)Geraden auch ohne Strichelung dargestellt. Der fehlende Begrenzungspunkt symbolisiert die Fortsetzung.
- In der Alltagssprache werden auch die Begriffe ,,Linie” oder ,,Strich” für gerade Objekte benutzt. Die Fachsprache kennt die ,,Grundlinie” eines Dreiecks, aber auch die ,,Kreislinie”.

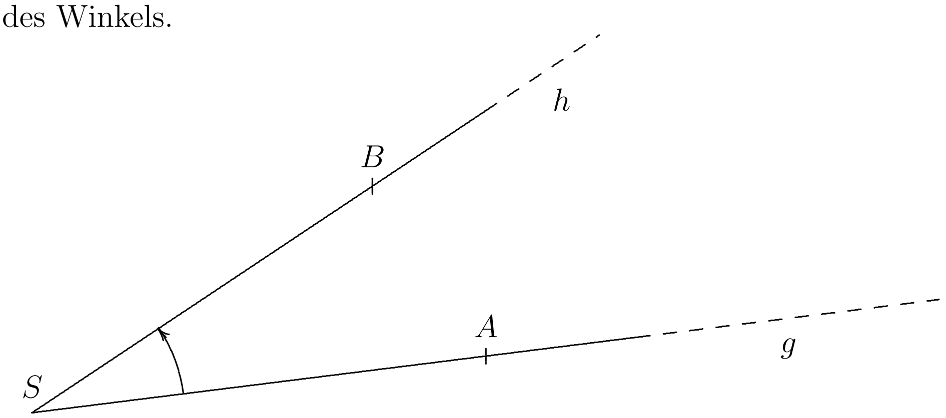
3 Winkel, Lot und Parallele

3.1 Winkel

3.1.1 Definition: Winkel

Ein geordnetes Paar (g, h) von Halbgeraden mit gemeinsamem Anfangspunkt S heißt *Winkel*. Er wird symbolisch als $\sphericalangle(g, h)$ angegeben.

In diesem Zusammenhang heißt g der *erste Schenkel*, h der *zweite Schenkel* und S *Scheitelpunkt* des Winkels.



3.1.2 Formel-Darstellung

Sind auf den beiden Schenkeln zwei Punkte $A \in g$ und $B \in h$ gegeben, so ist der Winkel auch durch die drei Punkte A, S, B festgelegt:

$$\sphericalangle\, ASB \quad = \quad \sphericalangle\, (g, h).$$

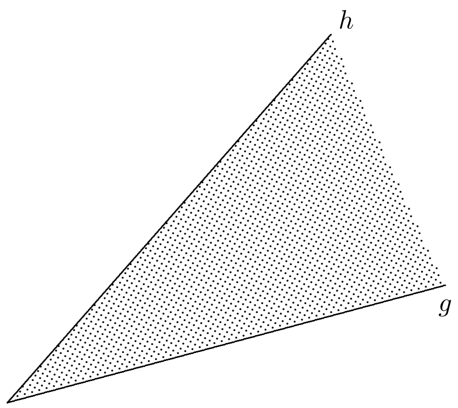
Man spricht hier von der *Drei-Punkte-Darstellung* und der *Zwei-Schenkel-Darstellung.*

3.1.3 Spezielle Winkel

Stimmen die beiden Halbgeraden überein, so heißt der Winkel *Vollwinkel.*
Ergeben die beiden Halbgerade eine Gerade, so spricht man vom *gestreckten Winkel.*

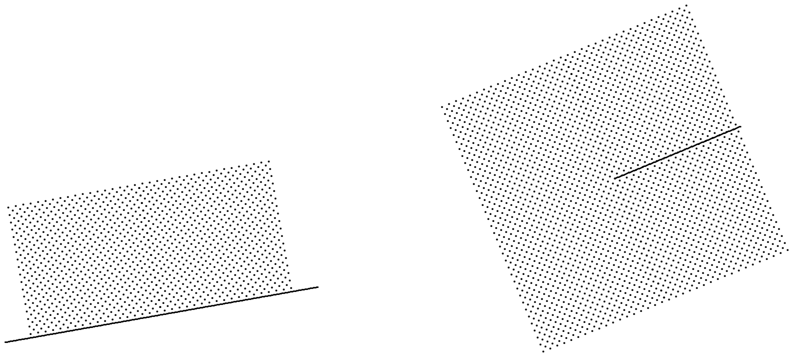
3.1.4 Winkelfeld

Ist ein Winkel $\sphericalangle\, (g, h)$ gegeben, so heißt die Menge der Punkte ,,zwischen" den Halbgeraden g und h das zugehörige *Winkelfeld.*



Ein bisschen unmathematisch ist dabei das Wort ,,zwischen". Man behilft sich mit der Konvention, dass der erste Schenkel g das Winkelfeld auf der Seite entgegen dem Uhrzeigersinn, der zweite auf der Seite im Uhrzeigersinn begrenzt.

Beachte, dass im Falle des gestreckten Winkels bzw. Vollwinkels das Winkelfeld eine Halbebene bzw. die gesamte Zeichenebene ist. Man kann also den Schnittpunkt gar nicht mehr erkennen.



3.1.5 Drehwinkel

Anschaulich verbindet man mit dem Begriff des Winkels auch die dynamische Auffassung, dass der erste Schenkel g in mathematisch positiver Richtung (Gegenuhrzeigersinn) bis zum zweiten Schenkel h bewegt wird. Man spricht dann vom *Drehwinkel*.

3.1.6 Definition: Winkelmaß

Jedem Winkel kann ein *Winkelmaß* — gemessen in Grad — zugeordnet werden.

Ein Winkel hat genau dann das Maß $1\,^\circ$, wenn bei 360-fachem Aneinanderlegen dieses Winkels der Vollwinkel entsteht.

Im Beispiel:

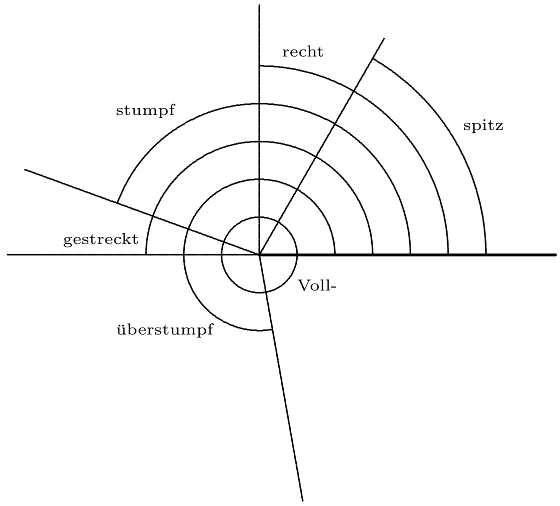
$$|\sphericalangle\, ASB| \;=\; |\sphericalangle\,(g,h)| \;=\; 27\,^\circ.$$

Winkel und Winkelmaße werden in der Regel mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet.

3.1.7 Bezeichnungen bei bestimmten Winkeln

Je nach Winkelmaß α gibt es verschiedene Bezeichnungen für Winkel.

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	*spitz*		$\alpha = 90^\circ$	*recht*
$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	*stumpf*		$\alpha = 180^\circ$	*gestreckt*
$180^\circ < \alpha < 360^\circ$	*überstumpf*		$\alpha = 360^\circ$	*Voll(-winkel)*



3.1.8 Orientierung

Die Orientierung eines Winkels ist eine mathematisch klare, aber begrifflich diffizile Angelegenheit, die wir hier nicht genau herausarbeiten wollen. Es sei nur bemerkt, dass die Änderung der Orientierung eines Winkels damit korrespondiert, dass

- die Rollen von erstem und zweitem Schenkel vertauscht werden,
- bzw. die beiden Schenkel an der Winkelhalbierenden gespiegelt werden,
- Winkelmaße mit -1 multipliziert werden,
- in Zeichnungen der Kreisbogenpfeil seine Richtung ändert.

3.1.9 Aktivitäten

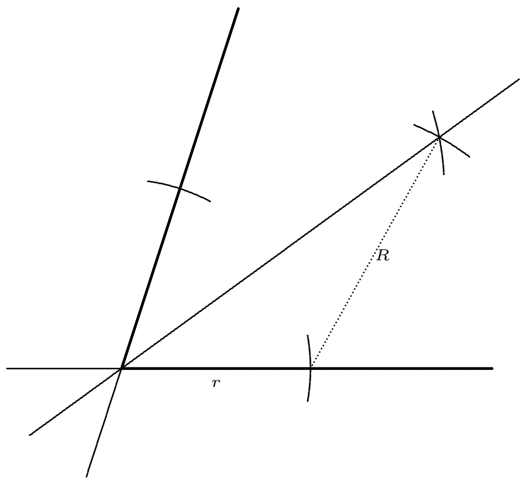
- Wie werden Winkel mit dem GEO-Dreieck bzw. Winkelmesser gemessen?

  Schwierigkeiten ergeben sich vor allem im Zusammenhang mit Winkelmaßen $> 90^\circ$.
- Stelle Winkel mit den beiden Armen dar!
- Uhrzeiten: Winkel zwischen den Zeigern, Überstreichen der Zeiger.
- Geographie: Längen und Breitenkreise. Eichstätt: 49°N, 11°O.
- Astronomie: Sehwinkel Sonne und Mond.
- Sport: ,,Verkürzung" des Winkels.
- Konstruktion von Winkeln mit bestimmten Maßen. Siehe nächstes Unterkapitel 3.2.

3.2 Konstruktionen mit Winkeln

3.2.1 Winkelhalbierende

Zu einem gegebenen Winkel kann die Symmetrieachse konstruiert werden.



In diesem Zusammenhang heißt die Symmetrieachse die *Winkelhalbierende*. Es entstehen zwei Winkel mit dem halben Maß.

3.2.2 Beschreibung der Konstruktion

(1) Um den Scheitelpunkt des gegebenen Winkels werden zwei Kreisbögen mit gleichem Radius r, die die Schenkel schneiden, gezogen.

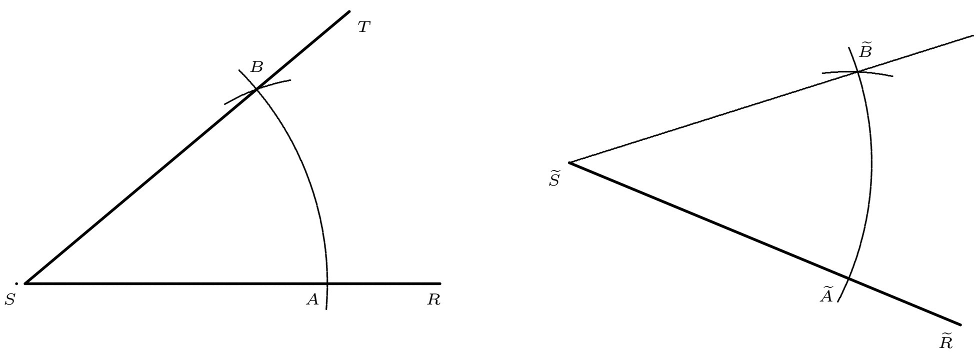
(2) Um die beiden Schnittpunkte werden zwei Kreisbögen mit gleichem (genügend großem) Radius R gezogen. Sie schneiden sich in einem neuen Schnittpunkt.

(3) Die Halbgerade durch den Scheitelpunkt und den neuen Schnittpunkt ist die Winkelhalbierende.

3.2.3 Kommentare

- Man kann die Winkelhalbierende als Halbgerade oder Gerade konstruieren. Die Gerade halbiert auch den zugehörigen Scheitelwinkel.
- Mit abstrakt-algebraischen Methoden kann man beweisen, dass die Drittelung eines Winkels per Konstruktion im allgemeinen nicht möglich ist.

3.2.4 Übertragung eines Winkels



Vorgegeben sind ein Winkel $\sphericalangle RST$ und ein freier Schenkel $\widetilde{S}\widetilde{R}$.

Beschreibung der Konstruktion

(1) Ziehe Kreise mit gleichem Radius um die beiden Scheitelpunkte S und $\widetilde{S}$. Es entstehen die Schnittpunkte $A, \widetilde{A}$ der Kreise mit dem jeweils ersten Schenkel und ein Schnittpunkt B des Kreises mit dem zweiten Schenkel des gegebenen Winkels.

(2) Ziehe einen Kreisbogen um $\widetilde{A}$ mit Radius $\overline{AB}$. Es entsteht ein Schnittpunkt $\widetilde{B}$ des Kreises um $\widetilde{S}$ und des Kreisbogens um $\widetilde{A}$.

(3) Die Halbgerade $[\widetilde{S}\widetilde{B}$ ist der zweite Schenkel des übertragenen Winkels.

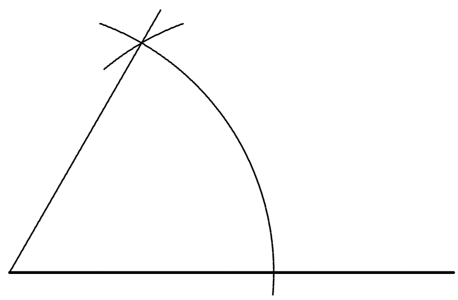
3.2.5 Konstruktion des $90\,°$-Winkels

Die Konstruktion des Lotes wird gleich in Abschnitt 3.3.5 beschrieben.

Tatsächlich handelt es sich bei der dort beschriebenen Konstruktion um die der Winkelhalbierenden des gestreckten ($180\,°$) Winkels.

3.2.6 Konstruktion des $60\,°$-Winkels

Die Idee für die Konstruktion besteht darin, ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren.



Beschreibung der Konstruktion:

(1) Um den Anfangspunkt der gegebenen Halbgerade wird ein Kreis mit Radius r gezogen.

(2) Um den Schnittpunkt des Kreises mit der Halbgeraden wird ein Kreisbogen mit gleichem Radius r, der den Kreis schneidet, gezogen.

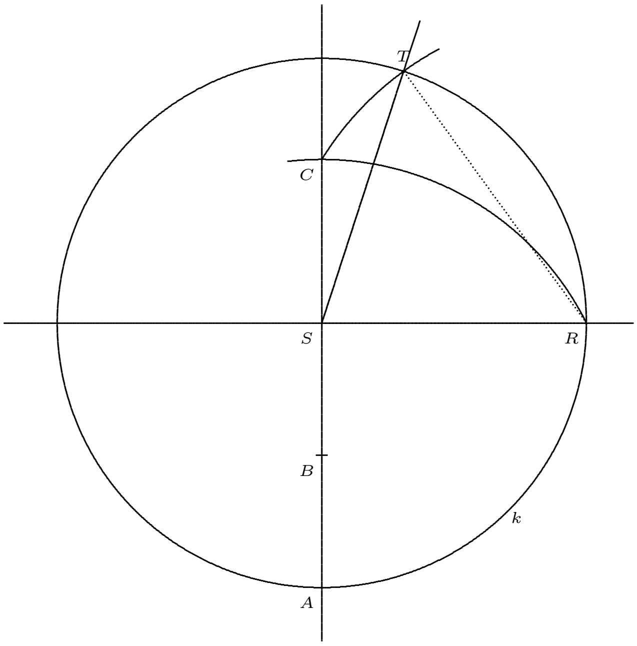
(3) Die Halbgerade durch den Anfangspunkt und den Schnittpunkt von Kreis und Kreisbogen ist der zweite Schenkel des gesuchten Winkels.

3.2.7 Konstruktion weiterer Winkel

Weiter können dann Winkel mit Maßen konstruiert werden, deren Maß sich durch (wiederholte) Addition, Subtraktion oder Halbierung aus den Maßen $60\,°$ oder $90\,°$ ergibt.

Es gibt noch weitere Winkel(-maße), die konstruiert werden können, beispielsweise der $72\,°$-Winkel wie folgt.

3.2.8 Konstruktion des 72°-Winkels



Die Idee für diese schon etwas aufwändigere Konstruktion besteht darin, ein Mittelpunkts-Teildreieck RST des regelmäßiges Fünfecks zu konstruieren.

Beschreibung der Konstruktion: Vorgegeben ist die Halbgerade $[SR$ als erster Schenkel des gesuchten Winkels.

(1) Errichte das Lot auf SR durch S.

(2) Ziehe einen Kreis k um S, beispielsweise mit Radius $\overline{SR}$. Schnittpunkt A von Kreis und Lot.

(3) Konstruiere den Mittelpunkt B von $[SA]$.

(4) Ziehe einen Kreisbogen um B mit Radius $\overline{BR}$. Schnittpunkt C des Kreisbogens mit Halbgerade $[BS$

(5) Ziehe einen Kreisbogen um R mit Radius $\overline{RC}$. Schnittpunkt T des Kreisbogens mit dem Kreis k.

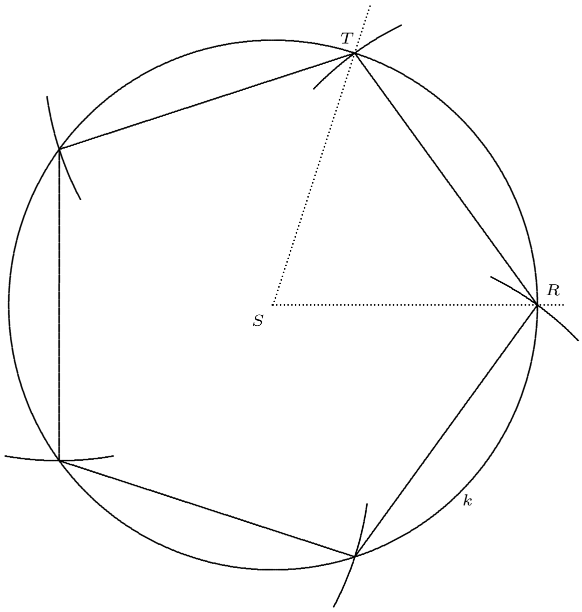
(6) Die Halbgerade $[ST$ ist der gesuchte zweite Schenkel.

(7) Zusatz: Durch Abtragen der Streckenlänge $\overline{RT}$ entlang des Kreises k kann das regelmäßige Fünfeck vervollständigt werden.

3.2.9 Zusatz: Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks

Ist ein Kreis k vorgegeben, so kann die obige Konstruktion 3.2.8 zu einer Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks wie folgt erweitert werden.

1. Konstruiere den Mittelpunkt S des Kreises und wähle einen Punkt R auf der Kreislinie.
2. Führe wie oben die Konstruktion des $72\,^\circ$-Winkels $\sphericalangle\, RST$ durch.
3. Durch Abtragen der Streckenlänge $\overline{RT}$ entlang des Kreises kann das regelmäßige Fünfeck vervollständigt werden.



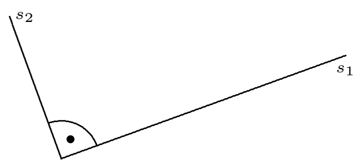
3.3 Rechter Winkel und Lot

3.3.1 Definition: Rechter Winkel

Ein Winkel heißt ein *rechter Winkel*, wenn er das Maß $90°$ hat.

3.3.2 Darstellung

In Zeichnungen werden rechte Winkel durch einen Punkt gekennzeichnet.



3.3.3 Bemerkung

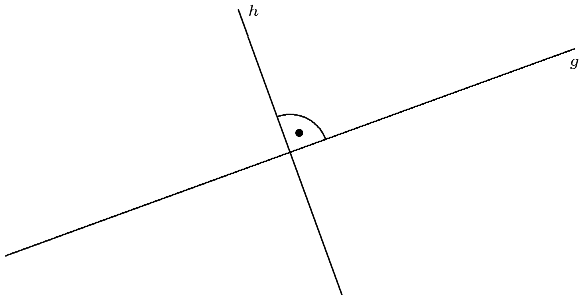
Zur Erfassung des Begriffs des rechten Winkels ist die Winkelmessung eigentlich gar nicht nötig. Er ist allein schon dadurch bestimmt, dass bei zweimaliger oder viermaliger Aneinanderlegung ein gestreckter Winkel bzw. ein Vollwinkel entsteht.

3.3.4 Definition: Lot und Senkrechtstehen

Man sagt, dass zwei sich schneidende Geraden *senkrecht* oder *lotrecht* zueinander stehen, wenn der Schnittwinkel ein rechter Winkel ist.

Man sagt dann auch, dass die eine Gerade eine *Lotgerade* (kurz: ein *Lot*) für die andere ist.

Entsprechendes gilt für Halbgeraden und Strecken.



Symbolisch: $g \perp h$.

3.3.5 Konstruktion: Lot durch einen Punkt

Zeichne oder konstruiere (ZoK) zu einer gegebenen Geraden g und einem gegebenem Punkt P (auf oder außerhalb der Geraden) ein Lot auf g durch P.

- Konstruktion mittels Zirkel und Lineal

  1. Ziehe einen Kreis um P und bestimme die beiden Schnittpunkte G_1, G_2 der Kreislinie mit g.
  2. Ziehe um G_1 und G_2 zwei Kreise mit **gleichen** Radien.
  3. Die Gerade durch die beiden Schnittpunkte K_1 und K_2 der beiden Kreise ist das gesuchte Lot.

- Zeichnen mittels GEO-Dreieck

  1. Lege das GEO-Dreieck so auf, dass die Symmetrieachse des GEO-Dreiecks auf der Geraden g zu liegen kommt.
  2. Verschiebe dann das GEO-Dreieck so lange, bis die Hypotenuse (= längste Seite) durch den Punkt geht.
  3. Die Hypotenuse bildet das gesuchte Lot.

Diese Beschreibungen (und weitere, die noch kommen) sind gute Beispiele für das ,,Learning by Doing".

Eine weitere ganz andere Alternative ist der Einsatz von Dynamischer Geometrie-Software (DGS).

3.3.6 Kontextfelder

- Warum spricht man vom rechten Winkel?

  In Bezug auf zahllose handwerkliche, technische, logistische, wirtschaftliche Situationen erweist sich der rechte Winkel als der RICHTIGE Winkel.

- Die Schwerkraft wirkt senkrecht zur Erdoberfläche:
  - Lässt man einen Gegenstand (ohne Schubs) los, so fällt er senkrecht auf den Boden.
  - Eine Kerzenflamme richtet sich immer senkrecht aus.
  - Das Senkblei richtet sich genau nach unten aus.

- Stabilität unter dem Einfluss der Schwerkraft. Natürliche, künstliche und technische Dinge aller Art stehen auf der Erde viel stabiler, wenn sie senkrecht zur Erdoberfläche stehen.
  - Bäume, Halme, Stalaktiten und Stalagmiten in Tropfsteinhöhlen, Tiere und Menschen
  - Gebäude, Türme, Masten, Ziegelsteine
  - Möbel, Bierkastenturm, Balancieren eines Stocks

- Auftreten rechter Winkel in der Schul- und Alltagswelt
  - Blatt Papier, Tapete, Verpackungen, Möbel, Architektur
  - Der rechte Winkel an der Schultafel, beim GEO-Dreieck
  - Werkzeuge, die einen (exakten) rechten Winkel beinhalten: Schublehre, Papierschneider
  - Kochsalzkristalle

- Ästhetik: Gleichmaß $\leftrightsquigarrow$ Hundertwasser

- Aktivitäten:
  - Ein rechter Winkel kann durch zweimaliges Falten eines Papierfetzens erzeugt werden.
  - Schneide von einem Blatt Papier ein Stück ab so, dass ein rechter Winkel entsteht.
  - Turmbau mit (irgendwelchen) Bausteinen, Getränkekisten oder Zuckerwürfeln.
  - Ein hoher Stapel aus Büchern.
  - Balancieren eines Besenstiels oder Zeigestocks.
  - Ausprobieren eines „Senkbleis" oder einer Wasserwaage.

3.4 Parallelität

3.4.1 Definitionen von Parallelität

Die folgenden Aussagen stellen verschiedene, aber eben äquivalente Definitionen, von ,,Parallelität in der Zeichenebene” bereit.

Zwei Geraden g und h in der Zeichenebene heißen *parallel* zueinander, wenn sie ...

- sich in keinem Punkt der (unendlich ausgedehnten) Zeichenebene schneiden oder identisch sind.

  Diese Definition ist zugleich simpel und abstrakt, da sie völlig ohne Hilfsbegriffe wie ,,Lot” oder ,,Winkel”' auskommt. Beim alltäglichen Umgang mit Parallelität ist sie nicht gut verwendbar.

- ,,an jeder Stelle” den gleichen Abstand haben.

  Bei Verwendung dieser Definition muss der Begriff ,,Abstand” vorab geklärt sein. Nichtsdestoweniger ist sie vergleichsweise anschaulich und lebensnah.

- ein gemeinsames Lot ℓ haben.

  Bei Verwendung dieser Definition muss der Begriff ,,Lot” vorab geklärt sein.

- von einer dritten Gerade unter dem gleichen Winkel geschnitten werden.

  Bei Verwendung dieser Definition muss der Begriff ,,Winkel” vorab geklärt sein. Sie nimmt den eigentlichen ,,Grundsatz über Stufenwinkel” vorweg.

3.4.2 Ergänzungen und Kommentare

1. Sind zwei Geraden parallel zueinander, so kann dies symbolisch ausgedrückt werden durch

   $$g \,||\, h.$$

2. Da Strecken und Halbgeraden immer zu Geraden verlängert werden können, lässt sich auch für zwei Strecken, Halbgeraden oder Geraden, angeben, ob sie parallel sind.

3. Man mache sich bewusst, dass für zwei Geraden der Zeichenebene genau eine der drei Konstellationen auftritt:

   - Die beiden Geraden stimmen überein (und sind deshalb parallel).
   - Die beiden Geraden sind verschieden und parallel.
   - Die beiden Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

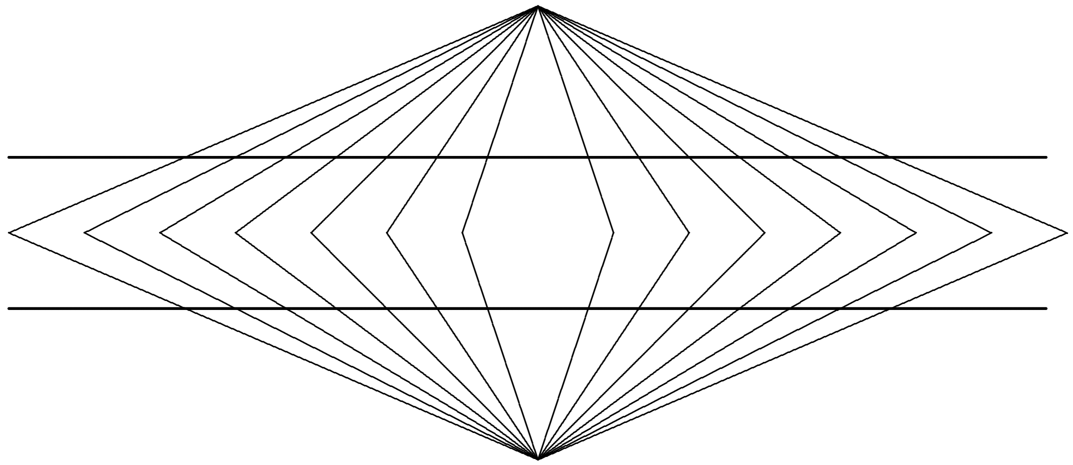
4. Im dreidimensionalen Raum ist die obige Definition unbrauchbar. Zwei Geraden im Raum haben immer ein gemeinsames Lot.

3.4.3 Beispiele

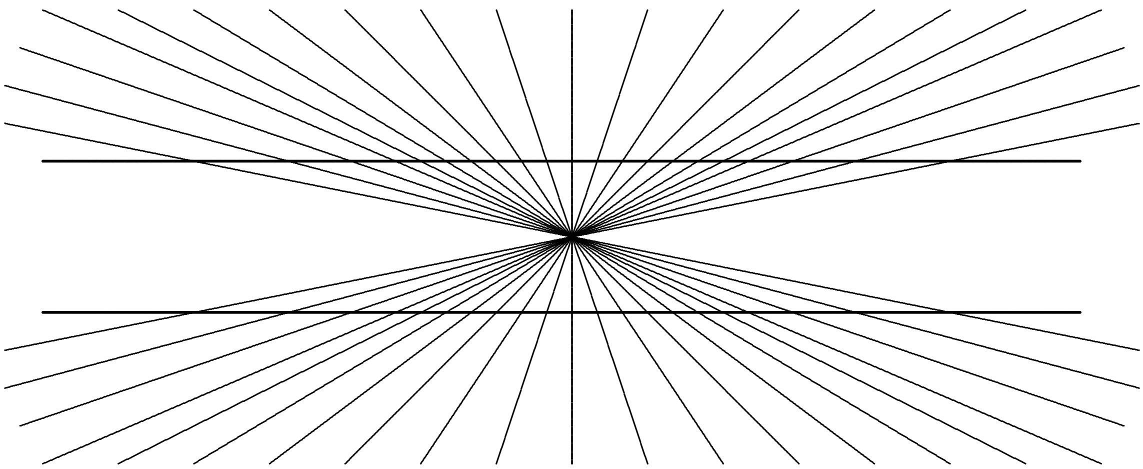
Veranschaulichende Beispiele aus der Sachwelt sind:

- Langlaufloipen, Eisenbahnschienen
- Parallelschwung beim Skifahren.
- In etwa: Lichtstrahlen, die von der Sonne kommen.
- Optische Täuschungen mit Parallelität

Parallel ?



Parallel ?

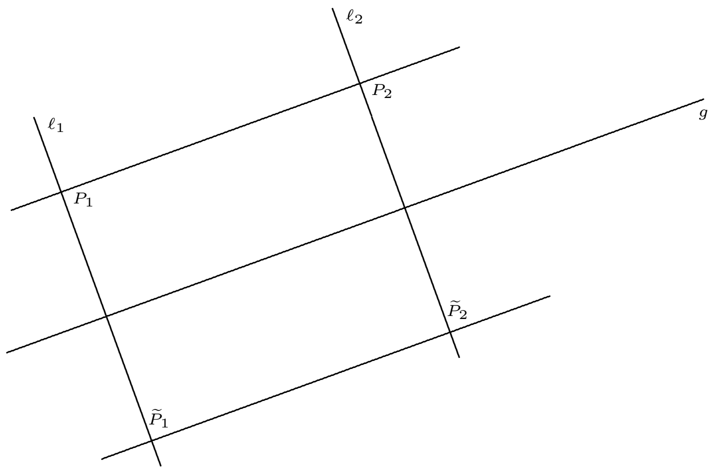


3.4.4 Konstruktion: Parallele mit Abstand

Zeichne oder konstruiere (ZoK) zu einer gegebenen Geraden g eine parallele Gerade (oder beide) mit gegebenem Abstand d!

Die folgenden Möglichkeiten werden in der Vorlesung dargestellt. Es wird davon ausgegangen, dass das ZoK von Lotgeraden bereits bekannt ist (vgl. Abschnitt 3.3.5).

- Lot auf Lot
  1. ZoK eine Lotgerade ℓ auf die Gerade g.
  2. Bestimme auf der Lotgeraden ℓ den Punkt P (oder die beiden Punkte $P, \widetilde{P}$) im Abstand d.
  3. ZoK das Lot auf ℓ durch P (und $\widetilde{P}$).
- Zweimal Lot
  1. ZoK zwei Lotgeraden ℓ_1, ℓ_2 auf die Gerade g.
  2. Bestimme auf beiden Lotgeraden die Punkte P_1, $\widetilde{P}_1$ und P_2, $\widetilde{P}_2$ mit Abstand d zur Geraden g.
  3. ZoK die Geraden P_1P_2 und $\widetilde{P}_1\widetilde{P}_2$.



Hilfsmittel beim Zeichnen ist das GEO-Dreieck. Eventuell können auch die eingeprägten Parallellinien auf dem GEO-Dreieck herangezogen werden.

Hilfsmittel beim Konstruieren sind ausschließlich das Lineal und der Zirkel.

Eine weitere ganz andere Alternative ist der Einsatz von Dynamischer Geometrie-Software (DGS).

3.4.5 Konstruktion: Parallele durch Punkt

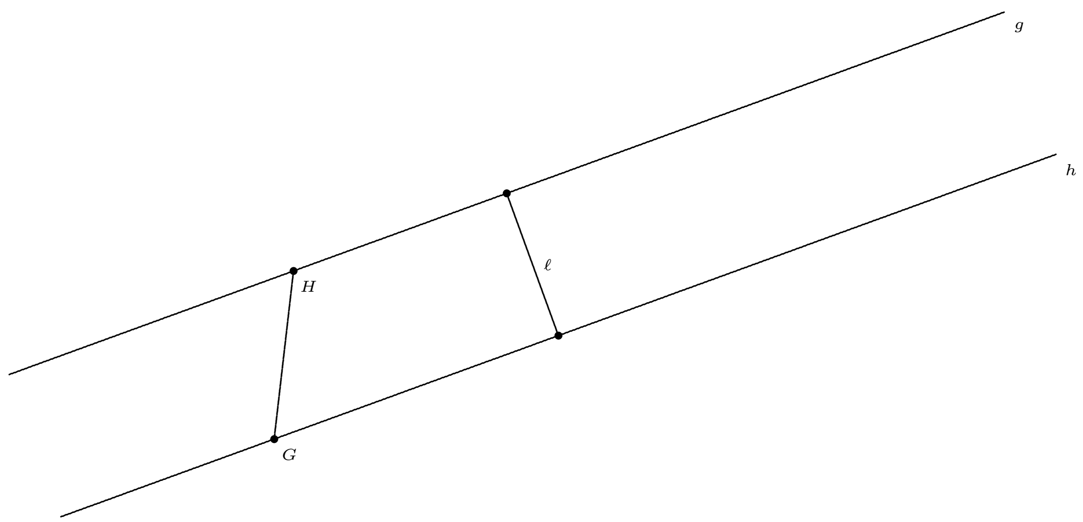
Zeichne oder konstruiere zu einer gegebenen Geraden g eine parallele Gerade durch einen gegebenen Punkt P.

Die folgenden Möglichkeiten werden in der Vorlesung dargestellt:

- Lot auf Lot
  1. ZoK die Lotgerade ℓ vom gegebenem Punkt P auf die Gerade g („Lotfällen").
  2. ZoK das Lot auf ℓ durch P.
- Konstruktion mittels Parallelogramm-Idee.
  1. Wähle zwei Punkte G_1 und G_2 auf der Geraden g.
  2. Ziehe einen Kreis um G_2 mit Radius $\overline{G_1P}$.
  3. Ziehe einen Kreis um P mit Radius $\overline{G_1G_2}$.
  4. Die beiden Kreise haben zwei Schnittpunkte S_1 und S_2.
  5. Eine der beiden Geraden PS_1 oder PS_2 ist die gesuchte parallele Gerade.
- Zeichnen mittels Parallelverschiebung des GEO-Dreiecks entlang eines Lineals.
  1. Lege eine Seite s des GEO-Dreiecks an die gegebene Gerade.
  2. Lege das Lineal an eine andere Seite des GEO-Dreiecks.
  3. Verschiebe das GEO-Dreieck entlang dem Lineal (als Gleitschiene), bis die Seite s durch den Punkt P geht.

3.4.6 Definition: Abstand von parallelen Geraden

Sind zwei Geraden g und h parallel, so nennt man die Länge einer Lotstrecke ℓ zwischen den beiden Geraden den *Abstand* der beiden Geraden.

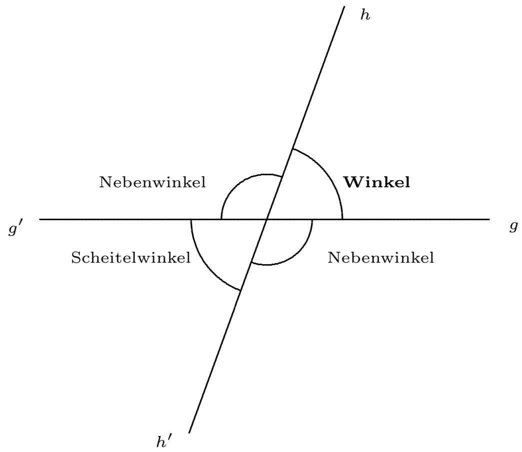


Dieser Abstand ist minimal unter allen Längen von Strecken $[GH]$ mit Endpunkten G auf g und H auf h.

↷ Überqueren einer Straße, eines Flusses.

3.5 Winkel an einer Einfach-Kreuzung

3.5.1 Definitionen: Nebenwinkel und Scheitelwinkel



1. Kehrt man den ersten Schenkel g eines Winkels (g, h) um und vertauscht dann die beiden Schenkel, so entsteht ein neuer Winkel (h, g').

2. Kehrt man den zweiten Schenkel h eines Winkels (g, h) um und vertauscht dann die beiden Schenkel, so entsteht ein neuer Winkel (h', g).

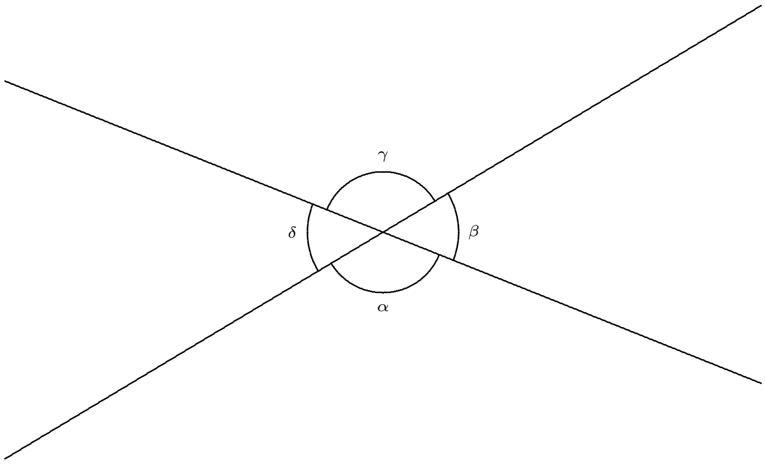
Diese beiden Winkel heißen *Nebenwinkel* zu dem ursprünglichen Winkel (g, h).

3. Kehrt man beide Schenkel g und h eines Winkels (g, h) um, so entsteht ein neuer Winkel (g', h').

Dieser heißt *Scheitelwinkel* zu dem ursprünglichen Winkel (g, h).

3.5.2 Situation: Einfach-Kreuzung

Es schneiden sich zwei (verschiedene) Geraden. Am Schnittpunkt treten vier Schnittwinkel auf, die mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezeichnet werden.



3.5.3 Grundsatz: Scheitelwinkel und Nebenwinkel

Bezüglich der obigen Situation gilt

(i) (Scheitelwinkelsatz) Scheitelwinkel sind gleich groß:

$$\alpha = \gamma.$$

(ii) (Nebenwinkelsatz) Nebenwinkel ergänzen sich zu $180\,^\circ$:

$$\beta = 180\,^\circ - \alpha.$$

3.5.4 Bemerkungen

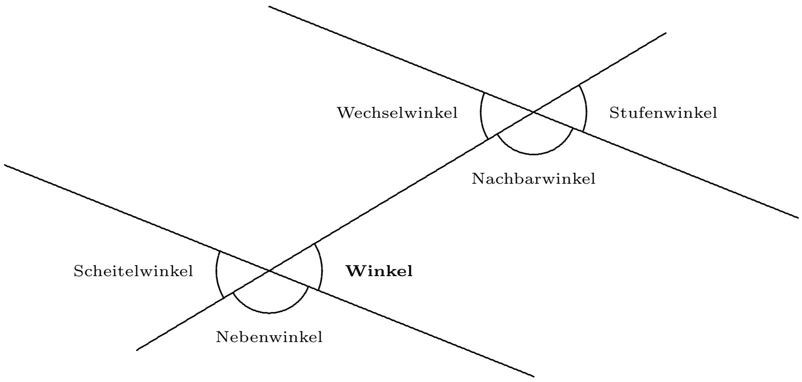
1. Die obige Aussage nennen wir Grundsatz, da sie im Rahmen der Schulmathematik nicht weiter begründbar ist. Man kann diesen Grundsatz beispielsweise aus der Definition des Winkelmaßes in der analytischen Geometrie heraus beweisen.

2. Natürlich gelten auch die analogen Aussagen

$$\beta = \delta \qquad \text{bzw.} \qquad \delta = 180\,^\circ - \gamma.$$

3.6 Winkel an einer Doppel-Kreuzung

3.6.1 Definitionen: Stufen- und Wechselwinkel



1. Verschiebt man einen Winkel parallel entlang eines seiner Schenkel, so entsteht ein neuer Winkel.

   Dieser Winkel heißt *Stufenwinkel* (= *F-Winkel*) zu dem ursprünglichen Winkel.

2. Verschiebt man einen Winkel parallel entlang eines seiner Schenkel, so kann man zu dem parallel verschobenen Winkel den Scheitelwinkel bilden.

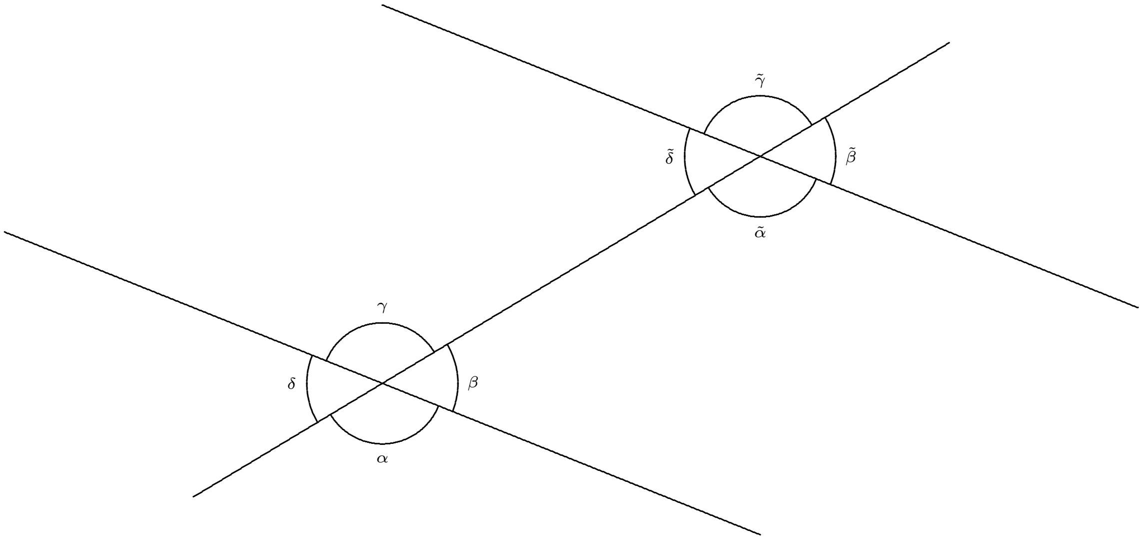
   Dieser Winkel heißt der *Wechselwinkel* (= *Z-Winkel*) zu dem ursprünglichen Winkel.

3. Verschiebt man einen Winkel parallel entlang eines seiner Schenkel, so kann man zu dem parallel verschobenen Winkel den Nebenwinkel bilden, der dem ursprünglichen Winkel zugewandt ist.

   Dieser Winkel heißt der *Nachbarwinkel* (= *E-Winkel*) zu dem ursprünglichen Winkel.

3.6.2 Situation: Doppel-Kreuzung

Zwei (verschiedene) parallele Geraden werden von einer dritten Gerade geschnitten. An den beiden Schnittpunkten treten acht Schnittwinkel auf, die mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}$ bezeichnet werden.



3.6.3 Satz: Winkel an einer Doppelkreuzung

In Bezug auf die obige Situation gilt

(i) (Stufenwinkelsatz) Stufenwinkel sind gleich groß:

$$\alpha = \tilde{\alpha}.$$

(ii) (Wechselwinkelsatz) Wechselwinkel sind gleich groß:

$$\beta = \tilde{\delta}.$$

(iii) (Nachbarwinkelsatz) Nachbar-Winkel ergänzen sich zu 180°:

$$\beta = 180^\circ - \tilde{\alpha}.$$

3.6.4 Kontextfelder

- Gleis-Kreuzung, Straßenränder bei einer Straßenkreuzung
- Fachwerk-Konstruktionen: Balken an Häuserfronten
- Stahlstreben bei technischen Konstruktionen: Brücken, Hochspannungsmasten, Fahrgestellen, Flugzeugskeletten

3.6.5 Bemerkungen

1. Der Stufenwinkelsatz ist wieder ein Grundsatz, der hier nicht weiter begründet wird. Er ist unmittelbar mit dem Begriff der Parallelität verknüpft. Vergleiche dazu die vierte Definition der Parallelität in 3.4.1.

   Die anderen beiden Sätze lassen sich über den Scheitelwinkelsatz bzw. Nebenwinkelsatz aus dem Stufenwinkelsatz herleiten.

2. Natürlich gelten viele weitere Zweier-Gleichheiten, die sich so zusammenfassen lassen:

$$\alpha = \gamma = \tilde{\alpha} = \tilde{\gamma} \qquad \text{bzw.} \qquad \beta = \delta = \tilde{\beta} = \tilde{\delta}.$$

3. Es sind auch die Kehrsätze gültig: Wenn zwei Geraden von einer dritten so geschnitten werden, dass die Stufenwinkel (oder Wechselwinkel) übereinstimmen, dann sind sie parallel.

4 Abbildungen der Zeichenebene

4.1 Grundlagen

4.1.1 Definition: Abbildung der Zeichenebene

Von einer *geometrischen Abbildung (in der Zeichenebene)* spricht man, wenn

♣ **jedem** Punkt P der Zeichenebene

♠ **genau ein** Punkt P' der Zeichenebene

zugeordnet wird. P' heißt dann *Bildpunkt* von P.

Die geometrischen Abbildungen der Schulgeometrie sind bijektiv. Das bedeutet, dass auch

♡ **jedem** Bildpunkt P' der Zeichenebene

♢ **genau ein** Urbildpunkt P der Zeichenebene

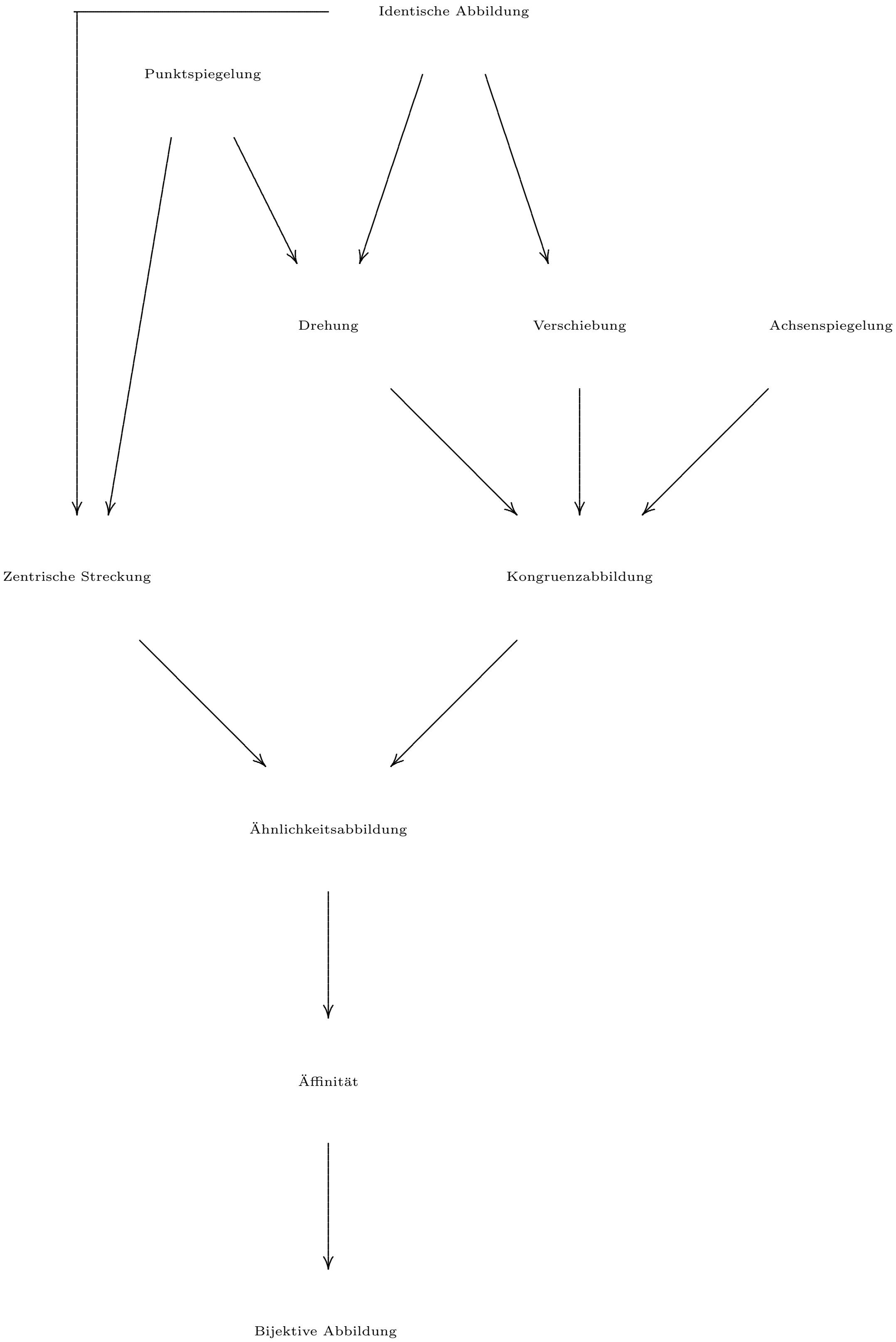
zugeordnet werden kann.

4.1.2 Kommentare

- Geometrische Abbildungen sind also spezielle Abbildungen, wie sie in der Grundlagenmathematik bzw. Mengenlehre definiert werden. Die Zeichenebene ist sowohl Definitionsmenge als auch Wertemenge der geometrischen Abbildung.
- Man sagt weiter, eine ebene Figur $\mathcal{F}$ wird auf eine andere Figur $\mathcal{F}'$ (*Bildfigur*) abgebildet, wenn jeder Punkt P von $\mathcal{F}$ auf einen Punkt P' von $\mathcal{F}'$ abgebildet wird.
- Ein Punkt der Zeichenebene heißt *Fixpunkt* der geometrischen Abbildung, wenn er auf sich selbst abgebildet wird.
- Eine Figur (Gerade, Strecke, Kreis) heißt *Fixfigur* (*Fixgerade*, *Fixkreis*), wenn sie auf sich selbst abgebildet wird.

  Eine Fixfigur muss nicht notwendig Fixpunkte enthalten: Wird eine Kreislinie um 90° gedreht, so ist sie Fixfigur ohne Fixpunkte.
- Eine Abbildung, bei deren zweimaliger Ausführung die Ausgangssituation wiederhergestellt ist, heißt *Involution*.
- Im Zusammenhang mit perspektivischen Darstellungen (Schrägbildern, Technisches Zeichnen) spielen Projektionen eine große Rolle. Diese Abbildungen sind grundsätzlich nicht bijektiv.
- Viele, aber nicht alle, bisherigen Ausführungen können auch auf Abbildungen im Raum (oder höherdimensionale Räume) verallgemeinert werden.

4.2 Überblick über die Abbildungen der Schulgeometrie



4.3 Achsenspiegelung

4.3.1 Definition der Achsenspiegelung: Senkrechter Abstand

Es sei g eine Gerade.

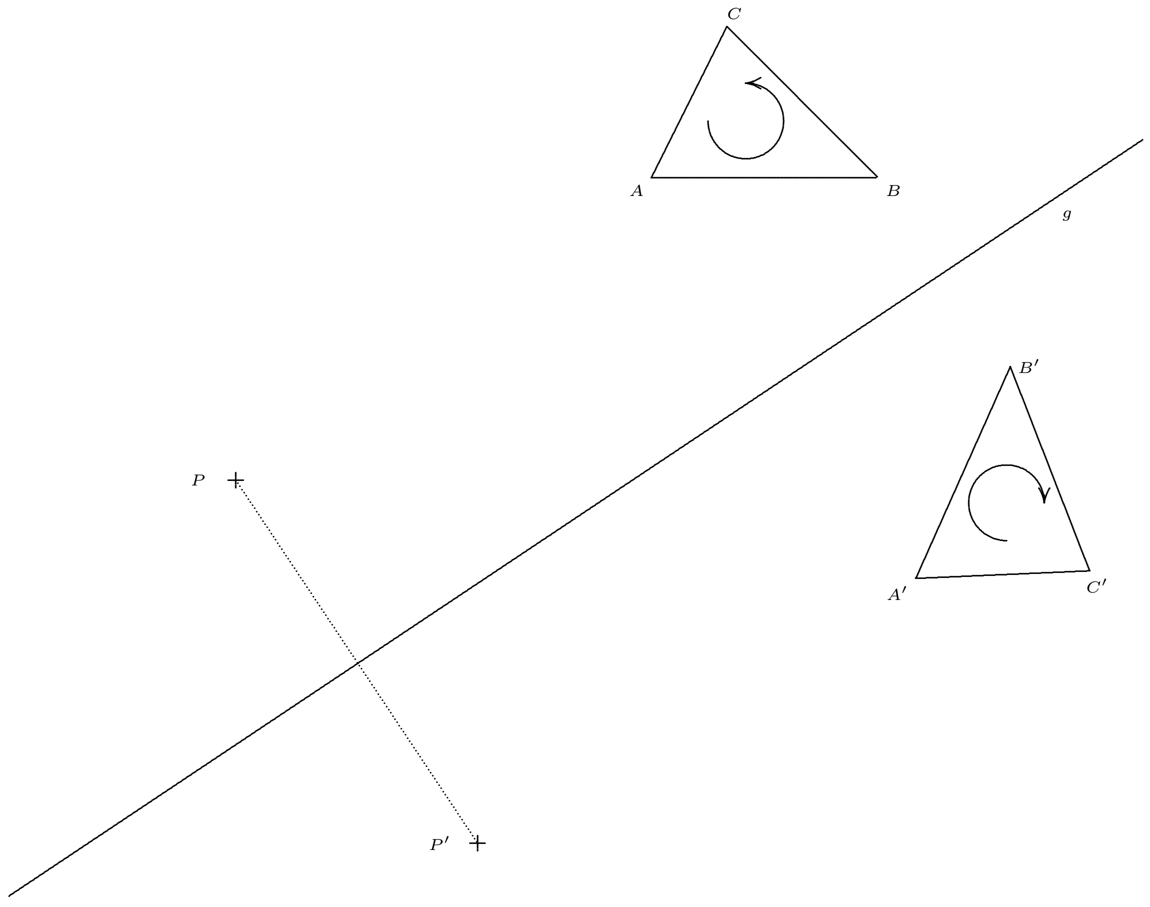
Eine geometrische Abbildung heißt *Achsenspiegelung (bzgl. der Geraden g)*, wenn für jeden Punkt P und seinen Bildpunkt P' gilt:

Die Strecke [PP'] wird von der Gerade g senkrecht halbiert.

Da die Punkte auf der Geraden g von dieser Eigenschaft nicht präzise erfasst werden, vereinbart man noch, dass diese auf sich selbst abgebildet werden.

Man sagt dann, dass P an g auf P' achsengespiegelt wird. Die Gerade g heißt in diesem Zusammenhang *Symmetrieachse*.

4.3.2 Diagramm zur Achsenspiegelung



4.3.3 Anschauliche Deutung

Anschaulich bedeutet die Achsenspiegelung bzgl. einer Geraden g, dass die Zeichenebene längs g „geteilt" und dann die beiden Teile übereinandergefaltet werden. Punkt P und Bildpunkt P' kommen zur Deckung.

4.3.4 Konstruktion des achsengespiegelten Punkts mittels Lot

Daraus ergibt sich die folgende Handlungsanweisung für die Achsenspiegelung eines Punktes P an einer Achse g:

- Fälle ein Lot von P auf die Achse g!
- Mit Zirkel oder GEO-Dreieck: Bestimme den Bildpunkt P' auf diesem Lot, so dass sein Abstand zu g gleich groß ist wie der Abstand von P zu g!

4.3.5 Äquivalente Definition: Gleicher Abstand

Eine geometrische Abbildung heißt *Achsenspiegelung (bzgl. der Geraden g)*, wenn jeder Punkt P so auf den Bildpunkt P' abgebildet wird, dass

$$\overline{PG_1} = \overline{P'G_1} \quad \text{und} \quad \overline{PG_2} = \overline{P'G_2},$$

wobei G_1 und G_2 zwei beliebige verschiedene Punkte auf der Geraden g sind.

4.3.6 Konstruktion des achsengespiegelten Punkts mittels Zirkel

Daraus ergibt sich die folgende Konstruktion für einen achsengespiegelten Punkt:

- Wähle zwei beliebige Punkte $G_1 \in g$ und $G_2 \in g$ aus. (Günstig, wenn sie nicht zu nahe beieinanderliegen.)
- Ziehe einen Kreis um G_1 durch P.
- Ziehe einen Kreis um G_2 durch P.
- Der zweite Schnittpunkt der beiden Kreise ist der gesuchte Bildpunkt P'.

4.3.7 Äquivalente Definition: Gleicher Winkel

Eine geometrische Abbildung heißt *Achsenspiegelung (bzgl. der Geraden g)*, wenn jeder Punkt P so auf den Bildpunkt P' abgebildet wird, dass

$$\underbrace{|\sphericalangle(PG_1, g)| = |\sphericalangle(P'G_1, g)|}_{\text{entgegengesetzt orientiert}} \quad \text{und} \quad \underbrace{|\sphericalangle(PG_2, g)| = |\sphericalangle(P'G_2, g)|}_{\text{entgegengesetzt orientiert}},$$

wobei G_1 und G_2 zwei beliebige verschiedene Punkte auf der Geraden g sind.

4.3.8 Konstruktion des achsengespiegelten Punkts mittels Winkel

Daraus ergibt sich die folgende Konstruktion für einen achsengespiegelten Punkt:

- Wähle zwei beliebige Punkte $G_1 \in g$ und $G_2 \in g$ aus. (Günstig, wenn sie nicht zu nahe beieinanderliegen.)
- Trage den Winkel, unter dem P bei G_1 gegenüber der Geraden g erscheint, auf der anderen Seite von g an.
- Trage den Winkel, unter dem P bei G_2 gegenüber der Geraden g erscheint, auf der anderen Seite von g an.
- Der Schnittpunkt der beiden neuen Schenkel ist der gesuchte Bildpunkt P'.

4.3.9 Äquivalente Definition: Gleicher Abstand und Winkel

Eine geometrische Abbildung heißt *Achsenspiegelung (bzgl. der Geraden g)*, wenn jeder Punkt P so auf den Bildpunkt P' abgebildet wird, dass

$$\overline{PG} = \overline{P'G} \quad \text{und} \quad \underbrace{|\sphericalangle(PG,g)| \;=\; |\sphericalangle(P'G,g)|}_{\text{entgegengesetzt orientiert}},$$

wobei G ein beliebiger Punkt auf der Geraden g ist.

4.3.10 Konstruktion des achsengespiegelten Punkts mittels Abstand und Winkel

Daraus ergibt sich die folgende Konstruktion für einen achsengespiegelten Punkt:

- Wähle einen beliebigen Punkt $G \in g$ aus.
- Trage den Winkel, unter dem P bei G gegenüber der Geraden g erscheint, auf der anderen Seite von g an.
- Ziehe einen Kreis um G durch P.
- Der Schnittpunkt von Kreis und dem neuen Schenkel ist der gesuchte Bildpunkt P'.

4.3.11 Treue-Eigenschaften von Achsenspiegelungen

- Die Tatsache, dass viele (geo-)metrischen Eigenschaften bei einer Achsenspiegelung unverändert bleiben, bezeichnet man als ,,Treue" bzgl. dieser Eigenschaft. Genauer:
  - *Geradentreue*: Das Bild einer Geraden bei einer Achsenspiegelung ist wieder eine Gerade.
  - *Parallelitätstreue*: Werden zwei parallele Geraden achsengespiegelt, so sind die beiden Bildgeraden wieder parallel.
  - *Längentreue*: Wird eine Strecke $[AB]$ achsengespiegelt, so ist die Bildstrecke $[A'B']$ genauso lang wie die ursprüngliche Strecke.

    Allgemeiner bleibt die Länge von (auch gekrümmten) Linien unverändert.
  - Wird ein Winkel $\sphericalangle ABC$ achsengespiegelt, so hat der Bildwinkel $\sphericalangle A'B'C'$ das gleiche Maß.
  - *Kreistreue*: Ein Kreis wird bei einer Achsenspiegelung auf einen Kreis mit gleichem Radius abgebildet.
  - *Flächentreue*: Die Fläche einer geometrischen Figur bleibt bei einer Achsenspiegelung unverändert.
- Eine zur Achse parallele Gerade wird wieder auf eine zur Achse parallele Gerade abgebildet.

  Beachte, dass eine beliebige Gerade **nicht** auf eine dazu parallele Gerade abgebildet wird.
- *Orientierungsumkehrung*: Vgl. das Diagramm 4.3.2.

  Ist der Drehsinn eines Dreiecks $\triangle ABC$ positiv (= Gegenuhrzeigersinn), so ist der Drehsinn des Bilddreiecks $\triangle A'B'C'$ negativ (= Uhrzeigersinn).

  Daraus folgt auch die umgekehrte Formulierung:

  Ist der Drehsinn eines Dreiecks $\triangle ABC$ negativ (= Uhrzeigersinn), so ist der Drehsinn des Bilddreiecks $\triangle A'B'C'$ positiv (= Gegenuhrzeigersinn).
- Direkt aus der Definition folgt, dass der Bildpunkt P' durch die gleiche Achsenspiegelung wieder auf den Urbildpunkt P zurückabgebildet wird. Die Achsenspiegelung ist also eine Involution.

4.4 Punktspiegelung

4.4.1 Definition: Punktspiegelung

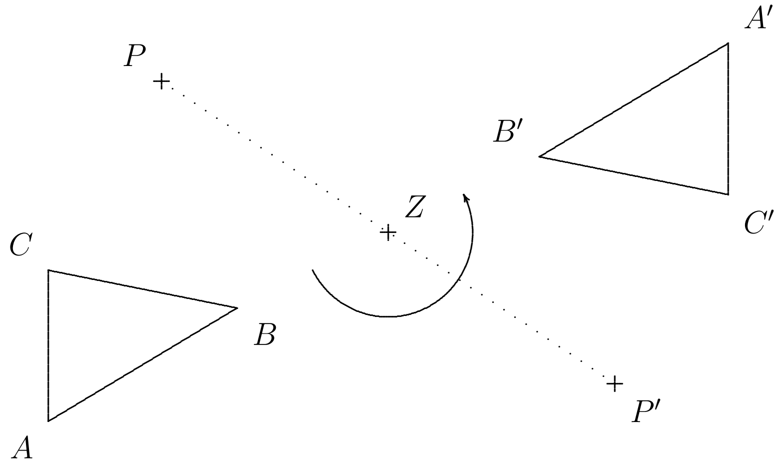
Es sei Z ein Punkt in der Zeichenebene.

Eine geometrische Abbildung heißt *Punktspiegelung* bzgl. Z, wenn jeder Punkt P der Zeichenebene so auf seinen Bildpunkt P' abgebildet wird, dass die Strecke $[PP']$ durch Z halbiert wird.

Der Punkt Z wird auf sich selbst abgebildet.

Man sagt dann, dass P an Z auf P' (punkt-)gespiegelt wird. Der Punkt Z heißt in diesem Zusammenhang *Zentrum*.

4.4.2 Diagramm zur Punktspiegelung



4.4.3 Konstruktion des punktgespiegelten Punkts

Daraus ergibt sich die folgende Anleitung für die Punktspiegelung eines Punktes P an einem Zentrum Z:

- Zeichne einen Strahl mit Anfangspunkt P durch Z.
- Zeichne den Bildpunkt P' auf diesem Strahl, so dass sein Abstand zu Z gleich groß ist wie der Abstand von P zu Z! Dafür ist auch ein Zirkel gut geeignet.

4.4.4 Alternativen

Mit einer Punktspiegelung gleichbedeutend sind ...

- eine 180°-Drehung um Z oder
- eine zweifache Achsenspiegelung bzgl. zweier Geraden, die sich in Z senkrecht schneiden.

Dieser Zusammenhang wird im nächsten Unterkapitel 4.5 über Drehungen genauer aufgezeigt.

4.4.5 Eigenschaften von Punktspiegelungen

- Punktspiegelungen haben die folgende Eigenschaft:

  Eine Gerade wird auf eine dazu parallele Gerade abgebildet.

  Beachte, dass diese Eigenschaft bei Achsenspiegelungen bzw. Drehungen im allgemeinen nicht gegeben ist.

- Längentreue, Winkeltreue, Geradentreue, Kreistreue, Flächentreue, Parallelitätstreue.

- Die Orientierung bleibt erhalten, d.h. ist der Drehsinn eines Dreiecks $\triangle ABC$ positiv (Gegenuhrzeigersinn), so ist der Drehsinn des Bilddreiecks $\triangle A'B'C'$ ebenfalls positiv. Siehe die Zeichnung 4.4.2.

- Direkt aus der Definition folgt, dass der Bildpunkt P' durch die Punktspiegelung bzgl. Z wieder auf den P zurück abgebildet wird. Die Punktspiegelung ist also auch eine Involution.

4.5 Drehungen

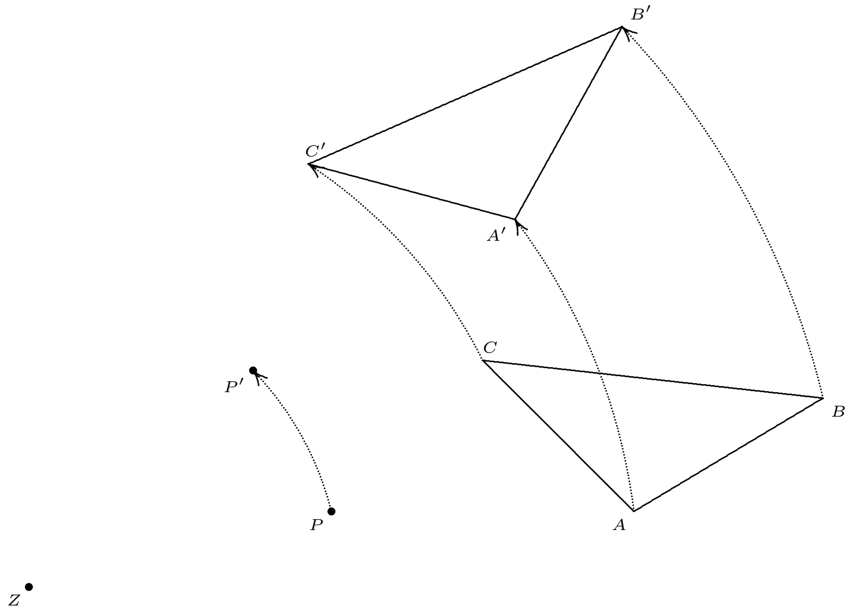
4.5.1 Definition: Drehung

Es sei Z ein Punkt der Zeichenebene und α ein Winkelmaß.

Eine geometrische Abbildung heißt *Drehung (um Z mit Winkel α)*, wenn jeder Punkt P der Zeichenebene so auf einen Punkt P' abgebildet wird, dass

$$\overline{PZ} = \overline{P'Z} \quad \text{und} \quad |\sphericalangle PZP'| = \alpha.$$

In diesem Kontext heißt Z der *Drehpunkt (= Zentrum)* und α der *Drehwinkel.*



Wie bereits erwähnt, ist die Punktspiegelung ein Spezialfall der Drehung, nämlich der des Drehwinkels 180°.

4.5.2 Konstruktion des gedrehten Punkts

Daraus ergibt sich die folgende Handlungsanweisung für die Drehung eines Punktes P um ein Zentrum Z mit dem Winkel α:

- Zeichne die Strecke $[PZ]$!
- Zeichne einen Strahl mit Anfangspunkt Z, der mit der Strecke $[PZ]$ den Winkel α bildet.
- Zeichne den Bildpunkt P' auf den Strahl, so dass sein Abstand zu Z gleich groß ist wie der Abstand von P zu Z! Dafür ist auch ein Zirkel gut geeignet.

4.5.3 Beachte

Drehung meint hier nicht das ,,dauerhafte Bewegen", wie es die Verwendung in der Alltagssprache nahelegen könnte. Es geht ,,nur" um die Abbildung einer Anfangssituation auf eine Endsituation.

4.5.4 Treue-Eigenschaften

Drehungen haben ebenfalls die typischen Treue-Eigenschaften: Sie sind längentreu, winkeltreu, flächentreu, geradentreu, kreistreu, parallelentreu. Außerdem sind sie orientierungserhaltend.

4.5.5 Satz über Drehungen

Es seien g und h zwei Geraden, die sich in einem Punkt Z unter dem Winkel β schneiden.

- Eine Nacheinanderausführung von zwei Achsenspiegelungen an den beiden Geraden

ist gleichbedeutend mit

- einer Drehung mit Drehpunkt Z und Drehwinkel $2 \cdot \beta$.

4.5.6 Fragen zu diesem Satz

Ist diese Feststellung ein purer Zufall, eine Laune der Geometrie?

Ist diese Feststellung von einer Allmacht in unsere Welt hineinbestimmt, quasi verordnet?

Müssen wir als geometrieinteressierte Menschen diese Beobachtung als zufällig oder verordnet kommentarlos hinnehmen?

NEIN. Kraft unseres Denkens können wir uns davon überzeugen, dass diese Beobachtung aus der Geometrie heraus (d.h. aus der Sache heraus — intrinsisch) unausweichlich ist.

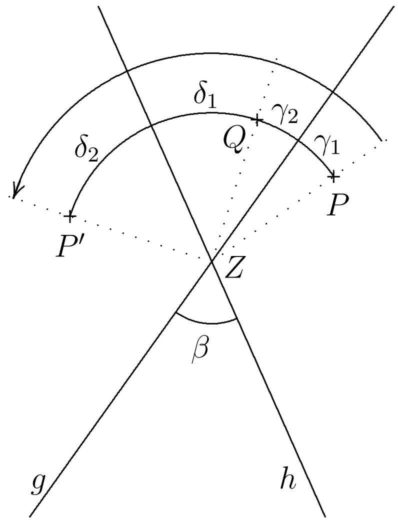
Eine sinnvolle Zusammenstellung von Gedanken, die diese Überzeugung hervorbringen, heißt ...... B.W.

4.5.7 Beweis

(0) Wir studieren die erste im Satz angegebene Situation.

Es sei weiter P — stellvertretend für alle Punkte der Zeichenebene — irgend ein beliebiger Punkt.

(1) Wir spiegeln den Punkt P zuerst an der Geraden g, es entsteht der Bildpunkt Q. Anschließend wird dieser Punkt Q an der Geraden h gespiegelt. Es entsteht ein weiterer Bildpunkt, den wir P' nennen.



(2a) Bei der ersten Achsenspiegelung an g gilt aufgrund der Eigenschaften der Achsensymmetrie:

$$\overline{PZ} = \overline{QZ} \qquad \text{und} \qquad \underbrace{|\sphericalangle(PZ,g)|}_{\gamma_1} = \underbrace{|\sphericalangle(QZ,g)|}_{\gamma_2}$$

(2b) Bei der zweiten Achsenspiegelung an h gilt:

$$\overline{QZ} = \overline{P'Z} \qquad \text{und} \qquad \underbrace{|\sphericalangle(QZ,h)|}_{\delta_1} = \underbrace{|\sphericalangle(P'Z,h)|}_{\delta_2}.$$

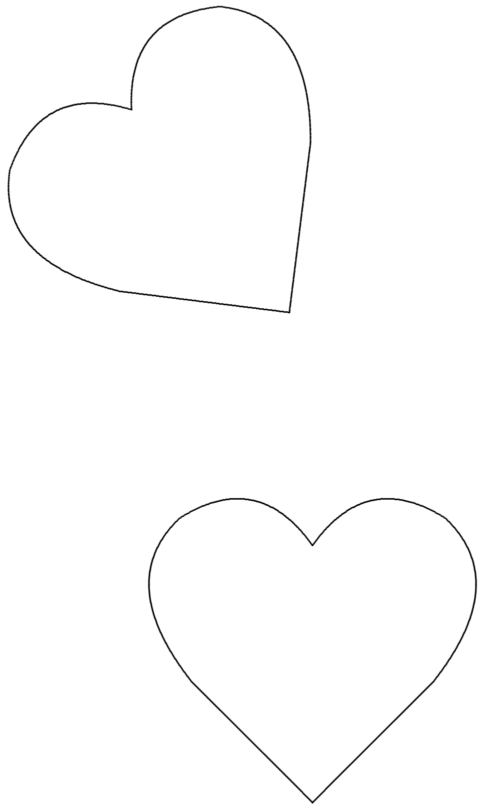
(3) Durch „Zusammenfügen" dieser Eigenschaften lässt sich folgern

$$\begin{aligned} \overline{PZ} &= \overline{P'Z} \\ |\sphericalangle(PZ,P'Z)| &= \gamma_1+\gamma_2+\delta_1+\delta_2 = 2\gamma_2+2\delta_1 = 2(\gamma_2+\delta_1) \\ &= 2\cdot|\sphericalangle(g,h)| = 2\cdot\beta. \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen bedeuten aber genau, dass P' als Bildpunkt entsteht, wenn P um Z als Drehzentrum mit dem Drehwinkel $2\cdot\beta$ gedreht wird.

(4) Damit ist die Oben $\Rightarrow$ Unten-Richtung des Satzes über Drehungen bewiesen. Die mathematisch notwendige Vervollständigung des Beweises durch die Unten $\Rightarrow$ Oben-Richtung ersparen wir uns.

4.5.8 Knobeln Wie findet man den Drehwinkel?

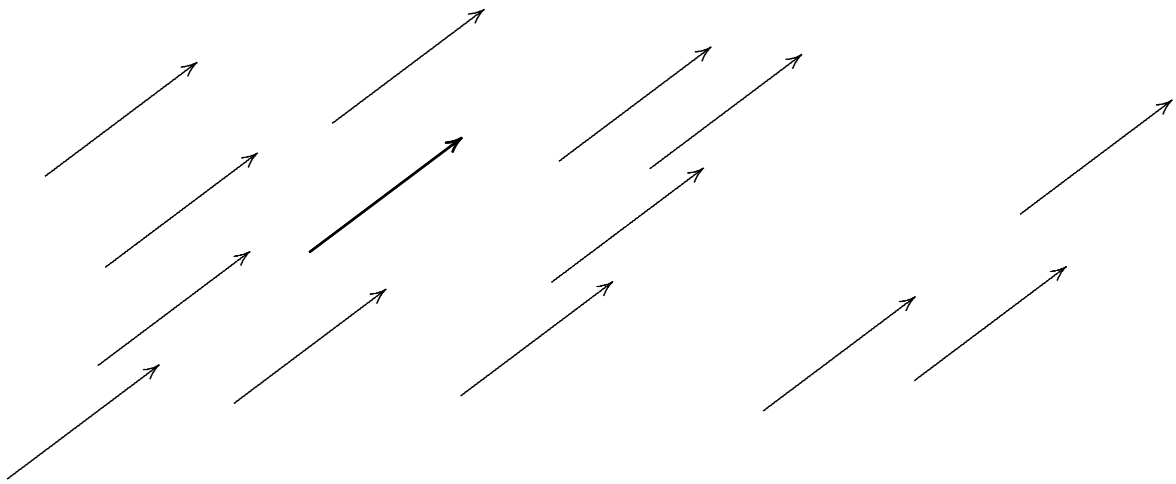


4.6 Verschiebungen

4.6.1 Pfeil

Wir wollen uns hier nicht mathematisch genauer damit auseinandersetzen, was ein Pfeil ist. und begnügen uns mit der Feststellung, dass ein *Pfeil* eine ,,Strecke mit Richtung (und Länge)" ist.

Beim Gebrauch von Pfeilen in der Geometrie kommt es oft nicht so darauf an, wo dieser Pfeil genau startet. Man gelangt dann zum Begriff des Vektors als ,,Menge von Pfeilen mit gleicher Richtung und gleicher Länge".



4.6.2 Definition: Verschiebung

Es sei ein Pfeil in der Zeichenebene vorgegeben.

Eine geometrische Abbildung heißt *Verschiebung* (entlang des Pfeils), wenn jeder Punkt P der Zeichenebene so auf einen Bildpunkt P' abgebildet wird, dass

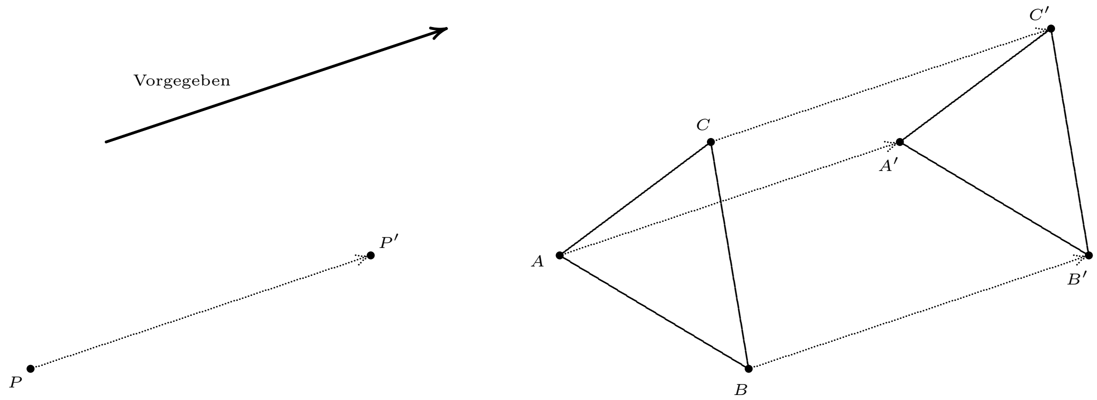
der Pfeil von P nach P' in Richtung und Länge mit dem vorgegebenen Pfeil übereinstimmt.

4.6.3 Kommentar

Man könnte auf die Idee kommen, dass auch die Achsenspiegelung eine Verschiebung ist. Ein Punkt P wird senkrecht zur Spiegelachse um den zweifachen Achs-Abstand ,,verschoben".

NEIN. Beachte, dass bei einer Verschiebung **alle** Punkte der Zeichenebene mit gleicher Verschiebungslänge verschoben werden.

4.6.4 Konstruktion des verschobenen Punkts



Der vorgegebene Pfeil wird mittels Parallelverschiebung und Abgreifen der Länge so verschoben, dass der Fußpunkt nach P verschoben wird.

Der Bildpunkt P' ist dann an der Spitze des verschobenen Pfeils.

4.6.5 Treue-Eigenschaften

Schon eintönig mutet die Feststellung an, dass eine Verschiebung ebenfalls die Treue-Eigenschaften hat:

Sie ist längentreu, winkeltreu, flächentreu, geradentreu, kreistreu, parallitätstreu. Außerdem ist sie orientierungserhaltend.

Weiter wird eine Gerade auf eine dazu parallele Gerade verschoben.

4.6.6 Satz über Verschiebungen

Es seien g und h zwei parallele Geraden mit Abstand b.

- Eine Nacheinanderausführung von zwei Achsenspiegelungen an den beiden Geraden

ist gleichbedeutend mit

- einer Verschiebung in Richtung senkrecht zu den beiden Geraden und Länge $2 \cdot b$.

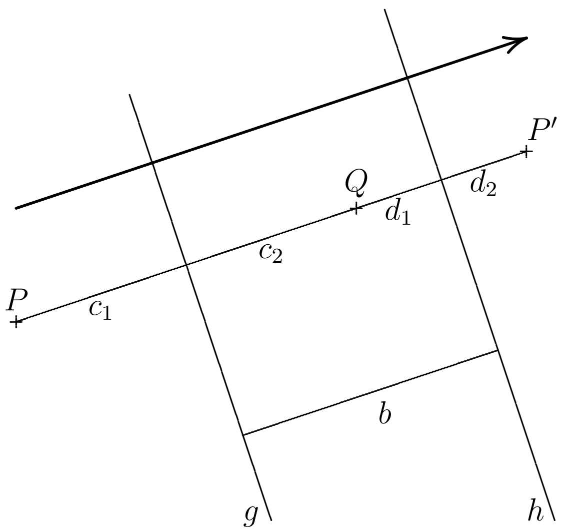
Vergleichen Sie die Formulierung dieses Satzes und seines Beweises mit der des Satzes über Drehungen. Die starke Analogie kann in der ,,Projektiven Geometrie” mathematisch begründet werden.

4.6.7 Beweis

(0) Wir studieren die erste im Satz angegeben Situation.

Es sei weiter P irgend ein beliebiger Punkt der Zeichenebene.

(1) Wir spiegeln den Punkt P zuerst an der Geraden g, es entsteht der Bildpunkt Q. Anschließend wird dieser Punkt Q an der Geraden h gespiegelt. Es entsteht ein weiterer Bildpunkt, den wir P' nennen.



(2a) Bei der ersten Achsenspiegelung an g gilt aufgrund der Eigenschaften der Achsensymmetrie:

$$PQ \perp g \qquad \text{und} \qquad \underbrace{d(P,g)}_{c_1} = \underbrace{d(Q,g)}_{c_2}$$

(2b) Bei der zweiten Achsenspiegelung an h gilt:

$$QP' \perp h \qquad \text{und} \qquad \underbrace{d(Q,h)}_{d_1} = \underbrace{d(P',h)}_{d_2}$$

(3) Durch „Zusammenfügen" dieser Eigenschaften lässt sich folgern

der Pfeil von P nach P' steht senkrecht auf den beiden Geraden

$$\overline{PP'} = c_1 + c_2 + d_1 + d_2 = 2c_2 + 2d_1 = 2(c_2 + d_1) = 2 \cdot b.$$

Diese beiden Aussagen bedeuten aber genau, dass P' als Bildpunkt entsteht, wenn P senkrecht zu den Geraden mit Länge $2 \cdot b$ verschoben wird.

(4) Damit ist die Oben $\Rightarrow$ Unten-Richtung des Satzes über Drehungen bewiesen. Die mathematisch notwendige Vervollständigung des Beweises durch die Unten $\Rightarrow$ Oben-Richtung ersparen wir uns.

4.7 Gleitspiegelungen

4.7.1 Definition: Gleitspiegelung

Eine geometrische Abbildung heißt *Gleitspiegelung*, wenn sie aus der Spiegelung an einer Achse g und einer Verschiebung längs einem Vektor t zusammengesetzt ist.

4.7.2 Bemerkungen

(1) Es lässt sich mit Hilfe der Linearen Algebra oder Analytischen Geometrie beweisen, dass bei Vorliegen einer Gleitspiegelung als Abbildung nur die Richtung der Achse g, nicht aber die Achse selbst, eindeutig bestimmt ist.

(2) Ist eine Gleitspiegelung als Abbildung gegeben, so kann sie auf viele verschiedene Arten als Zusammensetzung

- von Spiegelung an einer zu g parallelen Achse $\widetilde{g}$ und
- einem dazu geeigneten Translationsvektor $\widetilde{t}$

realisiert werden. Insbesondere können $\widetilde{g}$ und $\widetilde{t}$ so gewählt werden, dass

- $\widetilde{g}$ durch den Ursprung verläuft (wenn ein Ursprung definiert ist),
- erst die Spiegelung an $\widetilde{g}$ und dann die Verschiebung längs $\widetilde{t}$ erfolgt,
- erst die Verschiebung längs $\widetilde{t}$ und dann die Spiegelung an $\widetilde{g}$ erfolgt,
- $\widetilde{t}$ parallel zur Achse $\widetilde{g}$ verläuft.

(3) Oft wird eine Gleitspiegelung durch Einbeziehung der zweiten und der letzten Bedingung definiert, d.h. wie folgt.

4.7.3 Äquivalente Alternativ-Definition: Gleitspiegelung

Es sei g eine Gerade in der Zeichenebene und t ein zu g **paralleler** Vektor.

Eine geometrische Abbildung heißt *Gleitspiegelung* (bzgl. der Achse g und längs des Vektors t), wenn sie aus der Spiegelung an dieser Achse und einer anschließenden Verschiebung längs t zusammengesetzt ist.

4.7.4 Treue

Selbstverständlich haben Gleitspiegelungen ebenfalls die typischen Treue-Eigenschaften: Sie sind längentreu, winkeltreu, flächentreu, geradentreu, kreistreu, parallelentreu.

Man beachte aber, dass sie orientierungsumkehrend sind.

4.8 Kongruenzabbildungen

4.8.1 Definition und Satz: Kongruenzabbildungen

Für eine geometrische Abbildung sind die folgenden Eigenschaften äquivalent (= gleichbedeutend)

(A) (Def) Die Abbildung heißt *Kongruenzabbildung.*

(B) Die Abbildung ist längentreu.

(C) Die Abbildung ist längentreu, winkeltreu (= formtreu), flächentreu, geradentreu, parallelentreu und kreistreu.

(D) Die Abbildung ist von genau einem der fünf folgenden Typen:

- (0) Die Abbildung ist die Identität.
- (1) Die Abbildung ist eine Achsenspiegelung.
- $(2^{\times})$ Die Abbildung ist eine echte Drehung.
- $(2^{\|})$ Die Abbildung ist eine echte Translation.
- (3) Die Abbildung ist eine echte Gleitspiegelung.

,,Echt" bedeutet dabei, dass Drehwinkel oder Translationsvektoren ungleich Null sind.

In der vorangestellten Klammer ist symbolisch die Mehrfach-Achsenspiegelung angegeben, durch die die jeweilige Abbildung realisiert werden kann.

4.8.2 Begründung

(B) $\Rightarrow$ (C). Ein beliebiger Winkel lässt sich in ein Dreieck ,,einbauen". Dieses Dreieck wird durch die längentreue Abbildung in ein kongruentes Dreieck abgebildet (SSS-Satz). Deswegen ist der abgebildete Winkel wieder gleich groß. Die anderen Treue-Eigenschaften ergeben sich ähnlich. Wir wollen nicht alles ,,zerkleinern".

(C) $\Rightarrow$ (D). Es sei eine Abbildung ν wie in (C) beschrieben vorgegeben. Weiter sei P ein beliebiger Punkt der Zeichenebene und $P' = \nu(P)$ der Bildpunkt. Wir unterscheiden zwei Fälle.

(1) Ist ν orientierungserhaltend, so sei σ die Achsenspiegelung, die P auf P' abbildet. Die Abbildung $\mu = \sigma^{-1} \circ \nu$ ist dann eine längentreue orientierungsumkehrende Abbildung mit Fixpunkt P, also gemäß Satz 4.8.3 unten eine Achsenspiegelung. Dann ist $\nu = \sigma \circ \mu$ die Nacheinanderausführung von zwei Achsenspiegelungen, also — je nachdem, welche Konstellation die zwei Achsen bilden — die Identität, eine Drehung oder eine Translation.

(2) Ist ν orientierungsumkehrend, so sei τ die Translation, die P auf P' abbildet. Die Abbildung $\mu = \tau^{-1} \circ \nu$ ist dann ebenfalls eine längentreue orientierungsumkehrende Abbildung mit Fixpunkt P, also gemäß Satz 4.8.3 unten eine Achsenspiegelung. Dann ist $\nu = \tau \circ \mu$ die Nacheinanderausführung einer Achsenspiegelung und einer Translation, also — je nachdem, ob τ die Identität oder eine echte Translation ist — einen Achsenspiegelung oder eine Gleitspiegelung.

Die Implikation (D) $\Rightarrow$ (B) ist klar.

4.8.3 Satz: Charakterisierung Achsenspiegelungen

Eine geometrische Abbildung der Zeichenebene ist

- eine Achsenspiegelung

genau dann, wenn sie

- längentreu, orientierungsumkehrend ist und einen Fixpunkt hat.

4.8.4 Beweis

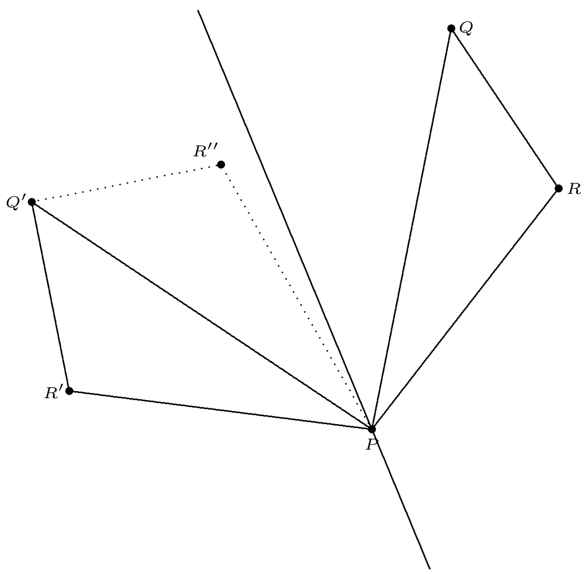
Dass eine Achsenspiegelung die Eigenschaften der unteren Zeile hat, ist klar.

Es sei also umgekehrt λ eine längentreue, orientierungsumkehrende Abbildung mit Fixpunkt P. Da λ nicht die Identität sein kann, existiert ein weiterer Punkt Q mit $Q' = \lambda(Q) \neq Q$.

Es sei σ die Achsenspiegelung, durch die die Strecke $[PQ]$ auf die gleich lange Strecke $[PQ']$ abgebildet wird.

Ist nun R ein beliebiger Punkt der Zeichenebene, so wird das Dreieck PQR durch λ wegen der Längentreue auf eines der beiden dazu kongruenten Dreiecke $PQ'R'$ oder $PQ'R''$ abgebildet. Aufgrund der Orientierungsumkehrung von λ muss das Bilddreieck $PQ\lambda(R)$ eine andere Orientierung haben als PQR. Damit ist $\lambda(R)$ eindeutig bestimmt und es muss $\lambda(R) = \sigma(R)$ sein.

Da R beliebig war, stimmen die Abbildungen λ und σ überein.



4.9 Zentrische Streckung

4.9.1 Definition

Es sei Z ein fester Punkt der Zeichenebene und $m \neq 0$ eine feste reelle Zahl.

Eine Abbildung der Zeichenebene heißt *zentrische Streckung* mit *Streckungszentrum* Z und *Streckungsfaktor* m, wenn für alle Punkte P der Zeichenebene und ihre Bildpunkte P' gilt:

$$\overrightarrow{ZP'} = m \cdot \overrightarrow{ZP}.$$

4.9.2 Alternativ-Definition ohne Vektorbegriff

Will man die Schreibweise mit Vektoren vermeiden, so wird die Formulierung der definierenden Bedingung aufwändiger.

Eine geometrische Abbildung heißt zentrische Streckung mit Streckungszentrum Z und Streckungsfaktor m, wenn der Bildpunkt P' eines beliebigen Punktes P durch die beiden folgenden Bedingungen gegeben ist:

- Es gilt $\overline{P'Z} = |m| \cdot \overline{PZ}$
- Im Fall $m > 0$ liegt der Bildpunkt auf der gleichen Seite wie P bzgl. des Zentrums. Im Fall $m < 0$ liegt der Bildpunkt auf der anderen Seite wie P bzgl. des Zentrums.

4.9.3 Sechs Konstellationen

Es gibt im wesentlichen sechs verschiedenen Konstellationen:

$m > 1$: Eine wirkliche zentrische Streckung. Der Punkt P wird vom Zentrum weiter weg in die gleiche Richtung abgebildet.

$m = 1$: Das ist die identische Abbildung. („Nichts passiert")

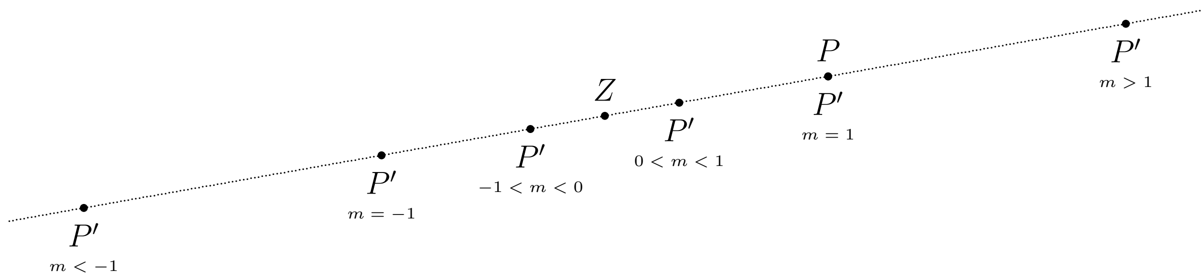
$0 < m < 1$: Eine zentrische „Stauchung". Der Punkt P wird näher ans Zentrum in die gleiche Richtung abgebildet.

$-1 < m < 0$: Der Punkt P wird näher ans Zentrum abgebildet, aber in entgegengesetzte Richtung vom Zentrum aus.

$m = -1$: Das ist die Punktspiegelung.

$m < -1$: Der Punkt P wird weiter weg und entgegengesetzt vom Zentrum abgebildet.

4.9.4 Geometrische Darstellung



4.9.5 Weitere Kommentare

- Aus der Definition ergibt sich, dass das Zentrum auf sich selbst abgebildet wird.
- Auch bei $m = 0$ würde eine Abbildung vorliegen: Alle Punkte der Zeichenebene werden auf das Zentrum abgebildet. Man spricht aber nicht von einer zentrischen Streckung.
- Der Begriff Streckung erscheint erst bei der Abbildung von ebenen Figuren passend. Dass einzelne Punkte gestreckt werden, mutet seltsam an.
- Jede zentrische Streckung besitzt eine Umkehrabbildung, nämlich die zentrische Streckung mit gleichem Zentrum und Streckungsfaktor $\frac{1}{m}$.
- Die Aussage über die Längenmaße lässt sich umschreiben in

  $$\frac{\overline{P'Z}}{\overline{PZ}} = |m| \qquad \text{für alle Punkte } P \text{ der Zeichenebene.}$$

  Fasst man Urbildstreckenlänge und Bildstreckenlänge als Größen auf, so liegt also eine direkte Proportionalität vor.

4.9.6 Treue-Eigenschaften bei zentrischen Streckungen

- *Geradentreue*: Das Bild einer Geraden bei einer zentrischen Streckung ist wieder eine Gerade.
- *Parallelitätstreue*: Werden zwei parallele Geraden zentrisch gestreckt, so sind die beiden Bildgeraden wieder parallel.
- *Winkeltreue*: Wird ein Winkel $\sphericalangle ABC$ zentrisch gestreckt, so hat der Bildwinkel $\sphericalangle A'B'C'$ das gleiche Maß.
- *Kreistreue*: Ein Kreis wird wieder auf einen Kreis abgebildet.
- *Orientierungstreue*: Der Drehsinn eines Dreiecks $\triangle ABC$ bleibt bei der zentrischen Streckung erhalten.
- *Längenverhältnistreue*: Das Längenverhältnis zweier Strecken bleibt bei einer zentrischen Streckung gleich.
- *Längentreue*: NEIN! Vielmehr wird bei einer zentrischen Streckung mit dem Streckungsfaktor m eine Strecke $[AB]$ auf eine Strecke mit $|m|$-facher Länge abgebildet.
- *Flächentreue*: NEIN! Vielmehr wird bei einer zentrischen Streckung mit dem Streckungsfaktor m eine ebene Figur auf eine Figur mit m^2-fachem Flächeninhalt abgebildet.

4.9.7 Bezug zu Graphen von Potenzfunktionen

- Wird der Graph der quadratischen Funktion $x \mapsto x^2$ mit Faktor $m > 0$ und Zentrum $(0,0)$ gestreckt, so geht er in den Graphen der Funktion $x \mapsto \frac{1}{m}x^2$ über.

  Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt nämlich

$$G_{x^2} \ni \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Streckung}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} mx \\ mx^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx \\ \frac{1}{m}(mx)^2 \end{pmatrix} \in G_{\frac{x^2}{m}}.$$

- Eine gelegentlich anzutreffende Fehlauffassung besteht darin, dass die Graphen der Potenzfunktionen $x \mapsto x^n$ für verschiedene gerade n durch zentrische Streckung aufeinander abgebildet werden könnten. Entsprechend falsch ist dies für ungerade n.

4.10 Ähnlichkeitssabbildungen

4.10.1 Definition: Ähnlichkeitssabbildung

Eine geometrische Abbildung f heißt *Ähnlichkeitsabbildung*, wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen erfüllt ist:

(A) f ist die Hintereinanderausführung einer Kongruenzabbildung und einer zentrischen Streckung.

(B) Es gibt eine positive Konstante k, so dass für je zwei beliebige und verschiedene Punkte P, Q der Zeichenebene und deren Bildpunkte P', Q' gilt:

$$\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = k.$$

Die Zahl $k > 0$ heißt in diesem Zusammenhang das *Ähnlichkeitsverhältnis*.

4.10.2 Ähnlichkeitsverhältnis und Streckungsfaktor

Ist $m \neq 0$ der Streckungsfaktor einer zentrischen Streckung, die gemäß Definition 4.10.1 Bestandteil einer Ähnlichkeitsabbildung mit Ähnlichkeitsverhältnis $k > 0$ ist, so ist gemäß 4.9.5 das Ähnlichkeitsverhältnis gleich dem Betrag des Streckungsfaktors:

$$k = |m|.$$

4.10.3 Satz: Treue-Eigenschaften einer Ähnlichkeitsabbildung

Eine Ähnlichkeitsabbildung hat folgende Eigenschaften:

(i) Existenz eines Maßstabs. Sind $[AB]$, $[CD]$ zwei beliebige Strecken positiver Länge, so gilt

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}}.$$

(ii) Konstante Längenverhältnisse. Sind $[AB]$, $[CD]$ zwei beliebige Strecken positiver Länge, so gilt

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}.$$

(iii) Winkel. Sind A, B, C drei paarweise verschiedene Punkte, so gilt

$$|\sphericalangle A'B'C'| = |\sphericalangle ABC|.$$

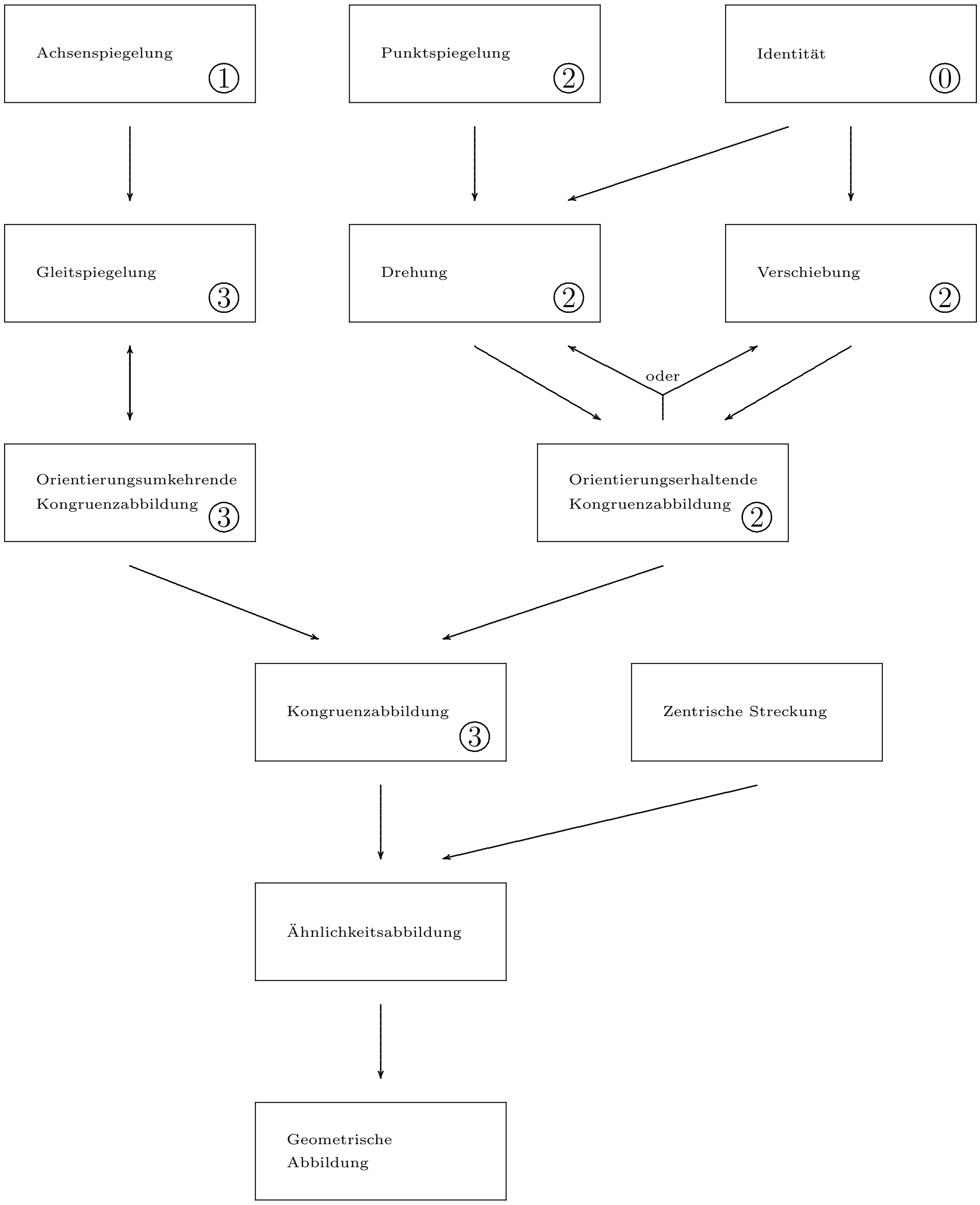
(iv) Die Bilder von zwei parallelen Geraden g, h sind wieder zwei parallele Geraden g', h'.

(v) Kreise werden auf Kreise abgebildet.

(vi) Konstante Flächenverhältnisse. Sind $\mathcal{F}$ und $\widetilde{\mathcal{F}}$ zwei geometrische Figuren mit positiven Flächeninhalten $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ bzw. $\mathcal{A}(\widetilde{\mathcal{F}})$, so gilt

$$\frac{\mathcal{A}(\widetilde{\mathcal{F}}')}{\mathcal{A}(\mathcal{F}')} = \frac{\mathcal{A}(\widetilde{\mathcal{F}})}{\mathcal{A}(\mathcal{F})}.$$

4.11 Diagramm der Kongruenz- und Ähnlichkeits-Abbildungen



- Ein Pfeil ist als ,,ist Spezialfall von" zu lesen.
- Die jeweils einem Typ von Kongruenzabbildung $\mathcal{A}$ zugeordnete eingekreiste Zahl n hat die folgende Bedeutung:

  Die Abbildung $\mathcal{A}$ lässt sich als Nacheinanderausführung von höchstens n Achsenspiegelungen (bei geeigneter Auswahl der Achsen) durchführen.

5 Ebene Figuren

5.1 Grundlagen

5.1.1 Definition: Ebene Figuren

Wir wollen von einer *ebenen Figur* sprechen, wenn sie von Strecken und gekrümmten Linien begrenzt ist und dabei zusammenhängend und beschränkt ist.

5.1.2 Kommentare

- Als Ebene Figuren könnte man allgemeiner jede beliebige Menge von Punkten bezeichnen. In der Schulgeometrie treten aber nur die in Definition 5.1.1 beschriebenen einfacheren Gebilde als ebene Figuren auf.
- Gelegentlich ist es günstig, sich der Unterscheidung von Kontur- und Flächenfigur bewusst zu sein!

$$\bigcirc \qquad \neq \qquad \bullet$$

- Die Summe der Längen aller Begrenzungslinien heißt *Umfang* der Figur.
- Eine ebene Figur heißt *konvex*, wenn zu je zwei Punkten der Figur immer auch die gesamte Verbindungsstrecke dazugehört.

  Beispiele: Dreieck, Kreis, Ellipse jeweils als Flächenfigur.

  Nicht-Beispiele: Windvogel-Viereck, Dreieck als Konturfigur, Kreisring.
- Ein in der Mathematik sehr selten benutzter Begriff ist, dass eine nicht-konvexe Figur *konkav* heißt.

5.2 Ebene Figuren in der Schulwelt

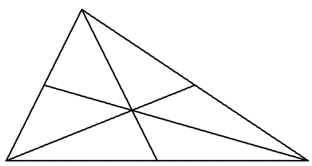
5.2.1 Wahrnehmung

Ebene Situationen oder ,,Gegenstände mit ebenen Ansichten" werden mit den Sinnesorganen (Sehen, Tasten) wahrgenommen, die Namen der zugehörigen abstrakten Figuren erarbeitet.

Ein zunehmender Schwierigkeitsgrad ist dabei, dass die Figuren ,,versteckt" sind.

- Ihre äußere Lage stimmt nicht mit der ,,Standardauffassung" überein. Beispiele:
  - Das quadratische Vorfahrt-Schild steht auf einer Ecke.
  - Die Diagonalen einer Raute sind nicht horizontal bzw. vertikal ausgerichtet.
- Die Konturen der Figur stimmen nicht geometrisch-exakt, wohl aber strukturell mit den Konturen der mathematisch idealisierten Figur überein.
- Die ebenen Figuren treten als Seitenflächen oder Querschnittsflächen von eigentlich drei-dimensionalen Körpern auf.
- Die Figuren sind verborgen in Graphiken oder anderen die Aufmerksamkeit zunächst auf sich ziehenden Situationen.

  Beispiel: Wie viele Dreiecke kannst Du in der folgenden Figur (aus dem Lehrplan MGS 2001) erkennen?



5.2.2 Beispiele

- Verkehrsschilder: Vorfahrt, Vorfahrt Achten, Stopp, Einfahrt verboten,
- GEO-Dreieck, Bogen Papier, ist eine CD-Box quadratisch?, Schallplattenhülle
- Tafel Schokolade (quadratisch, rechteckig), Pralinenschachtel, Tischdecke,
- Schachbrett, Memory-Karten
- Ober- oder Frontseite von Möbeln, Geräten, Waschmaschine
- Mond und Sonne

5.2.3 Zeichnen

Mit verschiedenen Hilfsmitteln zeichnen:

- Frei, spielerisches Zeichnen / Sorgsames Zeichnen
- Luft- oder Sand-Zeichnen, Rücken-Zeichnen
- mit Lineal, GEO-Dreieck, Zirkel konstruieren!
- mit Schablone
- mit Hilfe von Kästchenpapier
- Computereinsatz (Windows-Zubehör/Paint, Dynamische Geometrie Software)

5.2.4 Herstellen

Mit verschiedenen Hilfsmitteln herstellen:

- Legen mit Schaschlik-Spießen, Streichhölzern oder ähnlichem
- Ausschneiden aus Papier, Pappe, oder anderen ,,Werkstoffen"
- Aussägen aus Holzplatten
- Falten aus Papier, Teile zusammenkleben
- Auf dem GEO-Brett spannen
- Kinder stellen oder legen sich zu einer Figur
- Spannen oder Legen mit einem Seil

5.2.5 Andere Aktivitäten zu ebenen Figuren

- Komplexere Figuren aus elementaren Figuren zusammensetzen. Tangram
- Mosaike oder Parkette legen.

5.2.6 Geometrische Eigenschaften erkunden

- Symmetrien feststellen, Symmetrieachsen finden.
- Schwerpunkt (Mittelpunkt) finden: Ausbalancieren einer Pappe-Figur.

5.2.7 Weitere Überlegungen

Grundsätzlich ist es nicht ganz einfach, spezielle ebene Figuren (z.B. ein Parallelogramm) frei herzustellen. Es bleibt abzuwägen, inwieweit technische Hilfsmittel aller Art hier eine Erleichterung bringen, andererseits aber die Verwirklichung von Unterrichtsprinzipien wie Handlungsorientierung, Lebensnähe, freies Arbeiten beeinträchtigen.

5.2.8 Herausarbeitung des Begriffs der 2-Dimensionalität

Frage: In wie viele grundsätzlich verschiedene Richtungen (vorwärts, rückwärts sollen eine Richtung bedeuten) muss sich ein Mensch (oder ein Tier) bewegen können, um überall hinzukommen?

Antwort:

- Beim Laufen entlang einer Strecke (gespannte Schnur, Weg, Aschenbahn) genügt **eine** Richtung.
- Beim Bewegen auf einer ebenen Figur (Sportplatz, Turnhalle) muss man sich in **zwei** Richtungen bewegen können.
- Ein Vogel oder Hubschrauber in der Luft oder ein Fisch im Wasser muss sich in **drei** Richtungen bewegen können, um überall hinzukommen.

5.3 Vielecke

5.3.1 Definition: Vieleck

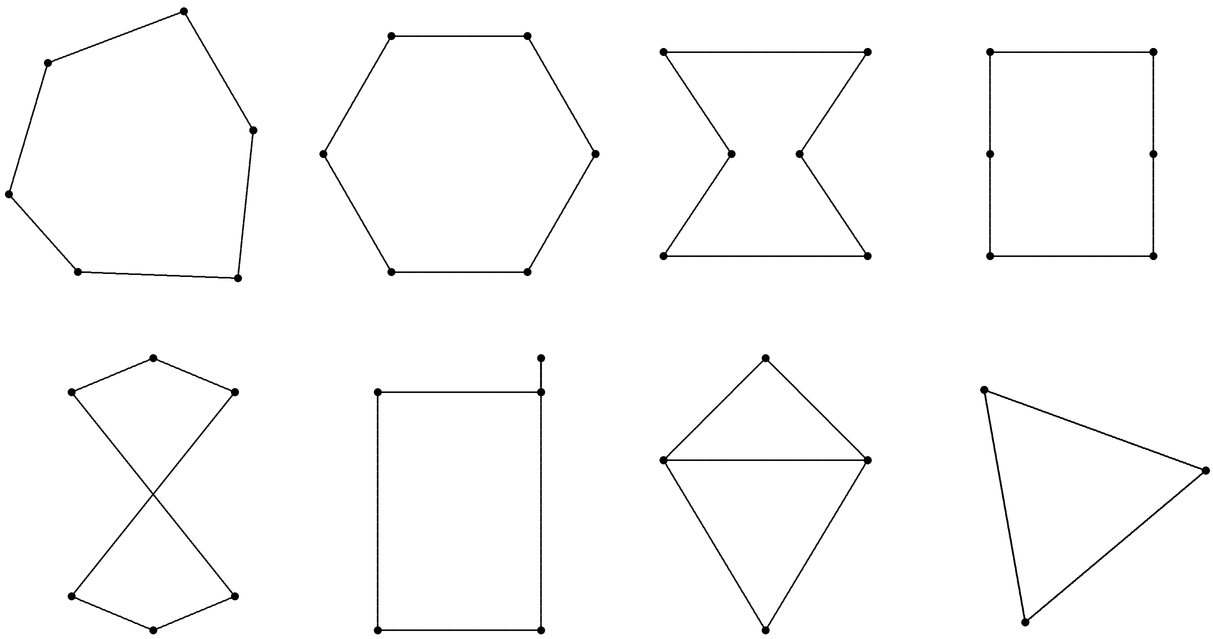
Eine ebene Figur heißt *Vieleck* (= *Polygon*), wenn sie durch einen geschlossenen und doppelpunktfreien Streckenzug begrenzt wird.

Ist die Zahl der Strecken in dem Streckenzug drei, vier, fünf, …, n, so spricht man auch von einem *Dreieck*, *Viereck*, *Fünfeck* bzw. n*-Eck*.

5.3.2 Kommentar zu den Begriffen

„Geschlossen" heißt dabei, dass Anfangs- und Endpunkt des Streckenzugs übereinstimmen.
„Doppelpunktfrei" bedeutet, dass jeder Punkt (abgesehen von Anfangs- gleich Endpunkt) auf dem Streckenzug nur einmal „besucht" wird.

Diese Eigenschaften lassen sich mathematisch noch genauer fassen, wir verzichten hier darauf und zeigen die besondere Situationen an Bildchen auf. Die Streckenzüge in der oberen Zeile sind doppelpunktfrei und definieren Sechsecke, die in der unteren Zeile sind es nicht.



Es stellt sich die Frage, ob in Grundschule oder Unterstufe ein Vieleck auch so definiert werden kann:

Eine ebene Figur heißt *Vieleck*, wenn sie durch Strecken begrenzt wird.

5.3.3 Mittelpunkt eines Vielecks

Das wesentliche am Begriff „Mittelpunkt eines beliebigen Vielecks" ist, dass er nicht vernünftig definiert werden kann.

Es stehen verschiedene Angebote zur Auswahl:

U Der Umkreismittelpunkt, wenn das gegebene Vieleck einen Umkreis besitzt.

Z Das Zentrum, wenn das gegebene Vieleck punkt- oder drehsymmetrisch ist.

S Der Schwerpunkt.

I Der Inkreismittelpunkt, wenn das gegebene Vieleck einen Inkreis besitzt.

D Der Diagonalenschnittpunkt oder der Schnittpunkt der Seitenmittenverbindenden bei Vierecken.

5.3.4 Beispiele zum Mittelpunkt

- Lediglich der Schwerpunkt S ist für alle Typen von Vielecken definiert.
- Bei Rechtecken stimmen alle Mittelpunktstypen bis auf I überein. Echte Rechtecke haben keinen Inkreis.
- Bei Rauten stimmen alle Mittelpunktstypen bis auf U überein. Echte Rauten haben keinen Umkreis.
- Bei Parallelogrammen stimmen alle Mittelpunktstypen bis auf U, I überein. Echte Parallelogramme haben weder Umkreis noch Inkreis.
- Bei einem stumpfwinkligen Dreieck liegt U außerhalb der Figur. Bei einem Windvogelviereck liegen D und evtl. S außerhalb der Figur.
- Bei regelmäßigen Vielecken (siehe nächster Abschnitt 5.4) entsteht das Mittelpunkt-Problem nicht. Alle oben angegebenen Mittelpunktstypen stimmen dann überein.

5.4 Regelmäßige Vielecke

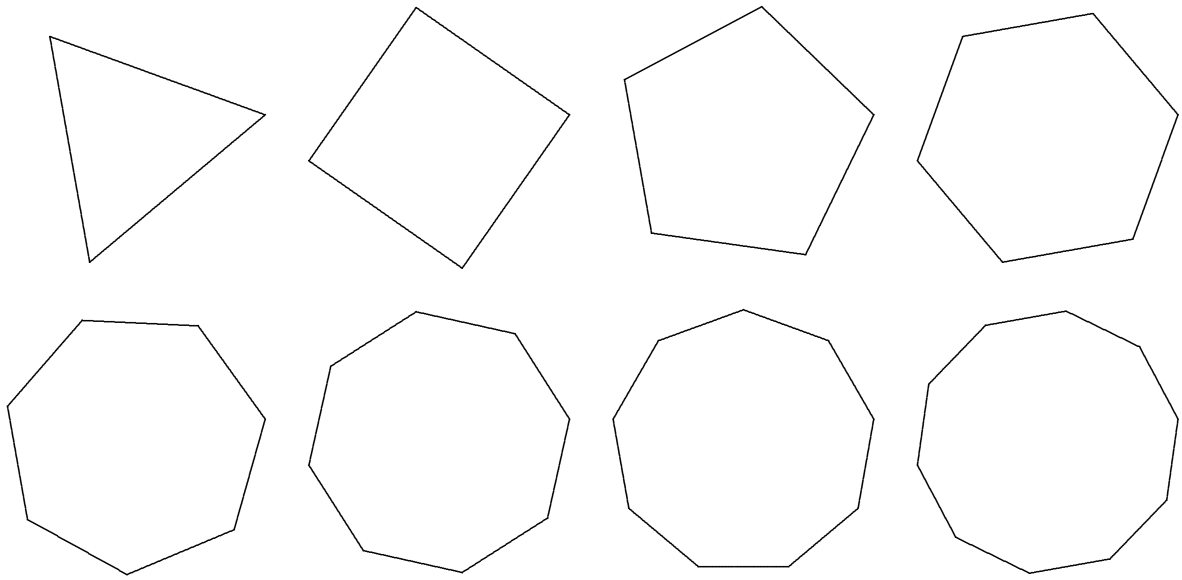
5.4.1 Definition: Regelmäßige Vielecke

Ein Vieleck heißt *regelmäßig (= regulär)*, wenn …

- alle Seiten gleich lang sind und
- alle Innenwinkel gleich groß

sind.

Beachte, dass die beiden Bedingungen unabhängig voneinander sind. Ein Viereck mit gleich langen Seiten oder vier gleich großen Winkeln ist nicht unbedingt ein Quadrat.



5.4.2 Spezialfälle

- Ein regelmäßiges Dreieck heißt auch *gleichseitig*, es wird ausführlicher in Abschnitt 8.5.5 beschrieben.
- Ein regelmäßiges Viereck ist dasselbe wie ein *Quadrat*. Es wird in Kapitel 9.2 ausführlicher beschrieben.

5.4.3 Weitere Eigenschaften von regelmäßigen Vielecken

- Achsen-, Punkt- und Drehsymmetrie?
- Welche (Wieviele) Symmetrieachsen hat ein regelmäßiges n-Eck?
- Sind regelmäßige n-Ecke punktsymmetrisch?
- Wird ein regelmäßiges n-Eck um den Mittelpunkt mit Winkel $\frac{360^\circ}{n}$ gedreht, so geht es in sich selbst über.
- Parkettierungen mit regelmäßigen n-Ecken: Siehe Abschnitt 6.9.5.
- Regelmäßige Vielecke haben einen eindeutigen Mittelpunkt, einen Inkreis und einen Umkreis.
- Für festes n sind alle regelmäßigen n-Ecke ähnlich zueinander.

5.4.4 Frage

Die klassische Frage ob — für ein gegebenes n — das regelmäßige n-Eck mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, hat Carl Friedrich Gauss 1796 beantwortet:

> Genau dann ist das regelmäßige n-Eck konstruierbar, wenn n ein Produkt von ,,Zweien" und lauter verschiedenen Fermat'schen Primzahlen ist.
>
> Eine Primzahl heißt *Fermat'sch*, wenn sie die Form $2^{(2^k)}+1$ hat. Die heute bekannten Fermat'schen Primzahlen sind in der Tabelle aufgelistet:

k	0	1	2	3	4	5
2^k	1	2	4	8	16	32
$2^{(2^k)}+1$	2^1+1 $=3$	2^2+1 $=5$	2^4+1 $=17$	2^8+1 $=257$	$2^{16}+1$ $=65\,537$	$2^{32}+1$ $=4\,294\,967\,297$
	FPZ	FPZ	FPZ	FPZ	FPZ	$=641\cdot 6\,700\,417$

Man vermutet, dass es außer den fünf Fermat'schen Primzahlen

$$3 \qquad 5 \qquad 17 \qquad 257 \qquad 65\,537$$

keine weiteren gibt.

5.5 Kreise

5.5.1 Definition: Kreis

Es seien M ein fixierter Punkt der Zeichenebene und r eine Länge.

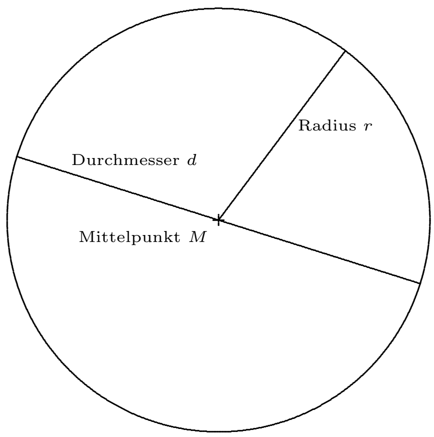
- Die Menge aller Punkte, die von M höchstens den Abstand r haben, bilden eine *Kreisscheibe.*
- Die Kontur der Kreisscheibe heißt *Kreislinie.* Der doppelte Radius wird *Durchmesser* d genannt.

Innerhalb der Alltagssprache werden beide Figuren oft vereinfachend als *Kreis* bezeichnet.

5.5.2 Weitere Begriffe In diesem Zusammenhang heißt …

- M der *Mittelpunkt*,
- r der *Radius*,
- der doppelte Radius $d = 2 \cdot r$ der *Durchmesser*

des Kreises.



$$\boxed{d = 2 \cdot r}$$

5.5.3 Bemerkungen

- Verwenden Sie — auch im Alltag — das Adjektiv ,,kreisförmig" anstelle von ,,rund" zur Beschreibung von Kreisen!
- Oft werden die Begriffe Radius und Durchmesser sowohl für die geometrischen Objekte (= Punktmengen der Zeichenebene) als auch für die Längen (= Zahl mit Längeneinheit) verwendet. Kraftloser Purismus stört sich daran.

5.5.4 Definition: Sehne, Kreissektor und Kreissegment

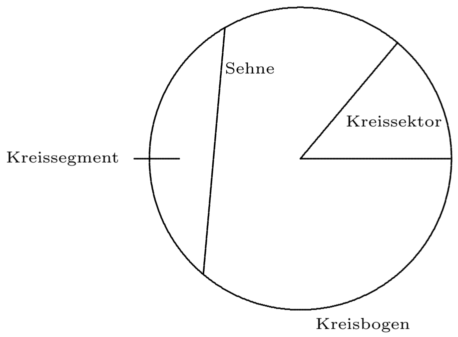
Es seien ein Kreis gegeben.

Eine Teilmenge der Kreislinie, die von zwei Punkten der Kreislinie begrenzt wird, heißt *Kreisbogen*.

Eine Strecke, deren beide Endpunkte auf der Kreislinie liegen, heißt *Sehne*.

Eine ebene Figur, die von einer Sehne und dem zugehörigen Kreisbogen begrenzt wird, heißt *Kreissegment*.

Eine ebene Figur, die von zwei Radien und einem Kreisbogen begrenzt wird, heißt *Kreissektor*.

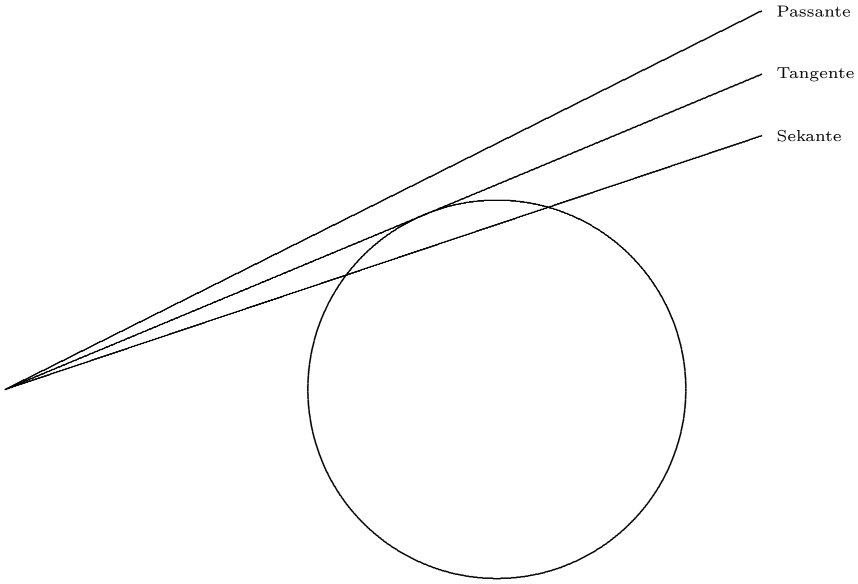


5.5.5 Definitionen: Kreis und Gerade

Wir betrachten die Schnittmenge eines gegebenen Kreises und einer Gerade.

Die Gerade heißt ...

- *Sekante*, wenn die Schnittmenge zwei Punkte enthält,
- *Tangente*, wenn die Schnittmenge genau einen Punkt enthält,
- *Passante*, wenn die Schnittmenge leer ist.



Die Tatsache, dass eine Tangente genau einen gemeinsamen Punkt mit der Geraden hat, erweckt den Eindruck, dass sie den Kreis ,,berührt" (lat. tangere = berühren). Weiteres zu Tangenten kann man dem Kapitel 10.2 entnehmen.

5.5.6 Kreis als topologische Idee

Der Begriff Kreis hat sowohl fachlich (in der mathematischen Topologie) als auch alltagssprachlich die Bedeutung eines ,,linearen Gebildes", das an den beiden Enden wieder zusammengeführt ist.

Diese Deutung setzt sich dann fort für Situationen, die ,,begrenzt" oder ,,abgeschlossen" erscheinen:

- Suchen Sie das Wort Kreis in den Lehrplänen!
- Stromkreis, Schaltkreis, Farbkreis
- Wasserkreislauf, Stoffkreislauf (Re**cycl**ing)
- Jahreskreis
- Morgenkreis, Gesprächskreis, Freundeskreis, Arbeitskreis, Landkreis
- Zirkeltraining, Kreislauf beim Tischtennis
- Lernzirkel

5.5.7 Kreise in der Schulwelt

- Naturphänomene
  - Hexenringe, Feenkreise
  - Sonnenblume
  - Kreise bei Nieseln auf dem Wasser, Tropfen auf das Wasser
  - Regenbogen: Warum kreisförmig?
  - Scheinbare Kreisbahn von Planeten und Sternen am Nachthimmel. Mittelpunkt ist der ,,Himmelsnordpol". Zufällig befindet da ganz nahe ein Stern, der dann auch Polarstern heißt.
- Gegenstände aller Art. Warum wählt man die Kreisform?
  - Räder
  - Münzen, Herdplatten, Verkehrsschilder, Geschirr, Kuchenformen, CD, Schallplatte
  - Kanaldeckel
  - Ringe, Reifen (Hulla-Hoop), Frisbee-Scheibe
  - Ansicht von Mond und Sonne
- Die Kreisform für Bewegungen und Situationen
  - Kreisbewegungen auf der Kirchweih, Karussell
  - Kreisverkehr
  - Voltigierzirkel
  - Bestimmung der Reichweite bei einer Tankfüllung,
  - Bewässerungsanlagen
  - Maschinen aller Art (Spül-, Wasch-, Rühr-, Bohr-)
  - Bei Aufleuchten der Tankanzeige im Auto reicht das Benzin noch für 70 km. Zeichne die erreichbaren Orte bei Maßstab 1 : 1 000 000.
- Äußeres Handeln
  - Kreise ziehen
    - freihand
    - mit geeigneten ,,gelochten" Schablonen aus Pappe, Holz, Plastik, Metall
    - mit einer Schnur oder Stoffband. Ein Ende wird im Mittelpunkt fixiert. Am anderen Ende wird die Kreide in einer Schlaufe oder Schlüsselring geführt.
      - Gärtner-Konstruktion zur Anlage einer Baumscheibe, eines Blumenbeetes, einer Pflasterfläche
      - Im Schulhof oder in der Sporthalle: Im Mittelpunkt wird eine Stange (Turngerät, Kartenständer o.ä.) aufgestellt, an dem das Ende einer Schnur (Tau, Band) festgebunden wird. Bewegt man nun das andere Ende der gespannten Schnur um die Stange, so beschreibt dieses einen Kreis.

    * mit Schul-Zirkeln (Hinweis: Markiere vorher den Mittelpunkt)
- Muster mit Kreisen
- Wie findet man den Mittelpunkt eines Kreises?
- Öffnungsraum für Türen, Möbel in Bauplänen
- Zusammenhang mit regelmäßigem Sechseck.

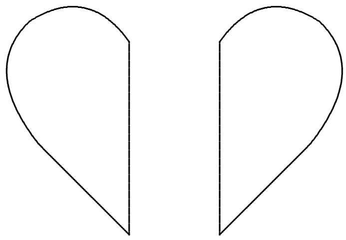
6 Symmetrie bei ebenen Figuren

6.1 Achsensymmetrie

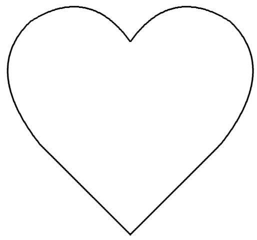
6.1.1 Definition: Achsensymmetrie

- Zwei ebene Figuren $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ heißen bzgl. der Geraden g *achsensymmetrisch zueinander*, wenn $\mathcal{F}_1$ auf $\mathcal{F}_2$ achsengespiegelt bzgl. g wird.

- Eine einzelne ebene Figur $\mathcal{F}$ heißt *achsensymmetrisch in sich*, wenn sie bei einer Achsenspiegelung mit ihrer Bildfigur übereinstimmt.



achsensymmetrisch zueinander



achsensymmetrisch in sich

6.1.2 Beispiele aus der abstrakten Geometrie

- Ein Dreieck ist genau dann achsensymmetrisch, wenn es gleichschenklig ist. Ein Dreieck wiederum heißt *gleichschenklig*, wenn es zwei gleich lange Seiten hat.

- Drachen- oder Windvogelviereck (Spezialfälle: Raute, Quadrat)

- Gleichschenkliges Trapez (Spezialfälle: Rechteck, Quadrat)

- Kreis

- Regelmäßiges n-Eck

6.2 Achsensymmetrie in der Schulwelt

6.2.1 Betrachtung

Es werden Bildern oder ,,ebene" Gegenstände betrachtet. Welche sind achsensymmetrisch, welche nicht?

- Biologie: Blätter, Schmetterlinge, viele andere Lebewesen
- Zuhause: Teppiche, Brettspiele, Schere, Besteck, Geschirr
- Zeichen aller Art: Verkehrszeichen, Flaggen, Logos, Spielkartensymbole
- Kunst: Ornamentik in der islamischen Kunst
- Vorder- und Rückseite transparenter Bilder: Folie, Dia, Fensterbilder.

6.2.2 Betrachtung mit einem Spiegel

Ein Spiegel wird senkrecht aufgestellt. Beim schrägen Blick in den Spiegel wird die Situation vor dem Spiegel durch die Situation im Spiegel achsensymmetrisch ergänzt.

- Alltagsspiegel
- Fliesenspiegel (Baumarkt)
- halbdurchlässigen Spiegel (fertige Plastikständer, Lehrmittelverlage)
- optischen Spiegel. Beachte, dass bei einem gewöhnlichen Glasspiegel aus dem Alltag die spiegelnde Fläche unter der Glasscheibe liegt. Dies kann bei geometrischen Aufgaben zu Ungenauigkeiten führen. Bei einem *optischem Spiegel* wird dies vermieden.

6.2.3 Symbolische Achsensymmetrie

- Buchstaben, Ziffern,
- Wörter mit geometrischer Symmetrie: OTTO, HEIKE
- Scherzrechnung ,,Die Hälfte von 12 ist 7": erhält man bei der horizontalen Halbierung der Zahl XII die Zahl VII.
- Wörter mit symbolischer Symmetrie (Drehwürmer, Palindrome):

  MARKTKRAM, ANNA, RENTNER, ABBA, REITTIER,

- Ganze Sätze mit symbolischer Symmetrie:

  EIN NEGER MIT GAZELLE ZAGT IM REGEN NIE

  EINE TREUE FAMILIE BEI LIMA FEUERTE NIE

  STEP ON NO PETS

  Quadratisches Palindrom:

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	L	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

- Spiegelzahlen: 303, 5775, 1991, 2002 (nur zweimal in unserem Leben).

  Eine Spiegelzahl mit gerader Stellenzahl ist durch 11 teilbar. (Warum?)
- Es gibt Menschen, die der Tatsache, dass am **19.9.1991** der Eismann (Ötzi) am Hauslabjoch (Grenze Italien–Österreich) aufgefunden wurde, eine mystische Dimension beimessen.
- Am **20.02.2002** sendete der Bayerische Rundfunk einen Beitrag über Palindrome: Daraus:

  NA, FAKIR, PAPRIKAFAN?

6.2.4 Handeln (Enaktiv)

Vielfältige Spiel- oder Bastelspiele im Zusammenhang mit dem Falten oder Klappen.

- Scherenschnitt
- Herstellen achsensymmetrischer Bilder mit verschiedensten ,,Spiel-Möglichkeiten": Ministeck, Plastikknöpfe, Holz-Plättchen-Nageln
- Drucken: Kartoffel- oder Spielstempel, Linoldruck. Der Figur auf dem Stempel und die gedruckte Figur erscheinen achsensymmetrisch zueinander.
- Arbeiten mit dem Geobrett
- Basteln von ,,flachen" Papierflugzeugen.
- Herstellen von achsensymmetrischen Klecksbildern. Ein Blatt Papier wird einmal gefaltet. Die eine ,,Hälfte" des wieder geöffneten Papierblatts wird mit Tinte bekleckst. Werden dann die beiden Hälften aufeinander gepresst, so entsteht ein achsensymmetrisches Klecksbild.

  Der Arzt und Dichter Justinus Kerner (1786 – 1862), ein Arzt Friedrich Hölderlins, hat Klecksbilder zu einer Kunstform entwickelt, der so genannten Klecksographie. Später wurde die Klecksographie zur Grundlage der so genannten Rohrschachtests.

6.2.5 Zeichnen (Ikonisch)

- Papier:
  - Kariertes Papier: Die Gitterlinien dienen zur Orientierung.
  - Blankes Papier
  - Folien

- Kohlepapier

- Genauigkeit:
  - Freies Zeichnen
  - Zeichnen mit Lineal, GEO-Dreieck,
  - Zeichnen bzw. Konstruieren mit dem Zirkel.

- Symmetrie-Simultan-Zeichnen: Symmetrie ist offenbar irgendwie in unserer ,,Psychomotorik" angelegt.

- Malen und Färben: Symmetrisches Einfärben, beispielsweise in einem Kindermalbuch.

6.2.6 Weitere Aktivitäten

- Computer-Bildbearbeitungsprogramme: Bilder oder Fotos werden per Befehl gespiegelt und ausgedruckt.

- Spiegelschrift.

- Einbringen von Überlegungen zur Bedeutung der Symmetrie. Ist sie notwendig, zweckmäßig, interessant, langweilig, ästhetisch?

- Denksport: Wie oft an einem Tag bilden die beiden Zeiger einer Uhr eine achsensymmetrische Figur?

6.2.7 Unterschiedliche Schwierigkeitsgrade

- Liegt Achsensymmetrie vor?

- Auffinden der Symmetrieachsen / Zahl der Symmetrieachsen.

- Ergänzen zu achsensymmetrischen Figuren.

- Die Figur enthält vertikale, horizontale, diagonale Strecken, Kreisbögen, gekrümmte Linien.

- Lage der Achse gegenüber den Blatträndern oder der Kästcheneinteilung: Vertikal, horizontal, diagonal, beliebig schräg.

- Lage der Achse gegenüber der Figur: Durch den Mittelpunkt → am Rand → außerhalb.

6.2.8 Fehlauffassung

Eine Fehlauffassung über die Achsenspiegelung, die durch das konkrete Tun (Zeichnen, Falten, Durchstechen, ...) begünstigt wird, besteht darin, dass bei einer Achsenspiegelung nur einzelne Punkte, ebene Figuren oder die Halbebene, die sich auf einer Seite der Achse befinden, auf die andere Seite abgebildet werden.

Richtig ist, dass **alle** Punkte der Zeichenebene achsengespiegelt werden.

6.3 Ebenensymmetrie

Ein zur Achsensymmetrie irgendwie ähnlicher, dann aber doch in vielerlei Hinsicht unterschiedlicher Symmetriebegriff ist der der Ebenensymmetrie.

6.3.1 Tabelle In der folgenden Tabelle sind die Kennzeichen und Unterschiede zwischen drei Symmetrietypen zusammengestellt:

Symmetrietyp	Punktsymmetrie	Achsensymmetrie	Ebenensymmetrie
Abbildung	Punktspiegelung	Achsenspiegelung	Ebenenspiegelung
WO (Geometrischer Kontext)	Ebene (2-dim)	Ebene (2-dim)	Raum (3-dim)
WAS (Zu spiegelnde Objekte)	Ebene Figuren	Ebene Figuren	Räumliche Körper
WORAN (Merkmal)	Zentrum Z (Punkt)	Achse g (Gerade)	Ebene e
Orientierung	erhalten	umkehrend (Drehsinn)	umkehrend (Links-Rechts)

Es ist eine ,,Dimensions-Analogie" zwischen der Ebenensymmetrie im Raum und der Achsensymmetrie in der Ebene zu erkennen. Man sollte sich des Unterschieds bewusst sein.

Es besteht ein Zusammenhang zwischen den beiden Symmetrietypen, da die ebenen Ansichten oder Schnitte von räumlich spiegelbildlichen Situation achsensymmetrisch sind.

6.3.2 Ebenensymmetrie in der Schulwelt

- Betrachten von Situationen oder Gegenständen:
  - Menschlicher Körper, Insekten,
  - Fahrrad, Auto (Fahrer, Beifahrer).
  - Musikinstrumente, Geräte aller Art, Möbel.
  - Geometrische Körper: Würfel, Quader, Pyramide, Kugel.
- Das Zeichnen ist hier — aufgrund der Natur der Sache — schwieriger.
- Handeln: Spiegelbewegungen, Erfahrungen mit (Fliesen-)Spiegeln.
- Arbeiten mit halbdurchlässigen Spiegeln (Glasscheiben)

6.3.3 Links und Rechts

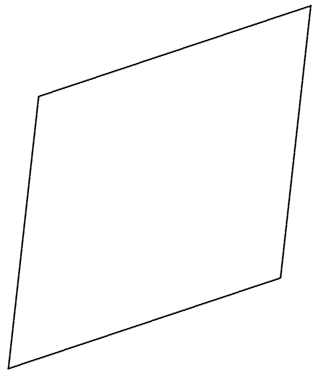
Bei welchen Gegenständen, Geräten, Situationen oder Bewegungen treten die Begriffe ,,Rechts" und ,,Links" auf?

- Mit welcher Hand schreiben Sie?
- Sie spitzen einen Bleistift
- Sie drehen einen Hahn oder Schraube zu
- Jimi Hendrix spielt Gitarre
- Werden ,,Links" und ,,Rechts" im Spiegel vertauscht?

6.4 Punktsymmetrie

6.4.1 Frage

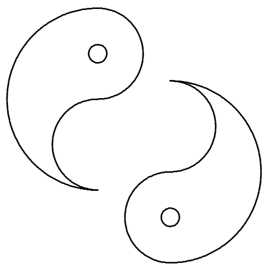
Ist ein Parallelogramm symmetrisch?



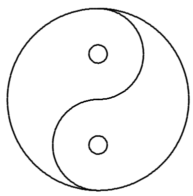
JA und NEIN! Ein Parallelogramm mit zwei verschiedenen Seitenlängen ist nicht achsensymmetrisch, wohl aber punktsymmetrisch!

6.4.2 Definition: Punktsymmetrie

- Zwei ebene Figuren $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ heißen bzgl. des Zentrums Z *punktsymmetrisch zueinander*, wenn $\mathcal{F}_1$ auf $\mathcal{F}_2$ punktgespiegelt bzgl. Z wird.
- Eine einzelne ebene Figur $\mathcal{F}$ heißt *punktsymmetrisch in sich*, wenn sie bei einer Punktspiegelung mit ihrer Bildfigur übereinstimmt.



punktsymmetrisch zueinander



punktsymmetrisch in sich

6.5 Punktsymmetrie in der Schulwelt

6.5.1 Betrachtung von „ebenen" Situationen, Bildern oder Symbolen

S N Z §

- Spielkarten
- Anordnung der Pralinen in einer Schachtel
- Sport (Fußball, Tennis, Tischtennis, Volleyball):
  Gleiche Aufstellung nach einem Seitenwechsel
- Parallelogramm
- Regelmäßige n-Ecke **nur** für gerades n

Generell sind Figuren, die

- sowohl punktsymmetrisch als auch achsensymmetrisch sind (Rechteck, Raute, Quadrat, Kreis)
- eine höhere Drehsymmetrie (s.u.) aufweisen (Kreis, Mandala, Blüten)

als Beispiele nicht so gut geeignet, da dann die Punktsymmetrie in der Wahrnehmung „abgedrängt" wird.

6.5.2 Handeln

- Figuren, Gegenstände werden um 180°-gedreht.
- Drehfolien: Fixierung des Drehpunkts mit einem Nagel (Zirkelspitze).

6.5.3 Zeichnen

Kästchenfiguren werden punktsymmetrisch ergänzt.

6.6 Drehsymmetrie

6.6.1 Definition: Drehsymmetrie

Eine ebene Figur heißt *α-drehsymmetrisch (in sich / bzgl. Z)*, wenn sie bei einer α-Drehung in sich selbst übergeht. Man spricht auch von *n-zähliger Drehsymmetrie*, wenn der Drehwinkel $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ ist.

Eine ebene Figur heißt *vollständig drehsymmetrisch (in sich) (bzgl. Z)*, wenn sie bei Drehungen um beliebige Winkel α in sich selbst übergeht.

6.7 Drehsymmetrie in der Schulwelt

6.7.1 Betrachtung von Bildern oder „ebenen" Gegenständen, Situationen:

- Darts-Scheibe, Windrad, Brettspiele (Halma)
- Blüten, Schneeflocken, Quer-Schnitt durch das Kerngehäuse eines Apfels
- Werkzeuge, Muttern,
- Speichenräder, Autofelgen, Sonnenschirme,
- Gugelhupf
- Rosetten an Bauwerken, in Fenstern oder Möbeln.
- Regelmäßige n-Ecke haben eine n-zählige Drehsymmetrie.
- Kreise, Kreisscheiben und Kreisringe sind vollständig drehsymmetrisch
- Querschnitt von Kerzen, Dosen, Seilen

6.7.2 Handeln

- Basteln: Weihnachtssterne, Windräder.
- Schneiden von Sternen nach Mehrfachfaltung.
- Drehfolien: Fixierung des Drehpunkts mit einem Nagel (Zirkelspitze).
- Mandalas färben

6.7.3 Zeichnen

- Kästchenfiguren werden drehsymmetrisch ergänzt
- Rosetten werden mit dem Spirograph gezeichnet

6.7.4 Zunehmende Schwierigkeit

hinsichtlich der Lage des Drehpunkts bzgl. der Figur: Mittelpunkt, Eckpunkt, Randpunkt, außerhalb, innerhalb.

6.8 Parkettierungen

6.8.1 Vorbemerkung

Anders als bei Achsenspiegelungen oder Drehungen kann die Nacheinanderausführung von mehreren gleichen Verschiebungen nicht die identische Abbildung ergeben.

Das bedeutet, dass eine ebene Figur durch mehrfache Verschiebungen immer neue Figuren ergibt, genauer: sich immer weiter „entfernt".

Im Schul- und Alltagsleben spricht man nicht von (beschränkten) verschiebungssymmetrischen Figuren, sondern eher von so genannten periodischen Parkettierungen oder Mustern.

6.8.2 Definition: Parkettierung

Es sei eine (begrenzte) Anzahl von ebenen Figuren (= Grundfiguren) vorgegeben.

(1) Von einer *Parkettierung der Zeichenebene* spricht man, wenn die Zeichenebene vollständig mit ebenen Figuren belegt ist, die alle zu den vorgegebenen Grundfiguren deckungsgleich sind.

Vollständig belegt heißt dabei, dass

- keine Lücken oder Löcher in der (unendlichen) Zeichenebene bleiben, und
- keine Überlappungen auftreten.

(2) Eine Parkettierung heißt *periodisch*, wenn die beteiligten ebenen Figuren bei Verschiebung längs zweier „Pfeile" auf deckungsgleiche ebene Figuren abgebildet werden.

6.8.3 Penrose-Muster

Es gibt beispielsweise nicht-periodische Parkettierungen mit zwei Typen von Rauten. Das sind mathematisch und naturwissenschaftlich hoch-interessante so genannte Penrose-Muster. $\boxed{\text{W}}$

6.8.4 Beispiele

Periodisches Parkettieren mit einer einzigen Grundfigur.

- Rechtecke
- Parallelogramme
- Drachen
- Gleichschenklige Trapeze
- Beliebige Dreiecke
- Regelmäßige Sechsecke
- Fünfer-Kreuze
- Regelmäßige Fünfecke oder n-Ecke ? Vgl. Platonische Parkettierungen 6.9.5.

Periodisches Parkettieren mit zwei Grundfiguren.

- Quadrate und Rauten $\rightarrow$ „Perspektiv-Würfel"
- Zwei Typen von regelmäßigen n-Ecken (Archimedische Parkettierungen)

6.9 Parkettierungen in der Schulwelt

6.9.1 Betrachtung von Bildern und ,,ebenen" Gegenständen:

- Bienenwaben
- Flaggen (Bayerische Fahne)
- Rückseiten von Spielkarten
- Muster auf Tapeten, Teppichen, Geschenkpapier, oder Tischdecken.
- Parkettboden (Fischgrät, Schiffsboden)
- Pflasterflächen (S-Steine, Rechtecksteine, Sechsecksteine)
- LEGO-Grundplatte
- Gitternetz (Karopapier)
- Maschendrahtzaun, Hasendraht
- Netze aller Art, beispielsweise an Fussballtor
- Bilder von M.C. Escher

6.9.2 Handeln

- Plättchen-Nageln, Ministeck
- Legen mit Figuren
- Verschieben von Formplättchen
- Sticken, Stricken, Weben
- Drucken mit Stempeln, Drucken mit Rollen
- Blech-Kuchenbacken, Waffel-Musterung

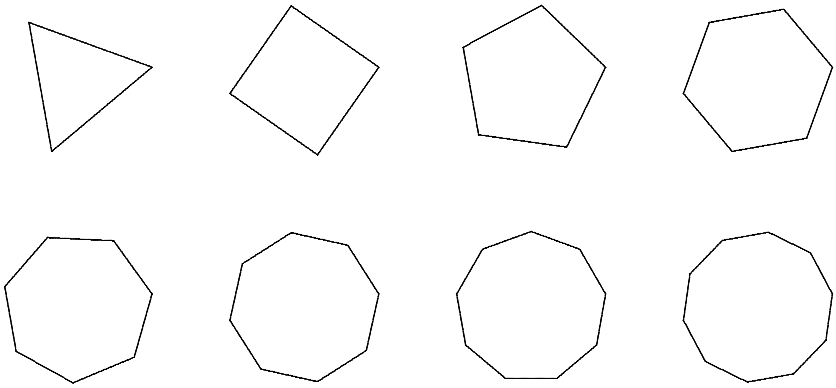
6.9.3 Zeichnen

Verschiebungs-Fortsetzen von Figuren auf Karopapier — beispielsweise mit Schablonen.

- Quadrate, Rechtecke, Rauten, Parallelogramme
- Gleichseitige, gleichschenklige, beliebige Dreiecke
- Fünfer-Kreuze

6.9.4 Frage

Mit welchen deckungsgleichen regelmäßigen n-Ecken kann man die Zeichenebene parkettieren?



6.9.5 Antwort im Satz: Platonische Parkettierungen

Eine Parkettierung mit einem einzigen Typ von regelmäßigen n-Eck ist nur für $n = 3, 4$ oder 6 möglich.

Die Zeichenebene kann also parkettiert werden …

- mit regelmäßigen (d.h. gleichseitigen) Dreiecken, wobei immer 6 an einer Ecke zusammenstoßen,
- mit regelmäßigen Vierecken (d.h. Quadraten), wobei immer 4 an einer Ecke zusammenstoßen,
- mit regelmäßigen Sechsecken, wobei immer 3 an einer Ecke zusammenstoßen.

Andere regelmäßige n-Ecke kommen nicht in Frage.

6.9.6 Begründung

1. Es ist bekannt (siehe später), dass für den Innenwinkel α eines regelmäßigen n-Ecks gilt:

$$\alpha \;=\; 180^\circ - \tfrac{360^\circ}{n} \qquad (*)$$

Als Tabelle ergibt sich

n	3	4	5	6	7	8	12	16	18	10.000
α	60°	90°	108°	120°	$\approx 128,57^\circ$	135°	150°	$157,5^\circ$	160°	$179,964^\circ$
	$\surd$	$\surd$	–	$\surd$	–	–	–	–	–	–

2. Da an einer Ecke sich mehrere dieser Innenwinkel α genau zu einem Vollwinkel zusammenfügen lassen müssen, muss der Vollwinkel 360° ein ganzzahliges Vielfaches ($=s$) von α sein.

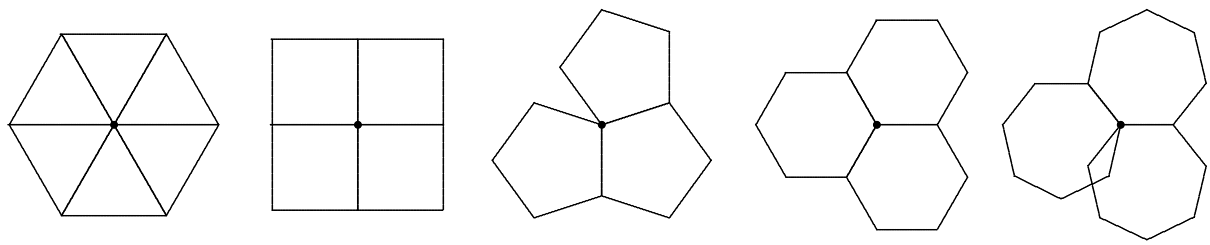
   $$360^\circ \quad = \quad s \cdot \alpha.$$

   Schaut man jetzt die obige Tabelle durch, so sieht man, dass diese Bedingung nur in drei Fällen erfüllt ist:

n	3	4	6
α	60°	90°	120°
s	6	4	3

6.9.7 Illustration

Man kann die obige Begründung in Zeichnungen veranschaulichen. Während sich bei regelmäßigen n-Ecken im Falle $n = 3, 4, 6$ die Lücke genau schließt, ist das für $n = 5, 7, 8, 9, \ldots$ nicht der Fall.



$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 108^\circ$	$\alpha = 120^\circ$	$\alpha \approx 128{,}57^\circ$
$s = 6$	$s = 4$	$s =?$	$s = 3$	$s =?$

6.10 Bandornamente

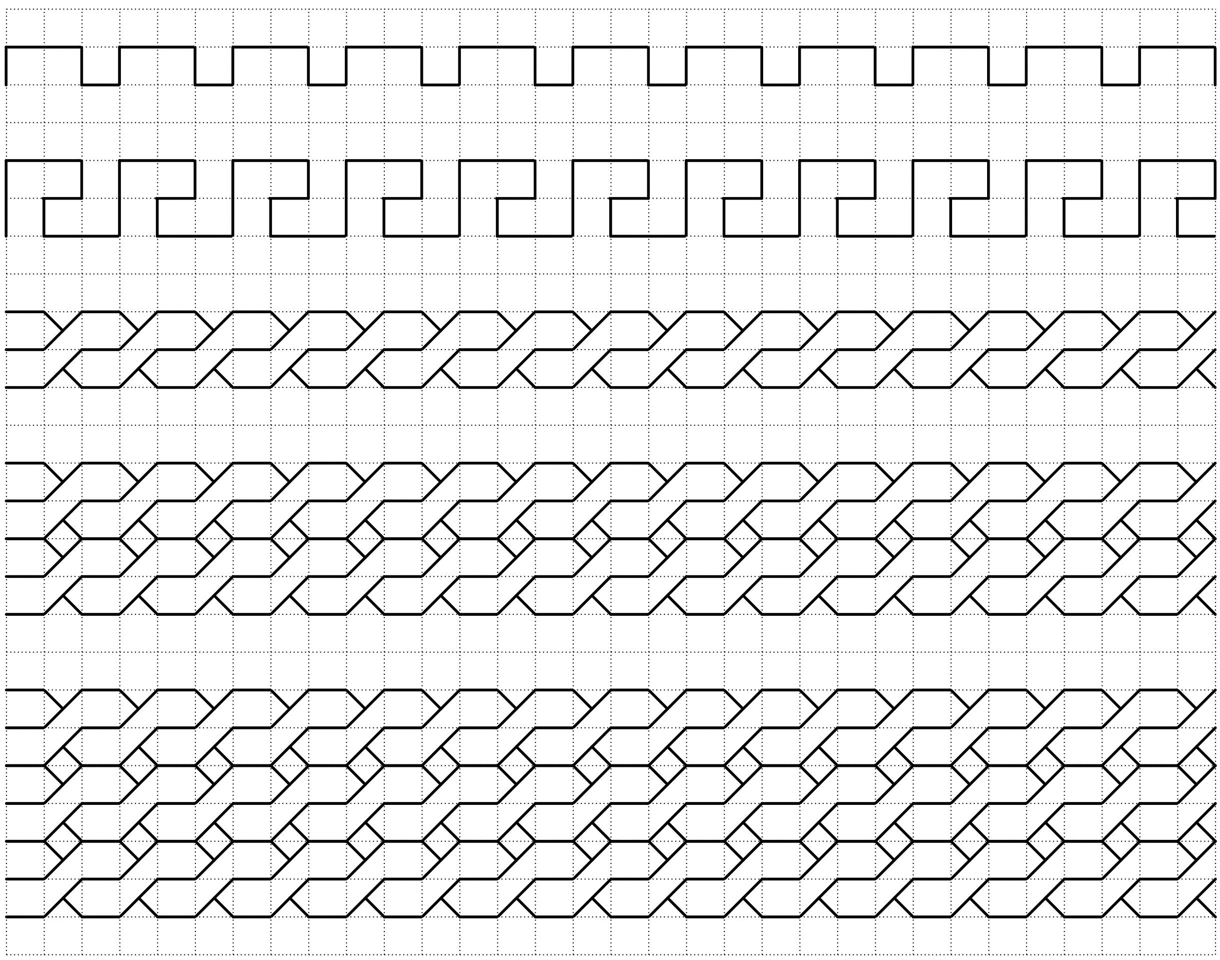
6.10.1 Definition: Bandornament

Es sei ein Pfeil in der Zeichenebene vorgegeben.

Wir nennen eine (unendlich ausgedehnte) ebene Figur ein *Bandornament*, wenn sie bei Verschiebung längs des Pfeils wieder auf sich selbst abgebildet wird.

6.10.2 Beispiele

- Häkeln
- Bandoramente in Kunst und Architektur
- Glücksarmband
- Siehe unten!



6.11 Kongruenz

6.11.1 Definition: Kongruenz

Zwei ebene Figuren $\mathcal{F}$ und $\widetilde{\mathcal{F}}$ heißen *kongruent zueinander*, wenn es eine Kongruenzabbildung gibt, die die Figur $\mathcal{F}$ in die Figur $\widetilde{\mathcal{F}}$ überführt.

6.11.2 Kommentare

Oft wird das Wort *deckungsgleich* als Synonym für kongruent benutzt. Da kongruente Figuren in Form und Größe übereinstimmen, werden sie in Alltags- und Schulsprache oft als ,,gleich" angesprochen.

Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation. Die Menge aller ebenen Figuren zerfällt in Äquivalenzklassen von zueinander kongruenten Figuren. Die Äquivalenzklasse ,,vergisst", wo und in welcher Lage sich eine konkrete Figur befindet.

6.11.3 Satz: Notwendige Bedingungen für Kongruenz

Dieser so genannte Hauptsatz der Kongruenz zeigt auf, welche Konsequenzen die Kongruenz zweier ebener Figuren hat. Die unter DANN aufgeführten Aussagen sind notwendige Bedingungen der Kongruenz.

WENN zwei Figuren $\mathcal{F}$ und $\widetilde{\mathcal{F}}$ kongruent zueinander sind,
DANN stimmen die zugehörigen Längen in den beiden Figuren überein.
DANN stimmen die zugehörigen Winkelmasse in den beiden Figuren überein.
DANN stimmen die zugehörigen Flächeninhalte in den beiden Figuren überein.

6.11.4 Hinreichende Bedingung für Kongruenz von zwei Dreiecken

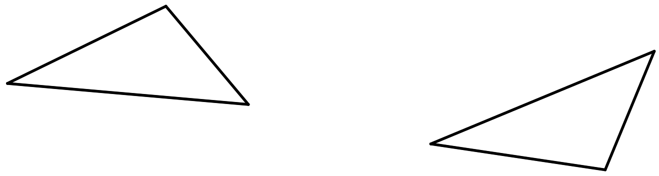
Die folgenden bekannten ,,Kongruenzsätze" zeigen auf, unter welchen Bedingungen zwei Dreiecke kongruent sind. Die unter WENN aufgeführten Aussagen sind hinreichende Bedingungen für Kongruenz.

Oft werden diese Sätze dahingehend verstanden, dass sie angeben, wenn ein Dreieck ,,eindeutig konstruierbar" ist.

6.11.5 SSS-Satz Es seien zwei Dreiecke gegeben.

Wenn jede Seitenlänge des einen Dreiecks jeweils mit einer Seitenlänge des anderen Dreiecks übereinstimmt,

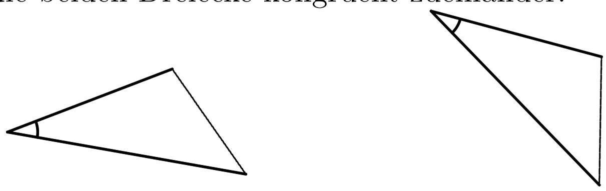
dann sind die beiden Dreiecke kongruent zueinander.



6.11.6 SWS-Satz Es seien zwei Dreiecke gegeben.

Wenn ein Winkelmaß in dem einen Dreieck mit einem Winkelmaß im anderen Dreieck übereinstimmt und die Längen der anliegenden Seiten in dem einen Dreieck jeweils mit den Längen der anliegenden Seiten im anderen Dreieck übereinstimmen,

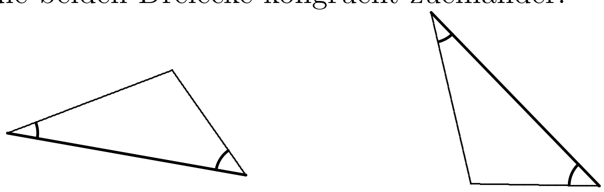
dann sind die beiden Dreiecke kongruent zueinander.



6.11.7 WSW-Satz Es seien zwei Dreiecke gegeben.

Wenn eine Seitenlänge in dem einen Dreieck mit einer Seitenlänge im anderen Dreieck übereinstimmt und die Masse der anliegenden Winkel in dem einen Dreieck jeweils mit den Massen der anliegenden Winkel im anderen Dreieck übereinstimmen,

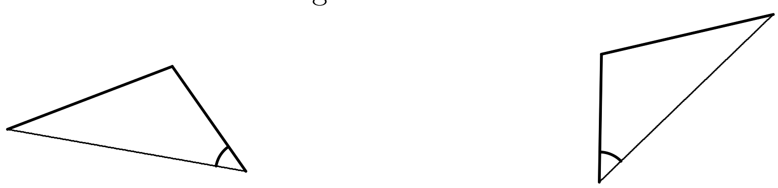
dann sind die beiden Dreiecke kongruent zueinander.



6.11.8 SsW-Satz Es seien zwei Dreiecke gegeben.

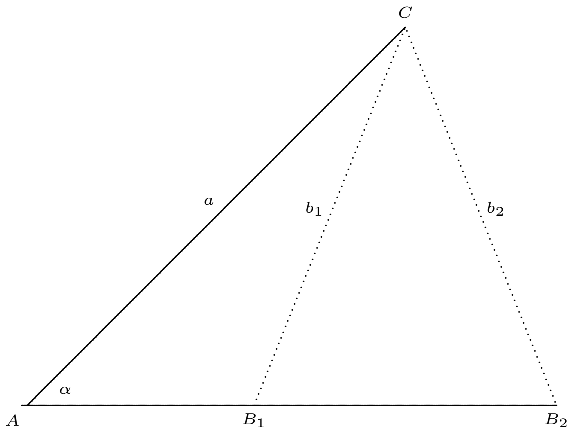
Wenn jede von zwei Seitenlängen in dem einen Dreieck mit jeweils einer Seitenlängen im anderen Dreieck übereinstimmt und der der größeren dieser beiden Seiten gegenüberliegende Winkel in dem einen Dreieck mit dem der größeren dieser beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel im anderen Dreieck übereinstimmt,

dann sind die beiden Dreiecke kongruent zueinander.



6.11.9 Einen SSW-Satz gibt es nicht

In den beiden Dreiecken AB_1C und AB_2C stimmen der Winkel α und je zwei Seitenlängen überein. Die beiden Dreiecke sind aber nicht kongruent.



Es stellt sich die interessante Frage, was im Grenzfall SSW/S=S (gleich lange Seiten) passiert.

Bei Betrachtung der obigen Skizze lässt sich erkennen, dass dann das Dreieck ΔAB_1C zu der Strecke $[AC]$ mit $B_1 = C$ entartet. Das zweite Dreieck AB_2C ist gleichschenklig.

Das bedeutet: Zwei (vernünftige) Dreiecke mit SSW/S=S sind kongruent zueinander.

6.11.11 Gibt es einen WWS- bzw. SWW-Satz?

6.11.11 Formulierungen als Sätze der eindeutigen Konstruierbarkeit

Häufig werden die Dreiecks-Kongruenzsätze 6.11.5 – 6.11.8 als Sätze über die „eindeutige Konstruierbarkeit von Dreiecken" formuliert oder aufgefasst, beispielsweise so:

SSS-Satz: Sind für ein Dreieck die drei Seitenlängen vorgegeben, so ist es eindeutig konstruierbar.

SWS-Satz: Sind für ein Dreieck zwei Seitenlängen und das Maß des dazwischenliegenden Winkels vorgegeben, so ist es eindeutig konstruierbar.

WSW-Satz: Sind für ein Dreieck eine Seitenlänge und die Maße der anliegenden Winkel vorgegeben, so ist es eindeutig konstruierbar.

SsW-Satz: Sind für ein Dreieck zwei Seitenlängen und das Maß des der längeren der beiden Seiten gegenüberliegenden Winkels vorgegeben, so ist es eindeutig konstruierbar.

6.11.12 Bemerkungen zu diesen Formulierungen

- Ein Vorteil dieser Formulierungen ist, dass sie aufgrund der Sichtweise auf das Konstruieren „handlungsorientiert" sind und nicht ein mehr oder weniger abstraktes Konzept (wie die Relation „Kongruenz") in den Blick nehmen.
- Die Formulierungen an sich sind auch einfacher und eingängiger.

- Es ist nicht ganz klar, was ,,eindeutige Konstruierbarkeit” eigentlich bedeutet. Tatsächlich bezieht sich Eindeutigkeit auf ,,Größe und Form”. Als Punktmenge in der Zeichenebene kann ein Dreieck bei Vorgabe von SSS, SWS, WSW oder SsW eben nicht eindeutig konstruiert werden. Es kann nur ,,bis auf Kongruenz” eindeutig konstruiert werden.

- Mathematisch gesehen ist die Kongruenz-Relation ein klares und klärendes Konzept, das die gesamt Geometrie durchzieht.

6.11.13 Fehlauffassung

Man könnte auf die Idee kommen, die obigen Dreiecks-Kongruenzsätze für beliebige n-Ecke so zu verallgemeinern:

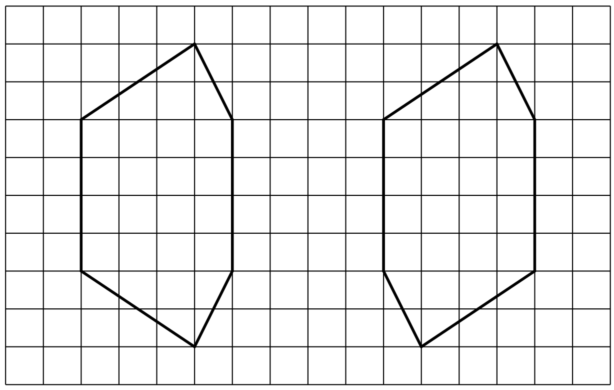
Es seien zwei n-Ecke gegeben.

WENN jede Seitenlänge des einen n-Ecks jeweils mit einer Seitenlänge des anderen n-Ecks übereinstimmt,

UND jeder Innenwinkel in dem einen n-Eck mit einem Innenwinkel des anderen n-Ecks übereinstimmt,

DANN sind die beiden n-Ecke kongruent zueinander.

Das ist falsch, wie die beiden Sechsecke zeigen. Seitenlängen und Innenwinkel stimmen überein, es liegt aber keine Kongruenz vor.



6.12 Beweise der Dreiecks-Kongruenzsätze

6.12.1 S-Satz

WENN zwei Strecken gleich lang sind,
DANN sind sie kongruent zueinander.

6.12.2 Bemerkung

Wenn man in diesem Satz das Wort ,,kongruent" durch das Synonym ,,deckungsgleich" ersetzt, so gelangt man zu der skurrilen (zu beweisenden!) Aussage, dass gleich lange Strecken deckungsgleich sind.

Beachte ein weiteres Mal, dass ,,Kongruenz" von Figuren die Existenz einer Kongruenzabbildung bedeutet, die die eine Figur in die andere abbildet.

6.12.3 Beweis

Es seien $[AB]$ und $[A'B']$ die beiden gleich langen Strecken.

Man führe eine Achsenspiegelung durch, die den Punkt A in den Punkt A' abbildet. Das Bild von B bei dieser Achsenspiegelung sei B^*. Dann sind die beiden Strecken $[A'B^*]$ und $[A'B']$ gleich lang und haben einen gemeinsamen Endpunkt A'.

Also kann die Strecke $[A'B^*]$ mit Hilfe einer Drehung um A' auf die Strecke $[A'B']$ abgebildet werden.

Die Achsenspiegelung mit nachfolgender Drehung ist dann eine Kongruenzabbildung, die $[AB]$ auf $[A'B']$ abbildet.

6.12.4 W-Satz

WENN zwei Winkel gleiches Maß haben,
DANN sind sie kongruent zueinander.

6.12.5 Beweis

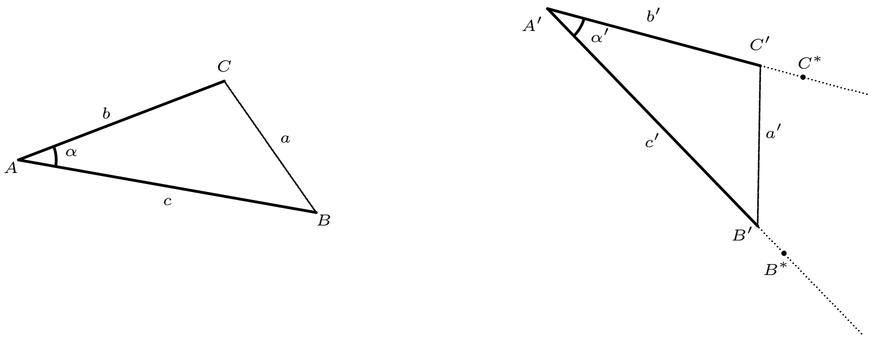
Es seien (g, h) und (g', h') die beiden gleich großen Winkel mit Scheitelpunkten S bzw. S'.

Man führe eine Achsenspiegelung durch, die den Punkt S in den Punkt S' abbildet. Das Bild von (g, h) bei dieser Achsenspiegelung sei (g^*, h^*). Dann sind die beiden Winkel (g^*, h^*) und (g', h') gleich groß und haben den gemeinsamen Scheitelpunkt S'.

Also kann der Winkel (g^*, h^*) mit Hilfe einer Drehung um S' auf den Winkel (g', h') abgebildet werden.

Die Achsenspiegelung mit nachfolgender Drehung ist dann eine Kongruenzabbildung, die (g, h) auf (g', h') abbildet.

6.12.6 Beweis des SWS-Satzes 6.11.6



(0) Es seien zwei Dreiecke Δ und Δ' gegeben mit

$$c = c', \qquad \alpha = \alpha', \qquad b = b'.$$

(1) Führe gemäß Satz 6.12.4 eine Kongruenzabbildung durch, die den Winkel $([AB, [AC)$ auf den Winkel $([A'B', [A'C')$ abbildet. Evtl. muss man die Schenkel mit Hilfe einer Achsenspiegelung an der Winkelhalbierenden vertauschen. Das Bilddreieck werde mit $A^*B^*C^*$ bezeichnet.

(2) Es ist $A^* = A'$. Wegen

$$B^* \in [A'B'[\qquad \text{und} \qquad \overline{A'B^*} = c^* = c = c' = \overline{A'B'}$$

muss $B^* = B'$ sein. Analog muss $C^* = C'$ sein.

6.12.7 Beweis der xSy-Kongruenzsätze

Die folgenden drei Beweise laufen alle nach einem einheitlichen Format ab.

(0) Gegeben seien zwei Dreiecke $\Delta = \Delta ABC$ und $\Delta' = \Delta A'B'C'$ mit ,,Übereinstimmungen xSy".

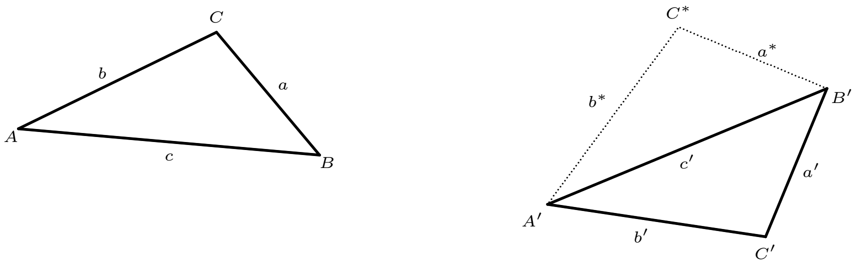
(1) Führe eine Kongruenzabbildung κ durch, die die Strecke S (in der ,,Mitte" von xSy) des Dreiecks Δ auf die entsprechende Strecke im Dreieck Δ' abbildet. Das Bilddreieck von Δ unter dieser Kongruenzabbildung wird mit Δ^* bezeichnet. Entsprechend für Ecken, Seiten, Winkel.

(2) Man überlegt dann, dass höchstens noch eine Achsenspiegelung σ nötig ist, um das Dreieck Δ^* auf das Dreieck Δ' abzubilden.

(3) Die Nacheinanderausführung der Kongruenzabbildung κ aus Schritt (1) und der Achsenspiegelung σ aus Schritt (2) ist dann die gesuchte Kongruenzabbildung.

$$\Delta \quad \mapsto \quad \Delta^* \quad \mapsto \quad \Delta'.$$

6.12.8 Beweis des SSS-Satzes 6.11.5



(0) Es seien zwei Dreiecke Δ und Δ' gegeben mit

$$a = a', \qquad b = b', \qquad c = c'.$$

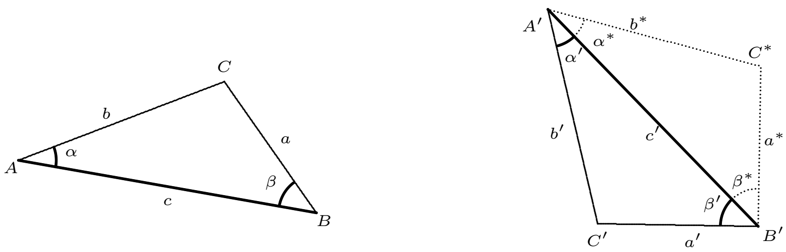
(1) Führe gemäß Satz 6.12.1 eine Kongruenzabbildung κ durch, die $[AB]$ auf $[A'B']$ abbildet.

(2) Es gilt

$$\begin{aligned} \overline{A'C'} &= b' = b = b^* = \overline{A'C^*} \qquad \text{und} \\ \overline{B'C'} &= a' = a = a^* = \overline{B'C^*}. \end{aligned}$$

Das bedeutet gemäß 4.3.5, dass $C^* = C'$ oder $C^*|C'$ bzgl. der Geraden $A'B'$.

6.12.9 Beweis des WSW-Satzes 6.11.7



(0) Es seien zwei Dreiecke Δ und Δ' gegeben mit

$$\alpha = \alpha', \qquad c = c', \qquad \beta = \beta'.$$

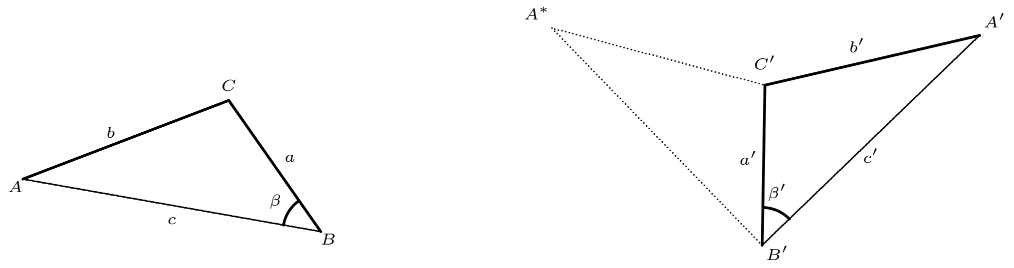
(1) Führe gemäß Satz 6.12.1 eine Kongruenzabbildung κ durch, die $[AB]$ auf $[A'B']$ abbildet.

(2) Es gilt dann

$$\begin{aligned} |\sphericalangle B'A'C^*| &= \alpha^* = \alpha = \alpha' = |\sphericalangle B'A'C'| \qquad \text{und} \\ |\sphericalangle A'B'C^*| &= \beta^* = \beta = \beta' = |\sphericalangle A'B'C'|. \end{aligned}$$

Das bedeutet gemäß 4.3.7, dass $C^* = C'$ oder $C^*|_{AB}C'$.

6.12.10 Beweis des SsW-Satzes 6.11.8



(0) Es seien zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegeben mit

$$b = b' \qquad > \qquad a = a', \qquad \beta = \beta'.$$

(1) Führe gemäß Satz 6.12.4 eine Kongruenzabbildung durch, die die Strecke $[BC]$ auf die Strecke $[B'C']$ abbildet.

(2) Es ist dann

$$\begin{aligned} \overline{C'A^*} &= b^* = b = b' = \overline{C'A'} \qquad \text{und} \\ |\sphericalangle C'B'A^*| &= \beta^* = \beta = \beta' = |\sphericalangle C'B'A'| \end{aligned}$$

Weitere Argumentation fehlt noch.

7 Ähnlichkeit und Strahlensätze

7.1 Ähnlichkeit

7.1.1 Definition: Ähnlichkeit

Zwei ebene Figuren $\mathcal{F}$ und $\widetilde{\mathcal{F}}$ heißen *ähnlich zueinander*, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, die die Figur $\mathcal{F}$ in die Figur $\widetilde{\mathcal{F}}$ überführt.

7.1.2 Kommentare

- Der Begriff „ähnlich" nimmt die Alltagsidee auf, dass es sich um Figuren handelt, die nicht gleich, sondern eben nur ähnlich sind. Da kongruente Figuren in Form und Größe übereinstimmen, werden sie in Alltags- und Schulsprache oft als „gleich" angesprochen.
- Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation. Die Menge aller ebenen Figuren zerfällt in Äquivalenzklassen von zueinander ähnlichen Figuren. Die Äquivalenzklasse „vergisst", wo und in welcher Lage und wie groß eine konkrete Figur ist.
- Anwendungssituationen: Vergrößern und Verkleinern, Zoomen, → Kopierer.

7.1.3 Satz: Notwendige Bedingung für Ähnlichkeit

WENN zwei Figuren $\mathcal{F}$ und $\widetilde{\mathcal{F}}$ ähnlich zueinander sind,
DANN gelten die folgenden Aussagen:

(i) Sind $[AB]$ und $[CD]$ zwei Strecken innerhalb der Figur $\mathcal{F}$, so gilt für die Bildstrecken innerhalb der Figur $\widetilde{\mathcal{F}}$

$$\frac{\overline{\widetilde{A}\widetilde{B}}}{\overline{\widetilde{C}\widetilde{D}}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}.$$

Kurz: Die Längenverhältnisse in den beiden Figuren stimmen überein.

(ii) Ist $\sphericalangle ABC$ ein Winkel innerhalb der Figur $\mathcal{F}$, so gilt für den Bildwinkel $\sphericalangle \widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}$ innerhalb der Figur $\widetilde{\mathcal{F}}$

$$|\sphericalangle \widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}| = |\sphericalangle ABC|.$$

Kurz: Die Winkelmasse in den beiden Figuren stimmen überein.

7.1.4 Satz: Hinreichende Bedingung für die Ähnlichkeit von zwei Dreiecken

WENN eine der folgenden Doppel-Aussagen für ,,ein" Dreieck Δ und ein ,,anderes" Dreieck $\widetilde{\Delta}$ erfüllt ist, DANN sind diese Dreiecke ähnlich zueinander.

(www) $\boxed{1}$ Ein Winkel des einen Dreiecks stimmt mit einem Winkel des anderen Dreiecks überein UND

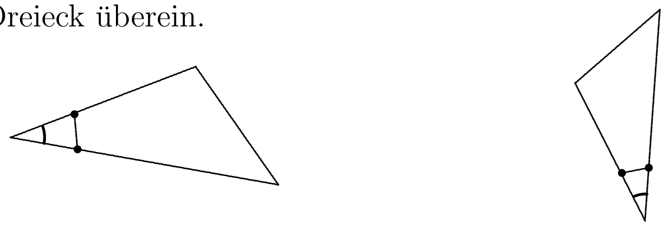
$\boxed{2}$ noch ein anderer Winkel des einen Dreiecks stimmt mit einem zweiten Winkel des anderen Dreiecks überein.

(sss) $\boxed{1}$ Das Verhältnis zweier Seitenlängen in dem einen Dreieck stimmt mit einem Verhältnis zweier Seitenlängen im anderen Dreieck überein UND

$\boxed{2}$ noch ein anderes Verhältnis zweier Seitenlängen in dem einen Dreieck stimmt mit einem Verhältnis zweier Seitenlängen im anderen Dreieck überein.

(sws) $\boxed{1}$ Ein Winkel des einen Dreiecks stimmt mit einem Winkel des anderen Dreiecks überein UND

$\boxed{2}$ das Verhältnis der beiden winkel-anliegenden Seitenlängen in dem einen Dreieck stimmt mit dem Verhältnis der beiden winkel-anliegenden Seitenlängen im anderen Dreieck überein.



(Ssw) $\boxed{1}$ Das Verhältnis zweier Seitenlängen in dem einen Dreieck stimmt mit einem Verhältnis zweier Seitenlängen im anderen Dreieck überein UND

$\boxed{2}$ der der größeren dieser beiden Seiten gegenüberliegende Winkel in dem einen Dreieck stimmt mit dem der größeren dieser beiden Seiten gegenüberliegende Winkel im anderen Dreieck überein.

7.1.5 Kommentare

- Es sei nochmals betont, dass in jedem der Ähnlichkeitssätze genau zwei hinreichende Bedingungen aufgelistet sind. Natürlich kann es passieren, dass mehr als je zwei Größen der Dreiecke dabei eine Rolle spielen. (sss)
- Die Formulierungen muten seltsam überzogen-unhandlich an. Umgekehrt sind die in den Schulbüchern anzutreffenden Formulierungen unklar bis falsch.
- Die „Drei-Buchstaben"-Abkürzungen sind in mehrfacher Hinsicht verwirrend bis irreführend:
  - Die Drei-Buchstaben-Sequenz legt nahe, dass jeweils drei Bedingungen erfüllt sein müssen. Das stimmt nicht!
  - Der Buchstabe s steht durchgängig für eine Seite und nicht für das Längenverhältnis zweier Seiten. So ist das Kürzel (sss) zu interpretieren als (s:s:s). Es geht um zwei Längenverhältnisse.
- Es wird gelegentlich eine Analogie zwischen den Kongruenzsätzen und den Ähnlichkeitssätzen konstatiert, die natürlich von den Buchstabenkombinationen weiter genährt wird. Es bleibt aber offen, worin diese Analogie mathematisch-inhaltlich bestehen sollte.

  Beim Beweisen tritt tatsächlich eine „eineindeutige" Zuordnung der Ähnlichkeitssätze zu den Kongruenzsätzen auf.

7.1.6 Beweise

Wir verzichten auf eine genaue Darlegung der Beweise der Ähnlichkeitssätze.

Im wesentlichen wird das eine gegebene Dreieck so zentrisch getreckt, dass eine Seitenlänge mit der entsprechenden Seitenlänge des anderen Dreiecks übereinstimmt. Dann muss man nur noch den (gemäß folgender Tabelle) geeigneten Dreiecks-Kongruenzsatz anwenden.

$$\begin{array}{rcl} \text{(www)} & \Longleftarrow & \text{(WSW)} \\ \text{(sss)} & \Longleftarrow & \text{(SSS)} \\ \text{(sws)} & \Longleftarrow & \text{(SWS)} \\ \text{(Ssw)} & \Longleftarrow & \text{(SsW)} \end{array}$$

Die Nacheinanderausführung der zentrischen Streckung und der in dem Kongruenzsatz behaupteten Kongruenzabbildung ist dann die gesuchte Ähnlichkeitsabbildung.

7.1.7 Satz: Ähnlichkeit bei anderen ebenen Figuren

(i) Für festes n sind alle regelmäßigen n-Ecke ähnlich zueinander.

(ii) Insbesondere sind alle gleichseitigen Dreiecke ähnlich zueinander.

(iii) Insbesondere sind alle Quadrate ähnlich zueinander.

(iv) Alle gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke sind ähnlich zueinander.

(v) Alle Kreise sind ähnlich zueinander.

(vi) Zwei Rechtecke mit übereinstimmenden Verhältnis Länge : Breite sind ähnlich zueinander.

(vii) Das DIN A-Format besteht in einem Rechteck mit dem Seitenverhältnis $\sqrt{2} : 1$. Also sind alle DIN A-Papierbögen ähnlich zueinander.

Schneidet man einen DIN A-Papierbogen parallel zur kürzeren Seite mittig durch, so ist die entstehende ,,Hälfte" ähnlich zum Gesamtbogen.

7.1.8 Diagramm zu den Kongruenz- und Ähnlichkeitssätzen

Wir fassen die vier Sätze zu Kongruenz und Ähnlichkeit in einem Diagramm zusammen.

Für Relationen zwischen ebenen Figuren gelten die folgenden Implikationen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{SSS} & \text{oder} \\ \text{SWS} & \text{oder} \\ \text{WSW} & \text{oder} \\ \text{SsW} & \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Dreiecke}} \text{kongruent} \xrightarrow[\text{ebene Figuren}]{\text{Beliebige}} \left\{\begin{array}{l} \text{gleiche Längen} \\ \text{gleiche Winkelmasse} \\ \text{gleiche Flächeninhalte} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{www} & \text{oder} \\ \text{sss} & \text{oder} \\ \text{sws} & \text{oder} \\ \text{Ssw} & \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Dreiecke}} \text{ähnlich} \xrightarrow[\text{ebene Figuren}]{\text{Beliebige}} \left\{\begin{array}{l} \text{gleiche Längenverhältnisse} \\ \text{gleiche Winkelmasse} \end{array}\right.$$

7.1.9 Beweisschema

Diese beiden Implikationsketten bilden das Grundschema vieler schulgeometrischer Beweise.

Um die Gleichheit zweier geometrischer Größen X und Y in einer geometrischen Situation zu beweisen, geht man so vor:

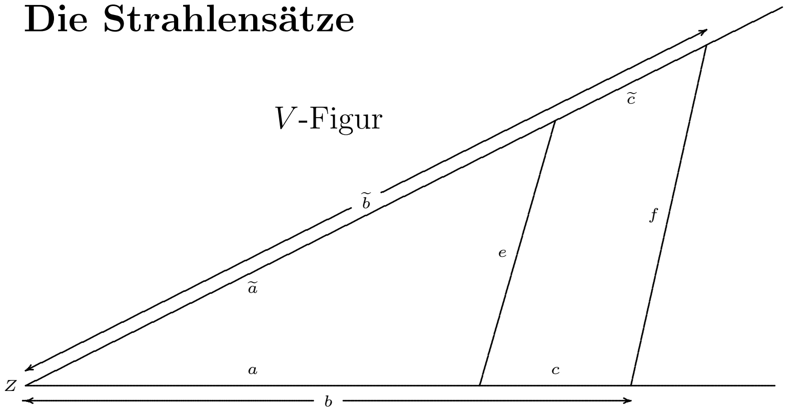
1. Suche zwei geeignete Teildreiecke, die diese Größen X und Y beinhalten.

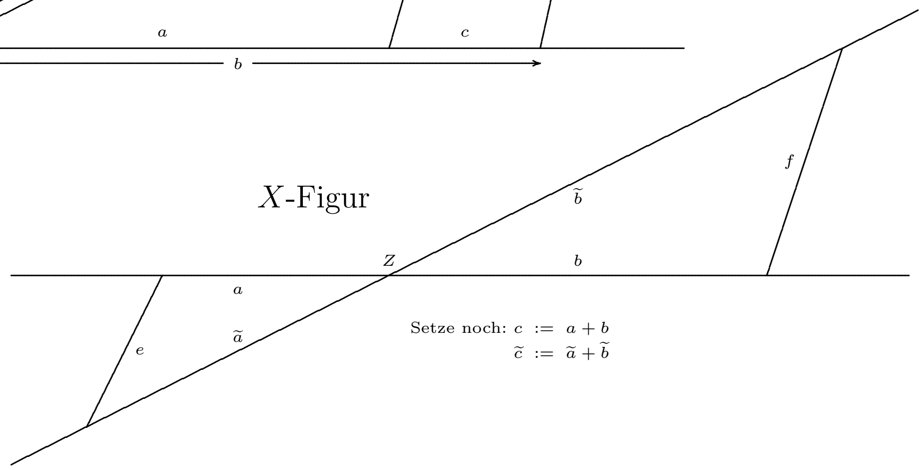
2. Man zeigt, dass eine der Voraussetzungen links erfüllt ist.

3. Wegen der linken Implikation sind die beiden Dreiecke kongruent bzw. ähnlich.

4. Wegen der rechten Implikation kann auf die Gleichheit $X = Y$ geschlossen werden.

7.2 Die Strahlensätze





7.2.1 Die Situation

Zwei Geraden schneiden sich in einem Punkt Z.

Diese beiden Geraden werden von weiteren zwei Geraden geschnitten, so dass Abschnitte der Länge e und f entstehen. Beachte, dass zunächst nicht von Parallelität der beiden Abschnitte die Rede ist.

Je nach dem, ob die beiden Abschnitte auf der gleichen Seite oder auf verschiedenen Seiten vom Schnittpunkt Z liegen, spricht man von einer V-Figur bzw. von einer X-Figur.

7.2.2 Strahlensätze (= Vierstreckensätze)

Bzgl. der V-Figur oder der X-Figur gelten die folgenden Implikationen:

(i) Erster Strahlensatz

Wenn $e \parallel f$, dann $\frac{\widetilde{a}}{\widetilde{b}} = \frac{a}{b}$.

(ii) Zweiter Strahlensatz

Wenn $e \parallel f$, dann $\frac{e}{a} = \frac{f}{b}$.

(iii) Umkehrung des ersten Strahlensatzes

Wenn $\frac{\widetilde{a}}{\widetilde{b}} = \frac{a}{b}$, dann $e \parallel f$.

(iv) Die Umkehrung des zweiten Strahlensatzes ist falsch.

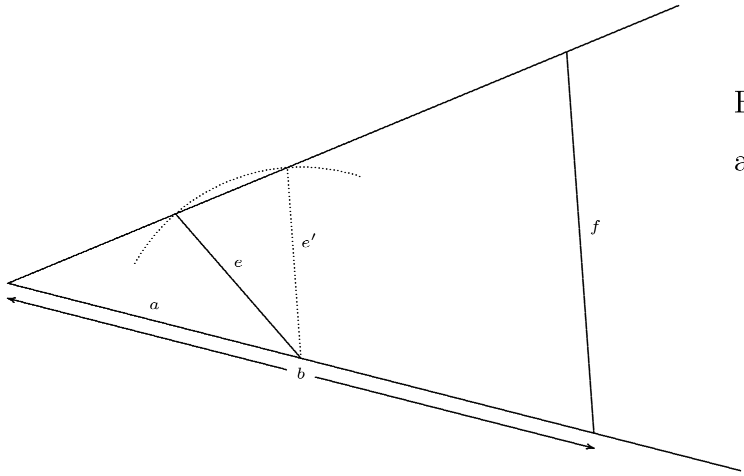
7.2.3 Bemerkung

Beachte, dass die Parallelität der beiden Geraden nicht generelle Voraussetzung bei diesem Satz war. Ansonsten würde die Aussage (iii) der Umkehrung sinnlos werden.

7.2.4 Beweis

Er beruht im wesentlichen auf den Eigenschaften der zentrischen Streckung.

7.2.5 Gegenbeispiel zur Umkehrung des Zweiten Strahlensatzes



Es ist $\frac{e}{a} \overset{\text{Kreis}}{=} \frac{e'}{a} \overset{\text{1. StrS}}{=} \frac{f}{b}$,

aber nicht $e \parallel f$.

7.2.6 Zusatz 1

Die in den Strahlensätzen auftretenden Verhältnis-Gleichungen können mittels Kehrwertbildung oder kreuzweiser Umformung auch anders dargestellt werden. So ist beispielsweise bzgl. des ersten Strahlensatzes

$$\begin{array}{ccc} \frac{\widetilde{a}}{\widetilde{b}} = \frac{a}{b} & \Longleftrightarrow & \frac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}} = \frac{b}{a} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \frac{\widetilde{a}}{a} = \frac{\widetilde{b}}{b} & \Longleftrightarrow & \frac{a}{\widetilde{a}} = \frac{b}{\widetilde{b}} \end{array}$$

Welche dieser Gleichungen in der Formulierung der Strahlensätze gewählt wird, ist Geschmackssache bzw. hängt vom Anwendungskontext ab.

7.2.7 Zusatz 2

In den eigentlichen Strahlensätzen blieben die Abschnitte c und $\widetilde{c}$ unberücksichtigt. Es gilt entsprechend:

Erster Strahlensatz

Wenn $e \,||\, f$, dann $\frac{\widetilde{a}}{a} = \frac{\widetilde{c}}{c}$.

NEIN. Zweiter Strahlensatz (bzgl. V-Figur)

Wenn $e \,||\, f$, dann $\frac{f}{e} = \frac{c}{a}$.

7.2.8 Beweis

Die erste Aussage ist eine einfache algebraische Folgerung aus dem eigentlichen ersten Strahlensatz.

Innerhalb der V-Figur ist

$$\frac{\widetilde{c}}{\widetilde{a}} = \frac{\widetilde{b-\widetilde{a}}}{\widetilde{a}} = \frac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}} - 1 \overset{\text{1. StrS}}{=} \frac{b}{a} - 1 = \frac{b-a}{a} = \frac{c}{a}.$$

Innerhalb der X-Figur ist

$$\frac{\widetilde{c}}{\widetilde{a}} = \frac{\widetilde{b+\widetilde{a}}}{\widetilde{a}} = \frac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}} + 1 \overset{\text{1. StrS}}{=} \frac{b}{a} + 1 = \frac{b+a}{a} = \frac{c}{a}.$$

7.2.9 Anwendungen bei der Vermessung

Grundsätzlich können die Strahlensätze zur Ermittlung einer Streckenlänge herangezogen werden, die nicht direkt zugänglich ist.

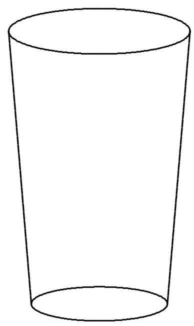
- Höhe von Bäumen: Försterdreieck.
- Höhe von Türmen: Fernsehtürme
- Breite von Flüssen

7.2.10 Anwendungen in der geometrischen Optik

- Camera Obscura (=Lochkamera)
- Herleitung der so genannten Abbildungsgleichungen bei Sammellinsen.
- Astronomie: Bei einer Sonnenfinsternis verdeckt der Mond ziemlich genau gerade die Sonne. Deshalb gilt gemäß zweitem Strahlensatz die folgende Beziehung zwischen den Verhältnissen aus Durchmesser und Entfernung:

$$\frac{d_{\text{Mond}}}{e_{\text{Mond}}} = \frac{d_{\text{Sonne}}}{e_{\text{Sonne}}}.$$

7.2.11 Aufgabe: Rollen eines Trinkglases



Die Öffnung einer 12 cm hohen Trinkglases hat einen Durchmesser von 8 cm, der Boden einen von 6 cm.

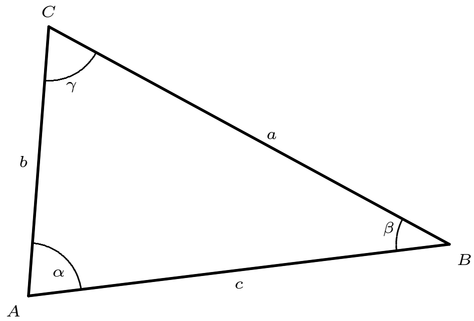
Wie groß ist der Kreis, den das umgekippte Glas beim Rollen beschreibt?

8 Geometrie der Dreiecke

8.1 Grundlagen und Überblick

8.1.1 Definition: Dreieck

Eine durch drei Strecken begrenzte ebene Figur heißt *Dreieck*.



8.1.2 Weitere Bezeichnungen

Wenn ein Dreieck vorliegt, dann ergeben sich einige weitere Bezeichnungen

- Die drei begrenzenden Strecken heißen *Seiten*.
- Die drei Schnittpunkte benachbarter Seiten heißen *Ecken*.
- Die drei Winkel, die sich zwischen den Seiten an den Ecken ergeben, heißen *Innenwinkel* des Dreiecks.
- Normalerweise werden die drei Ecken mit A, B, C (gegen den Uhrzeigersinn) bezeichnet.
- Bei Dreiecken tritt die Besonderheit auf, dass die Seiten entsprechend der gegenüberliegenden Eckpunkte benannt werden. Die Seiten sind dann $a = [BC]$, $b = [CA]$ und $c = [AB]$. Die Innenwinkel werden mit den zugeordneten griechischen Buchstaben α, β und γ bezeichnet.

8.1.3 Dreiecksungleichung

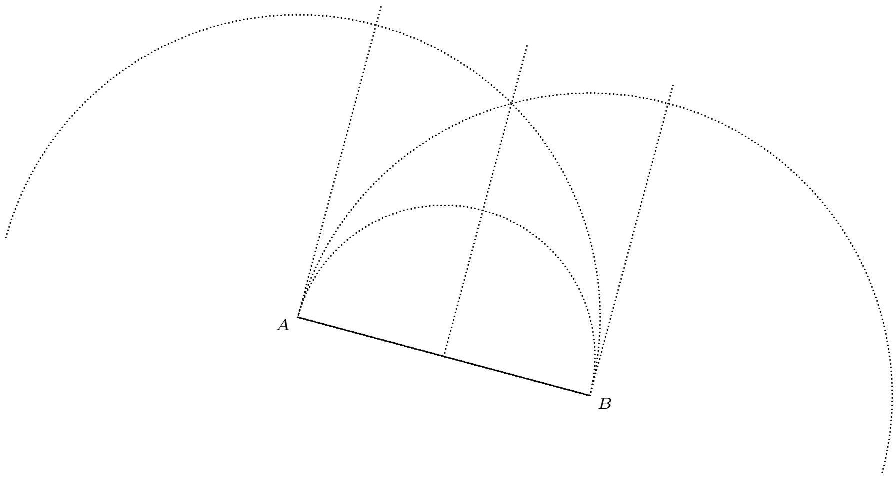
Eine Seite des Dreiecks ist immer kürzer als die Summe der Längen der beiden anderen Seiten:

$$a < b + c, \qquad b < c + a, \qquad c < a + b.$$

Die Dreiecksungleichung spielt bei schulischen Argumentationen kaum eine Rolle, sie ist für fachmathematische Überlegungen, beispielsweise bei der Definition des ,,metrischen Raumes" von erheblicher Bedeutung.

8.1.4 Zeichen-Trick für die Schulpraxis

Soll eine Strecke $[AB]$ oberhalb zu einem allgemeinen (=nicht-speziellen) Dreieck ABC ergänzt werden, so darf der dritte Eckpunkt C nicht auf den gepunkteten Linien liegen.

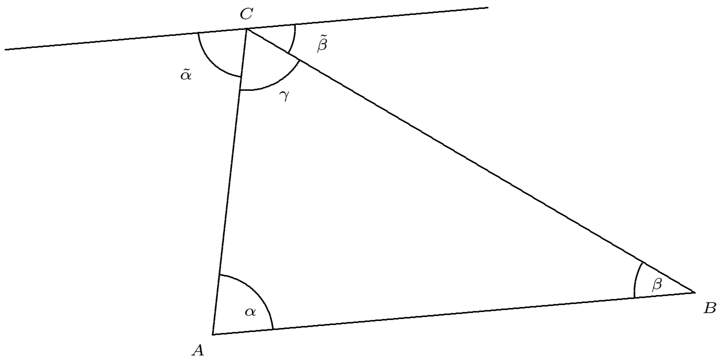


8.2 Der Satz über die Innenwinkelsumme

8.2.1 Satz In einem beliebigen Dreieck ist die Summe der Innenwinkelmaße gleich 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma \; = \; 180^\circ.$$

8.2.2 Beweis



(0) Betrachte eine zu AB parallele Gerade durch den Eckpunkt C.

(1) Die drei bei C auftretenden Winkel $\tilde\alpha$, $\tilde\beta$ und γ ergänzen sich zum gestreckten Winkel mit Maß 180°.

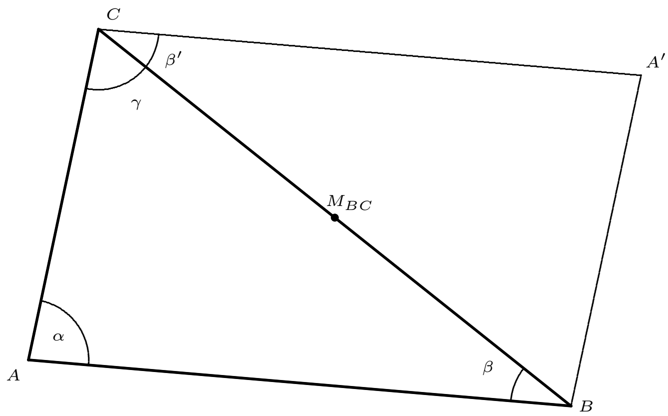
(2) Gemäß dem Wechselwinkelsatz 3.6.3 (ii) sind die Wechselwinkel gleich groß:

$$\alpha \; = \; \tilde\alpha \qquad \text{und} \qquad \beta \; = \; \tilde\beta$$

(3) Deshalb gilt

$$\alpha + \beta + \gamma \; \overset{(2)}{=} \; \tilde\alpha + \tilde\beta + \gamma \; \overset{(1)}{=} \; 180^\circ. \qquad \text{q.e.d.}$$

8.2.3 Beweis Variante II



Das gegebene Dreieck ABC wird durch eine 180°-Drehung um einen Seitenmittelpunkt, sagen wir M_{BC}, auf das Dreieck $A'BC$ abgebildet. Es entsteht ein Parallelogramm $ABA'C$.

Aufgrund der Eigenschaft 4.4.5 der Punktspiegelung, dass Geraden auf dazu parallele Geraden abgebildet werden, sind die beiden Geraden AB und CA' parallel.

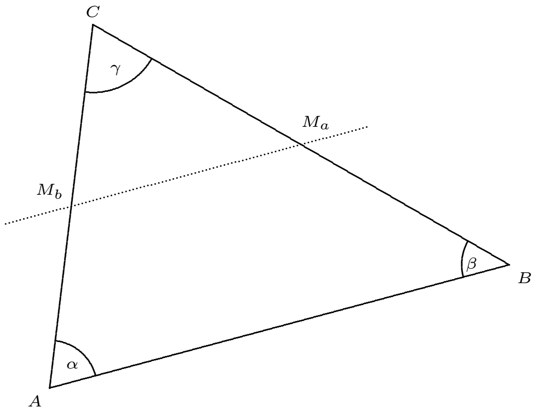
Aufgrund des Z-Winkelsatzes 3.6.3 (ii) gilt dann

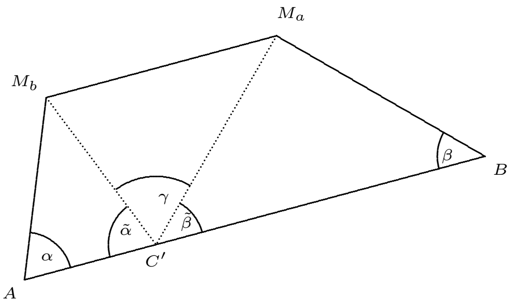
$$\beta' \; = \; \beta$$

und dann aufgrund des C-Winkelsatzes 3.6.3 (iii)

$$\alpha + \beta + \gamma \; = \; \alpha + (\beta' + \gamma) \; \overset{\text{C-WS}}{=} \; 180^\circ.$$

8.2.4 Beweis Variante III: Spiegeln bzgl. einer Mittenlinie





Ein Eckpunkt (hier C) des beliebigen gegebenen Dreiecks wird an der Geraden (hier: M_aM_b) durch die Mittelpunkte der angrenzenden Seiten gespiegelt.

Der Bildpunkt C' kommt dabei auf die Seite $[AB]$ zu liegen.

Die beiden Dreiecke $AC'M_b$ und $C'BM_a$ sind gleichschenklig, demzufolge sind die Basiswinkel gleich groß:

$$\tilde{\alpha} = \alpha, \qquad \tilde{\beta} = \beta.$$

Der gestreckte Winkel bei C' setzt sich also aus Winkeln der Maße α, β, γ zusammen, folglich gilt

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Dieser Beweis ist mathematisch nicht so ganz überzeugend, da Argumentationen aus dem Umfeld von Achsensymmetrie und gleichschenkligen Dreiecken, die erst später betrachtet werden, einbezogen werden.

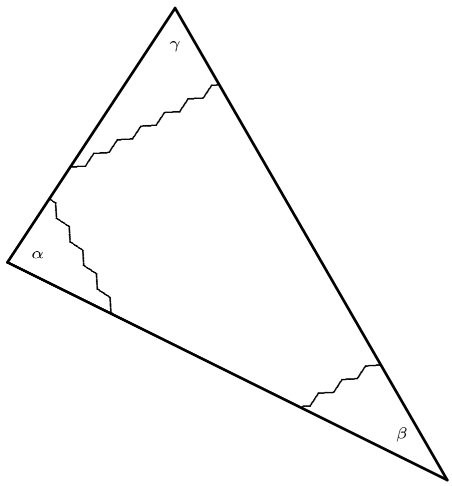
Er kann aber ,,handelnd" — Spiegelung als Faltung — ausgeführt werden.

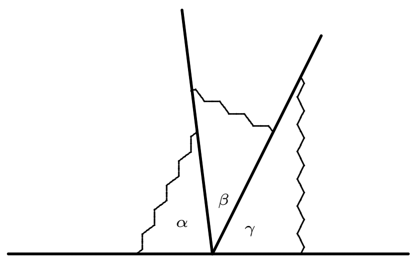
8.2.5 Handelnd-empirische Erarbeitung

Es wird ein (genügend großes) Dreieck aus Kartonpapier ($160\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^2}$) ausgeschnitten. Anschließend werden die Ecken abgerissen oder abgeschnitten.

> Hinweis: Achte im Falle des Abschneidens darauf, dass die Winkel des Dreiecks vorher markiert werden. Anderenfalls kann man bei den abgeschnittenen Dreiecken nicht mehr erkennen, um welchen Winkel es jeweils geht.

Legt man nun die abgeschnittenen Ecken in einem Punkt aneinander, so ergibt sich ein Winkel von $180\,^\circ$.



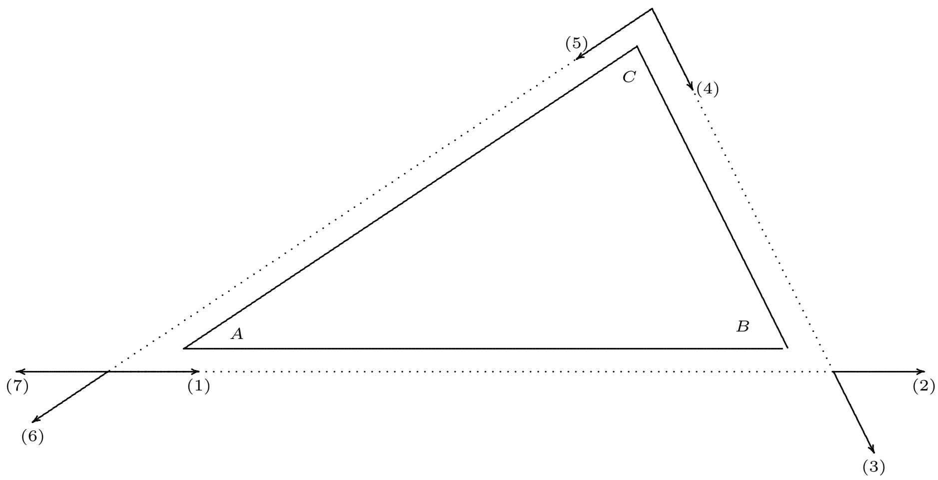


8.2.6 Umwandern

Auf dem Fußboden oder mit Stativen werden die Eckpunkte eines Dreiecks ABC markiert. Die Seiten können durch Klebestreifen oder gespannte Schnüre dargestellt werden.

Dann wird das Dreieck umwandert und dabei die Blickrichtung im Uhrzeigersinn gedreht.

	Handlung	Blickrichtung bzgl. $[AB$
(1)	Stelle Dich bei A auf und blicke in Richtung B	0°
(2)	Laufe dann nach B	
(3)	Drehe Dich bei B in die von C abgewandte Richtung	β
(4)	Laufe dann nach C	
(5)	Drehe Dich bei C in Richtung A:	$\beta + \gamma$
(6)	Laufe nach A	
(7)	Drehe Dich bei A in die von B abgewandte Richtung	$\beta + \gamma + \alpha$



Insgesamt hat man sich also um den Winkel $\alpha + \beta + \gamma$ (gegen den Uhrzeigersinn) gedreht und schaut am Ende genau in die entgegengesetzte Richtung. Also gilt

$$\alpha + \beta + \gamma \quad = \quad 180^{\circ}.$$

Der Innenwinkelsatz ist bestätigt.

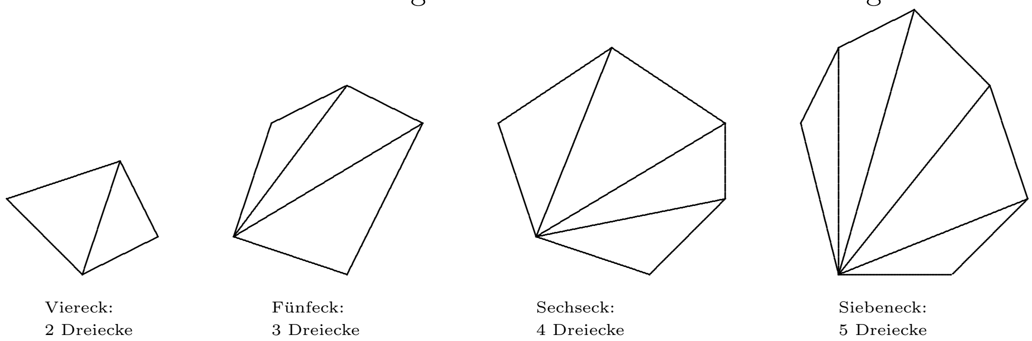
8.2.7 Dynamische Geometrie-Software

Es werden ein Dreieck gezeichnet und die drei Innenwinkel angezeigt. Dann werden beispielsweise die arithmetischen Ausdrücke $\alpha + \beta$ und $\alpha + \beta + \gamma$ gebildet und angezeigt. Was passiert, wenn das Dreieck gezogen wird?

8.3 Innenwinkelsumme bei einem n-Eck

8.3.1 Innenwinkelsumme bei einem n-Eck

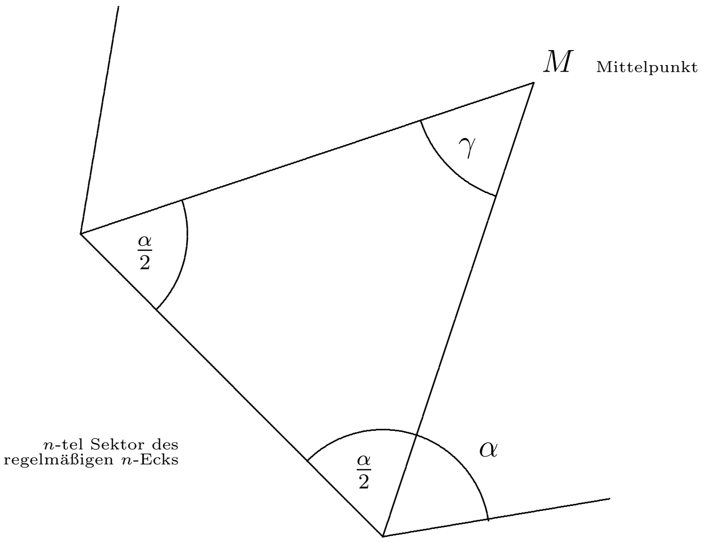
Ein n-Eck kann — von einer Ecke ausgehend — in $n-2$ Dreiecke zerlegt werden.



Damit ergibt sich für die Innenwinkelsumme in einem n-Eck

n	3	4	5	6	7	8	...	n
IWS	$180\,^\circ$	$360\,^\circ$	$540\,^\circ$	$720\,^\circ$	$900\,^\circ$	$1080\,^\circ$		$(n-2)\cdot 180\,^\circ$

8.3.2 Innenwinkel in einem regelmäßigen n-Eck



Ist α der Innenwinkel des regelmäßigen n-Ecks, so kann man folgern

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha = \frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2} & \overset{\text{IWS}\Delta}{=} & 180\,^\circ - \gamma \\ n\cdot\gamma & \overset{\text{Vollwinkel}}{=} & 360\,^\circ \end{array}\right\} \implies \alpha = 180\,^\circ - \frac{360\,^\circ}{n}.$$

Daraus ergibt sich die Tabelle

n	3	4	5	6	7	8	12	16	18	10.000
α	$60\,^\circ$	$90\,^\circ$	$108\,^\circ$	$120\,^\circ$	$\approx 128,57\,^\circ$	$135\,^\circ$	$150\,^\circ$	$157,5\,^\circ$	$160\,^\circ$	$179,964\,^\circ$

Was passiert also für $n \to \infty$?

8.4 Transversalen

8.4.1 Definition: Transversalen

In einem Dreieck haben die folgenden Strecken eine besondere Bedeutung. Sie heißen gelegentlich *Transversalen.*

$\boxed{\text{M}}$ Die *Mittelsenkrechte* einer Seite.

$\boxed{\text{W}}$ Die *Winkelhalbierende* eines Innenwinkels.

$\boxed{\text{S}}$ Die Verbindungsstrecke zwischen einem Eckpunkt und dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite heißt *Seitenhalbierende.*

$\boxed{\text{H}}$ Die Lotstrecke von einem Eckpunkt auf die gegenüberliegenden Seite (oder Ihre verlängernde Gerade) heißt *Höhe.*

Siehe das Diagramm 8.4.3.

8.4.2 Kommentare

- Es ist klar, dass es in einem allgemeinen Dreieck jeweils drei solcher Strecken gibt.
- Anstelle der Strecken kann man auch zugehörige Halbgeraden oder Geraden betrachten.
- Die Transversalen gleichen Typs schneiden sich jeweils in einem Punkt. Diese Punkte haben besondere Eigenschaften:

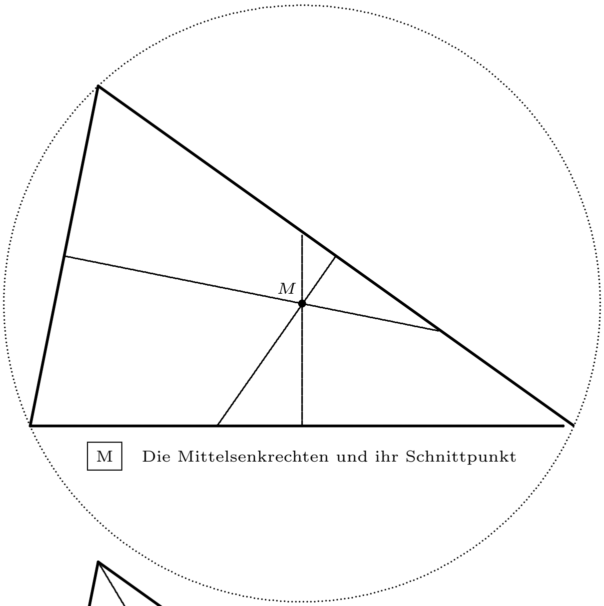
  $\boxed{\text{M}}$ Der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten heißt *Umkreismittelpunkt.* Es handelt sich dabei um den Mittelpunkt des Kreises, für den die drei Dreiecksseiten Sekanten sind. Anschaulicher ausgedrückt: Der Kreis geht durch die drei Eckpunkte.

  $\boxed{\text{W}}$ Der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden heißt *Inkreismittelpunkt.* Es handelt sich dabei um den Mittelpunkt des Kreises, für den die drei Dreiecksseiten Tangenten sind. Anschaulicher ausgedrückt: Der Kreis ist in die drei Seiten eingeschmiegt.

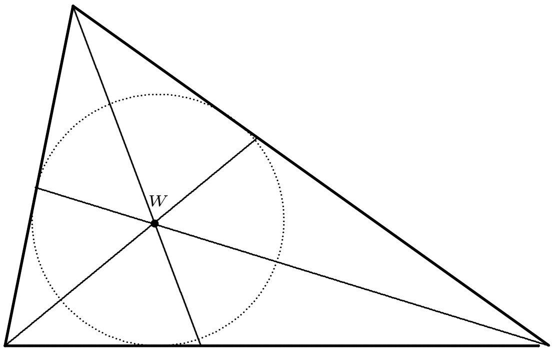
  $\boxed{\text{S}}$ Der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden heißt *Schwerpunkt.* Dieser physikalische Begriff ist dadurch gerechtfertigt, dass bei Unterstützung in diesem Punkt mit einem Finger ein Pappdreieck ausbalanciert ist.

  $\boxed{\text{H}}$ Der Schnittpunkt der drei Höhen hat keinen besonderen Namen oder eine besondere Bedeutung.

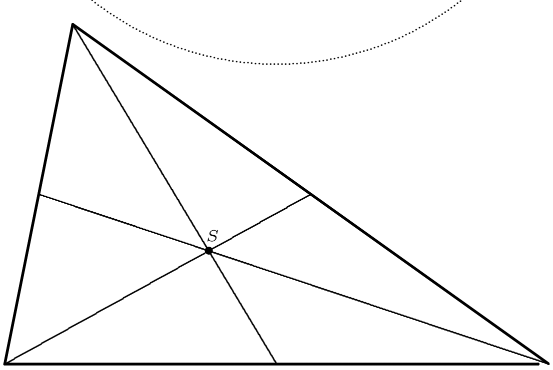
8.4.3 Diagramm der Schnittpunkte



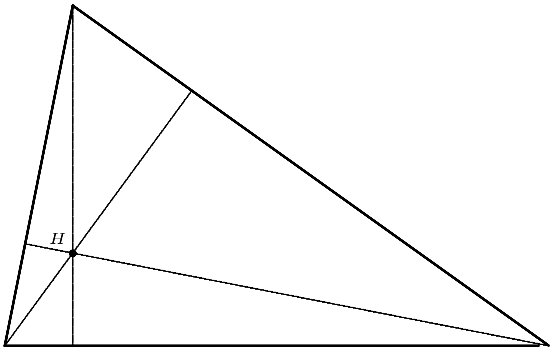
M Die Mittelsenkrechten und ihr Schnittpunkt



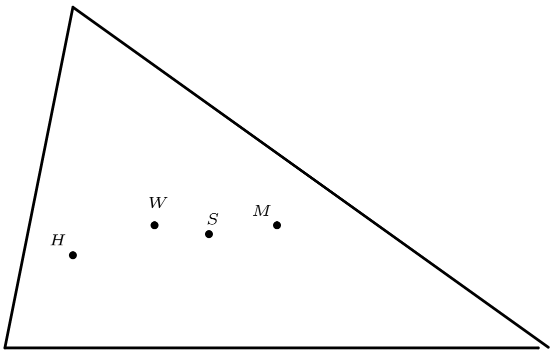
W Die Winkelhalbierenden und ihr Schnittpunkt



S Die Seitenhalbierenden und ihr Schnittpunkt



H Die Höhen und ihr Schnittpunkt



Zusammenschau der Schnittpunkte

8.4.4 Satz: $\boxed{\text{M}}$ Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

Es sei ein Dreieck ABC gegeben. Für einen Punkt M sind die folgenden Aussagen äquivalent (gleichbedeutend):

(A) M ist der Schnittpunkt von zweien der Mittelsenkrechten.

(B) M ist der Schnittpunkt von allen drei Mittelsenkrechten.

(C) M ist von allen drei Eckpunkten gleich weit entfernt: $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$.

(D) M ist der Mittelpunkt eines Kreises durch die drei Eckpunkte, des so genannten *Umkreises*.

8.4.5 Beweis

Zur Begründung wird einfach die Eigenschaft einer Mittelsenkrechten benutzt, dass sie genau die Punkte enthält, die von den Endpunkten der gegebenen Strecke gleichen Abstand haben.

(A) $\Rightarrow$ (B): Es sei M der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m_a und m_b auf die Seiten a bzw. b. Dann gilt

$$\left.\begin{array}{lcl} M \in m_a & \Longrightarrow & \overline{BM} = \overline{CM} \\ M \in m_b & \Longrightarrow & \overline{AM} = \overline{CM} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \overline{BM} = \overline{AM} \quad \Longrightarrow \quad M \in m_c$$

Also liegt M auch auf der dritten Mittelsenkrechten m_c.

(B) $\Rightarrow$ (C): Das ist eine grundlegende Eigenschaft von Mittelsenkrechten.

(C) $\Rightarrow$ (D): Das ist eine grundlegende Eigenschaft von Kreisen.

(D) $\Rightarrow$ (A): M ist als Mittelpunkt des Kreises von allen drei Ecken gleich weit entfernt. Deswegen muss M auf allen Mittelsenkrechten liegen.

8.4.6 Konstruktion des Umkreises

Der Umkreis zu einem gegebenen Dreieck ABC wird so konstruiert:

1. Konstruiere zwei der Mittelsenkrechten und bestimme den Schnittpunkt M.
2. Konstruiere den Kreis mit Mittelpunkt M und Kreispunkt A (oder B oder C).

8.4.7 Satz: $\boxed{\text{W}}$ Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

Es sei ein Dreieck ABC gegeben. Für einen Punkt W sind die folgenden Aussagen äquivalent (gleichbedeutend):

(A) W ist der Schnittpunkt von zweien der Winkelhalbierenden.

(B) W ist der Schnittpunkt von allen drei Winkelhalbierenden.

(C) W ist von allen drei Seiten gleich weit entfernt: $d(W,a) = d(W,b) = d(W,c)$.

(D) W ist der Mittelpunkt eines Kreises, der die drei Seiten berührt, des so genannten *Inkreises*.

8.4.8 Beweis

Zur Begründung wird einfach die Eigenschaft einer Winkelhalbierenden benutzt, dass sie genau die Punkte enthält, die von den Schenkeln des gegebenen Winkels gleichen Abstand haben.

(A) $\Rightarrow$ (B): Es sei W der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_α und w_β der Winkel α und β. Dann gilt

$$\left.\begin{array}{lcl} W \in w_\alpha & \Longrightarrow & d(W,b) = d(W,c) \\ W \in w_\beta & \Longrightarrow & d(W,a) = d(W,c) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad d(W,b) = d(W,a) \quad \Longrightarrow \quad W \in w_\gamma$$

Also liegt W auch auf der dritten Winkelhalbierenden w_γ.

(B) $\Rightarrow$ (C): Das ist eine grundlegende Eigenschaft von Winkelhalbierenden.

(C) $\Rightarrow$ (D): Das ist die grundlegende Eigenschaft von Kreisen, dass Tangenten auf Radien senkrecht stehen.

(D) $\Rightarrow$ (A): W ist als Mittelpunkt des Inkreises von allen Seiten gleich weit entfernt. Deswegen muss W auf allen Winkelhalbierenden liegen.

8.4.9 Konstruktion des Inkreises

Der Inkreis zu einem gegebenen Dreieck ABC wird so konstruiert:

1. Konstruiere zwei der Winkelhalbierenden und bestimme den Schnittpunkt W.

2. Konstruiere den Lotfußpunkt L des Lots von W auf eine der Dreiecksseiten.

3. Konstruiere den Kreis mit Mittelpunkt W und Kreispunkt L.

8.4.10 Satz: $\boxed{\text{S}}$ Schnittpunkt der Seitenhalbierenden

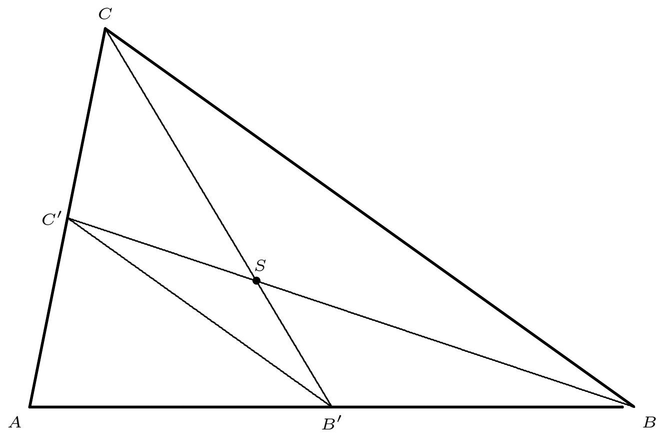
Es sei ein Dreieck ABC gegeben. Für einen Punkt S sind die folgenden Aussagen äquivalent (gleichbedeutend):

(A) S ist der Schnittpunkt von zweien der Seitenhalbierenden.

(B) S teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis $2:1$, wobei die längere Teilstrecke den zugehörigen Eckpunkt als Endpunkt hat.

(C) S ist der Schnittpunkt aller drei Seitenhalbierenden.

Der Punkt S heißt *Schwerpunkt*, was physikalische Gründe hat.



8.4.11 Beweis

(A) ⇒ (B) Wir bezeichnen den Schnittpunkt der beiden Seitenhalbierenden s_b und s_c mit S und die Seitenmittelpunkte von c bzw. b mit B' bzw. C'. Siehe die Strahlensätze 7.2.2.

1. Mit der Umkehrung des ersten Strahlensatzes bzgl. Zentrum A können wir schließen:

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} \quad\Longrightarrow\quad B'C' \,||\, BC$$

2. Mit dem zweiten Strahlensatz bzgl. Zentrum A können wir weiter schließen:

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$$

3. Mit dem zweiten Strahlensatz bzgl. des Zentrums S ist dann:

$$\frac{\overline{C'S}}{\overline{BS}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2}$$

Das ist die Aussage (B).

(B) ⇒ (C) Es sei S_{ac} der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden s_a und s_c und S_{ab} der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden s_a und s_b. Es liegen beide Punkte S_{ac} und S_{ab} auf s_a und gemäß Aussage (B) liegen sowohl S_{ac} als auch S_{ab} in $\frac{2}{3}$-Entfernung von A. Deshalb müssen S_{ac} und S_{ab} übereinstimmen. Das ist die Aussage (C).

(C) ⇒ (A) ist trivial.

8.4.12 Frage

Teilt jede Gerade durch S das Dreieck in zwei Teilfiguren mit gleichem Flächeninhalt?

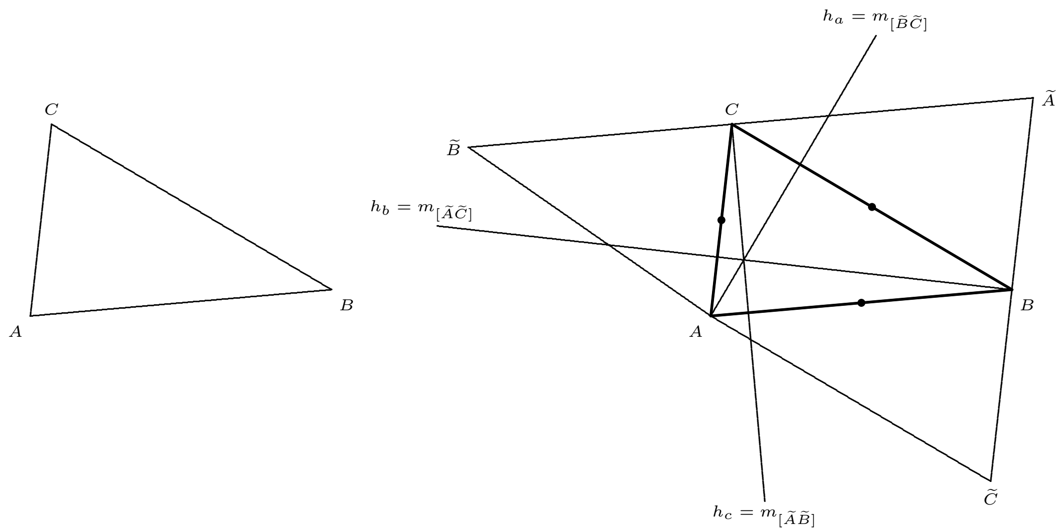
8.4.13 Konstruktion der Seitenhalbierenden und des Schwerpunkts

Es sei ein Dreieck ABC gegeben.

1. Konstruiere die Mittelpunkte von zwei (oder drei) Seiten.
2. Konstruiere jeweils die Geraden durch diese Mittelpunkte und die gegenüberliegenden Eckpunkte. Das sind die Seitenhalbierenden.
3. Konstruiere den Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden. Das ist der Schwerpunkt.

8.4.14 Satz: Schnittpunkt der Höhen

Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.



8.4.15 Beweis

Man punktspiegele das gegebene Dreieck ABC über jeden der Seitenmittelpunkte.

Mit Hilfe der Tatsache, dass dabei eine Strecke auf eine parallele und gleich lange Strecke gespiegelt wird, lässt sich schließen, dass ein „neues" Dreieck $\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}$ entsteht, das die ursprünglichen Ecken als Seitenmittelpunkte und die ursprünglichen Höhen als Mittelsenkrechten hat.

Die Mittelsenkrechten des neuen Dreiecks schneiden sich gemäß Satz 8.4.4 in einem Punkt.

8.4.16 Konstruktion der Höhen und des Höhenschnittpunkts

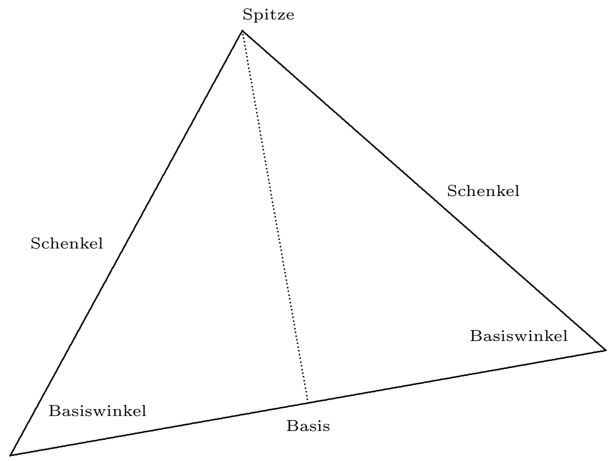
Es sei ein Dreieck ABC gegeben.

1. Konstruiere die Lote der Eckpunkte auf die gegenüberliegenden Seiten. Das sind die Höhen.
2. Konstruiere den Schnittpunkt H der Höhen.

8.5 Spezielle Dreieckstypen

8.5.1 Definition: Gleichschenkliges Dreieck

Ein Dreieck heißt *gleichschenklig*, wenn (mindestens) zwei der Seiten gleich lang sind.



8.5.2 Begriffe beim gleichschenkligen Dreieck

Ist ein Dreieck gleichschenklig, so heißen ...

- die beiden gleich langen Seiten *Schenkel*,
- die dritte Seite *Basis*,
- die zwei an der Basis anliegenden Winkel die *Basiswinkel*,
- der Eckpunkt gegenüber der Basis die *Spitze*.

8.5.3 Satz: Gleichschenkliges Dreieck

Für ein beliebiges Dreieck sind die folgenden Aussagen äquivalent:

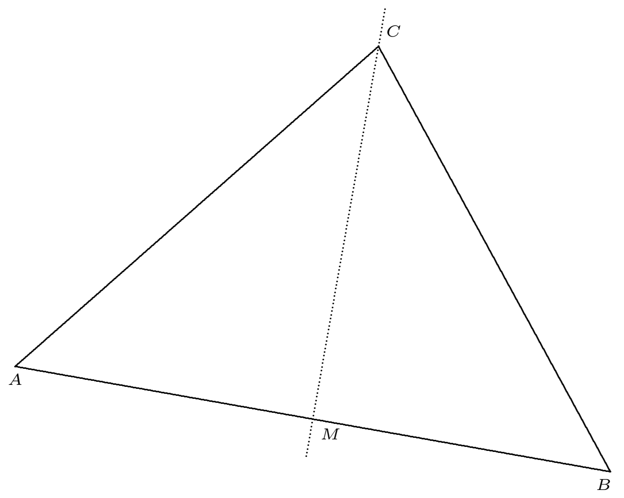
(S) Das Dreieck ist gleichschenklig.

(W) (Mindestens) zwei der Innenwinkel sind gleich groß.

(A) Das Dreieck ist achsensymmetrisch.

Die Äquivalenz (S) $\Leftrightarrow$ (W) wird auch Basiswinkelsatz genannt.

8.5.4 Beweis



$\boxed{\text{(S)} \Rightarrow \text{(A)}}$ Es sei C die Spitze. Betrachte die Seitenhalbierende s_c, ihr Schnittpunkt mit der Basis $[AB]$ sei M. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \overline{BC} \qquad \text{und} \\ \overline{AM} &= \overline{BM}, \end{aligned}$$

Die beiden Eckpunkte A und B sind also von den beiden Punkten C und M auf der Geraden jeweils gleich weit entfernt.

Gemäß der Charakterisierung 4.3.5 der Achsenspiegelung werden A und B bzgl. s_c aufeinander achsengespiegelt. C wird auf sich selbst achsengespiegelt.

,,Die Menge der drei Eckpunkte" des Dreiecks wird auf sich selbst achsengespiegelt.

Wegen der Längentreue wird dann das ganze Dreieck auf sich selbst achsengespiegelt, es ist achsensymmetrisch bzgl. g.

$\boxed{\text{(W)} \Rightarrow \text{(A)}}$ Es sei C der Eckpunkt des dritten Winkels. Betrachte die Winkelhalbierende w_γ, ihr Schnittpunkt mit der Basis $[AB]$ sei M. Es gilt dann

$$\begin{array}{rrcl} \text{(Def Winkelhalbierende)} & |\sphericalangle ACM| &=& |\sphericalangle BCM| \\ \text{(Vor: Zwei gleich große Winkel)} & |\sphericalangle CAM| &=& |\sphericalangle CBM| \\ \stackrel{\text{IWS }\Delta}{\Longrightarrow} & |\sphericalangle AMC| &=& |\sphericalangle BMC|. \end{array}$$

Die beiden Eckpunkte A und B liegen also von den beiden Punkten C und M auf w_γ aus ,,unter dem gleichen Winkel".

Gemäß der Charakterisierung 4.3.7 der Achsenspiegelung werden A und B bzgl. w_γ aufeinander achsengespiegelt. C wird auf sich selbst achsengespiegelt.

,,Die Menge der drei Eckpunkte" des Dreiecks wird auf sich selbst achsengespiegelt.

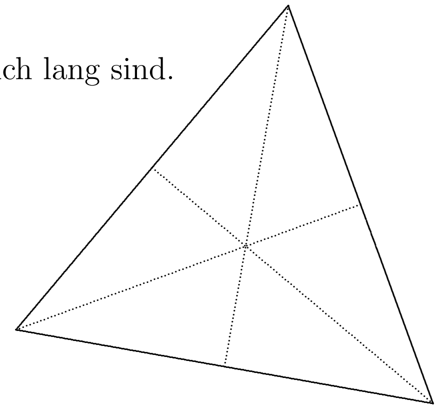
Wegen der Längentreue wird dann das ganze Dreieck auf sich selbst achsengespiegelt, es ist achsensymmetrisch bzgl. g.

$\boxed{\text{(A)} \Rightarrow \text{(S)}}$ Diese Folgerung gilt aufgrund der Längentreue.

$\boxed{\text{(A)} \Rightarrow \text{(W)}}$ Diese Folgerung gilt aufgrund der Winkeltreue.

8.5.5 Definition: Gleichseitiges Dreieck

Ein Dreieck heißt *gleichseitig*, wenn alle drei Seiten gleich lang sind.



8.5.6 Satz: Gleichseitiges Dreieck

Für ein beliebiges Dreieck sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(S) Das Dreieck ist gleichseitig.

(W_1) Alle drei Winkel sind gleich groß.

(W_2) Alle drei Winkel haben das Maß $60\,^\circ$.

(A) Das Dreieck ist achsensymmetrisch bzgl. dreier verschiedener Symmetrieachsen.

8.5.7 Beweis

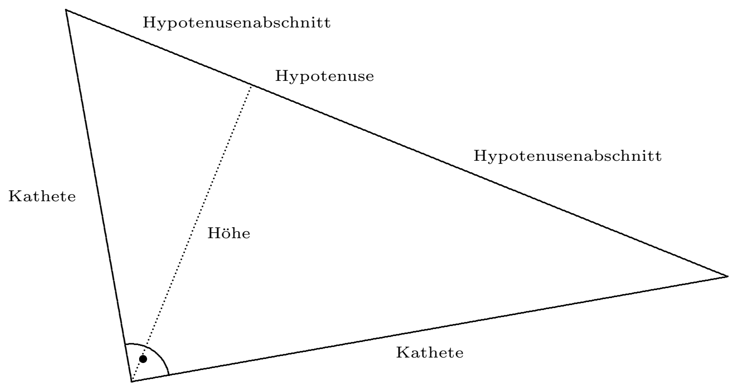
Die Äquivalenz der Aussagen (W_1) und (W_2) ist klar aufgrund des Satzes über die Innenwinkelsumme bei Dreiecken. Die anderen Äquivalenzen sind klar, wenn man die entsprechenden Aussagen über gleichschenklige Dreiecke aus Satz 8.5.3 jeweils auf zwei Seiten bzw. Winkel anwendet.

8.5.8 Besonderes

Alle gleichseitigen Dreiecke sind ähnlich zueinander.

8.5.9 Definition: Rechtwinkliges Dreieck

Ein Dreieck heißt *rechtwinklig*, wenn einer der Innenwinkel ein rechter Winkel ist.



Ist ein Dreieck rechtwinklig, so heißen ...

- die beiden dem rechten Winkel anliegenden Seiten ,,Katheten",
- die dritte dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite ,,Hypotenuse",
- die zu der Ecke mit dem rechten Winkel gehörige Höhe ,,**die** Höhe",
- die beiden durch die Höhe abgeteilten Teilstrecken der Hypotenuse die ,,Hypotenusenabschnitte".

Rechtschreib-Eselsbrücke: Die Wörter ,,rechtwinklig, Kathete, Hypotenuse, Pythagoras, Thales" enthalten jeweils genau einmal den Buchstaben *h*.

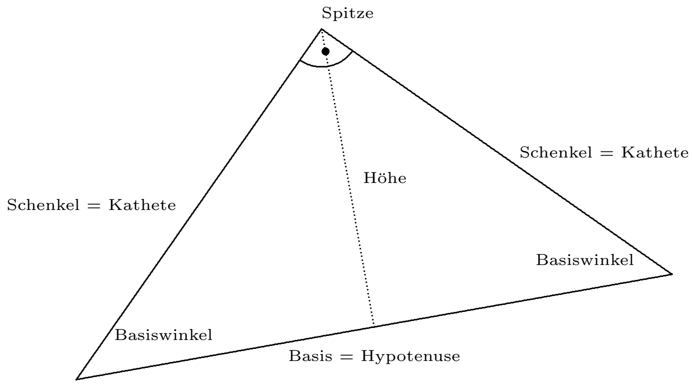
8.5.10 Bedeutung

Rechtwinklige Dreiecke haben eine enorme Bedeutung für den Aufbau der Schulgeometrie, was deutlich wird mit ...

- dem Satz von Thales, vgl. Kapitel 8.6.
- der Satzgruppe des Pythagoras, vgl. Kapitel 12.
- den trigonometrischen Beziehungen, vgl. Kapitel 13.

8.5.11 Definition: Gleichschenklig-Rechtwinkliges Dreieck

Ein Dreieck heißt *gleichschenklig-rechtwinklig*, wenn es gleichschenklig und rechtwinklig ist.

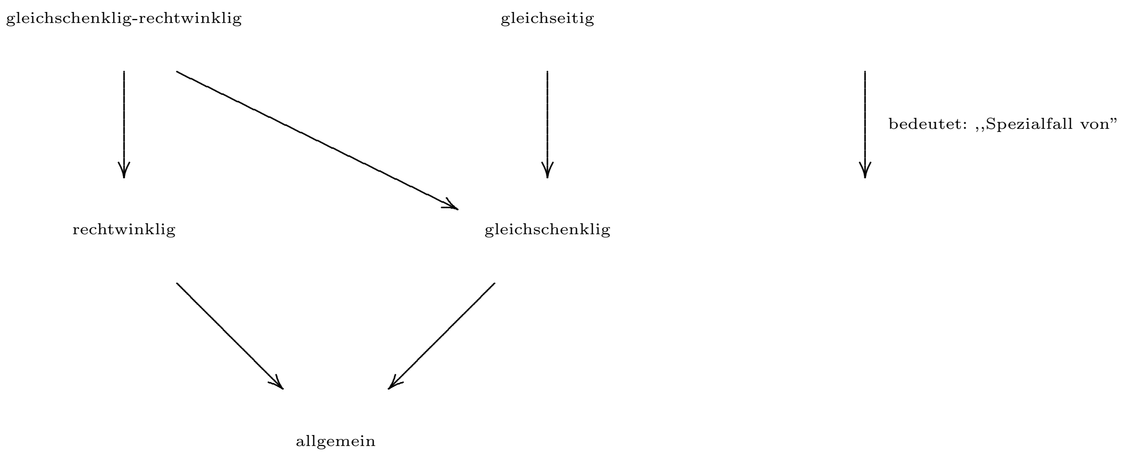


Ist dies der Fall, so kann der rechte Winkel nur zwischen den beiden Schenkeln auftreten. Die beiden Basiswinkel haben das Mass $45\,^\circ$.

8.5.12 Weiteres

- Ist ein Dreieck gleichschenklig-rechtwinklig, so kann der rechte Winkel nur an der Spitze auftreten. Die beiden Basiswinkel haben das Mass $45\,^\circ$.
- Alle gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke sind ähnlich zueinander.
- Das Standardbeispiel ist das GEO-Dreieck.

8.5.13 Diagramm der Dreieckstypen



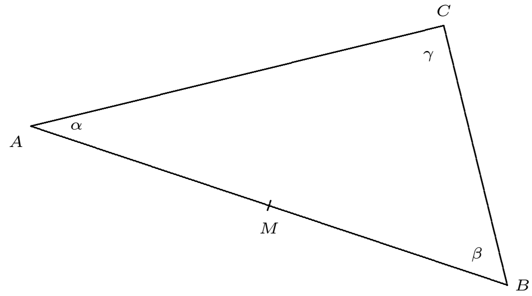
8.6 Der Satz von Thales

8.6.1 Satz von Thales: Dreiecks-Version

Es sei ein Dreieck ABC gegeben. M sei der Mittelpunkt der Seite $[AB]$.

(i) Satz von Thales

WENN $\overline{AM} = \overline{CM}$,
DANN ist $\gamma = 90\,^\circ$.



(ii) Kehrsatz des Satzes von Thales

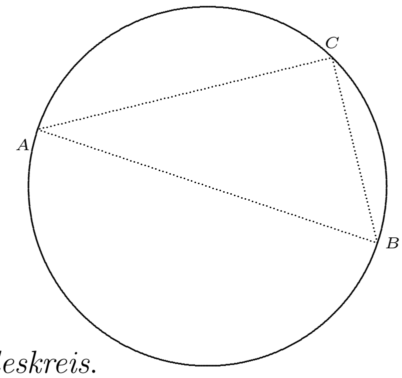
WENN $\gamma = 90\,^\circ$,
DANN ist $\overline{AM} = \overline{CM}$.

8.6.2 Satz von Thales: Kreis-Version

Es sei ein Kreis mit drei Punkten A, B, C auf der Kreislinie gegeben.

(i) Satz von Thales

WENN $[AB]$ ein Durchmesser des Kreises ist,
DANN ist $|\sphericalangle ACB| = 90\,^\circ$.



(ii) Kehrsatz des Satzes von Thales

WENN $|\sphericalangle ACB| = 90\,^\circ$,
DANN ist $[AB]$ ein Durchmesser des Kreises.

In diesem Zusammenhang heißt der Kreis dann auch *Thaleskreis*.

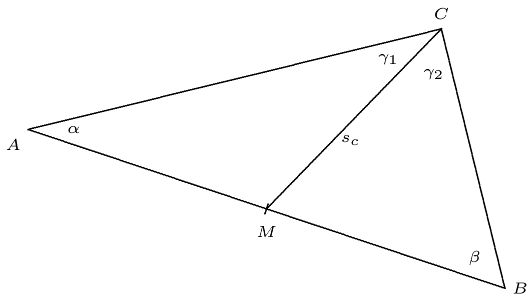
8.6.3 Satz von Thales: Textversion

Es sei ein Kreis gegeben. Ein Punkt liegt genau dann auf der Kreislinie, wenn er mit dem Durchmesser als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck bildet.

Dass alle Versionen das gleiche bedeuten, liegt daran, dass jedes beliebige Dreieck einen Umkreis hat.

8.6.4 Beweis des Satzes

Wir betrachten die Dreiecksversion und zeichnen die Seitenhalbierende s_c ein.



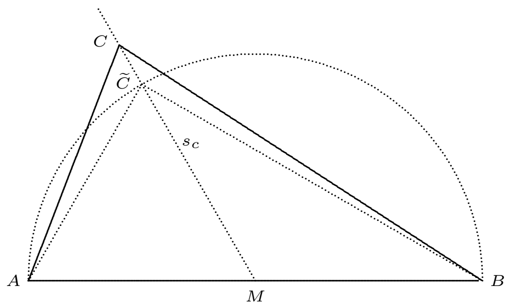
Jetzt kann man die folgende Implikationskette aufschreiben:

$$\begin{aligned}
& \overline{AM} = \overline{CM} \\
\iff\ & \overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} \\
\iff\ & \text{Die Dreiecke } AMC \text{ und } BMC \text{ sind gleichschenklig mit Spitze bei } M. \\
\iff\ & \alpha = \gamma_1 \quad \text{und} \quad \beta = \gamma_2 \\
\overset{(\text{IWS } \Delta)}{\Longrightarrow}\ & 2\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \\
\iff\ & \gamma = 90^\circ
\end{aligned}$$

8.6.5 Beweis des Kehrsatzes

Wir betrachten die Dreiecksversion. Es sei also ein Dreieck ABC mit $\gamma = 90^\circ$ gegeben.

Wir bezeichnen den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden s_c mit dem Halbkreis über $[AB]$ mit $\widetilde{C}$.



Wir nehmen nun an, dass die beiden Punkte C und $\widetilde{C}$ verschieden seien.

Dann hat das entstehende (nicht-konvexe) Viereck $A\widetilde{C}BC$

- bei C einen Innenwinkel von 90° (nach Voraussetzung) und
- bei $\widetilde{C}$ einen Innenwinkel von 270° (gemäß Satz von Thales).

Das ist ein Widerspruch zum Satz über die Innenwinkelsumme in einem Viereck.

Also müssen C und $\widetilde{C}$ übereinstimmen. Daraus folgt dann, dass

$$\overline{AM} = \overline{\widetilde{C}M} = \overline{CM},$$

was zu beweisen war.

Sollte der Schnittpunkt $\widetilde{C}$ außerhalb des Dreiecks ABC erscheinen, so lässt sich die gleiche Argumentation mit dem Viereck $ACB\widetilde{C}$ durchführen.

8.6.6 Bemerkung: Die Schattenmethode

Die im soeben geschilderten Beweis eines Kehrsatzes enthaltene Idee könnte man als *Schattenmethode* bezeichnen.

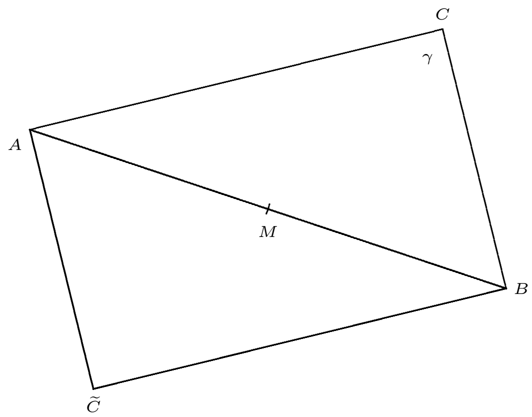
Um die Umkehrung $\mathcal{E}_B \Rightarrow \mathcal{E}_A$ eines Originalsatzes $\mathcal{E}_A \Rightarrow \mathcal{E}_B$ über Eigenschaften $\mathcal{E}$ einer ebenen Figur zu beweisen,

- betrachtet man die Figur mit der Eigenschaft $\mathcal{E}_B$,
- erstellt dazu eine geeignete „Schattenfigur" mit der Eigenschaft $\mathcal{E}_A$,
- weiß dann aus dem Originalsatz, dass die Schattenfigur auch die Eigenschaft $\mathcal{E}_B$ hat
- schließt daraus, dass beide Figuren die Eigenschaft $\mathcal{E}_B$ haben, dass sie identisch sind
- und schließt weiter, dass die ursprüngliche Figur auch die Eigenschaft $\mathcal{E}_A$ hat.

Wir werden diese Methode noch mehrmals verwenden um Kehrsätze über Sehnenvierecke (9.9.1), Tangentenvierecke (9.10.1) oder die Pythagoras-Kehrsätze in Kapitel 12.6 zu beweisen.

8.6.7 Beweis — Variante II

Ergänze das gegebene Dreieck ABC durch eine 180°-Drehung um den Punkt M zu einem Parallelogramm $A\widetilde{C}BC$. M ist als Drehzentrum der Diagonalenschnittpunkt.



Jetzt kann man die folgende Äquivalenz-Kette über das Parallelogramm $A\widetilde{C}BC$ aufschreiben:

$$\begin{array}{rl} & \overline{AM} = \overline{CM} \\ \iff & \text{Die Diagonalen sind gleich lang.} \\ \iff & \text{Das Parallelogramm ist ein Rechteck} \\ \iff & \gamma = 90^\circ. \end{array}$$

Damit sind sowohl der Satz von Thales als auch sein Kehrsatz bewiesen.

8.6.8 Bemerkung

Diese Variante II des Beweises erscheint im Vergleich zu den obigen getrennnten Beweisen von Satz und Kehrsatz schnell, simpel und kompakt.

Es bleibt aber die Frage, wann und wie die beiden dabei verwendeten Sätze

> Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn es punktsymmetrisch ist (Satz 9.5.2).
>
> Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn die Diagonalen gleich lang sind (Satz 9.3.2).

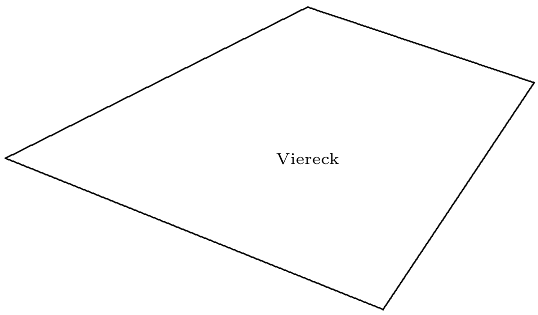
bewiesen werden.

9 Geometrie der Vierecke

9.1 Das allgemeine Viereck

9.1.1 Definition: Viereck

Eine durch vier Strecken begrenzte ebene Figur heißt *Viereck*.



9.1.2 Weitere Bezeichnungen

Wenn ein Viereck vorliegt, dann ergeben sich einige weitere Bezeichnungen

- Die vier begrenzenden Strecken heißen *Seiten*.
- Die vier Schnittpunkte benachbarter Seiten heißen *Ecken*.
- Die vier Winkel, die sich zwischen den Seiten an den Ecken ergeben, heißen *Innenwinkel* des Vierecks.
- Die zwei Strecken, die zwei einander gegenüberliegende Seitenmittelpunkte verbinden, nennen wir *Seitenhalbierende*. Man beachte, dass dieser Begriff in der Schul- und Fachmathematik unüblich ist.
- Normalerweise werden die vier Ecken mit A, B, C, D (gegen den Uhrzeigersinn) bezeichnet. Die Seiten sind dann $a = [AB]$, $b = [BC]$, $c = [CD]$ und $d = [DA]$. Die Innenwinkel werden mit den zugeordneten griechischen Buchstaben bezeichnet.
- Die zwei Strecken, die zwei einander gegenüberliegende Ecken verbinden, heißen *Diagonalen*. Sie werden meist mit e und f bezeichnet.

9.1.3 Satz: Innenwinkelsumme im Viereck

In jedem Viereck beträgt die Summe aller Innenwinkel $360°$.

Zur Begründung muss nur auf die Innenwinkelsumme in einem allgemeinen Vieleck (vgl. 8.3) hingewiesen werden.

9.1.4 Schwerpunkt eines Vierecks

Teilt man ein Viereck jeweils entlang den Diagonalen, so entstehen vier Teildreiecke, die jeweils einen Dreiecks-Schwerpunkt haben. Der Schnittpunkt der beiden Geraden, die jeweils zwei gegenüberliegende solche Dreiecks-Schwerpunkte verbinden, ist der Schwerpunkt des Vierecks.

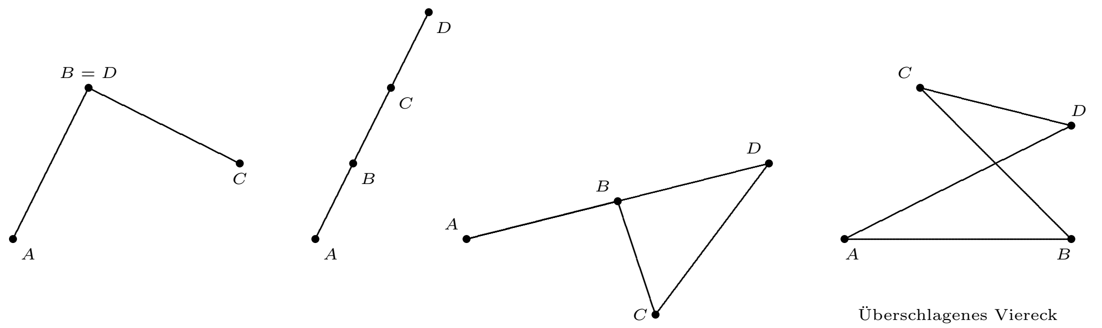
Beim Windvogelviereck tritt evtl. das bemerkenswerte (auch physikalische) Phänomen auf, dass der Schwerpunkt außerhalb der Figur liegt.

9.1.5 Viereck als Streckenzug

Weit verbreitet ist eine Definition des Begriffs ,,Viereck" in etwa wie folgt:

Ein Viereck ist ein aus vier Teilstrecken bestehender geschlossener Streckenzug.

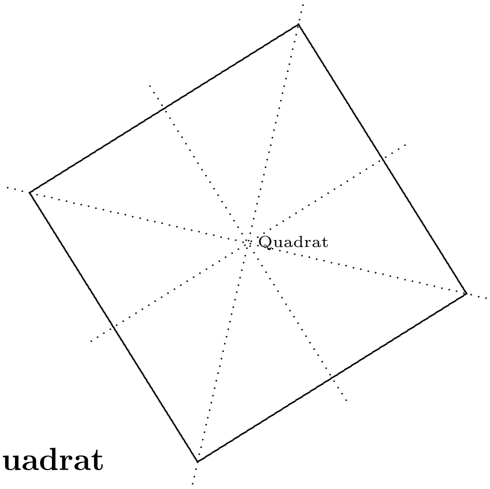
Es stellt sich dabei das Problem, dass bei den unten in den Graphen angegebenen Streckenzügen $A \to B \to C \to D \to A$ das ,,Innere eines Vierecks" nicht mehr klar hervortritt.



9.2 Das Quadrat

9.2.1 Definition: Quadrat

Ein Viereck heißt *Quadrat*, wenn es vier gleich lange Seiten und vier gleich große Innenwinkel hat.



9.2.2 Satz: Quadrat

Für ein beliebiges Viereck sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(D) Es ist ein Quadrat.

(M) Es hat vier gleich lange Seiten und einen rechten Innenwinkel.

(Y) Es ist achsensymmetrisch bzgl. vier verschiedener Symmetrieachsen.

9.2.3 Beweis fehlt.

9.2.4 Weitere Kommentare

- Die Aussage (M) ist ,,minimalistisch", d.h. sie kommt mit möglichst wenig Information aus. Die Aussage (Y) erfolgt über den Symmetriebegriff und ist für den Mathematiker am interessantesten.
- Die Eigenschaft ,,vier gleich lange Seiten" reicht für die Definition nicht aus. Auch Rauten haben diese Eigenschaft.
- Im Alltagssprachgebrauch werden die Begriffe ,,Viereck" oder ,,viereckig" zur Beschreibung quadratischer Situationen verwendet.
- Beachte, dass ein Quadrat nicht unbedingt ,,auf einer Seite" stehen muss, siehe oben.
- Alle Quadrate sind ähnlich zueinander.

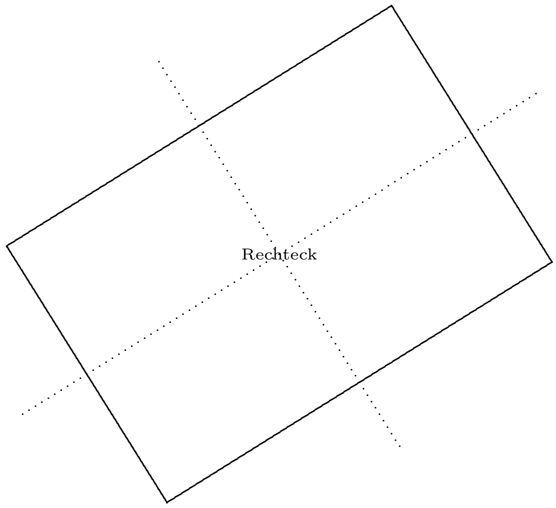
9.2.5 Kontextfelder

- Tafel Schokolade, Scheibe Toastbrot
- Badfliesen, Sitzfläche eines Hockers
- Vorfahrtsschild (,,steht auf der Spitze") oder Schilder zur Vorfahrts-Regelung (,,stehen auf der Seite").

9.3 Das Rechteck

9.3.1 Definition: Rechteck

Ein Viereck heißt *Rechteck*, wenn es vier rechte Innenwinkel hat.



9.3.2 Satz: Rechteck

Für ein beliebiges Viereck sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(D) Es ist ein Rechteck.

(W_1) Es hat drei rechte Innenwinkel.

(W_2) Es hat einen rechten Innenwinkel und je zwei Gegenseiten sind gleich lang.

(W_3) Es hat einen rechten Innenwinkel und je zwei Gegenseiten sind parallel.

(Y) Es ist achsensymmetrisch bzgl. der beiden Seitenhalbierenden.

9.3.3 Beweis fehlt.

9.3.4 Weitere Eigenschaften

- Die Diagonalen sind gleich lang und halbieren einander.
- Das Viereck ist punktsymmetrisch.

9.3.5 Kommentar

Bezeichnung der Seiten: Meist heißen die beiden verschiedenen Seitenlängen *Länge* und *Breite*. Ob die beiden Namen der Paarung lange/kurze Seite oder horizontale/vertikale Seite entsprechen sollen, kann nicht grundsätzlich festgelegt werden. Weitere Verwirrung bringt, dass eine Seite auch *Höhe* oder *Tiefe*, evtl. sogar *Dicke*, heißen könnte. Dies hängt von der zugehörigen Sachsituation ab.

9.3.6 Kontextfelder

- Blatt Papier, Tischfläche, Türe, Teppich, Regalboden.
- Grundriss eines Zimmers, eines Hauses
- Fußballplatz
- DIN A Blätter haben die bemerkenswerte Eigenschaft, dass

$$\text{größere Seitenlänge} \quad = \quad \sqrt{2} \cdot \; \text{kleinere Seitenlänge.}$$

  Dieses Längenverhältnis sorgt dafür, dass bei

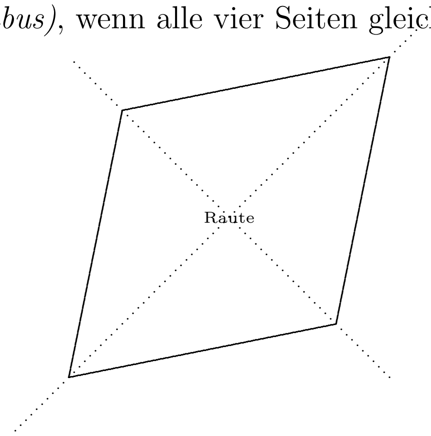
  - Halbierung (parallel zur kürzeren Seite) und
  - Verkleinerung (auf halb so große **Fläche**)

  genau das gleiche Rechteck entsteht. Dieses hat dann auch wieder das oben beschriebene Längenverhältnis.

9.4 Die Raute

9.4.1 Definition: Raute

Ein Viereck heißt *Raute (=Rhombus)*, wenn alle vier Seiten gleich lang sind.



9.4.2 Satz: Raute

Für ein beliebiges Viereck sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(D) Es ist eine Raute.

(Y) Es ist achsensymmetrisch bzgl. der beiden Diagonalen.

9.4.3 Beweis fehlt.

9.4.4 Weitere Eigenschaften

- Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander und halbieren einander.
- Das Viereck ist punktsymmetrisch.

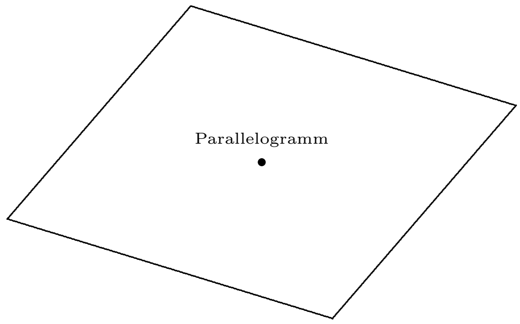
9.4.5 Kommentare und Kontextfelder

- Beachte, dass eine Raute nicht unbedingt ,,auf einer Spitze" stehen muss.
- Rautenmuster in der Bayerischen Fahne.
- Die Form einer Eisenbahnschienen-Kreuzung
- Die ,,Merkel-Raute" ist gar keine Raute.

9.5 Das Parallelogramm

9.5.1 Definition: Parallelogramm

Ein Viereck heißt *Parallelogramm*, wenn je zwei Gegenseiten parallel sind.



9.5.2 Satz: Parallelogramm

Für ein beliebiges Viereck sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(D) Es ist ein Parallelogramm.

(S) Je zwei Gegenseiten sind gleich lang.

(W) Je zwei Gegenwinkel sind gleich groß.

(Y) Es ist punktsymmetrisch.

9.5.3 Beweis fehlt.

9.5.4 Weitere Eigenschaften

- Die Diagonalen halbieren einander.

9.5.5 Aktivitäten

- Betrachte den Schattenwurf eines Karton-Quadrats. Als Lichtquelle sind der Tageslichtprojektor oder die Sonne geeignet. Welche Viereckstypen ergeben sich, wenn das Quadrat in seiner Lage verändert wird?
- Verbinde die benachbarten Seitenmittelpunkte eines beliebigen Vierecks. Welcher Viereckstyp entsteht?
- Zeigen mit dem Zollstock: 20 cm – 30 cm – 20 cm – 30 cm
- Schienenkreuzung
- Parallelogramm-Konstruktion mit Zirkel und Lineal.

9.5.6 Sprechweisen

Die Sprechweise, dass ein Parallelogramm nicht achsensymmetrisch sei, ist mathematisch hoch-problematisch.

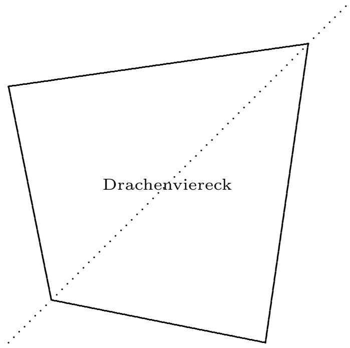
Es gibt durchaus achsensymmetrische Parallelogramme, nämlich Rechtecke, Rauten und Quadrate.

Richtig ist, dass ein Parallelogramm **im allgemeinen nicht achsensymmetrisch** ist.

9.6 Das Drachenviereck

9.6.1 Definition: Drachenviereck

Ein Viereck heißt *Drachenviereck (kurz: Drachen)*, wenn es konvex ist, zusätzlich zwei benachbarte Seiten gleich lang sind, und die zwei anderen Seiten ebenfalls gleich lang sind.



9.6.2 Satz: Drachenviereck

Für ein beliebiges **konvexes** Viereck sind die folgenden Aussagen äquivalent:

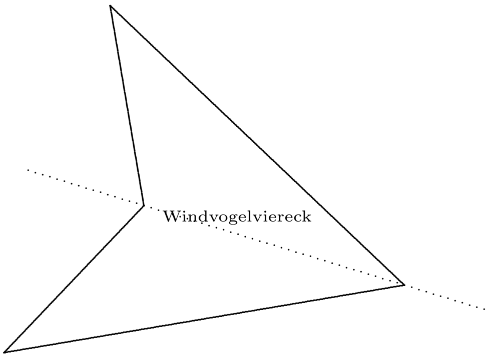
(D) Es ist ein Drachenviereck.

(Y) Es ist achsensymmetrisch bzgl. einer Diagonalen.

9.6.3 Beweis fehlt.

9.6.4 Definition: Windvogelviereck

Ein Viereck heißt *Windvogelviereck*, wenn es nicht konvex ist, zusätzlich zwei benachbarte Seiten gleich lang sind, und die zwei anderen Seiten ebenfalls gleich lang sind.



9.6.5 Satz: Windvogelviereck

Für ein beliebiges **nicht-konvexes** Viereck sind die folgenden Aussagen äquivalent:

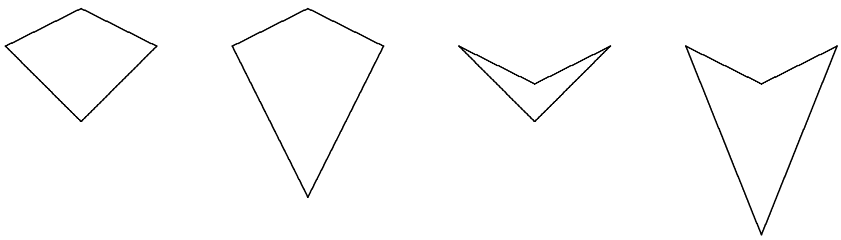
(D) Es ist ein Windvogelviereck.

(Y) Es ist achsensymmetrisch bzgl. einer Diagonalen.

9.6.6 Beweis fehlt.

9.6.7 Kommentare

- Bemerkenswert ist, dass beim Windvogelviereck eine der beiden Diagonalen außerhalb verläuft.
- Was ist das ,,Zwischending" zwischen Drachen- und Windvogelviereck?
- Aus den Definitionen ist zu ersehen, dass sich die beiden Typen ,,Drachenviereck" und ,,Windvogelviereck" nur durch die Konvexität unterscheiden. Als Oberbegriff für beide Typen wird auch ,,diagonalsymmetrisches Viereck" verwendet.
- In einem Drachen- oder Windvogelviereck stehen die beiden Diagonalen senkrecht aufeinander. Umgekehrt ist diese Bedingung nicht hinreichend dafür, dass ein Viereck ein Drachenviereck oder Windvogelvierecke sein muss.
- Beachte, dass bei einem Drachenviereck oder Windvogelviereck die Symmetrieachse keineswegs die längere oder kürzere Diagonale sein muss.

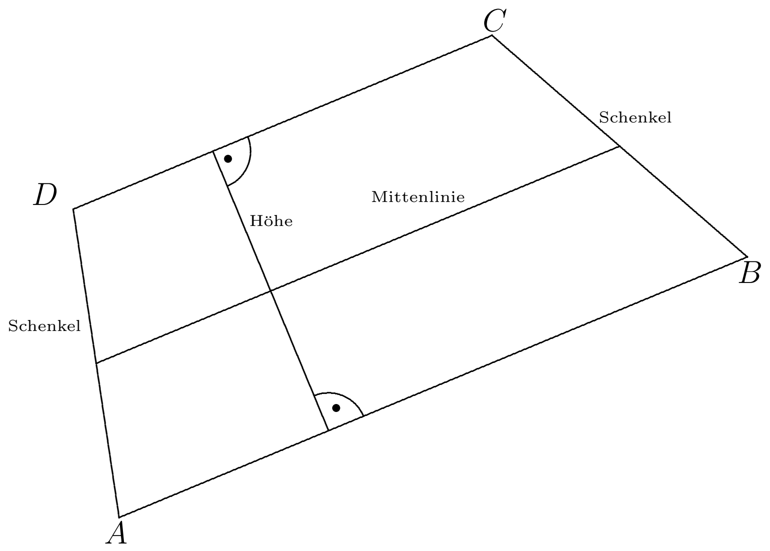


9.7 Das allgemeine Trapez

9.7.1 Definition: Trapez

Ein Viereck heißt *Trapez*, wenn zwei der Seiten parallel sind.

9.7.2 Begriffe Wenn ein Viereck ein Trapez ist, dann werden noch die in dem Diagramm angegebenen Begriffe verwendet:



9.7.3 Satz: Trapez

Für ein beliebiges Viereck sind die folgenden Aussagen äquivalent:

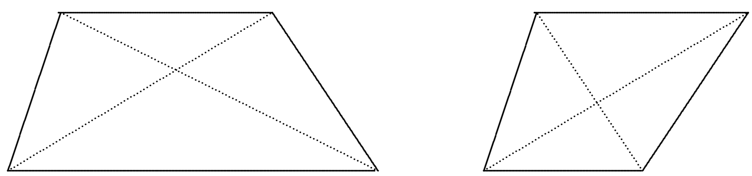
(D) Es ist ein Trapez.

(V) Die beiden Diagonalen schneiden sich im gleichen Verhältnis.

9.7.4 Beweis

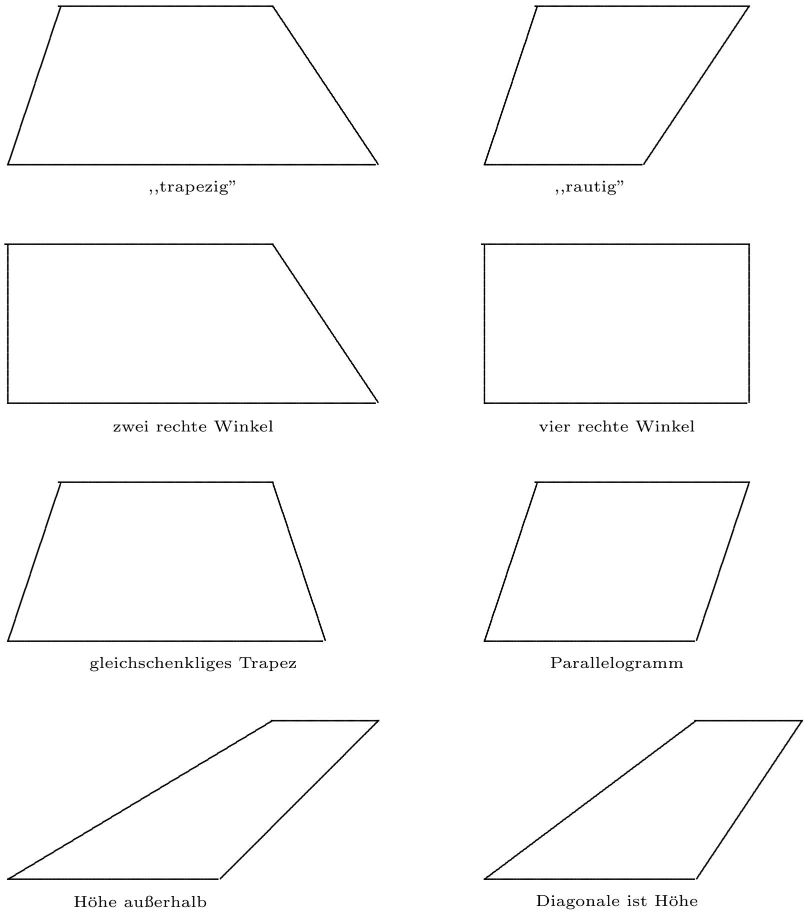
(D) $\Rightarrow$ (V) Die beiden Diagonalen bilden zusammen mit den parallelen Seiten eine X-Figur bzgl. der Strahlensätze 7.2.2. Die Behauptung folgt dann mit dem ersten Strahlensatz.

(V) $\Rightarrow$ (D) Die beiden Seiten, an denen die kürzeren (bzw. längeren) Diagonalabschnitte enden, bilden zusammen mit den Diagonalen eine X-Figur. Die Behauptung folgt dann mit der Umkehrung des ersten Strahlensatzes 7.2.2.



9.7.5 Beispielvielfalt

Das folgende Diagramm gibt einen Eindruck von der Beispielvielfalt bei Trapezen.



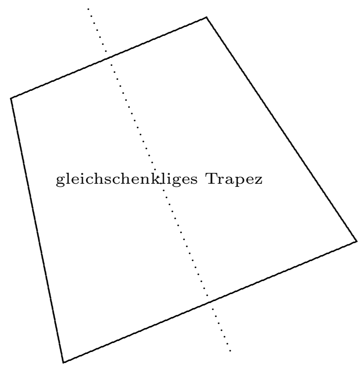
9.7.6 Kontextfelder

Die Traufseite eines Walmdachs hat die Form eines Trapezes.

9.8 Das gleichschenklige Trapez

9.8.1 Definition: Gleichschenkliges Trapez

Ein Viereck heißt *gleichschenkliges Trapez*, wenn zwei benachbarte Winkel gleich groß sind und die zwei anderen Winkel ebenfalls gleich groß sind.



9.8.2 Satz: Gleichschenkliges Trapez

Für ein beliebiges Viereck sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(D) Es ist ein gleichschenkliges Trapez.

(A) Es sind die drei folgenden Bedingungen erfüllt:

- (A_1) Zwei der Seiten sind parallel, d.h. es ist ein allgemeines Trapez,
- (A_2) die beiden anderen Seiten sind gleich lang,
- (A_3) zwei an einer der beiden parallelen Seiten anliegenden Innenwinkel sind gleich groß.

(Y) Es ist achsensymmetrisch bzgl. einer Seitenhalbierenden.

9.8.3 Beweis fehlt.

9.8.4 Kommentare

- Die Definition 9.8.1 ist ungewöhnlich, aber sehr kompakt, außerdem in gewisser Weise analog zu der des Drachenvierecks.
- Die äquivalente Beschreibung von Trapezen in der Aussage (A) ist anschaulicher und alltagsnäher, dafür aber ziemlich umständlich. Die seltsame zusätzliche Bedingung (A_3) ist notwendig, da Parallelogramme nicht als gleichschenklige Trapeze ,,zugelassen" sein sollen.
- Man mache sich klar, dass die Eigenschaft (A_2) aus den anderen beiden (A_1) und (A_3) folgt. Eine Beschreibung nur mittels (A_1) und (A_3) wäre fachlich richtig, aber ungewöhnlich und alltagsfern.
- Im Alltagssprachgebrauch wird häufig das präzisierende Attribut ,,gleichschenklig" weggelassen. Es bleibt dann unklar, ob es um gleichschenklige oder allgemeine Trapeze geht.

9.9 Das Sehnenviereck

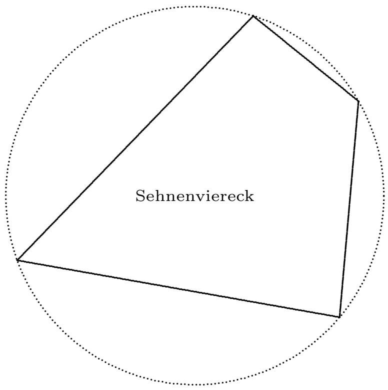
9.9.1 Definition und Satz: Sehnenviereck

Ein Viereck heißt *Sehnenviereck*, wenn es eine (und damit jede) der folgenden Bedingungen erfüllt:

(D) Die vier Seiten sind Sehnen eines Kreises.

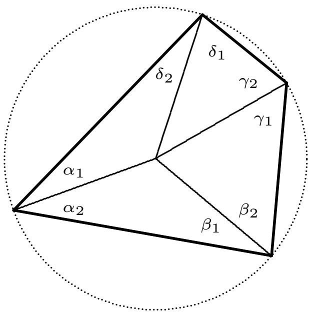
(K) Es besitzt einen Umkreis. Das ist ein Kreis, dessen Kreislinie alle Eckpunkte des Vierecks enthält.

(W) Die Summen der Maße von je zwei Gegenwinkeln sind gleich.



9.9.2 Beweis

(D) $\Rightarrow$ (W)



Die vier Teildreiecke sind gleichschenklig. Deshalb stimmen die Basiswinkel jeweils überein und es gilt

$$\alpha + \gamma \quad = \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2 \quad = \quad \delta_2 + \beta_1 + \beta_2 + \delta_1 \quad = \quad \beta + \delta.$$

(W) $\Rightarrow$ (D) Es sei also ein Viereck $ABCD$ mit $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ gegeben.

Konstruiere den Umkreis k des Dreiecks ABC mit Mittelpunkt M.

Es sei dann $\widetilde{D}$ der Schnittpunkt des Strahls $[MD$ mit der Kreislinie k.

Das „Schattenviereck" $ABC\widetilde{D}$ ist dann ein Sehnenviereck.

Für den Innenwinkel $\widetilde{\delta}$ des Schattenvierecks bei $\widetilde{D}$ gilt dann aufgrund der Implikation (D) $\Rightarrow$ (W), dass

$$\widetilde{\delta} \quad = \quad \alpha + \gamma - \beta \quad = \quad \delta.$$

Sollte der vierte Eckpunkt D innerhalb/außerhalb des Kreises k liegen, so müsste $\delta > \widetilde{\delta}$ bzw. $\delta < \widetilde{\delta}$ sein. Widerspruch.

9.9.3 Beobachtung

Unter allen (Gelenk-)Vierecken mit fest vorgegebenen Seitenlängen a, b, c, d hat genau das Sehnenviereck maximalen Flächeninhalt.

9.10 Das Tangentenviereck

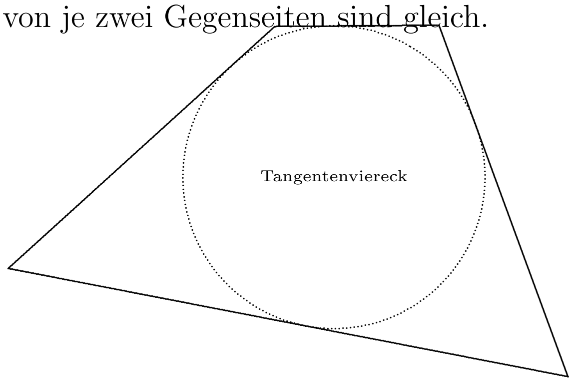
9.10.1 Definition und Satz: Tangentenviereck

Ein Viereck heißt *Tangentenviereck*, wenn es eine (und damit jede) der folgenden Bedingungen erfüllt:

(D) Die vier Seiten sind Tangenten eines Kreises.

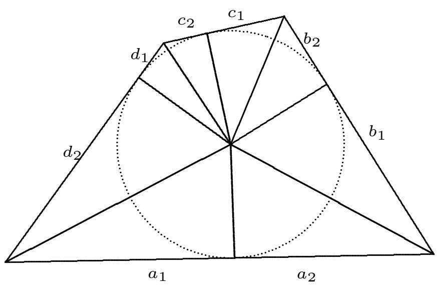
(K) Es besitzt einen Inkreis. Das ist ein Kreis, dessen Kreislinie jede Seite genau einmal berührt.

(S) Die Summen der Längen von je zwei Gegenseiten sind gleich.



9.10.2 Beweis

(D) $\Rightarrow$ (S)



Durch die Lote zu den Berührpunkten und die Strecken vom Inkreismittelpunkt zu den Eckpunkten entstehen insgesamt acht rechtwinklige Dreiecke.

Überlege mit Hilfe des SsW-Satzes, dass vier Paare von zueinander kongruenten benachbarten Dreiecken entstehen.

Deshalb stimmen die Längen der Teilstrecken jeweils überein wie folgt

$$a + c \;=\; a_1 + a_2 + c_1 + c_2 \;=\; d_2 + b_1 + b_2 + d_1 \;=\; b + d.$$

(S) $\Rightarrow$ (D) Es sei also ein Viereck $ABCD$ mit $a + c = b + d$ gegeben.

Es sei W der Schnittpunkt der beiden Winkelhalbierenden w_β und w_γ und dann k der Kreis, der die drei Seiten a, b, c berührt.

Es sei dann $\widetilde{D}$ der Schnittpunkt des Strahls $[MD$ mit der zweiten Tangente von A auf k.

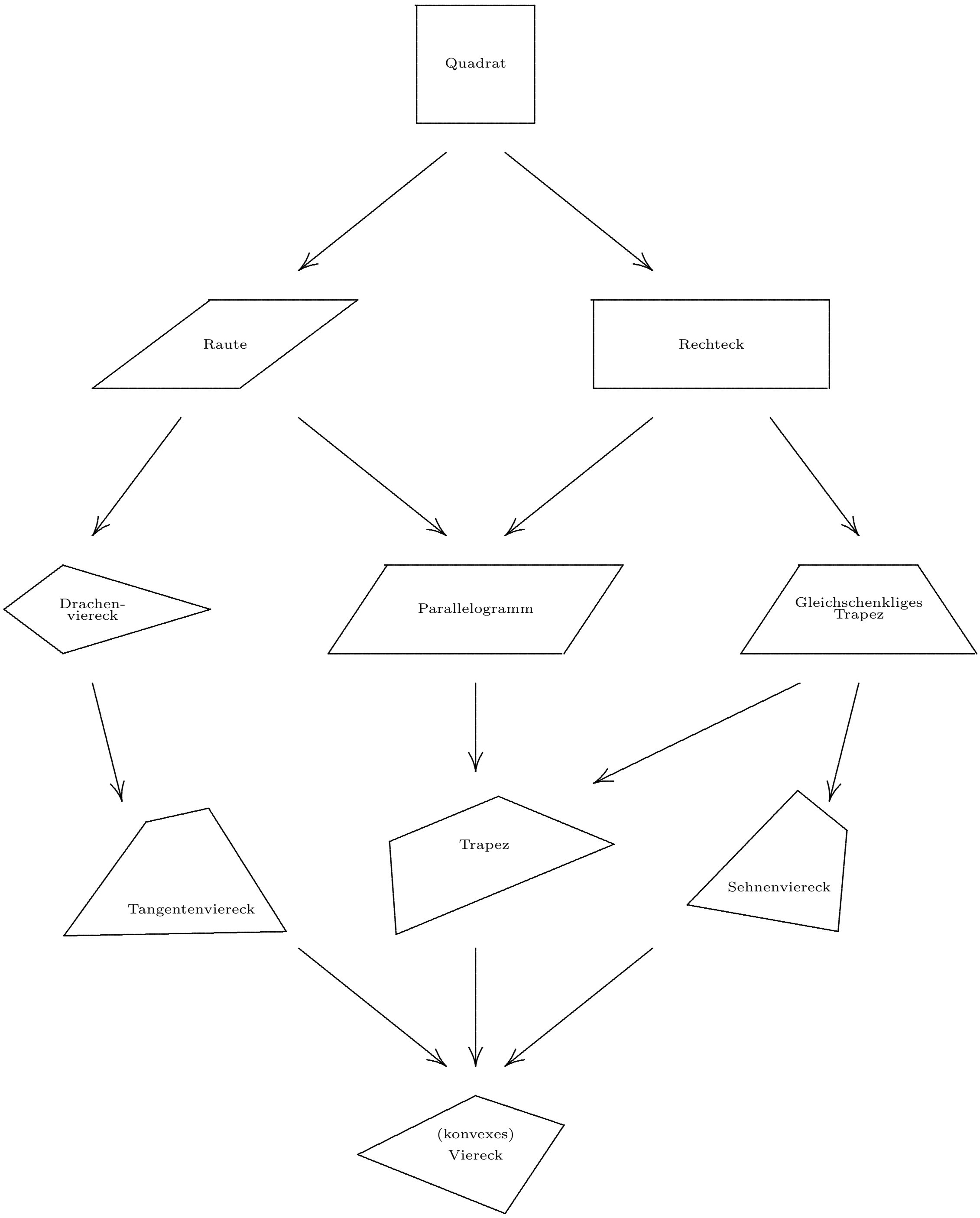
Das ,,Schattenviereck" $ABC\widetilde{D}$ ist dann ein Tangentenviereck.

Für die Seitenlänge $\widetilde{c}$ des Schattenvierecks gilt dann aufgrund der Implikation (D) $\Rightarrow$ (S), dass

$$\widetilde{c} \;=\; b + d - a \;=\; c.$$

Sowohl D als auch $\widetilde{D}$ liegen auf dem Strahl $[CD$ mit gleichem Abstand von C. Damit gilt $D = \widetilde{D}$ und $ABCD$ ist ein Tangentenviereck.

9.11 Das Haus der Vierecke



Ein Pfeil, der von Viereckstyp A nach Viereckstyp B weist, hat die folgende Bedeutung:

- Viereckstyp A ist ein Spezialfall von Viereckstyp B   oder
- Die Menge der Viereckstypen A ist in der Menge der Viereckstypen B enthalten.

9.12 Eigenschaften der Vierecke

	Eigenschaft	Quadrat	Raute	Rechteck	Drachen	Paralgr.	gl. Trapez
1	Alle vier Seiten sind gleich lang						
2	Es gibt zwei mal zwei gleich lange benachbarte Seiten						
3	Je zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang						
4	Zwei benachbarte Seiten sind gleich lang						
5	Zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang						
6	Drei Seiten sind gleich lang						
7	Zwei Seiten sind gleich lang						
8	Alle vier Winkel gleich groß						
9	Es gibt zwei mal zwei gleich große benachbarte Winkel						
10	Je zwei gegenüberliegende Winkel sind gleich groß						
11	Zwei benachbarte Winkel sind gleich groß						
12	Zwei gegenüberliegende Winkel sind gleich groß						
13	Drei Winkel sind gleich groß						
14	Zwei Winkel sind gleich groß						
15	Zwei der Nachbarwinkel ergänzen sich zu 180°						
16	Die Summe der Innenwinkel ist 360°						
17	Die Diagonalen sind gleich lang						
18	Die Diagonalen halbieren einander						
19	Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander						
20	Beide Diagonalen halbieren die Winkel						
21	Mindestens eine Diagonale halbiert die Winkel						
22	Die Seitenhalbierenden sind gleich lang						
23	Die Seitenhalbierenden halbieren einander						
24	Die Seitenhalbierenden stehen senkrecht aufeinander						
25	Das Viereck ist achsensymmetrisch						
26	Das Viereck ist punktsymmetrisch						
27	Das Viereck besitzt vier Symmetrieachsen						
28	Das Viereck besitzt zwei Symmetrieachsen						
29	Das Viereck besitzt eine Symmetrieachse						
30	Beide Diagonalen sind Symmetrieachsen						
31	Mindestens eine Diagonale ist Symmetrieachse						
32	Zwei Seitenhalbierende sind Symmetrieachsen						
33	Mindestens eine Seitenhalbierende ist Symmetrieachse						
34	Je zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel zueinander						
35	Zwei der Seiten sind parallel zueinander						
36	Das Viereck besitzt einen Umkreis (Sehnenviereck)						
37	Das Viereck besitzt einen Inkreis (Tangentenviereck)						

Eintragungen in der linken Seite eines Feldes: Die richtige Antwort!

- $\boxed{\checkmark}$ Bei dem Viereckstyp liegt die Eigenschaft vor.
- $\boxed{\circ}$ Bei dem Viereckstyp liegt die Eigenschaft nicht vor.

Eintragungen in der rechten Seite eines Feldes: Wie habe ich die Antwort ermittelt?

- $\boxed{\text{W}}$ (Wissen) Mir war die Antwort bekannt.
- $\boxed{\text{Z}}$ (Zeichnen) Ich habe ein Beispiel des Viereckstyps gezeichnet und daraus die Antwort erschlossen.
- $\boxed{\text{V}}$ (Vorstellung) Ich habe mir den Viereckstyp vorgestellt und die Antwort daraus erschlossen.
- $\boxed{\text{M}}$ (Mathematik) Ich habe die Antwort durch geometrisches oder kombinierendes Schließen ermittelt.

Unter den *Seitenhalbierenden* eines Vierecks verstehen wir die beiden Strecken, die die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten des Vierecks verbinden. Beachte, dass dieser Begriff kaum üblich ist.

9.13 Eigenschaften der Vierecke — Lösung

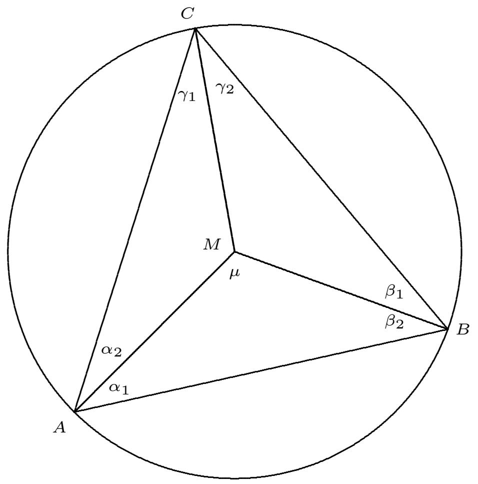
	Eigenschaft	Quadrat	Raute	Rechteck	Drachen	Paralgr.	gl. Trapez
1	Alle vier Seiten sind gleich lang						
2	Es gibt zwei mal zwei gleich lange benachbarte Seiten						
3	Je zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang						
4	Zwei benachbarte Seiten sind gleich lang						
5	Zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang						
6	Drei Seiten sind gleich lang						
7	Zwei Seiten sind gleich lang						
8	Alle vier Winkel gleich groß						
9	Es gibt zwei mal zwei gleich große benachbarte Winkel						
10	Je zwei gegenüberliegende Winkel sind gleich groß						
11	Zwei benachbarte Winkel sind gleich groß						
12	Zwei gegenüberliegende Winkel sind gleich groß						
13	Drei Winkel sind gleich groß						
14	Zwei Winkel sind gleich groß						
15	Zwei der Nachbarwinkel ergänzen sich zu 180°						
16	Die Summe der Innenwinkel ist 360°						
17	Die Diagonalen sind gleich lang						
18	Die Diagonalen halbieren einander						
19	Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander						
20	Beide Diagonalen halbieren die Winkel						
21	Mindestens eine Diagonale halbiert die Winkel						
22	Die Seitenhalbierenden sind gleich lang						
23	Die Seitenhalbierenden halbieren einander						
24	Die Seitenhalbierenden stehen senkrecht aufeinander						
25	Das Viereck ist achsensymmetrisch						
26	Das Viereck ist punktsymmetrisch						
27	Das Viereck besitzt vier Symmetrieachsen						
28	Das Viereck besitzt zwei Symmetrieachsen						
29	Das Viereck besitzt eine Symmetrieachse						
30	Beide Diagonalen sind Symmetrieachsen						
31	Mindestens eine Diagonale ist Symmetrieachse						
32	Zwei Seitenhalbierende sind Symmetrieachsen						
33	Mindestens eine Seitenhalbierende ist Symmetrieachse						
34	Je zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel zueinander						
35	Zwei der Seiten sind parallel zueinander						
36	Das Viereck besitzt einen Umkreis (Sehnenviereck)						
37	Das Viereck besitzt einen Inkreis (Tangentenviereck)						

10 Geometrie der Kreise

10.1 Fasskreisbogen und Peripheriewinkel

10.1.1 Satz: Fasskreisbogen und Peripheriewinkel

Es seien ein Kreis mit Mittelpunkt M und drei Punkten A, B, C auf der Kreislinie gegeben. Die Innenwinkel des Dreiecks ABC werden wie gewohnt mit α, β und γ bezeichnet.



$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1 + \alpha_2\\ \beta &= \beta_1 + \beta_2\\ \gamma &= \gamma_1 + \gamma_2\end{aligned}$$

Dann gelten für den *Peripheriewinkel* γ die folgenden beiden Beziehungen:

(i) Fasskreisbogen: $\gamma = 90^{\circ} - \beta_2$

(ii) Kreiswinkelsatz: $\gamma = \frac{1}{2} \cdot \mu$

10.1.2 Beweis

Die drei Teildreiecke sind wegen der ,,Radiusgleichheit" gleichschenklig. Deshalb sind jeweils die Basiswinkel gleich groß.

(i) In der Gleichung für die Innenwinkelsumme im Gesamtdreieck ersetzen wir die irrelevanten Basiswinkel durch ihre ,,Gegenüberwinkel"

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \beta_1 & + & \beta_2 & + & \gamma_1 & + & \gamma_2 & = & 180^{\circ} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & & & \\ \beta_2 & + & \gamma_1 & + & \gamma_2 & + & \beta_2 & + & \gamma_1 & + & \gamma_2 & = & 180^{\circ} \end{array}$$

und erhalten daraus

$$2 \cdot \beta_2 + 2 \cdot (\gamma_1 + \gamma_2) = 180^{\circ}$$

Halbierung ergibt die Behauptung (i).

(ii) Betrachtet man nun das gleichschenklige Dreieck ABM, so ergibt sich weiter

$$\tfrac{1}{2} \cdot \mu = \tfrac{1}{2} \cdot (180^{\circ} - 2 \cdot \beta_2) = 90^{\circ} - \beta_2 = \gamma.$$

Das ist die Behauptung (ii).

10.1.3 Kommentare

- Betrachte die beiden Aussagen des Satzes für den Spezialfall, dass die Strecke $[AB]$ zum Durchmesser des Kreises wird. Es ergibt sich jeweils der Satz von Thales.

- Wenn der Mittelpunkt des Kreises nicht ,,zwischen" der Strecke $[AB]$ und dem Eckpunkt C liegt, bleiben die obigen Aussagen gültig, wenn man bedenkt, dass die drei betroffenen Winkelmaße in den Intervallen

  $$\mu \;>\; 180^\circ, \qquad \gamma \;>\; 90^\circ, \qquad \beta_2 \;<\; 0^\circ$$

  anzutreffen sind. Der Beweis muss dafür angepasst werden.

10.1.4 Definition: Fasskreisbogenpaar

Es seien eine Strecke $[AB]$ und ein Winkelmaß γ vorgegeben.

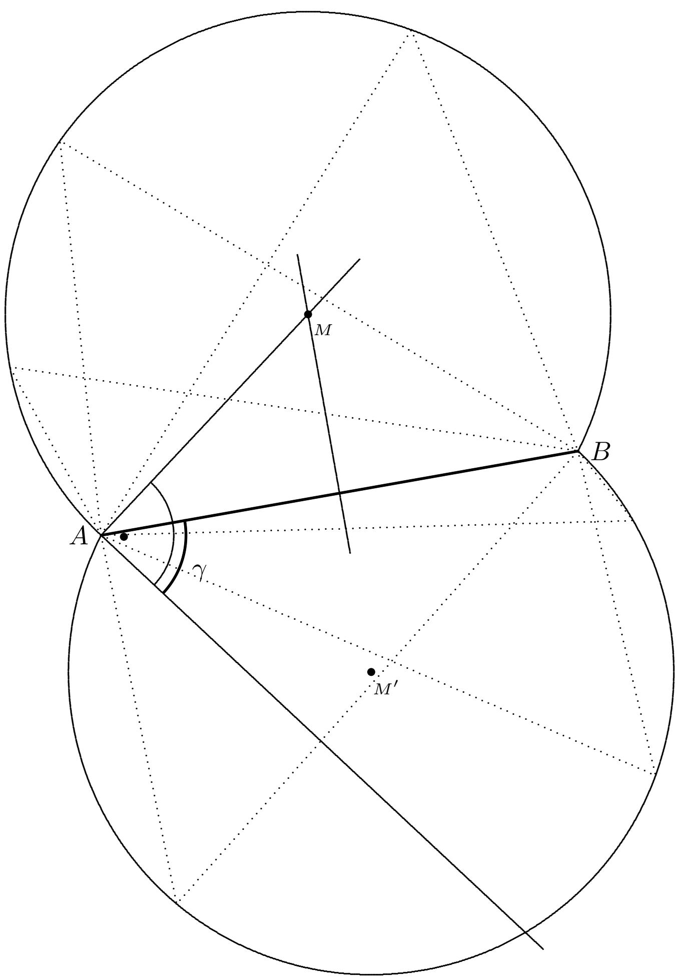
Die Menge der Punkte, unter denen die Strecke $[AB]$ den Winkel γ einnimmt, d.h.

$$\mathcal{M}_{\text{FKBP}}([AB],\gamma) \quad := \quad \Big\{ P \in \mathbb{E} \,\Big|\, |\sphericalangle APB| = \gamma \Big\},$$

heißt das *Fasskreisbogenpaar (zu* $[AB]$ *und* γ*)*.

10.1.5 Konstruktion des Fasskreisbogenpaars

1. ZoK die Mittelsenkrechte zu $[AB]$.
2. ZoK den Strahl $[AD$ so, dass $|\sphericalangle([AD,[AB)=\gamma$.
3. ZoK das Lot auf $[AD$ durch A.
4. Der Mittelpunkt M des ersten Fasskreisbogens ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechte und des Lots.
5. Der Mittelpunkt des zweiten Fasskreisbogens ist der an AB gespiegelte Punkt M' des ersten Mittelpunkts M.



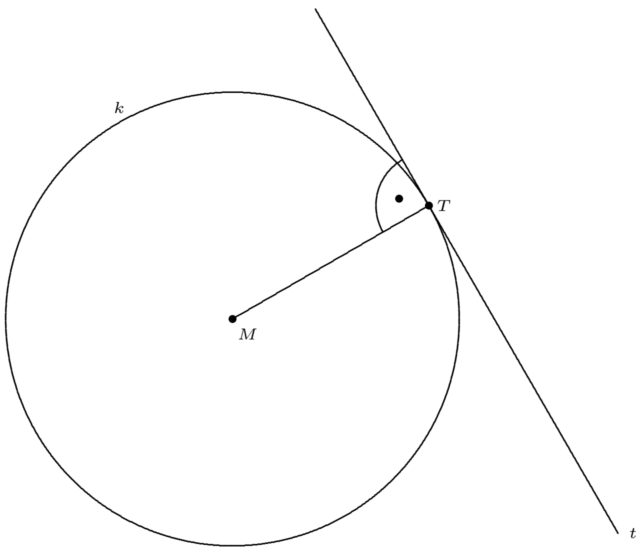
10.2 Tangenten an einen Kreis

10.2.1 Satz und Definition: Tangente

Es seien ein Kreis k mit Mittelpunkt M und eine Gerade t gegeben. Die Gerade t heißt *Tangente* an den Kreis k mit *Berührpunkt* T, wenn eine (und damit jede) der folgenden äquivalenten Aussagen erfüllt ist:

(A) Die Gerade und der Kreis haben genau einen Schnittpunkt: $t \cap k = \{T\}$.

(B) Der Radius $[MT]$ und die Gerade t schneiden sich senkrecht in T.



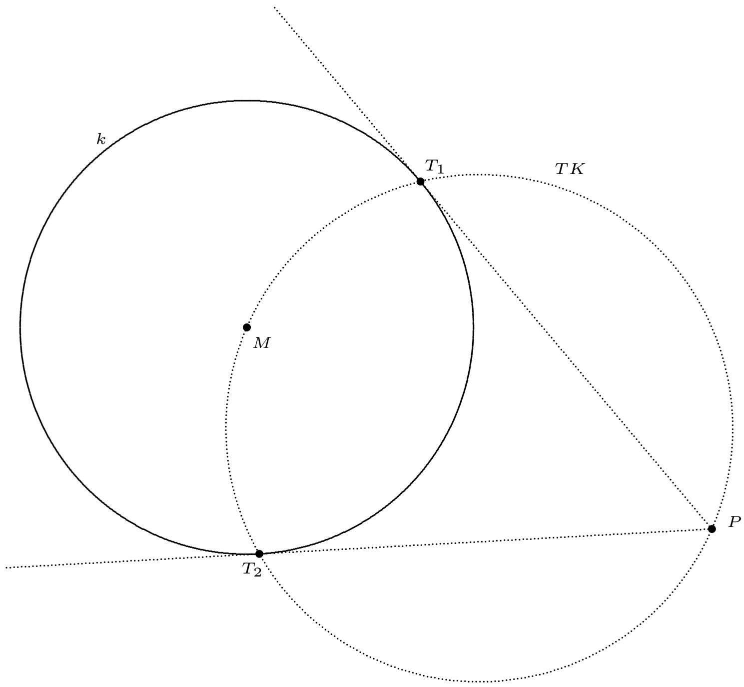
10.2.2 Begründung Fehlt!

10.2.3 Konstruktion der Tangente durch einen Punkt

Es seien ein Kreis k mit Mittelpunkt M und ein Punkt P außerhalb des Kreises gegeben.

Frage: Wie wird eine Tangente an den Kreis durch P konstruiert?

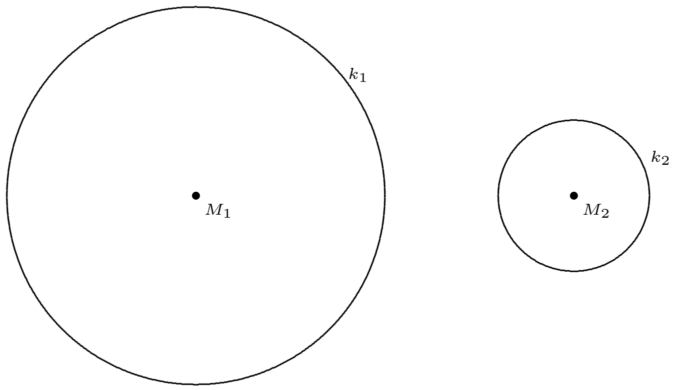
Antwort: Zeichne den Thaleskreis TK über der Strecke $[MP]$. Es treten zwei Schnittpunkte T_1 und T_2 von gegebenem Kreis und Thaleskreis auf. Da diese Punkte die zweite Bedingung (B) aus der obigen Definition 10.2.1 erfüllen, sind es die zwei Berührpunkte für die gesuchten Tangenten.



10.3 Tangenten an zwei Kreise

10.3.1 Aufgabe

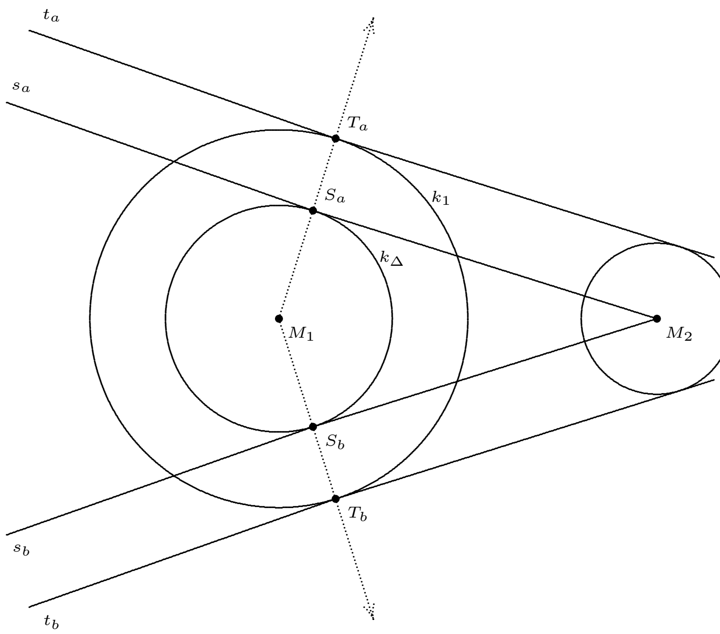
Gegeben seien zwei Kreise k_1 und k_2, die sich nicht schneiden. Konstruiere die Tangenten, die beide Kreise berühren.



10.3.2 Konstruktion der gemeinsamen Tangenten zweier Kreise

Es sei O.B.d.A. k_2 der Kreis mit dem kleineren Radius.

- Konstruiere den Kreis k_Δ mit Radius $r_\Delta = r_1 - r_2$ um den Mittelpunkt M_1 des größeren Kreises.
- Konstruiere eine Tangente s_a mit Berührpunkt S_a an diesen Kreis k_Δ durch M_2.
- T_a sei der Schnittpunkt des Strahls $[M_1S_a$ und des Kreises k_1.
- Verschiebe die Tangente s_a parallel, so dass die entstehende Gerade t_a durch T_a geht.
- Führe diese Konstruktion nochmal aus, um eine zweite Gerade t_b zu erhalten.



10.3.3 Begründung

für die oben angegebene Konstruktion.

1. Betrachte die zentrische Streckung mit Zentrum M_1 und Streckungsfaktor $m = \frac{r_1}{r_\Delta}$. Es werden abgebildet:

$$k_\Delta \longrightarrow k_1, \qquad S_1 \longrightarrow T_1, \qquad s_1 \longrightarrow t_1.$$

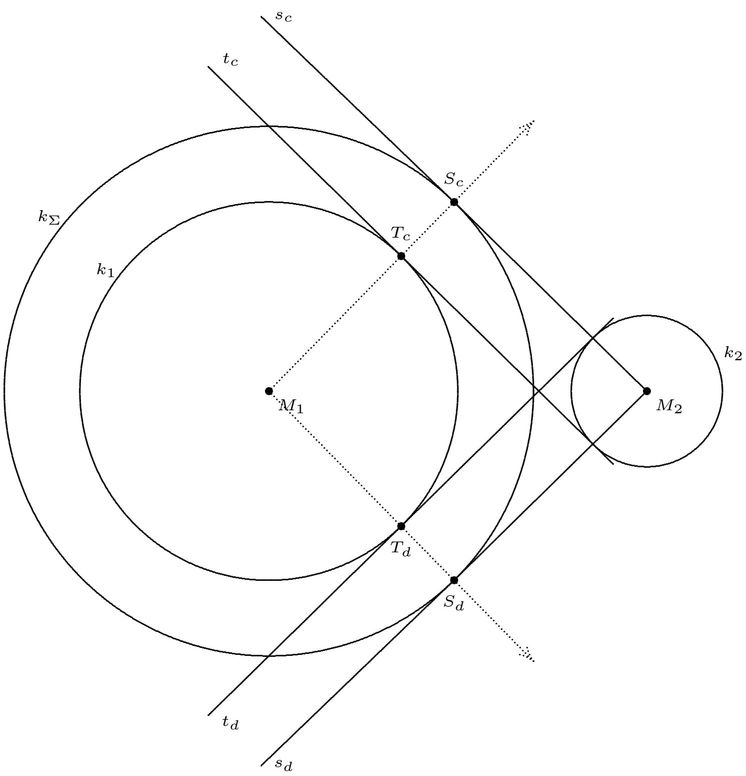
   Aufgrund der Parallelitäts- und Winkeltreue der zentrischen Streckung ist t_1 eine Tangente an k_1.

2. Da die Gerade t_1 den Abstand $\widetilde{r}$ von der Geraden s_1 durch den Mittelpunkt $\widetilde{M}$ hat, muss sie eine Tangente an $\widetilde{k}$ sein.

10.3.4 Überraschung

Es gibt noch zwei weitere Tangenten, die wie folgt konstruiert werden.

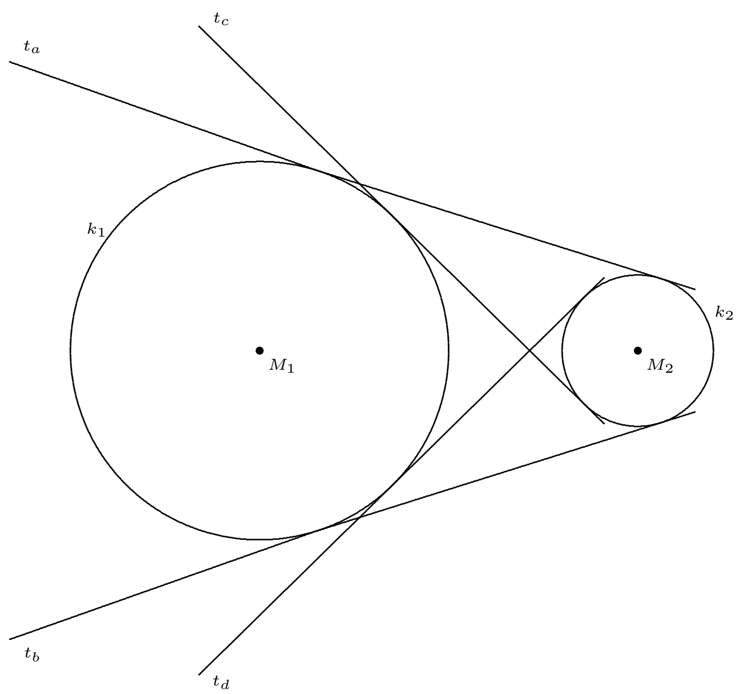
- Konstruiere den Kreis k_Σ mit Radius $r_\Sigma = r_1 + r_2$ um den Mittelpunkt M_1 des größeren Kreises.
- Konstruiere eine Tangente s_c mit Berührpunkt S_c an diesen Kreis k_Σ durch M_2.
- T_c sei der Schnittpunkt des Strahls $[M_1 S_c$ und des Kreises k_1.
- Verschiebe die Tangente s_c parallel, so dass die entstehende Gerade t_c durch T_c geht.
- Führe diese Konstruktion nochmal aus, um eine zweite Gerade t_d zu erhalten.



10.3.5 Kommentare und Anwendungen

- Die Konstruktion ist auch durchführbar, wenn die beiden Kreise sich schneiden oder berühren. Dabei verändert sich aber die Zahl der gemeinsamen Tangenten.
- Betrachte zwei benachbarte Walzen einer Rotationsdruckmaschine. Wie verläuft die Zeitungspapierbahn zwischen diesen Rollen?
- Episode mit AEI.

10.3.6 Abschluss Hier noch die Darstellung mit allen vier Tangenten.



11 Der Flächeninhalt ebener Figuren

11.1 Grundlegung der schulischen Flächenlehre

Die abstrakte ,,Flächenlehre" beruht darauf, dass der Flächeninhalt eine Abbildung

$$\mathcal{A} : \Big\{ \text{Ebene Figuren} \Big\} \quad \to \quad \mathbb{R}_0^+$$

ist. Es ist also eine Menge von ebenen Figuren der Zeichenebene vorgegeben. Jeder dieser Figuren wird eine nicht-negative Zahl zugeordnet. Dabei müssen die folgenden Axiome erfüllt sein.

11.1.1 Axiom 1: Normung

Es ist eine ebene Figur mit einem fixierten Flächeninhalt vorgegeben.

11.1.2 Axiom 2: Invarianz unter Kongruenz

Zwei kongruente Figuren haben den gleichen Flächeninhalt.

11.1.3 Axiom 3a: Endliche Additivität

Wird eine ebene Figur in **endlich** viele paarweise disjunkte Teilfiguren zerlegt, so addieren sich die einzelnen Flächeninhalte der Teilfiguren zum Flächeninhalt der Gesamtfigur auf.

11.1.4 Axiom 3b: Unendliche Additivität

Wird eine ebene Figur in **abzählbar unendlich** viele paarweise disjunkte Teilfiguren zerlegt, so addieren sich die einzelnen Flächeninhalte der Teilfiguren zum Flächeninhalt der Gesamtfigur auf.

11.1.5 Kommentare

- Zu Axiom 1: Fast immer wird hier ein Quadrat gewählt. Hat dieses Quadrat die Seitenlänge 1 LE, wo wird der Flächeninhalt 1 FE festgesetzt.

  Es ist zu bedenken, dass die Verwendung von Begriffen wie LE und FE abstrakt und alltagsfern ist. Alternativ kann man die alltäglichen Längeneinheiten 1 cm, 1 dm oder 1 m sowie die zugehörigen Flächeneinheiten $1\,\mathrm{cm}^2$, $1\,\mathrm{dm}^2$ bzw. $1\,\mathrm{m}^2$ wählen.

- Zu den Axiomen 3: Die beiden Axiome 3a und 3b könnten natürlich zu einem einzigen Axiom 3 zusammengefügt werden. Sie sind hier getrennt dargestellt, da die endliche Additivität in der Schule genauer herausgearbeitet wird, die unendliche Additivität eher stillschweigend benutzt wird.

- Zu Axiom 3a: Disjunkt bedeutet genau genommen, dass die beteiligten Teilfiguren keinen gemeinsamen Punkt enthalten dürfen. Tatsächlich kann (und muss) man diese Einschränkung lockern: Die Teilfiguren dürfen sich auf Teilmengen mit Flächeninhalt Null überlappen. Das sind beispielsweise Eckpunkte oder gemeinsame Seitenstrecken.

- Zu Axiom 3b: Dieses Axiom wird in der Schule kaum herausgearbeitet, es ist aber zur unendlichen Approximation nötig. Besonders tritt dies bei der Approximation der Kreisfläche durch ein- oder umbeschriebene Vielecke in Erscheinung. Siehe Kapitel 14.2.

  Letztlich korrespondiert dieses Axiom mit den Grundlagen der Integralrechnung.

- So wie oben dargestellt lassen die Formulierungen der Axiome Fragen offen. In der mathematischen Maßtheorie werden diese Fragen genau geklärt. Der schulische Flächeninhalt wird zum mathematischen Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^2$ (bzw. $\mathbb{R}^n$).

- Aus diesen Axiomen lassen sich alle weiteren ,,bekannten" Eigenschaften der Flächeninhaltslehre herleiten. Sie werden dann zum *anwendbaren Handwerkszeug.*

11.2 Relationen zwischen ebenen Figuren

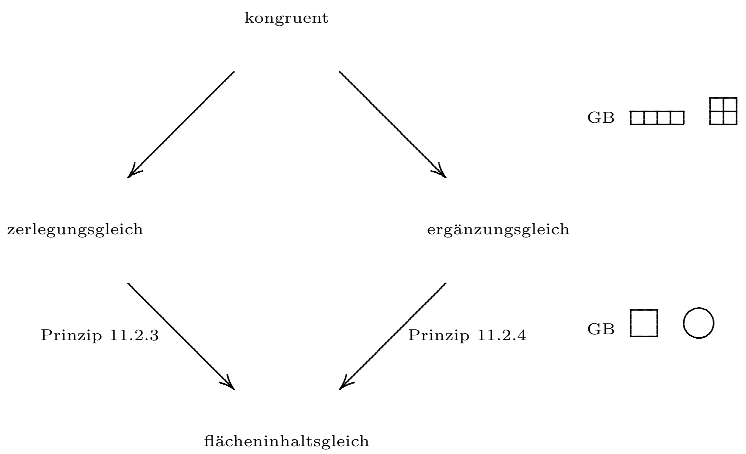
11.2.1 Definitionen: Relationen zwischen ebenen Figuren

Zwei ebene Figuren heißen ...

- *kongruent zueinander*, wenn die eine Figur durch eine Kongruenzabbildung in die andere Figur überführt werden kann. (Siehe 6.11.1).
- *zerlegungsgleich*, wenn beide Figuren in jeweils endlich viele Teilfiguren zerlegt werden können, so dass es zu jeder Teilfigur in der einen Zerlegung ein-eindeutig eine kongruente Teilfigur in der anderen Zerlegung gibt.
- *ergänzungsgleich*, wenn beide Figuren durch jeweils endlich viele Teilfiguren zu einer Gesamtfigur ergänzt werden können, so dass es zu jeder Teilfigur in der einen Ergänzung ein-eindeutig eine kongruente Teilfigur in der anderen Ergänzung gibt und die beiden Gesamtfiguren kongruent zueinander sind.
- *flächeninhaltsgleich*, wenn beide Figuren den gleichen Flächeninhalt haben.

11.2.2 Diagramm

Das Diagramm gibt einen Überblick über diese Relationen.



11.2.3 Prinzip der Zerlegungsgleichheit

Sind zwei ebene Figuren zerlegungsgleich, so sind sie auch flächeninhaltsgleich.

Dieses Prinzip wird angewandt beispielsweise beim Beweis 11.7.1 der Formel über den Flächeninhalt eines Parallelogramms.

11.2.4 Prinzip der Ergänzungsgleichheit

Sind zwei ebene Figuren ergänzungsgleich, so sind sie auch flächeninhaltsgleich.

Ein schönes Beispiel für die Anwendung dieses Prinzips ist der Beweis 12.5.1 des Höhensatzes.

11.2.5 Begründung

Die beiden oberen Pfeile folgen direkt aus der Definition von ,,zerlegungsgleich" bzw. ,,ergänzungsgleich". Die beiden unteren Pfeile folgen aus den beiden Axiomen 2 und 3a.

Das obere Gegenbeispiel zeigt, dass ergänzungs- oder zerlegungsgleiche Figuren nicht kongruent sein müssen. Das untere Gegenbeispiel zeigt, dass flächeninhaltsgleiche Figuren nicht notwendig (endlich-)ergänzungs- oder (endlich-)zerlegungsgleich sein müssen.

11.2.6 Kommentare

- Jede der angegebenen Relationen ist eine Äquivalenzrelation (d.h. reflexiv, symmetrisch, transitiv) auf der Menge der ebenen Figuren.
- Die im Diagramm rechts angegebenen Gegenbeispiele zeigen auf, dass die Pfeile in gleicher Höhe nicht auch aufwärts gerichtet sein können.
- Das Wort ,,flächeninhaltsgleich" ist ein Wort-Ungetüm. Man überlege situationsabhängig, ob hier auch die Wörter ,,flächengleich" oder ,,inhaltsgleich" verwendet werden können. Der Alltagsbegriff ,,gleich groß" ist zu allgemein und damit nichtssagend.

11.2.7 Beispiel

Wir betrachten ein Quadrat Q mit den Seitenlängen $b = 4,2\,\mathrm{cm}$ und ein Rechteck R mit den Seitenlängen $a = 2,8\,\mathrm{cm}$ und $c = 6,3\,\mathrm{cm}$.

Die beiden Figuren lassen sich durch zwei rechtwinklige Dreiecke mit den Kathetenlängen a und b bzw. den Kathetenlängen b und c zu großen rechtwinkligen Dreiecken ergänzen — die kongruent sind.

11.2.8 Prinzip der Kongruenz-Verdoppelung

Kann eine gegebene ebene Figur $\mathcal{F}$ in zwei zueinander kongruente oder zerlegungsgleiche Teilfiguren $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ zerlegt werden, so gilt

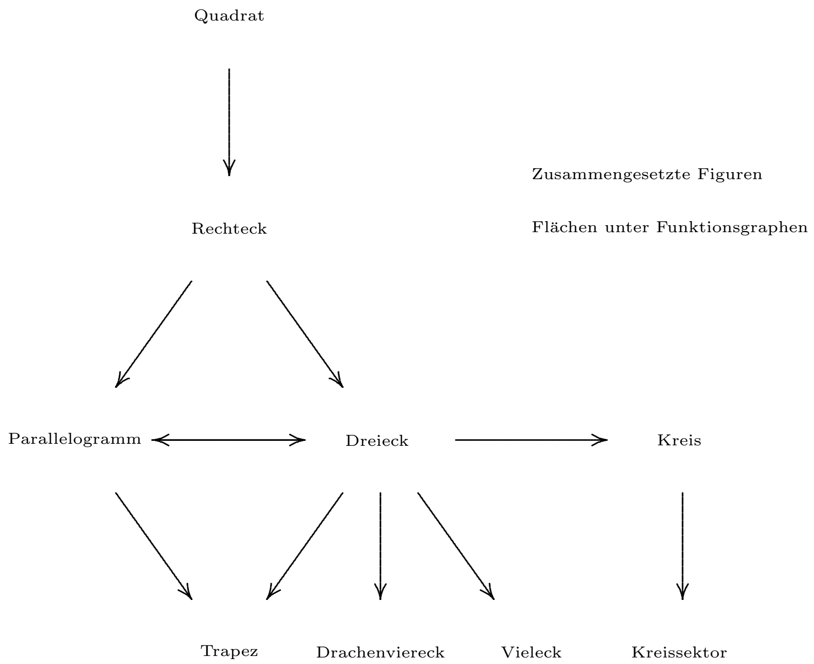
$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{A}(\mathcal{F}) & = & \mathcal{A}(\mathcal{F}_1) + \mathcal{A}(\mathcal{F}_2) \\ \mathcal{A}(\mathcal{F}_1) & = & \mathcal{A}(\mathcal{F}_2) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}(\mathcal{F}) \; = \; 2 \cdot \mathcal{A}(\mathcal{F}_1).$$

Ist der Flächeninhalt der Gesamtfigur oder der Teilfigur bekannt, so kann mit Hilfe dieser Gleichung auf den Flächeninhalt der jeweils anderen Figur geschlossen werden.

11.3 Aufbau der schulischen Flächenlehre

11.3.1 Diagramm

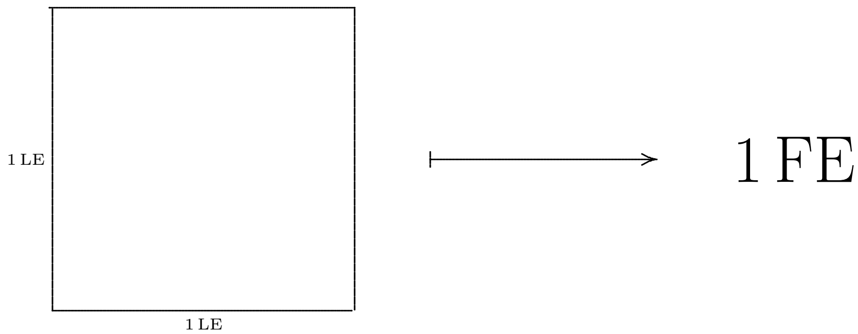
Das Diagramm zeigt auf, in welcher Reihenfolge die Flächeninhalte für die verschiedenen Typen ebener Figuren eingeführt werden können.



11.4 Flächeninhalt von Quadraten

11.4.1 Flächeninhalt eines Normquadrats

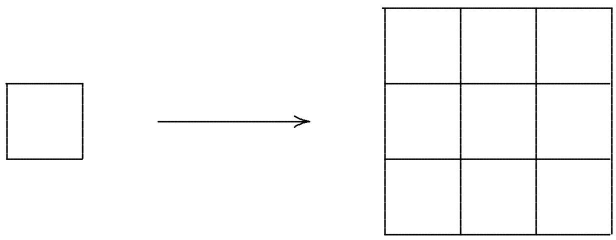
Ausgangspunkt ist, dass einem ,,Normquadrat" der Seitenlänge 1 LE ein Flächeninhalt 1 FE zugeordnet wird.



Da im Alltagsleben eine solche Normierung kaum relevant ist, wird dieser Schritt auch in der Schule kaum herausgearbeitet.

11.4.2 Ver-m-fachung der Seitenlänge

Wird die Seitenlänge des Normquadrats ver-m-facht, so entsteht ein Quadrat, das in m^2 Quadrate zerlegt werden kann, die zum Normquadrat kongruent sind.

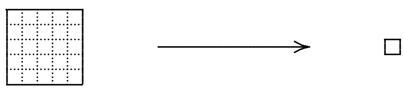


Demzufolge gilt für den Flächeninhalt des neuen Quadrats

$$\mathcal{A}_{\text{neues Quadrat}} = m^2\,\text{FE}.$$

11.4.3 n-telung der Seitenlänge

Wird umgekehrt die Seitenlänge des Normquadrats ge-n-telt, so entsteht ein Quadrat, mit dessen Kongruenz-Kopien das Normquadrat n^2-fach ausgelegt werden kann.



Hier gilt für den Flächeninhalt des neuen Quadrats

$$\mathcal{A}_{\text{neues Quadrat}} = \tfrac{1}{n^2}\,\text{FE}.$$

11.4.4 Ver-$\frac{m}{n}$-fachung der Seitenlänge

Wird die Seitenlänge des Normquadrats ver-$\frac{m}{n}$-facht, so kann dies als Nacheinander von Ver-m-fachung und n-telung angesehen werden. Es ergibt sich

$$\mathcal{A}_{\text{neues Quadrat}} = \tfrac{m^2}{n^2}\,\text{FE} = (\tfrac{m}{n})^2\,\text{FE}.$$

11.4.5 Ver-r-fachung der Seitenlänge

Durch Approximation kann diese Einsicht auf reelle Zahlen übertragen werden.

Wird die Seitenlänge eines Normquadrats mit einer reellen Zahl r vervielfacht, so vervielfacht sich der Flächeninhalt mit r^2.

$$\mathcal{A}_{\text{neues Quadrat}} = r^2\,\text{FE}.$$

Letztlich (und stillschweigend) kommt hier das Axiom 3b der unendlichen Additivität zum Tragen.

11.4.6 Ver-k-fachung der Seitenlänge

Reelle Zahlen k, die sich mit Hilfe von Grundrechenarten und Quadratwurzelziehen aus der Zahl 1 herstellen lassen, heißen *konstruierbar*, vgl. später Kapitel 21.3. Für solche Zahlen muss gar nicht das Approximations-Argument bzw. das Axiom 3b herangezogen werden. Der Flächeninhalt kann hier mit Hilfe der Kongruenz-Invarianz und der endlichen Additivität bestimmt werden, was an einem Standard-Beispiel dargelegt werden soll.

Ein Quadrat mit Seitenlänge $\sqrt{2}\,\text{LE}$ ist zu zwei Normquadraten zerlegungsgleich:

Es folgt

$$\mathcal{A}_{\text{neues Quadrat}} = 2\,\text{FE} = (\sqrt{2})^2\,\text{FE}.$$

Wir haben also die Beziehung aus 11.4.5 für $r = \sqrt{2}$ ohne Approximation bewiesen.

11.4.7 Quadrat der Längeneinheit

Aufgrund der Formel in 11.4.5 erscheint nachträglich die — mathematisch abstrakte — Definition

$$1\,\text{FE} := 1\,\text{LE} \cdot 1\,\text{LE}$$

sinnvoll. Es lässt sich dann im Nachhinein konstatieren, dass der Flächeninhalt eines Quadrats (geometrisch) gleich dem Quadrat (arithmetisch) der Seitenlängen ist.

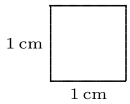
$$\mathcal{A}_{\text{neues Quadrat}} = r^2\,\text{FE} = (r\,\text{LE}) \cdot (r\,\text{LE}).$$

Damit ist auch eine Begründung dafür gegeben, dass metrische Flächeneinheiten mittels „Hoch-Zwei-Schreibweise" aus den Längeneinheiten abgeleitet werden.

11.5 Metrische Flächeneinheiten

11.5.1 Flächeninhalt eines cm-Quadrats

Die abstrakten Einheiten LE (Längeneinheit) und FE (Flächeneinheit) können bzw. werden durch konkrete Einheiten ersetzt, meist wird wegen Alltagsbezug und Schulheftpraktikabilität die Zuordnung



$$\longmapsto \quad 1\,\mathrm{cm}^2$$

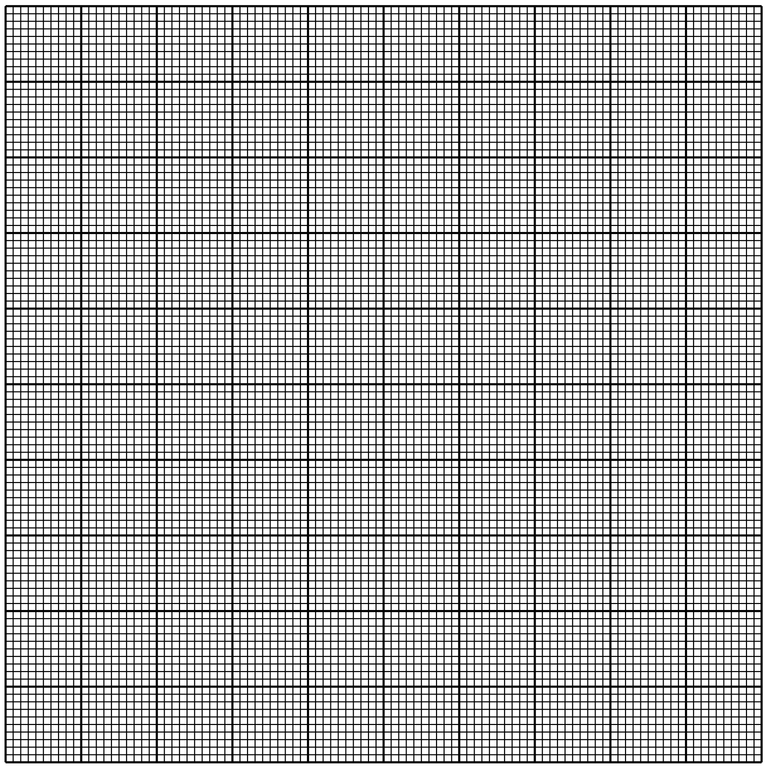
gewählt.

Damit wird der Idee aus Abschnitt 11.4.7, dass ,,Flächeneinheit = (Längeneinheit)^2" ist, auch bei der Schreibweise Genüge getan.

Enstprechend ergeben sich andere Flächeneinheiten wie

$$1\,\mathrm{m}^2 = 1\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{m}, \qquad 1\,\mathrm{dm}^2 = 1\,\mathrm{dm} \cdot 1\,\mathrm{dm} \qquad \text{oder} \qquad 1\,\mathrm{km}^2 = 1\,\mathrm{km} \cdot 1\,\mathrm{km}.$$

11.5.2 Beispiel



Es ist zu erkennen, dass

$$1\,\mathrm{dm}^2 = 100\,\mathrm{cm}^2 = 10.000\,\mathrm{mm}^2$$

Es ergibt sich also die ,,Flächeninhaltsumwandlungszahl" 100.

11.5.3 Überblick über die metrischen Flächeneinheiten

Durch ähnliche Überlegungen für die anderen metrischen Längen- bzw. Flächeneinheiten ergibt sich die folgende Umwandlungstabelle

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & & & & 1\,\mathrm{mm}^2 \\
 & & & & & 1\,\mathrm{cm}^2 = & 100\,\mathrm{mm}^2 \\
 & & & & 1\,\mathrm{dm}^2 = & 100\,\mathrm{cm}^2 = & 10.000\,\mathrm{mm}^2 \\
 & & & 1\,\mathrm{m}^2 = & 100\,\mathrm{dm}^2 = & 10.000\,\mathrm{cm}^2 = & 1.000.000\,\mathrm{mm}^2 \\
 & & 1\ \mathrm{a} = & 100\,\mathrm{m}^2 = & 10.000\,\mathrm{dm}^2 = & 1.000.000\,\mathrm{cm}^2 = & 100.000.000\,\mathrm{mm}^2 \\
 & 1\ \mathrm{ha} = & 100\,\mathrm{a} = & 10.000\,\mathrm{m}^2 = & 1.000.000\,\mathrm{dm}^2 = & 100.000.000\,\mathrm{cm}^2 = & 10.000.000.000\,\mathrm{mm}^2 \\
1\ \mathrm{km}^2 = 100\,\mathrm{ha} = & 10.000\,\mathrm{a} = & 1.000.000\,\mathrm{m}^2 = & 100.000.000\,\mathrm{dm}^2 = & 10.000.000.000\,\mathrm{cm}^2 = & 1.000.000.000.000\,\mathrm{mm}^2 &
\end{array}$$

11.5.4 Ar und Hektar

Dass die beiden Flächeneinheiten

$$\begin{aligned}
1\,\mathrm{a} &:= 10\,\mathrm{m}\cdot 10\,\mathrm{m} \\
1\,\mathrm{ha} &:= 100\,\mathrm{m}\cdot 100\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

die besonderen Namen ,,Ar" und ,,Hektar' haben, hat historische bzw. agrarische Gründe.

Zusätzlich ist in der Landwirtschaft noch oft das ,,Tagwerk" $\approx \frac{1}{3}$ ha üblich.

11.6 Flächeninhalt von Rechtecken

11.6.1 Seitenlängen sind rationale Vielfache der Längeneinheit

Hat ein Rechteck als Seitenlängen $\frac{k}{\ell}$ LE bzw. $\frac{m}{n}$ LE, so ist der Flächeninhalt

$$\mathcal{A}_{\text{Rechteck}} = \frac{k}{\ell} \cdot \frac{m}{n} \text{ FE}.$$

11.6.2 Verschiedene Begründungen — Allgemein

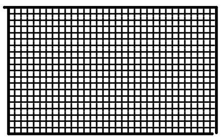
(i) Das Rechteck lässt sich mit $(k \cdot n) \cdot (m \cdot \ell)$ Quadraten der Seitenlänge $\frac{1}{\ell \cdot n}$ LE, und damit Flächeninhalt $(\frac{1}{\ell \cdot n})^2$ FE, auslegen.

(a) Legt man $\ell \cdot n$ Kongruenz-Kopien des gegebenen Rechtecks (geeignet) aneinander, so lässt sich das entstehende Rechteck mit $k \cdot m$ Normquadraten auslegen.

11.6.3 Beispiel

Wir wollen die obigen Begründungen an einem Beispiel aufzeigen. Es soll der Flächeninhalts eines Rechtecks mit Seitenlängen $\frac{11}{4}$ cm und $\frac{5}{3}$ cm ermittelt werden.

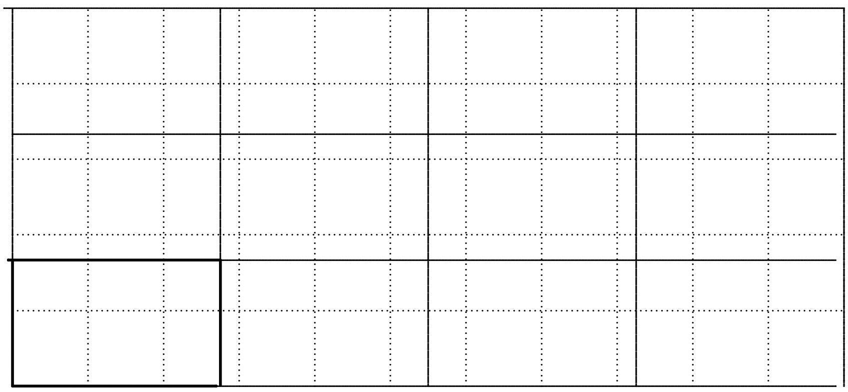
(i) Das gegebene Rechteck wird mittels $(3 \cdot 11) \cdot (5 \cdot 4)$ Quadraten der Seitenlänge $\frac{1}{4 \cdot 3}$ cm ausgelegt.



Der Flächeninhalt ist also

$$\mathcal{A}_{\text{Rechteck}} = \frac{(3 \cdot 11) \cdot (5 \cdot 4)}{(4 \cdot 3)^2} \text{ cm}^2 = \frac{55}{12} \text{ cm}^2.$$

(a) Das gegebene Rechteck wird mittels 12 Kongruenz-Kopien zu einem Rechteck mit Seitenlängen 11 cm und 5 cm ergänzt. Dieses kann durch $11 \cdot 5$ Quadrate der Seitenlänge 1 cm ausgelegt werden.



Der Flächeninhalt ist also

$$\mathcal{A}_{\text{Rechteck}} = \frac{11 \cdot 5}{4 \cdot 3} \text{ cm}^2 = \frac{55}{12} \text{ cm}^2.$$

11.6.4 Seitenlängen sind reelle Vielfache der Längeneinheit

Hat ein Rechteck die Seitenlängen r LE und s LE mit reellen Zahlen r, s, so ist der Flächeninhalt

$$\mathcal{A}_{\text{Rechteck}} = r \cdot s \text{ FE}.$$

11.6.5 Begründung durch Approximation

Man nähere die Seitenlängen r LE und s LE immer genauer durch rationale Zahlen $\frac{k}{\ell}$ LE bzw. $\frac{m}{n}$ LE an. Da die Aussage für rationale Seitenlängen gilt (vgl. 11.6.1), gilt sie auch für reelle Seitenlängen.

11.6.6 Begründung mittels Höhensatz

Das Rechteck kann durch Konstruktion mittels Höhensatz in ein flächeninhaltsgleiches Quadrat der Seitenlänge $\sqrt{r \cdot s}$ LE überführt werden. Vgl. Abschnitt 12.8.2. Damit ergibt sich 11.6.4.

11.6.7 Produkt der Seitenlängen

Bei Bezugnahme auf die metrischen Einheiten und die Hoch-Zwei-Schreibweise 11.4.7 kann der Satz 11.6.4 so formuliert werden:

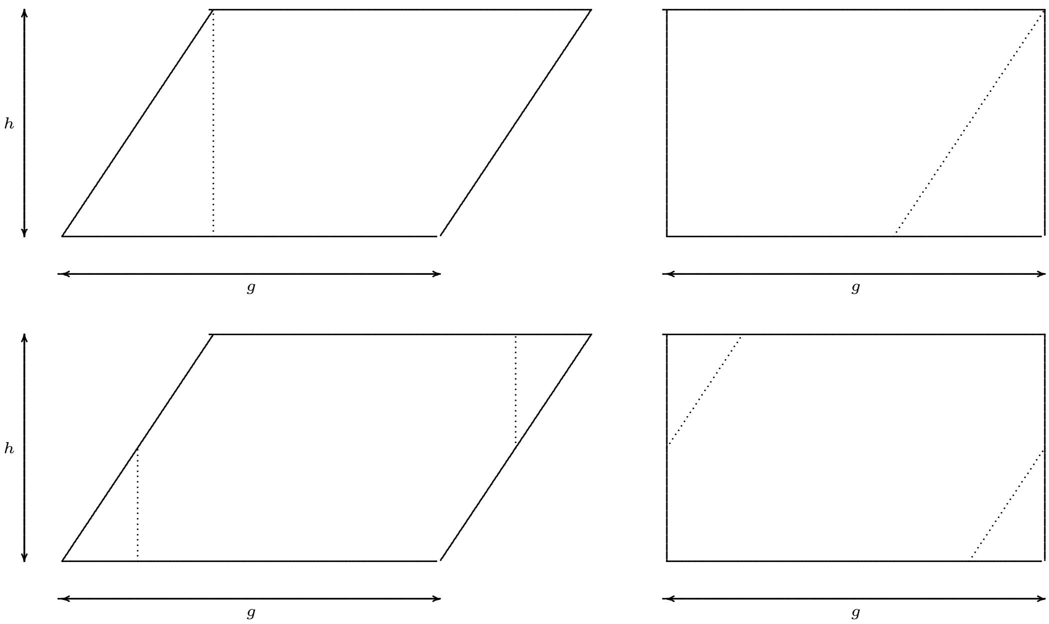
Hat ein Rechteck die Seitenlängen a und b, so ist sein Flächeninhalt gleich dem Produkt der Seitenlängen:

$$\mathcal{A}_{\text{Rechteck}} = a \cdot b.$$

Das bemerkenswerte an dieser Formel ist, dass sie unabhängig von Einheiten ist. Fachmathematisch spiegelt sie wider, dass das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^2$ gleich dem Produkt des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^1$ mit sich selbst ist.

11.7 Bestimmung von Flächeninhalten — vom Rechteck ausgehend

11.7.1 Rechteck → Parallelogramm



Die beiden benachbarten Figuren sind jeweils zerlegungsgleich. Es ergibt sich

$$\mathcal{A}_{\text{Pllgr}} = \mathcal{A}_{\text{Rechteck}} = g \cdot h.$$

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt der Längen von Grundlinie und Höhe.

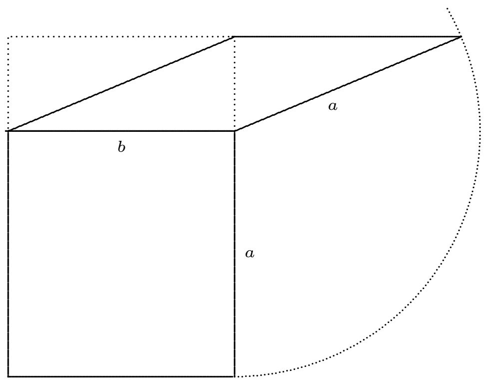
Dabei kann auch die andere Parallelogrammseite als Grundlinie angesehen werden.

11.7.2 Schülerfehler

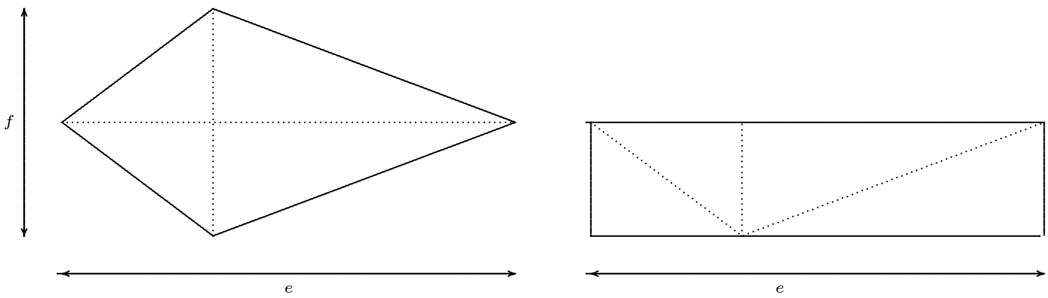
Ein offensichtlich auftretender Schülerfehler ist, dass sich der Flächeninhalt des Parallelogramms als Produkt der beiden Seitenlängen ergibt:

$$\mathcal{A}_{\text{Pllgr}} \overset{\leftrightsquigarrow}{=} a \cdot b.$$

Man könnte ihm dadurch begegnen, dass ein Parallelogramm mit sehr spitzem Winkel und ein Rechteck mit gleichen Seitenlängen a, b bzgl. Flächeninhalt verglichen werden.



11.7.3 Rechteck → Drachenviereck



Die beiden Figuren sind zerlegungsgleich. Es ergibt sich

$$\mathcal{A}_{\text{Drachenviereck}} \quad = \quad \mathcal{A}_{\text{Rechteck}} \quad = \quad \tfrac{1}{2} \cdot e \cdot f.$$

Der Flächeninhalt eines Drachenvierecks ist gleich dem halben Produkt der Längen der beiden Diagonalen.

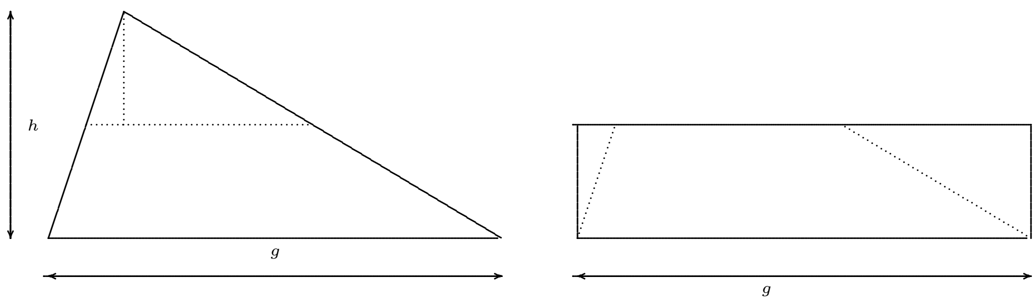
11.7.4 Rechteck → Raute

Da eine Raute ein spezielles Drachenviereck ist, gilt die obige Formel auch für Rauten.

$$\mathcal{A}_{\text{Raute}} \quad = \quad \mathcal{A}_{\text{Rechteck}} \quad = \quad \tfrac{1}{2} \cdot e \cdot f.$$

Der Flächeninhalt einer Raute ist gleich dem halben Produkt der Längen der beiden Diagonalen.

11.7.5 Rechteck → Dreieck



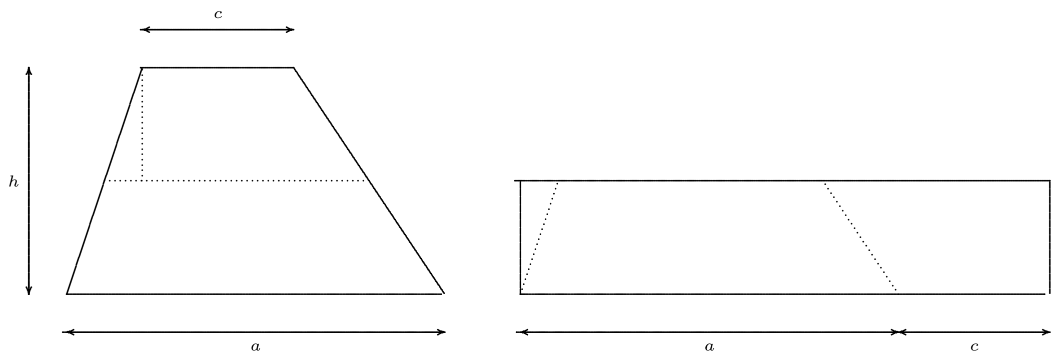
Die beiden Figuren sind zerlegungsgleich. Es ergibt sich

$$\mathcal{A}_{\text{Dreieck}} \quad = \quad \mathcal{A}_{\text{Rechteck}} \quad = \quad g \cdot \tfrac{1}{2} \cdot h \quad = \quad \tfrac{1}{2} \cdot g \cdot h.$$

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt der Längen von Grundlinie und Höhe.

Dabei kann auch jede der anderen beiden Dreiecksseiten als Grundlinie angesehen werden.

11.7.6 Rechteck → Trapez



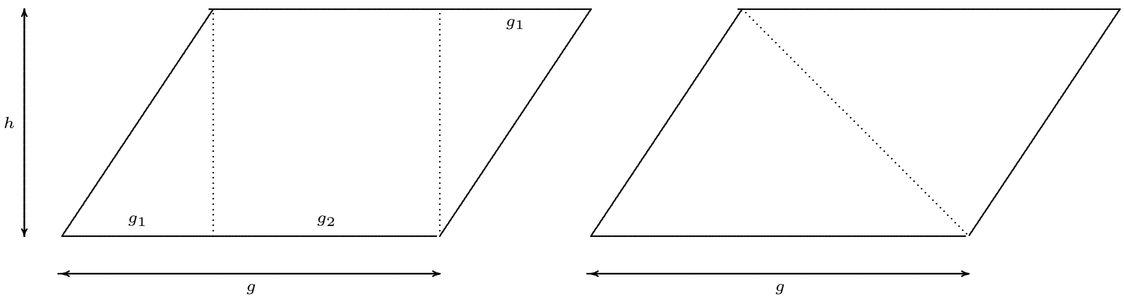
Die beiden Figuren sind zerlegungsgleich. Es ergibt sich

$$\mathcal{A}_{\text{Trapez}} \;=\; \mathcal{A}_{\text{Rechteck}} \;=\; (a+c)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot h \;=\; \tfrac{a+c}{2}\cdot h \;=\; m\cdot h.$$

Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkt der Längen von Mittenlinie und Höhe.

11.8 Bestimmung von Flächeninhalten — vom Dreieck ausgehend

11.8.1 Dreieck → Parallelogramm

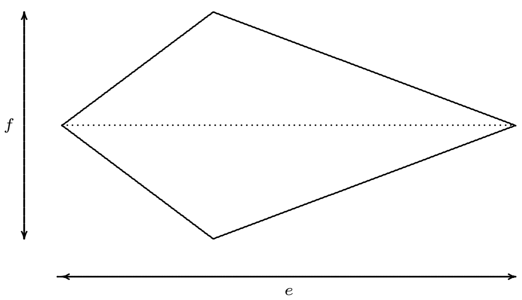


Aufgrund der Zerlegung in Dreiecke ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{Pllgr}} &= \tfrac{1}{2}\cdot g_1\cdot h + g_2\cdot h + \tfrac{1}{2}\cdot g_1\cdot h \;=\; (g_1+g_2)\cdot h \;=\; g\cdot h \qquad \text{bzw.} \\ \mathcal{A}_{\text{Pllgr}} &= \tfrac{1}{2}\cdot g\cdot h + \tfrac{1}{2}\cdot g\cdot h \;=\; g\cdot h. \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt der Längen von Grundlinie und Höhe.

11.8.2 Dreieck → Drachenviereck

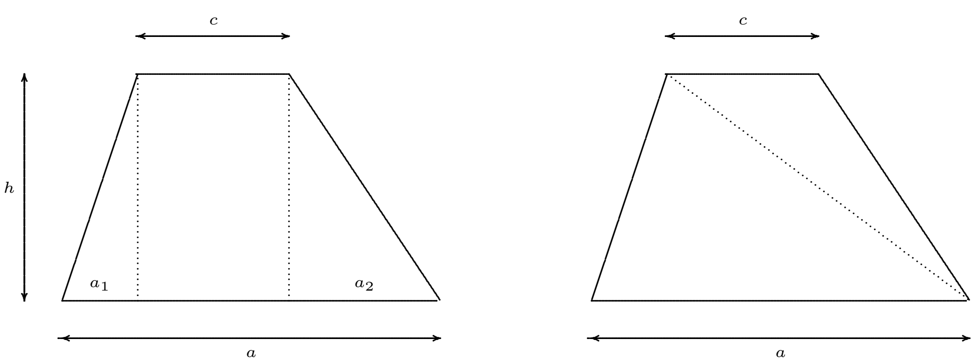


Aufgrund der Zerlegung in Dreiecke ergibt sich

$$\mathcal{A}_{\text{Drachenviereck}} = 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot e\cdot\tfrac{f}{2} = \tfrac{1}{2}\cdot e\cdot f.$$

Der Flächeninhalt eines Drachenvierecks ist gleich dem halben Produkt der Längen der beiden Diagonalen.

11.8.3 Dreieck → Trapez



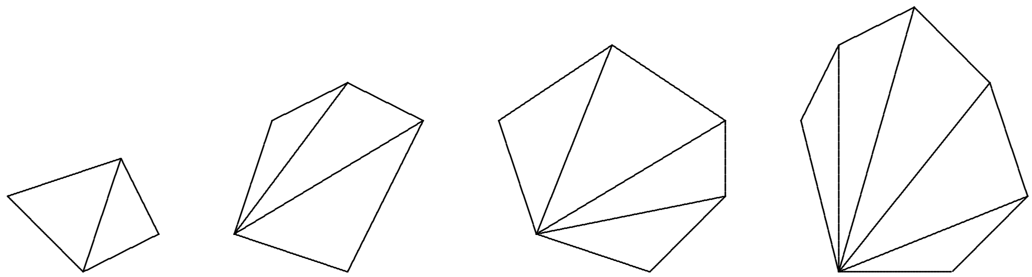
Aufgrund der Zerlegung in Dreiecke ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\text{Trapez}} &= \tfrac{1}{2}\cdot a_1\cdot h + c\cdot h + \tfrac{1}{2}\cdot a_2\cdot h \;=\; \tfrac{1}{2}\cdot(a+c)\cdot h \;=\; m\cdot h \qquad \text{bzw.}\\ \mathcal{A}_{\text{Trapez}} &= \tfrac{1}{2}\cdot a\cdot h + \tfrac{1}{2}\cdot c\cdot h \;=\; \tfrac{1}{2}\cdot(a+c)\cdot h \;=\; m\cdot h.\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkt der Längen von Mittenlinie und Höhe.

11.8.4 Dreieck → Vieleck

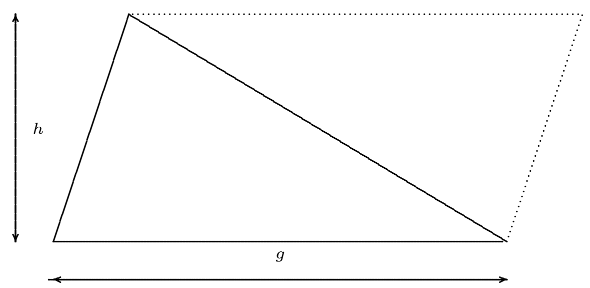
Ein n-Eck kann in $n-2$ Dreiecke zerlegt werden. Sind von geeigneten Grundlinien und Höhen der Dreiecke die Längen bekannt, so kann der Flächeninhalt des n-Ecks berechnet werden.



Viereck: 2 Dreiecke — Fünfeck: 3 Dreiecke — Sechseck: 4 Dreiecke — Siebeneck: 5 Dreiecke

11.9 Bestimmung von Flächeninhalten — vom Parallelogramm ausgehend

11.9.1 Parallelogramm → Dreieck

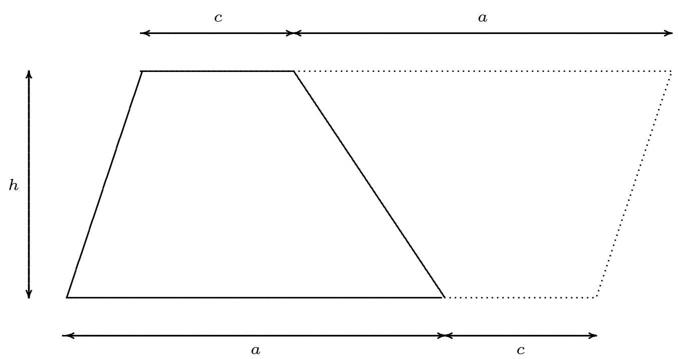


Aufgrund der Verdoppelung zum Parallelogramm ergibt sich

$$\mathcal{A}_{\text{Dreieck}} \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot \mathcal{A}_{\text{Pllgr}} \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot g \cdot h.$$

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt der Längen von Grundlinie und Höhe.

11.9.2 Parallelogramm → Trapez



Aufgrund der Verdoppelung zum Parallelogramm ergibt sich

$$\mathcal{A}_{\text{Trapez}} \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot \mathcal{A}_{\text{Pllgr}} \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h.$$

Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkt der Längen von Mittenlinie und Höhe.

11.10 Besonderheit bei Parallelogrammen und Dreiecken

Bei der Bestimmung von Flächeninhalten von Parallelogrammen und Dreiecken tritt eine Besonderheit in Erscheinung. Die Anwendung der Flächeninhaltsformeln von verschiedenen Seiten-Höhen-Paaren aus führt zu verschiedenen, aber gleich-strukturierten, jeweils richtigen Formeln.

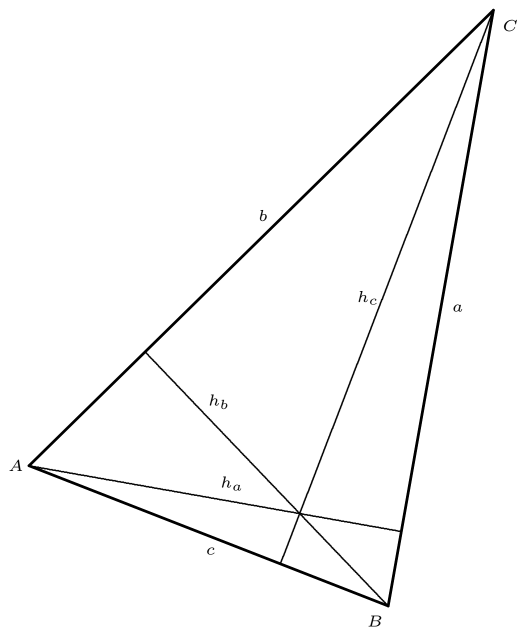
11.10.1 Besonderheit bei Dreiecken

Es ergeben sich, je nachdem welche der Seiten als Grundseite gewählt wird, aus der allgemeinen Formel für den Flächeninhalt

$$\mathcal{A}_{\text{Dreieck}} = \tfrac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

drei verschiedene konkrete Formeln

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{Dreieck}} &= \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot h_a \\ \mathcal{A}_{\text{Dreieck}} &= \tfrac{1}{2} \cdot b \cdot h_b \\ \mathcal{A}_{\text{Dreieck}} &= \tfrac{1}{2} \cdot c \cdot h_c. \end{aligned}$$



Wenn die konkrete Bedeutung und Umsetzung der allgemeinen Formel verstanden ist, erscheint die Darstellung der drei konkreten Formeln fast überflüssig. Sollte diese Einsicht „allgemein → konkret" aber nicht verstanden sein, empfiehlt sich die Dreier-Auflistung.

Vergleiche das Arbeitsblatt.

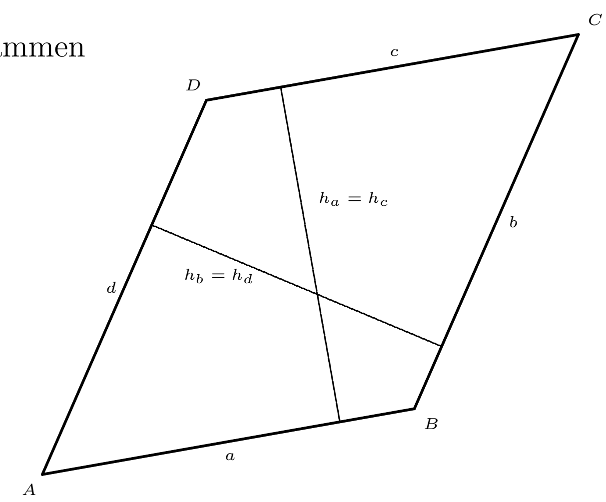
11.10.2 Besonderheit bei Parallelogrammen

Eine ähnliche Situation liegt bei Parallelogrammen vor. Es ergeben sich vier konkrete Formeln

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{Pllgr}} &= a \cdot h_a \\ \mathcal{A}_{\text{Pllgr}} &= b \cdot h_b \\ \mathcal{A}_{\text{Pllgr}} &= c \cdot h_c \\ \mathcal{A}_{\text{Pllgr}} &= d \cdot h_d \end{aligned}$$

anstelle der einen allgemeinen Formel

$$\mathcal{A}_{\text{Pllgr}} = g \cdot h.$$



11.11 Flächeninhalt bei Ähnlichkeitsabbildungen

11.11.1 Einstieg

GY H19 T2 A3

Es sei eine Ähnlichkeitsabbildung der Zeichenebene mit Ähnlichkeitsverhältnis $k > 0$ vorgegeben.

Wir wollen überlegen, wie der Flächeninhalt $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ einer ebenen Figur mit dem Flächeninhalt $\mathcal{A}(\widetilde{\mathcal{F}})$ der Bildfigur zusammenhängt.

11.11.2 Begründung anhand der Grundstruktur der Flächeninhaltsformeln

Es werden zunächst Formeln für den Flächeninhalt vieler typischer ebener Figuren zusammengestellt, ohne dass wir die angegebenen Längen genauer spezifizieren.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\text{Quadrat}} &= a^2 \\
\mathcal{A}_{\text{Rechteck}} &= a \cdot b \\
\mathcal{A}_{\text{Dreieck}} &= \tfrac{1}{2} \cdot g \cdot h \\
\mathcal{A}_{\text{Parallelogramm}} &= g \cdot h \\
\mathcal{A}_{\text{Drachenviereck}} &= \tfrac{1}{2} \cdot e \cdot f \\
\mathcal{A}_{\text{Trapez}} &= m \cdot h \\
\mathcal{A}_{\text{Kreis}} &= \pi \cdot r \cdot r \\
\mathcal{A}_{\text{Ellipse}} &= \pi \cdot r \cdot \widetilde{r}.
\end{aligned}$$

Viele dieser Formeln sind bereits erarbeitet, es wurden einige weitere hinzugefügt.

Jede dieser Formeln hat die Grundstruktur

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) \;=\; p \cdot \ell_1 \cdot \ell_2,$$

wobei p ein positiver Faktor und ℓ_1, ℓ_2 zwei charakteristische Längen sind.

Wird nun die gegebene Ähnlichkeitsabbildung mit Ähnlichkeitsverhältnis $k > 0$ auf diese Figur $\mathcal{F}$ angewandt, so werden die beiden Längen ver-k-facht. Der Flächeninhalt $\widetilde{\mathcal{F}}$ der Bildfigur ist also

$$\mathcal{A}(\widetilde{\mathcal{F}}) \;=\; p \cdot \widetilde{\ell_1} \cdot \widetilde{\ell_2} \;=\; p \cdot (k \cdot \ell_1) \cdot (k \cdot \ell_2) \;\stackrel{\text{AG,KG}}{=}\; k^2 \cdot (p \cdot \ell_1 \cdot \ell_2) \;=\; k^2 \cdot \mathcal{A}(\mathcal{F}).$$

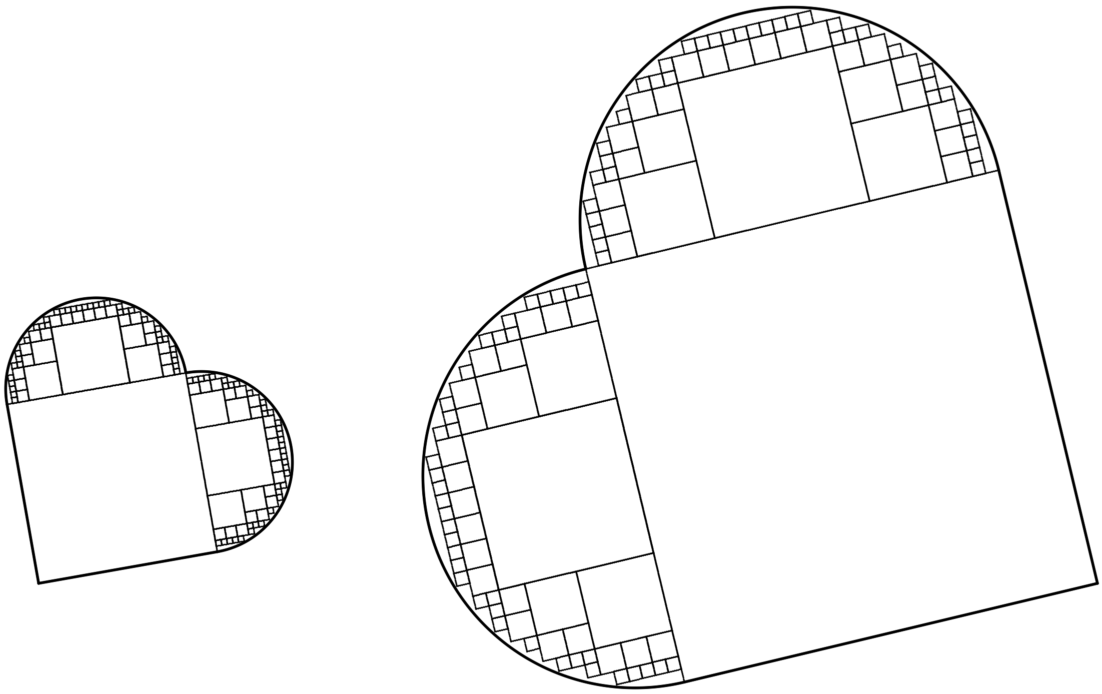
Von diesen Beispielen schließt man induktiv auf den allgemeinen Fall und erhält den folgenden Satz.

11.11.3 Satz: Flächeninhalt bei Ähnlichkeitsabbildungen

Wird eine ebene Frigur $\mathcal{F}$ unter einer Ähnlichkeitsabbildung mit Ähnlichkeitsverhältnis $k > 0$ auf die Bildfigut $\widetilde{\mathcal{F}}$ abgebildet, so ver-k^2-facht sich der Flächeninhalt:

$$\mathcal{A}(\widetilde{\mathcal{F}}) \;=\; k^2 \cdot \mathcal{A}(\mathcal{F}).$$

11.11.4 Begründung mittels Approximation durch Quadrate



Ist eine beliebige ebene Figur $\mathcal{F}$ vorgegeben, so wird sie in endlich (oder unendlich) viele Quadrate zerlegt.

Da der Flächeninhalt jedes einzelnen Quadrats unter der Ähnlichkeitsabbildung ver-k^2-facht wird, gilt dies auch für die gesamte Figur.

Die Aussage aus Satz 11.11.3 ist also bewiesen — wenn man davon absieht, dass das ,,Approximieren mittels Quadraten" nur anschaulich und informell definiert wurde.

11.11.5 Beispiel: Vergrößern mit dem Kopierer

Stellt man bei einem Kopierer als Vergrößerungsfaktor (= Ähnlichkeitsverhältnis) $k = \sqrt{2} \approx 141\%$ ein, so werden die Flächeninhalte ver-k^2-facht, also verdoppelt.

11.12 Empirisch-Experimentelle Methoden zur Bestimmung von Flächeninhalten

11.12.1 Methode 1: Ausschneiden und Wägen

Es werden das Einheitsquadrat EQ und die ebene Figur F, deren Flächeninhalt bestimmt werden soll, in der Realität ,,hergestellt".

Die beiden Figuren werden dann gewogen, d.h. die Gewichte G_{F} und G_{EQ} bestimmt.

Unter der Annahme einer homogenen Flächendichte gilt dann

$$\frac{\mathcal{A}_{\mathrm{F}}}{\mathcal{A}_{\mathrm{EQ}}} = \frac{G_{\mathrm{F}}}{G_{\mathrm{EQ}}} \qquad \text{oder nach Umstellung} \qquad \mathcal{A}_{\mathrm{F}} = \frac{G_{\mathrm{F}}}{G_{\mathrm{EQ}}} \cdot \mathcal{A}_{\mathrm{EQ}}.$$

Konkreter:

- Ausschneiden aus Papier ($80\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^2}$), Papierkarton ($160\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^2}$) oder Pappe, Moosgummi, Filz.
- Aussägen aus Holzplatten,
- Elektro-Sägen aus Styropor (ungenau, da Styropor eine geringe Dichte hat).

11.12.2 Methode 2: Ausgießen und Wägen

Die ebene Figur F, deren Flächeninhalt bestimmt werden soll, liegt als Grundfläche eines zylindrischen oder prismenförmigen Gefäßes vor.

Wir wird mit Wasser oder feinem Sand gleichmäßig in einer bestimmten Höhe h bedeckt.

Dann wird das Wasser oder der Sand in einen Messbecher umgeschüttet, daran das Volumen V abgelesen.

Der Flächeninhalt ergibt sich dann zu

$$\mathcal{A}_{\mathrm{F}} = \frac{V}{h}.$$

11.12.3 Methode 3: Zeichnen und Auszählen

Die Kontur einer ebenen Figur F, deren Flächeninhalt bestimmt werden soll, wird auf Kästchen- oder Millimeter-Papier aufgezeichnet.

Es werden dann die von der Figur eingeschlossenen Quadrate gezählt. Man versuche dabei, die von der Kontur durchschnittenen Quadrate je nach Größe, so mitzuzählen bzw. wegzulassen, dass sich außen- und innenliegende Teile gerade kompensieren.

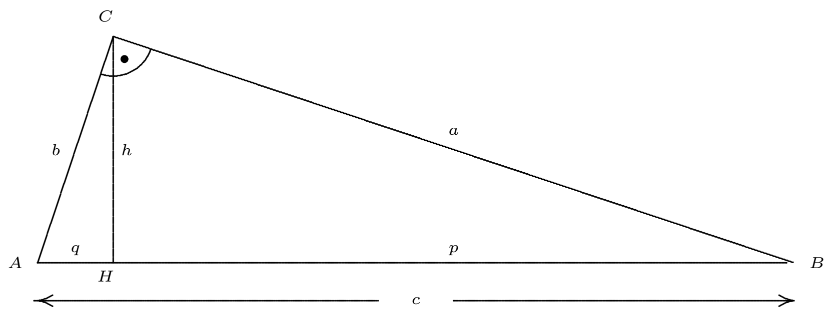
Der Flächeninhalt der Figur ergibt sich dann zu

$$\mathcal{A}_{\mathrm{F}} = \#_{\text{Quadrate}} \cdot \mathcal{A}_{\text{Quadrat}}.$$

12 Die Satzgruppe des Pythagoras

12.1 Überblick über die Satzgruppe

12.1.1 Zeichnung



12.1.2 Definitionen

Ist einer der Innenwinkel eines Dreiecks ein rechter Winkel, so heißt das Dreieck *rechtwinklig.*

Es folgt mit IWS, dass nur ein Winkel eines Dreiecks ein rechter Winkel sein kann.

Die beiden dem rechten Winkel anliegenden Seiten heißen *Katheten*, die ihm gegenüberliegende Seite heißt *Hypotenuse.*

Da die zwei Katheten zugleich Höhen sind, nennt man die dritte Höhe auf die Hypotenuse **die** Höhe im rechtwinkligen Dreieck.

Die Hypotenuse wird durch den Höhenfußpunkt H in zwei Abschnitte der Längen q und p geteilt. Diese Strecken heißen *Hypotenusenabschnitte.*

Meist werden die Eckpunkte A, B, C so gewählt, dass der rechte Winkel bei C ist.

12.1.3 Hypotenusensatz = klassischer Satz des Pythagoras

WENN in einem Dreieck ABC bei C ein rechter Winkel ist,
DANN gilt die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2.$

Längen-Formulierung:
Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, so ist die Summe der Quadrate der Kathetenlängen gleich dem Quadrat der Länge der Hypotenuse.

Flächen-Formulierung:
Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, so ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse.

Bemerke, dass der Begriff ,,Quadrat" in zwei verschiedenen Bedeutungen auftritt.

12.1.4 Kehrsatz zum Hypotenusensatz

WENN in einem Dreieck ABC die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt,
DANN ist der Winkel bei C ein rechter Winkel.

Längen-Formulierung
Wenn die Summe der Quadrate der Längen zweier Seiten gleich dem Quadrat der Länge der dritten Seite ist, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

Beachte, dass die Begriffe ,,Kathete" und ,,Hypotenuse" nicht im Wenn-Teil verwendet werden kann, da die Rechtwinkligkeit nicht vorneweg (= a priori) gegeben ist.

12.1.5 Höhensatz (des Euklid)

WENN in einem Dreieck ABC bei C ein rechter Winkel ist,
DANN gilt die Beziehung $p \cdot q = h^2$.

Längen-Formulierung:
Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, so ist das Produkt der Längen der Hypotenusenabschnitte gleich dem Quadrat der Länge der Höhe.

Flächen-Formulierung:
Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, so ist der Flächeninhalt des Rechtecks mit den Hypotenusenabschnitten als Seiten gleich dem Flächeninhalt des Quadrats über der Höhe.

12.1.6 Kehrsatz zum Höhensatz

WENN in einem Dreieck ABC die Beziehung $p \cdot q = h^2$ gilt,
DANN ist der Winkel bei C ein rechter Winkel.

Längen-Formulierung:
Wenn in einem Dreieck das Quadrat der Länge einer Höhe gleich dem Produkt der Längen der durch sie abgetrennten Seitenabschnitte ist, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

12.1.7 Kathetensatz (des Euklid)

WENN in einem Dreieck ABC bei C ein rechter Winkel ist,
DANN gelten die beiden Beziehungen $p \cdot c = a^2$ und $q \cdot c = b^2$.

Längen-Formulierung:
Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, so ist das Produkt der Länge eines Hypotenusenabschnitts und der der Hypotenuse gleich dem Quadrat der Länge der zugehörigen Kathete.

Flächen-Formulierung:
Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, so ist der Flächeninhalt des Rechtecks mit einem Hypotenusenabschnitt und der Hypotenuse als Seiten gleich dem Flächeninhalt des Quadrats über der zugehörigen Kathete.

12.1.8 Kehrsatz zum Kathetensatz

WENN in einem Dreieck ABC eine der Beziehungen $p \cdot c = a^2$ oder $q \cdot c = b^2$ gilt,
DANN ist der Winkel bei C ein rechter Winkel.

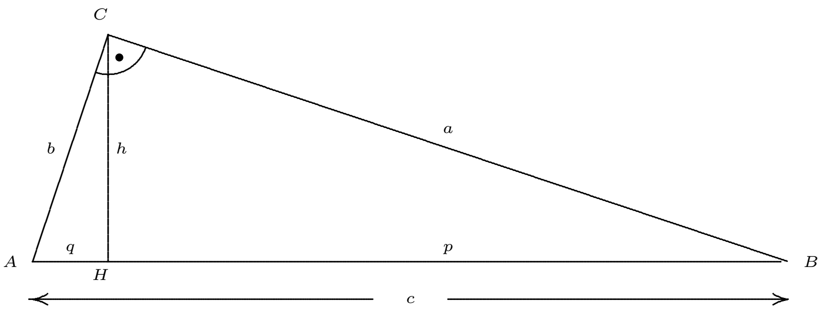
Längen-Formulierung:
Eine reine Text-Formulierung der Umkehrung eine Kathetensatzes ist prinzipiell möglich, gerät aber so komplex-umständlich, dass sie kaum ,,lern-zugänglich" ist.

12.2 Arithmetische Beweise / mittels Ähnlichkeit

Mit Hilfe der Ähnlichkeit können alle drei Sätze elegant — in einem ,,Aufwasch" — bewiesen werden.

12.2.1 Beweis mittels Ähnlichkeit

Es sei ein rechtwinkliges Dreieck gegeben.



Die drei Dreiecke (gesamt — links — rechts)

$$\Delta_g = \Delta ABC \qquad \Delta_\ell = \Delta ACH \qquad \Delta_r = \Delta CBH$$

sind gemäß dem www-Ähnlichkeitssatz paarweise ähnlich zueinander, da in jedem Dreieck ein Winkel mit Maß α, ein Winkel mit Maß β und ein rechter Winkel vorliegen.

Aufgrund der Ähnlichkeit stimmen auch entsprechende Seitenverhältnisse überein, dann

$$\Delta_\ell \sim \Delta_r \implies \frac{h}{q} = \frac{p}{h} \implies h^2 = p \cdot q \qquad \text{(Höhensatz)}$$

$$\Delta_r \sim \Delta_g \implies \frac{p}{a} = \frac{a}{c} \implies a^2 = c \cdot p \qquad \text{(Kathetensatz I)}$$

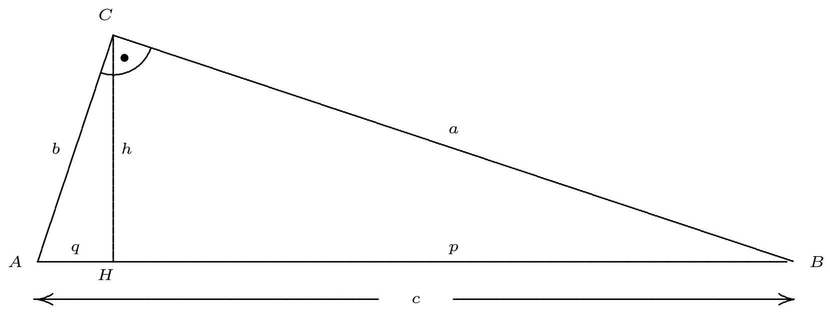
$$\Delta_g \sim \Delta_\ell \implies \frac{b}{c} = \frac{q}{b} \implies b^2 = c \cdot q \qquad \text{(Kathetensatz II)}$$

Addition der beiden Gleichungen des Kathetensatzes liefert den Hypotenusensatz

$$a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q = c \cdot (p + q) = c^2.$$

12.2.2 Hypotenusensatz ⇒ Satzgruppe

Nimmt man an, dass der Hypotenusensatz bewiesen ist, so lassen sich die anderen Sätze daraus herleiten.



Wir schreiben den Hypotenusensatz für jedes der drei Dreiecke (gesamt — links — rechts) auf

$$\Delta_g = \Delta ABC \qquad \Delta_\ell = \Delta ACH \qquad \Delta_r = \Delta CBH.$$

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & \Delta_g & a^2+b^2 = (p+q)^2 \\ \text{(II)} & \Delta_\ell & b^2 = h^2+q^2 \\ \text{(III)} & \Delta_r & a^2 = h^2+p^2 \end{array}$$

Verschiedene Linearkombinationen dieser Gleichungen liefern dann die anderen Sätze.

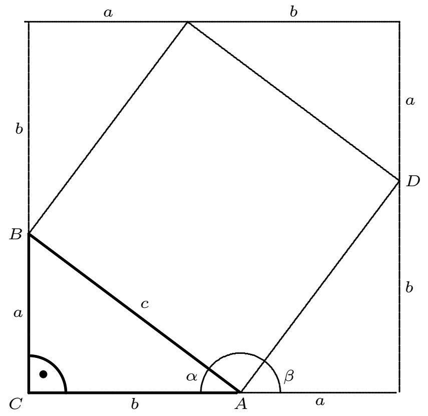
$$\begin{aligned} &\text{(I)} + \text{(II)} - \text{(III)} \\ (a^2+b^2)+b^2-a^2 &= (p+q)^2+h^2+q^2-(h^2+p^2) \\ 2b^2 &= 2q(p+q) \\ b^2 &= qc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{(I)} + \text{(III)} - \text{(II)} \\ (a^2+b^2)+a^2-b^2 &= (p+q)^2+h^2+p^2-(h^2+q^2) \\ 2a^2 &= 2p(p+q) \\ a^2 &= pc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{(I)} - \text{(II)} - \text{(III)} \\ (a^2+b^2)-a^2-b^2 &= (p+q)^2-(h^2+q^2)-(h^2+p^2) \\ 0 &= 2pq-2h^2 \\ h^2 &= pq \end{aligned}$$

12.3 Beweise des Hypotenusensatzes

12.3.1 Beweis mittels innerem Hypotenusenquadrat



(1) Ergänze das gegebene rechtwinklige Dreieck ΔABC mit den Katheten a und b gemäß obiger Figur zu einem Quadrat mit Seitenlänge $a + b$.

Innen entsteht eine Raute mit Seitenlänge c.

(2) Für den Winkel $\sphericalangle DAB$ gilt:

$$|\sphericalangle DAB| \;=\; 180^\circ - (\alpha + \beta) \;\stackrel{\text{IWS}}{=}\; 180^\circ - 90^\circ \;=\; 90^\circ.$$

Dies zeigt, dass die Raute ein Quadrat ist.

(3) Wir stellen eine Flächenbilanz auf:

$$\underbrace{(a+b)^2}_{\text{Äußeres Quadrat}} - 4 \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2} \cdot ab}_{\text{Dreieck}} = \underbrace{c^2}_{\text{Inneres Quadrat}}$$

(4) Ausmultiplizieren mit der ersten binomischen Formel zeigt:

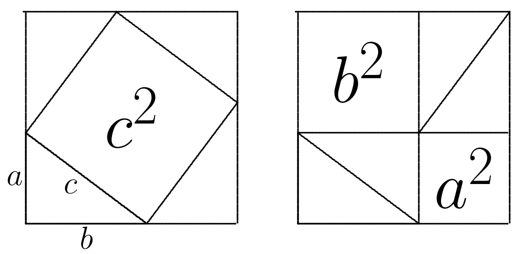
$$a^2 + 2ab + b^2 - 2ab \;=\; c^2,$$

also den Satz von Pythagoras für das rechtwinklige Dreieck ΔABC

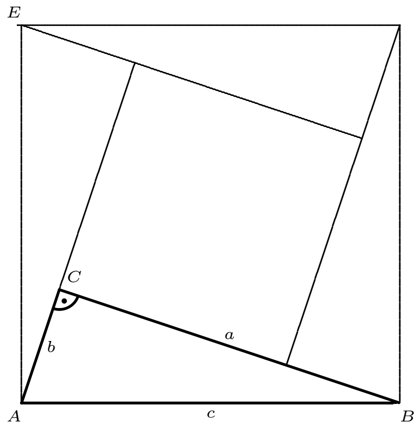
$$a^2 + b^2 \;=\; c^2.$$

12.3.2 Anschauliche Flächenbilanz („Pythagoras-Puzzle")

Anschaulich und verkürzt-unvollständig kann der obige Beweis so dargestellt werden:



12.3.3 Beweis mittels äußerem Hypotenusenquadrat



(1) Ergänze das gegebene rechtwinklige Dreieck ΔABC mit den Katheten a und b gemäß obiger Figur zu einer Raute mit Seitenlänge c.

(2) Für den Winkel $\sphericalangle EAB$ gilt:

$$|\sphericalangle EAB| \; = \; \alpha + \beta \; \stackrel{\text{IWS}}{=} \; 90^\circ.$$

Dies zeigt, dass die Raute ein Quadrat ist.

(3) Wir stellen eine Flächenbilanz auf:

$$\underbrace{(a-b)^2}_{\text{Inneres Quadrat}} + 4 \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2} \cdot ab}_{\text{Dreieck}} = \underbrace{c^2}_{\text{Äußeres Quadrat}}$$

(4) Ausmultiplizieren mit der zweiten binomischen Formel zeigt:

$$a^2 - 2ab + b^2 + 2ab \; = \; c^2,$$

also den Satz von Pythagoras für das rechtwinklige Dreieck ΔABC

$$a^2 + b^2 \; = \; c^2.$$

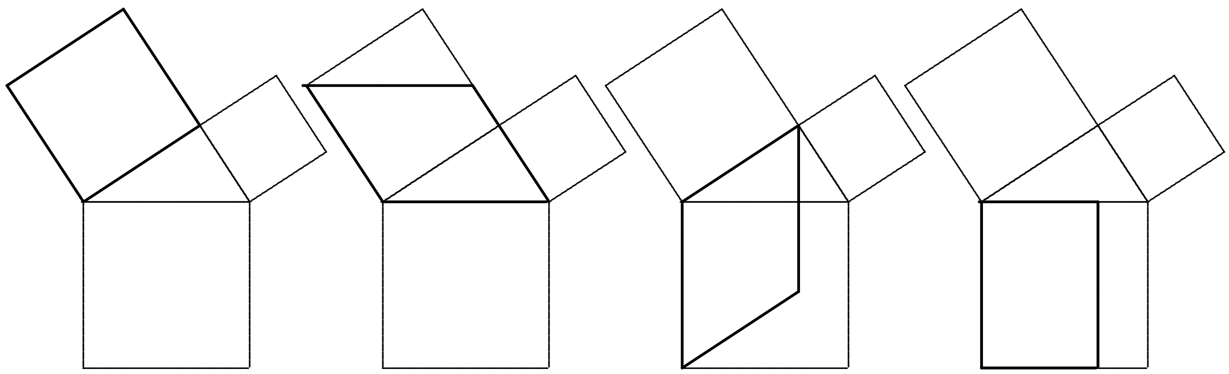
12.4 Beweis des Kathetensatzes

12.4.1 Beweis mittels Scherung

Das folgende Diagramm zeigt die Abfolge der flächenerhaltenden Abbildungen

Scherung — Drehung — Scherung,

die das eine Katheten-Quadrat in das flächengleiche Hypotenusen-Abschnitts-Rechteck überführt.



In Formeldarstellung lautet der so bewiesene Kathetensatz

$$a^2 = p \cdot c$$

Dual dazu zeigt man den anderen Kathetensatz

$$b^2 = q \cdot c.$$

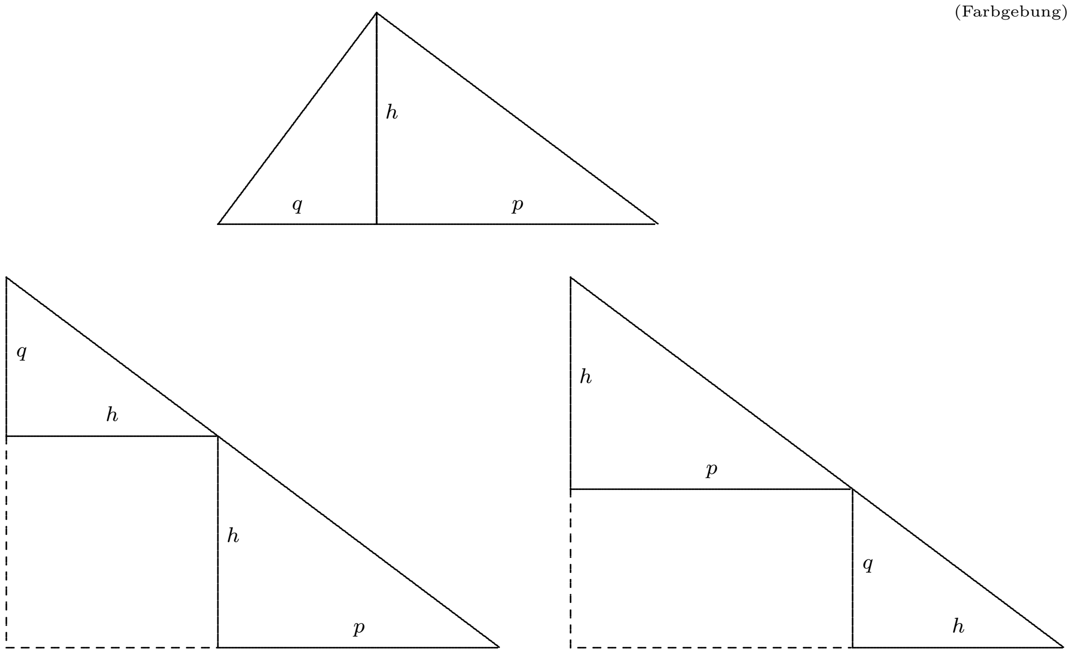
Die Addition der beiden Gleichungen bringt den Hypotenusensatz hervor

$$a^2 + b^2 = p \cdot c + q \cdot c = (p+q) \cdot c = c^2.$$

12.5 Beweise des Höhensatzes

12.5.1 Beweis mittels Ergänzungsgleichheit

(Farbgebung)



(1) Das linke Teildreieck des gegebenen rechtwinkligen Dreiecks wird um 90° im Uhrzeigersinn gedreht und dann „stufig" am rechten Teildreieck angelegt — einmal oberhalb, einmal unterhalb.

(2) Da das ursprüngliche Dreieck rechtwinklig war, entsteht zwischen den Stufen jeweils ein rechter Winkel.

(3) Durch Ergänzung mit Rechtecken entstehen zwei neue rechtwinklige Dreiecke mit übereinstimmenden Kathetenlängen $p + h$ und $q + h$.

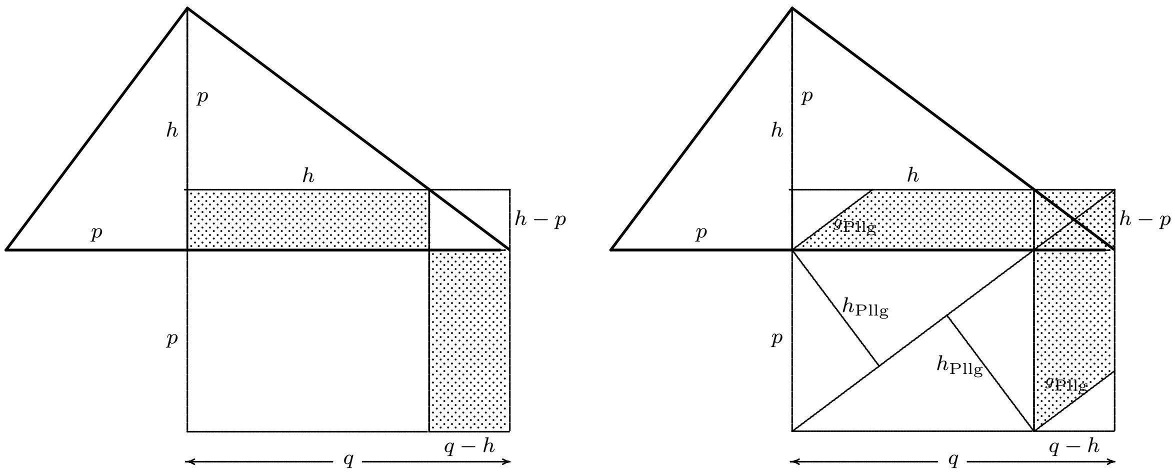
(4) Die beiden Dreiecke sind aufgrund des SWS-Kongruenzsatzes 6.11.6 kongruent und somit flächengleich.

(5) In den beiden Dreiecken sind die Teildreiecke flächengleich, also müssen gemäß dem Prinzip der Ergänzungsgleichheit 11.2.4 auch die ergänzten Rechtecke flächengleich sein.

(6) Die Seiten dieser Rechtecke sind aber h und h bzw. p und q. Es folgt:

$$h^2 = p \cdot q.$$

12.5.2 Beweis mittels Scherung [1]



(1) Ergänze das gegebene rechtwinklige Dreieck mit Höhe h und Hypotenusenabschnitten $p < q$ durch die Rechtecke wie in der Zeichnung links.

(2) Man überzeuge sich (auch mit Hilfe von SWS), dass alle eingetragenen Streckenlängen stimmen.

(3) Die beiden schraffierten Rechtecke links werden durch Scherung in die beiden stoßenden Parallelogramme rechts überführt. Die Flächen bleiben dabei erhalten.

(4) Die beiden Parallelogramme rechts haben wegen übereinstimmender Grundlinien g_{Pllg} und Höhen h_{Pllg} gleichen Flächeninhalt.

(5) Demzufolge haben auch die beiden Rechtecke in der linken Figur gleichen Flächeninhalt. Es folgt

$$(h-p)\cdot h \;=\; (q-h)\cdot p \qquad \Longrightarrow \qquad h^2 \;=\; q\cdot p.$$

[1] Vorschlag von Herrn Dr. Hans Fischer

12.6 Beweis der Kehrsätze

12.6.1 Vorbemerkung

Die Kehrsätze werden alle mit Hilfe der Schattenmethode aus Abschnitt 8.6.6 bewiesen.

Ausgangspunkt ist ein Dreieck ABC, das eine der pythagoräischen Beziehungen erfüllt.

(1) Es wird ein rechtwinkliges Vergleichs-Dreieck konstruiert, bei dem zwei der Seitenlängen jeweils mit denen des gegebenen Dreiecks übereinstimmen.

(2) Das neue Dreieck erfüllt die gleiche pythagoräische Beziehung wie das gegebene Dreieck.

(3) Da in der pythagoräischen Beziehung zwei Längen übereinstimmen, muss auch die dritte Länge übereinstimmen.

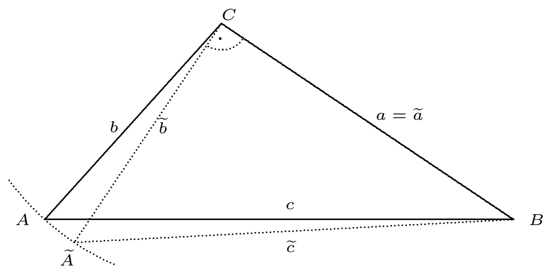
(4) Daraus folgert man, das das gegebene und das vermeintlich neue Dreieck übereinstimmen.

(5) Also muss das gegebene Dreieck auch rechtwinklig sein.

12.6.2 Beweis des Kehrsatzes des Hypotenusensatzes

Es sei ein Dreieck ABC gegeben, für das die pythagoräische Beziehung erfüllt ist:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



(1) Es wird ein Schatten-Dreieck $\widetilde{A}BC$ konstruiert, das einen rechten Winkel bei C hat und die gleichen Seitenlängen $\widetilde{a} = a$, $\widetilde{b} = b$ hat.

(2) Aufgrund des Hypotenusensatzes gilt im Dreieck $\widetilde{A}BC$ die Beziehung

$$\widetilde{a}^2 + \widetilde{b}^2 = \widetilde{c}^2.$$

(3) Deshalb ist auch $\widetilde{c} = c$.

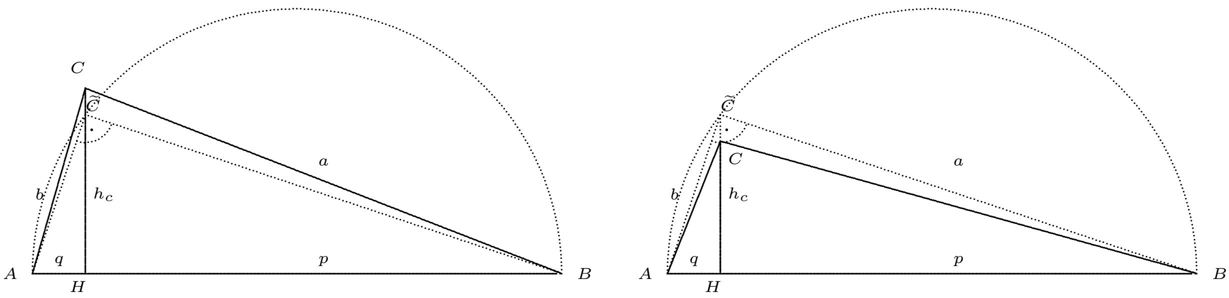
(4) Aufgrund des SSS-Satzes 6.11.5 sind beide Dreiecke kongruent.

(5) Also muss $\gamma = \widetilde{\gamma} = 90^\circ$ sein.

12.6.3 Beweis des Kehrsatzes des Höhensatzes

Es sei ein Dreieck ABC gegeben, für das die Höhensatz-Beziehung erfüllt ist:

$$p \cdot q \quad = \quad h^2.$$



(1) Es wird ein Schatten-Dreieck $AB\widetilde{C}$ konstruiert, das einen rechten Winkel bei C hat und die gleichen Hypotenusenabschnitte $\widetilde{p} = p$, $\widetilde{q} = q$ hat. (Hilfsmittel ist der Thaleskreis).

(2) Aufgrund des Höhensatzes gilt im Dreieck $AB\widetilde{C}$ die Beziehung

$$\widetilde{h}_c^2 \quad = \quad \widetilde{p} \cdot \widetilde{q}.$$

(3) Deshalb ist auch $\widetilde{h}_c = h_c$.

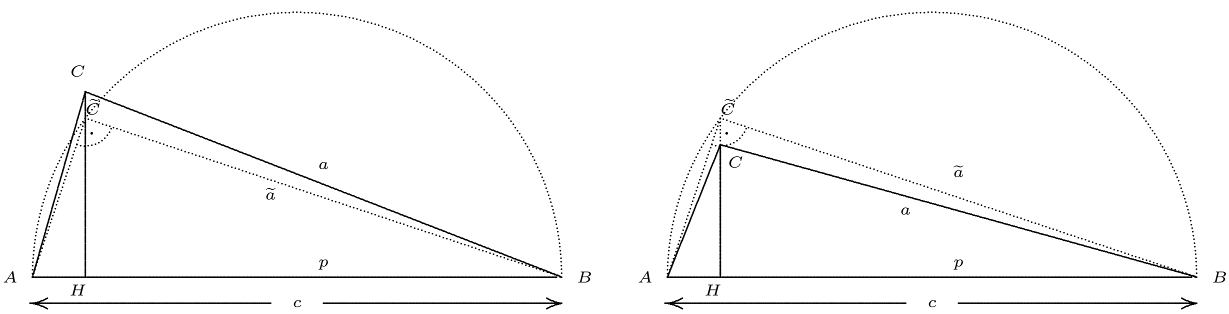
(4) Deshalb ist auch $\widetilde{C} = C$.

(5) Also muss $\gamma = \widetilde{\gamma} = 90^\circ$ sein.

12.6.4 Beweis des Kehrsatzes des Kathetensatzes

Es sei ein Dreieck ABC gegeben, für das die Kathetensatz-Beziehung erfüllt ist:

$$c \cdot p \quad = \quad a^2.$$



(1) Es wird ein Schatten-Dreieck $\widetilde{A}BC$ konstruiert, das einen rechten Winkel bei C hat und die gleichen Längen $\widetilde{p} = p$, $\widetilde{c} = c$ hat.

(2) Aufgrund des Kathetensatzes gilt im Dreieck $AB\widetilde{C}$ die Beziehung

$$c \cdot p \quad = \quad \widetilde{a}^2.$$

(3) Deshalb ist auch $\widetilde{a} = a$.

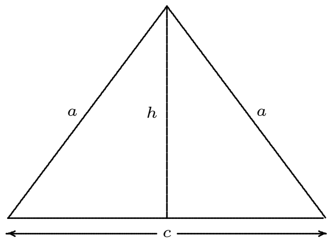
(4) Dann stimmen auch die Punkte C und $\widetilde{C}$ überein.

(5) Also muss $\gamma = \widetilde{\gamma} = 90^\circ$ sein.

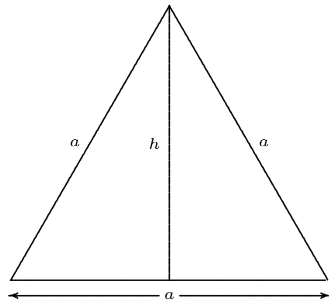
12.7 Kontextfelder zum Hypotenusensatz

12.7.1 Berechnungen an ebenen Figuren

- Höhen in (besonderen) Dreiecken



$h = \sqrt{a^2 - (\frac{c}{2})^2}$

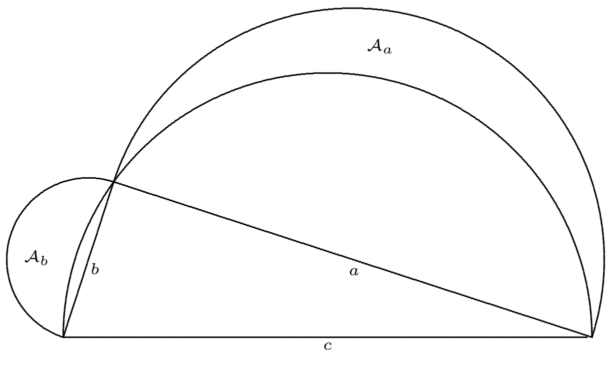


$h = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a$

- Diagonalen in (besonderen) Vierecken
- Begründe die Beziehung im rechtwinkligen Dreieck: $h = \frac{a \cdot b}{c}$.
- Berechnungen an regelmäßigen Vielecken
- Vorbereitung für die Approximation des Kreisumfangs durch einbeschriebene regelmäßige $2^k \cdot 6$ Ecke. Siehe Kapitel 14.1.
- Begründe: Die Diagonalen eines Vierecks $ABCD$ stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn

$$a^2 + c^2 \quad = \quad b^2 + d^2.$$

12.7.2 Die Möndchen des Hippokrates



Über die Katheten und die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks werden Halbkreise geschlagen.

Für die Gesamtfläche der ,,Möndchen" ergibt sich unter Benutzung des Satzes von Pythagoras:

$$\mathcal{A}_a + \mathcal{A}_b \quad = \quad a^2\,\frac{\pi}{8} + b^2\,\frac{\pi}{8} - c^2\,\frac{\pi}{8} + \frac{ab}{2} \quad = \quad \frac{ab}{2}.$$

Die beiden Möndchen haben den gleichen Flächeninhalt wie das Dreieck. Die ,,Quadratur" der Möndchen gelingt.

12.7.3 Sachsituation Leiter

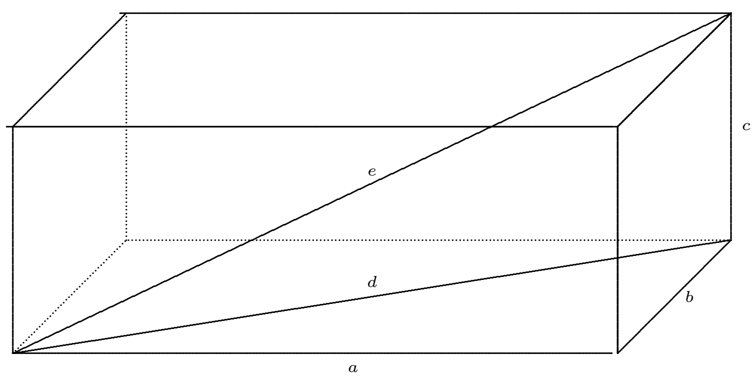
Lehnt eine Leiter an einer Wand, so entsteht die Situation eines rechtwinkligen Dreiecks.

Beispielaufgabe: Eine Leiter ist genau so lang, wie eine Mauer hoch ist. Lehnt man diese Leiter 30 cm unterhalb der Oberkante an, so steht sie am Boden $\frac{1}{,}3\,\mathrm{m}$ von der Wand entfernt. Wie lang ist die Leiter?

12.7.4 Berechnungen an Körpern

- Flächen- oder Raumdiagonalen
- Berechnungen an der quadratischen Pyramide (17.6.7) oder am Tetraeder (17.6.10).
- Mantellinien oder Höhen in geraden Pyramiden oder geraden Kegeln.
- Übung: Berechne die Höhe eines Tetraeders bei gegebener Kantenlänge.

12.7.5 Länge der Raumdiagonale in einem Quader



Für die Flächendiagonale im unten liegenden Rechteck ist zunächst

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

Die Raumdiagonale ist zugleich die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Seiten c, d, e. Also gilt

$$e^2 = d^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

so dass

$$e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

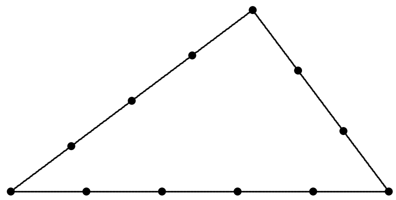
12.7.6 Kommentare zu 12.7.5

- Dies ist ein Beispiel dafür, dass sich die starke Fixierung der Symbole a, b und c im rechtwinkligen Dreieck ungünstig auswirken kann.
- Die Formel ist bezüglich der drei Kantenlängen a, b, c symmetrisch. Man könnte die obige Herleitung also auch mit einer anderen Diagonale eines Seitendreiecks beginnen.

- Es empfiehlt sich, die bei der Herleitung relevanten rechtwinkligen Dreiecke farbig zu kennzeichnen.
- Das Arbeiten mit Bezeichnungen für die Eckpunkte verstellt den Blick auf das wesentliche.

12.7.7 Anwendungen in der Praxis

- Mauerdreieck: Auf dem Bau kann ein rechter Winkel damit gezogen oder überprüft werden, dass man ein Schnurdreieck mit den Seitenlängen $3,00\,\mathrm{m}$, $4,00\,\mathrm{m}$ und $5,00\,\mathrm{m}$ geeignet anlegt.
- Das Zwölfknotenseil



In eine Seilschleife sind 12 Kugeln in gleichem Abstand eingeknüpft. Wird das Seil zu einem Dreieck mit 3, 4 und 5 Abschnitten gespannt, so ergibt sich ein rechter Winkel.

Der mathematische Grund ist der Kehrsatz des Satzes von Pythagoras.

12.7.8 Ausblick in die Zahlentheorie

Man nennt eine Zusammenstellung von drei natürlichen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{N}$ ein *pythagoräisches Tripel*, wenn die Beziehung

$$a^2 + b^2 = c^2$$

besteht. Beispiele sind:

$$(3,4,5) \qquad (6,8,10) \qquad (5,12,13) \qquad (12709, 13500, 18541).$$

Warum gibt es unendlich viele solche Tripel? Haben sie eine weitergehende mathematische Bedeutung?

12.7.9 Weiterführung in der Analysis

Bei Betrachtung des Einheitskreises:

Aus dem geometrischen Satz des Pythagoras ergibt sich der trigonometrische Satz des Pythagoras:

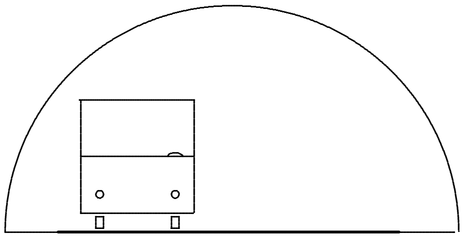
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

12.8 Kontextfelder zum Höhensatz

12.8.1 Sachaufgabe Tunnelhöhe

Die klassische Sachaufgabe ist die zur ,,Tunnel-Durchfahrtshöhe", im Beispiel etwa so: Delta9, S. 48

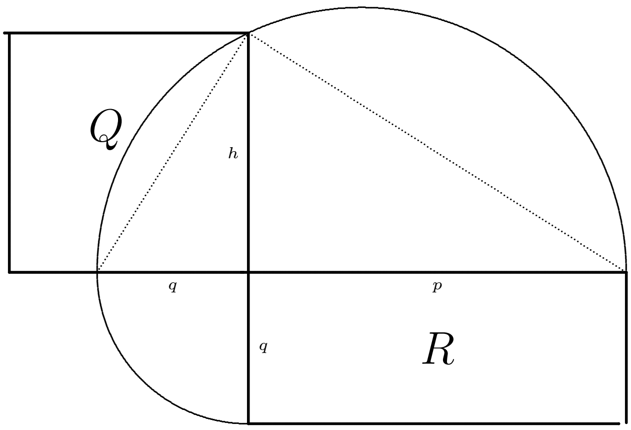
Ein Tunnel hat halbkreisförmigen Querschnitt, die Straße befindet sich auf Durchmesser-Niveau. Der gesamte Tunnel ist 12 m breit, auf beiden Seiten befindet sich ein Randstreifen von $1,4$ m. Wie hoch darf ein LKW höchstens sein, so dass er noch passieren kann? Er fährt ganz rechts, aber nicht auf dem Randstreifen.



12.8.2 Quadratur

Zu einem vorgegebenen Rechteck, Parallelogramm oder Drachenviereck soll ein flächeninhaltsgleiches Quadrat Q konstruiert werden.

Konstruiere, falls nötig, zunächst zu dem gegebenen Parallelogramm oder Drachenviereck ein flächeninhaltsgleiches Rechteck R mit den Seitenlängen p und q.



(1) Konstruiere (Viertelkreisbogen) die Strecke mit Länge $p + q$.

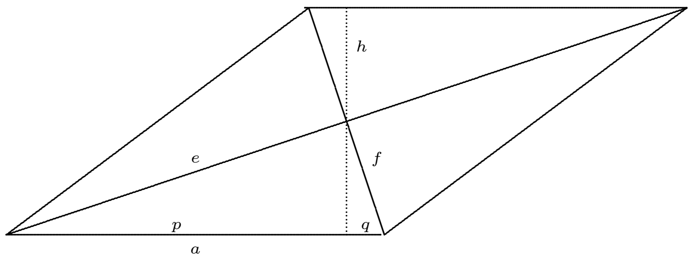
(2) Ermittle (Thaleskreis, Lot) das rechtwinklige Dreieck mit den Hypotenusenabschnitten p und q.

(3) Aufgrund des Höhensatzes ist die Höhe des Dreiecks die Seitenlänge des gesuchten Quadrats.

Diese Konstruktion spielt eine wesentliche Rolle in der ,,Theorie der Konstruierbarkeit", vgl. Satz 21.3.3.

12.8.3 Beispiel: Berechnung an der Raute

Die beiden Diagonalen einer Raute haben die Längen e und f. Berechne die Höhe h!



Mit dem Hypotenusensatz gilt zunächst, dass

$$a^2 = (\tfrac{e}{2})^2 + (\tfrac{f}{2})^2,$$

dann mit den Kathetensätzen

$$p = \frac{(\frac{e}{2})^2}{a} = \frac{\frac{e^2}{2}}{\sqrt{e^2+f^2}}, \qquad q = \frac{(\frac{f}{2})^2}{a} = \frac{\frac{f^2}{2}}{\sqrt{e^2+f^2}}$$

und schließlich mit dem Höhensatz

$$(\tfrac{h}{2})^2 = p \cdot q = \frac{\frac{e^2 f^2}{4}}{e^2+f^2}.$$

Insgesamt also

$$h = p \cdot q = \frac{ef}{\sqrt{e^2+f^2}}.$$

Das besondere an der Aufgabe ist, dass alle Sätze der Satzgruppe zum Einsatz kommen.

12.8.4 Vergleich von Mittelwerten

Beweise, dass das harmonische Mittel zweier Zahlen p und q kleiner-gleich dem arithmetischen Mittel ist!

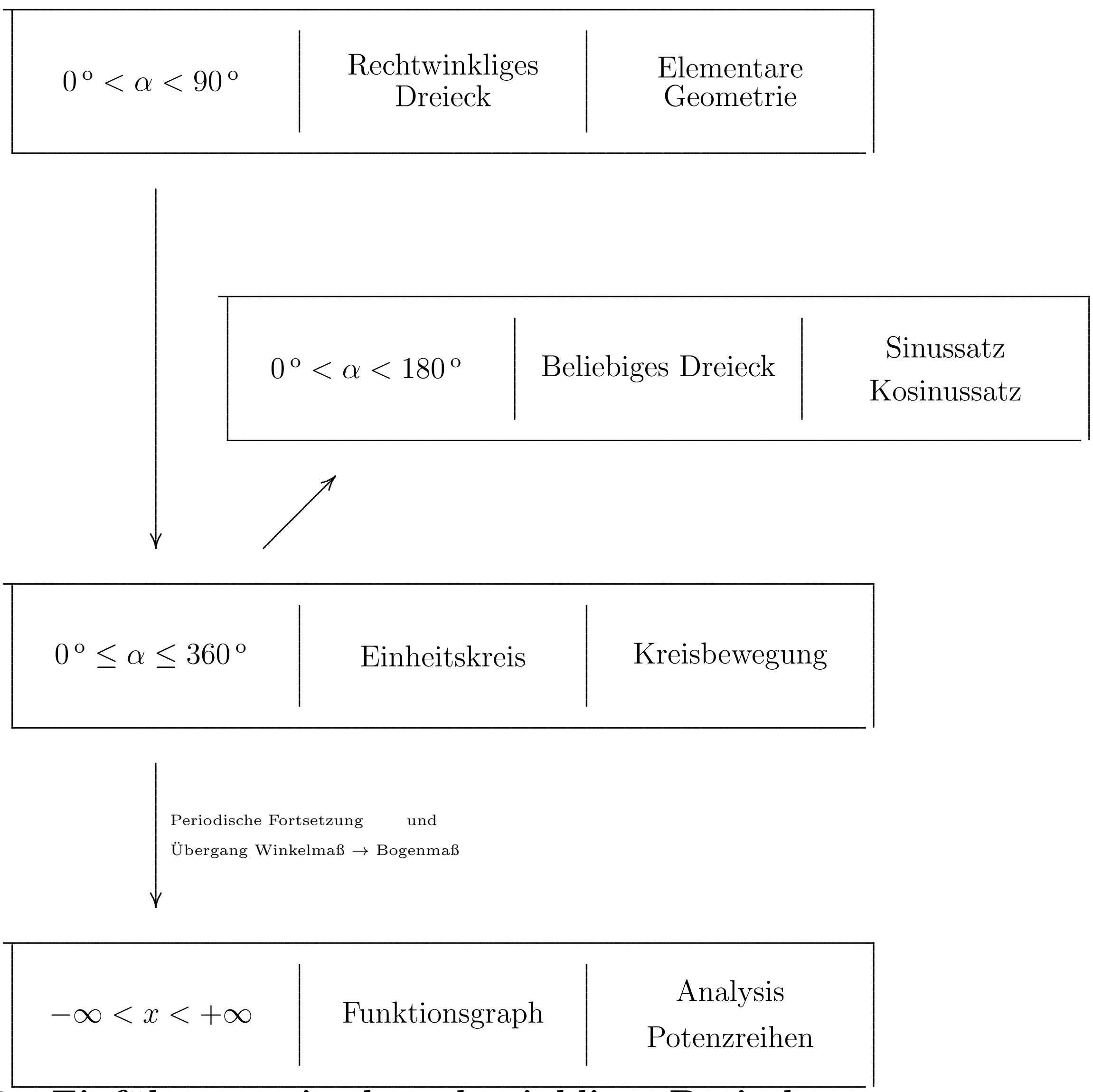
Aufgrund des Höhensatzes und des Satzes von Thales ist

$$\sqrt{p \cdot q} \overset{\mathrm{H}}{=} h \overset{\mathrm{T}}{\leq} \frac{p+q}{2}.$$

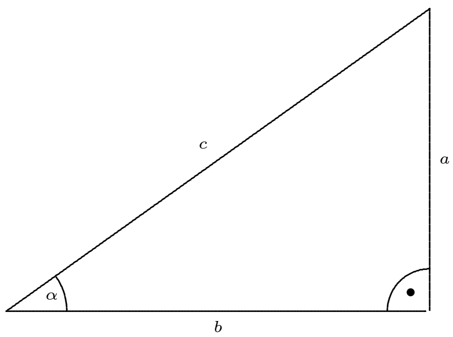
13 Trigonometrie

13.1 Überblick

Die Einführung der trigonometrischen Funktionen folgt in etwa den im Diagramm wiedergegebenen Strängen.



13.2 Einführung mittels rechtwinkliger Dreiecke



13.2.1 Definition

In einem rechtwinkligen Dreieck wird einer der beiden spitzen Winkel betrachtet, beispielsweise der Winkel α. Aus den drei Seitenlängen können insgesamt sechs verschiedene Seitenlängenverhältnisse gebildet werden. Diese erhalten in Abhängigkeit von diesem Winkel bestimmte Namen:

$$\begin{array}{llcccccc}
\text{Sinus} & \sin\alpha & := & \dfrac{a}{c} & = & \dfrac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Hypotenuse}} & = & \dfrac{\text{GK}}{\text{HY}} \\
\text{Kosinus} & \cos\alpha & := & \dfrac{b}{c} & = & \dfrac{\text{Länge der Ankathete}}{\text{Länge der Hypotenuse}} & = & \dfrac{\text{AK}}{\text{HY}} \\
\text{Tangens} & \tan\alpha & := & \dfrac{a}{b} & = & \dfrac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Ankathete}} & = & \dfrac{\text{GK}}{\text{AK}} \\
\text{Kotangens} & \cot\alpha & := & \dfrac{b}{a} & = & \dfrac{\text{Länge der Ankathete}}{\text{Länge der Gegenkathete}} & = & \dfrac{\text{AK}}{\text{GK}} \\
\text{Sekans} & \sec\alpha & := & \dfrac{c}{b} & = & \dfrac{\text{Länge der Hypotenuse}}{\text{Länge der Ankathete}} & = & \dfrac{\text{HY}}{\text{AK}} \\
\text{Kosekans} & \csc\alpha & := & \dfrac{c}{a} & = & \dfrac{\text{Länge der Hypotenuse}}{\text{Länge der Gegenkathete}} & = & \dfrac{\text{HY}}{\text{GK}}
\end{array}$$

13.2.2 Kommentare

- Entscheidend für diese Definition ist die Ähnlichkeit. Da alle Dreiecke mit gegebenen Winkeln α und 90° ähnlich zueinander sind, sind auch deren Seitenverhältnisse gleich.

- Die drei unteren Seitenverhältnisse sind nur Kehrwerte der drei oberen. Deshalb sind die unteren (in der Schule) weniger bekannt.

- Zur Einführung sind die Wortformeln eher geeignet. Bei der späteren Anwendung sollten die Symbolformeln als Merkhilfen benutzt werden.

- Sowohl innerhalb der Schulmathematik als auch im Alltag wird das Längenverhältnis $\frac{\text{GK}}{\text{AK}}$ als Maß für die Steigung einer Geraden (Straße o.ä.) herangezogen. Man könnte also sagen, dass der Tangens alltags- und anwendungsnäher ist.

- Deshalb wird in der Delta-Schulbuchreihe als Reihenfolge vorgeschlagen, den Tangens vor Sinus und Kosinus einzuführen. In fachlicher Hinsicht ist dies nicht angemessen.

- Ob das Winkelmaß α bei der Angabe von sin, cos oder tan in runde Klammern gesetzt werden soll, ist „didaktische Geschmacksache": Einerseits erhöhen die Klammern den Schreibaufwand, andererseits wird hier schon angedeutet, dass die trigonometrischen Beziehungen später zu trigonometrischen Funktionen werden — und da werden Argumente halt in Klammern gesetzt.

  In diesem Text werden Klammern vermieden.

13.2.3 Trig-Beziehungen 1

Ausgehend von der obigen geometrischen Definition können gleich einige elementare Beziehungen hergeleitet werden.

1. Eine elementare Bruchrechnung mit den Seitenverhältnissen zeigt beispielsweise, dass

$$\tan\alpha = \tfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tfrac{1}{\cot\alpha}.$$

2. Mit dem Satz des Pythagoras folgt

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{\text{GK}}{\text{HY}}\right)^2 + \left(\frac{\text{AK}}{\text{HY}}\right)^2 = \frac{\text{GK}^2+\text{AK}^2}{\text{HY}^2} = \frac{\text{HY}^2}{\text{HY}^2} = 1.$$

3. Betrachtet man anstelle des Winkels α den anderen spitzen Winkel β, so werden die Rollen von Gegenkathete und Ankathete vertauscht. Aufgrund der ,,Dreiecks-Innenwinkelsumme" ergibt sich

$$\sin\alpha = \frac{\text{GK}\alpha}{\text{HY}} = \frac{\text{AK}\beta}{\text{HY}} = \cos\beta = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{AK}\alpha}{\text{HY}} = \frac{\text{GK}\beta}{\text{HY}} = \sin\beta = \sin(90^\circ - \alpha).$$

Die beiden Beziehungen sind äquivalent, sie werden im aktuellen Lehrplan$^+$ getrennt aufgelistet.

13.2.4 Die Grenzfälle $\alpha = 0^\circ$ und $\alpha = 90^\circ$

Auch ohne Bezug auf den Einheitskreis könnte bereits im Rahmen des Dreiecks-Zugangs zur Trigonometrie propädeutisch der Grenzwertbegriff angedeutet werden.

Für $\alpha \to 0^\circ$ geht das Dreieck in eine (horizontale) Strecke über und deshalb

$$\text{GK} \to 0 \qquad \text{und} \qquad \text{AK} \to \text{HY} = \text{const} > 0.$$

Daraus folgen die Beziehungen

$$\sin 0^\circ = 0, \qquad \cos 0^\circ = 1, \qquad \tan 0^\circ = 0.$$

Für $\alpha \to 90^\circ$ geht das Dreieck in eine unendlich hohes nach oben offenes Rechteck über und deshalb

$$\text{GK} \to \text{HY} \to \infty \qquad \text{und} \qquad \text{AK} = \text{const} > 0.$$

Daraus folgen die Beziehungen

$$\sin 90^\circ = 1, \qquad \cos 90^\circ = 0, \qquad \tan 90^\circ = \infty.$$

13.2.5 Werte-Tabelle

Ob die folgende Werte-Tabelle als Merkhilfe geeignet ist, bleibt dem didaktischen Geschmack der Lehrkraft oder den individuellen Lerngewohnheiten der Schüler und Schülerinnen überlassen.

α	0°	30°	45°	60°	90°	
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\cos\beta$
	90°	60°	45°	30°	0°	β

13.3 Exkurs: Kartesisches Koordinatensystem

13.3.1 Definition: Koordinatensystem

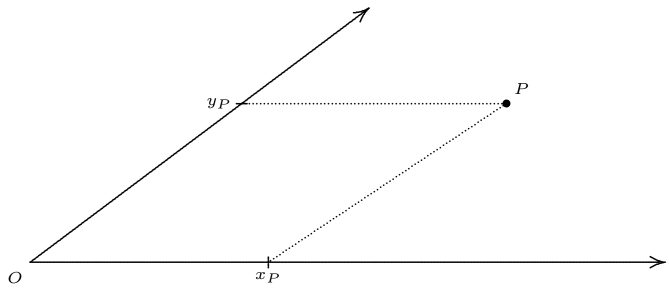
Eine eher informelle, nicht-ganz-klar-mathematische Definition ist wie folgt:

Ein *Koordinatensystem* in der Zeichenebene ist ein Paar aus zwei nicht-parallelen Pfeilen mit einem gemeinsamen Anfangspunkt. Der gemeinsame Anfangspunkt heißt dann *Ursprung* und wird mit O bezeichnet.

Mit Hilfe eines Koordinatensystems kann eine Abbildung

$$\begin{cases} \text{Zeichenebene} & \to & \mathbb{R}^2 \\ \text{Punkt } P & \mapsto & \text{Zahlenpaar } (x_P, y_P). \end{cases}$$

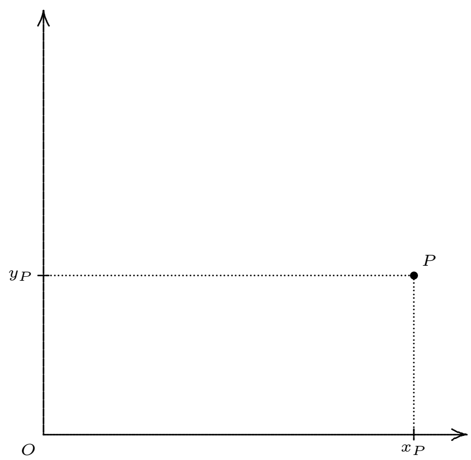
definiert werden. Dabei sind die beiden *Koordinaten* x_P und y_P des Punktes P durch die Bedingung festgelegt, dass man vom Ursprung aus den ersten Pfeil x_P-fach durchläuft und den zweiten Pfeil y_P-fach durchläuft, um zum Punkt P zu gelangen.



Das bedeutet, dass der Ursprung die Koordinaten $(0,0)$ und die beiden Pfeilspitzen die Koordinaten $(1,0)$ bzw. $(0,1)$ haben.

13.3.2 Definition: Kartesisches Koordinatensystem

Ein *Kartesisches Koordinatensystem* in der Zeichenebene ist ein Koordinatensystem, bei dem die beiden Pfeile des Koordinatensystems senkrecht aufeinander stehen und die gleiche Länge haben. Diese gleiche Länge wird dann auch als *Längeneinheit* bezeichnet.



13.3.3 Die Längeneinheit

Die Längeneinheit kann je nach Zweckmäßigkeit ausgewählt werden.

- In der Schule ist die Zeichenebene meist als kariertes Papier im Heft verwirklicht. Man wählt dann meist 1 cm, gelegentlich 1 ,,Kästchen".
- An der Tafel (oder Smartboard) ist die Längeneinheit evtl. 1 dm, also eine andere als im Heft.
- Im Zusammenhang mit Sachkontexten, beispielsweise geographischen Karten, wählt man 1 m oder 1 km.
- Es sind je nach Sachkontext noch viele andere Einheiten denkbar: Millimeter, Meilen, Seemeilen, Lichtjahre, astronomische Einheit, Angstrom.
- Will man von einer konkret in der Realität gegebenen Längeneinheit abstrahieren, so wird sie auch als 1 LE angegeben.
- Noch abstrakter verzichtet man ganz auf die Angabe der Längeneinheit und sieht die Längen der beiden Pfeile als **Zahl** 1 an. Diese Sichtweise wird im folgenden beibehalten.

Für viele Schüler/innen mag die Festlegung ,,Länge gleich Zahl" bzw. ,,Einheit gleich Eins" heftige Akzeptanz-Probleme mit sich bringen. Es widerspricht einer jahrelang geübten und eingeforderten Grundhaltung, dass Längenangaben in der Geometrie mit einer Längeneinheit (wie cm oder zumindest LE) zu versehen sind. Unabhängig davon ist diese Festlegung bzgl. Alltagsvorstellungen von Längen und Längenmessung reichlich abstrakt.

Der Hinweis darauf, dass die im nächsten Kapitel 13.4 erweiterten Definitionen der trigonometrischen Beziehungen eh nur durch Längenverhältnisse geschehen und die darauf aufbauende Mathematik ,,stimmig und erfolgreich" ist, sollte die Akzeptanz fördern.

13.3.4 Euklidischer Abstand

Ist ein Kartesisches Koordinatensystem in der Zeichenebene gegeben, so ist es möglich, den *Euklidischen Abstand* zweier Punkte P, Q mit Hilfe der Koordinaten anzugeben:

$$d(P,Q) \quad := \quad \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}.$$

Mathematisch korrespondiert dies damit, dass wir im $\mathbb{R}^2$ das ,,kanonische Skalarprodukt" und damit auch Abstandsmessung und Winkelmessung einführen.

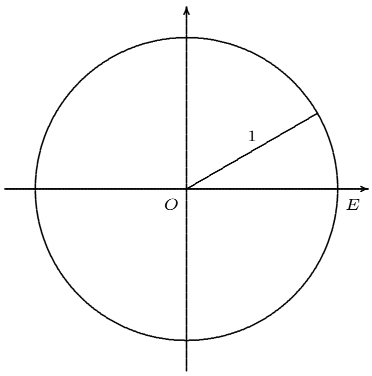
13.4 Weiterführung mittels Einheitskreis

13.4.1 Der Einheitskreis

Wir betrachten nun in der ,,Zeichenebene mit Kartesischem Koordinatensystem" die Kreislinie

$$\{P \in \mathbb{E} \mid d(P, O) = 1\},$$

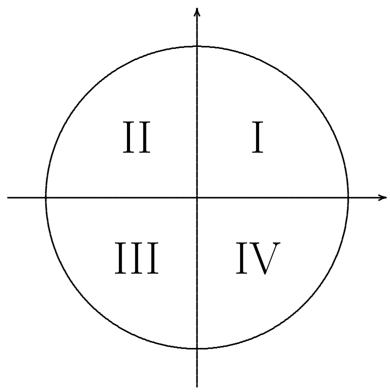
also die Menge der Punkte, die vom Ursprung O den Abstand 1 haben. Man spricht dann vom *Einheitskreis*. Der Punkt mit den Koordinaten $(1, 0)$ werde noch mit E bezeichnet.



13.4.2 Definition: Quadranten

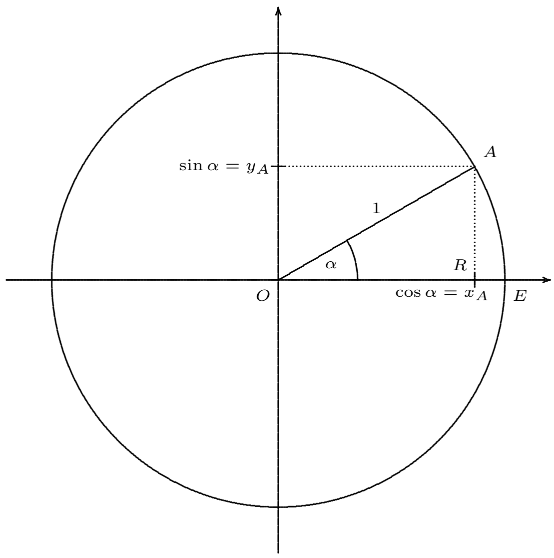
In diesem Zusammenhang heißen die durch die beiden Koordinaten-Achsen abgetrennten ,,Viertel-Ebenen" *Quadranten*. Sie erhalten noch wie folgt Nummern, die typischerweise mit römischen Zahlen angegeben werden.

Vorzeichen der x-Koordinate	Vorzeichen der y-Koordinate	Nummer des Quadranten
$+$	$+$	I
$-$	$+$	II
$-$	$-$	III
$+$	$-$	IV



Es ist vermutlich günstiger, wenn man die Achsen nicht als Teilmengen der Quadranten auffasst.

13.4.3 Winkelmaß und Koordinaten



Es sei ein Winkel α vorgegeben, dessen erster Schenkel gleich dem Strahl $[OE$ ist.

Der Punkt A auf dem Einheitskreis wird dann dadurch festgelegt, dass

$$|\sphericalangle EOA| = \alpha.$$

Auf diese Weise entsteht eine Abbildung

$$\alpha \mapsto A \mapsto (x_A, y_A).$$

Ist $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, so stellt sich heraus, dass

$$\cos\alpha = \frac{\text{AK im } \Delta ORA}{\text{HY im } \Delta ORA} = \frac{x_A}{1} = x_A$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{GK im } \Delta ORA}{\text{HY im } \Delta ORA} = \frac{y_A}{1} = y_A.$$

Die trigonometrischen Werte sind also direkt als Koordinaten ablesbar.

13.4.4 Weiterführung: Eine Super-Idee

Die beiden Formeln von gerade eben bringen nun eine Super-Idee hervor. Mit Hilfe des kartesischen Koordinatensystems kann man die Definitionen der trigonometrischen Beziehungen erweitern. Man setzt

$$\begin{aligned} \cos\alpha &:= x_A, \qquad \text{für } 0^\circ \le \alpha \le 360^\circ \\ \sin\alpha &:= y_A, \qquad \text{für } 0^\circ \le \alpha \le 360^\circ. \end{aligned}$$

Auch der Tangens kann dann für diesen Winkelbereich erweitert werden. Man erinnere sich an die Beziehung 1 aus Abschnitt 13.2.3

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y_A}{x_A}, \qquad \text{für } 0^\circ < \alpha < 90^\circ,$$

und übernimmt sie als Definition für den größeren Winkelbereich:

$$\tan\alpha := \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y_A}{x_A}, \qquad \text{für } 0^\circ \le \alpha \le 360^\circ, \quad \alpha \notin \{90^\circ, 270^\circ\}.$$

13.4.5 Vorzeichentabelle

Es können dann Vorzeichen bzw. bestimmte Werte so angegeben werden.

Nr. des Quadranten	Intervall	cos	sin	tan
I	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$+$	$+$	$+$
II	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$+$	$-$	$-$
III	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	$-$	$-$	$+$
IV	$270^\circ < \alpha < 360^\circ$	$+$	$-$	$-$

α	cos	sin	tan
0°	1	0	0
90°	0	1	$-$
180°	-1	0	0
270°	0	-1	$-$

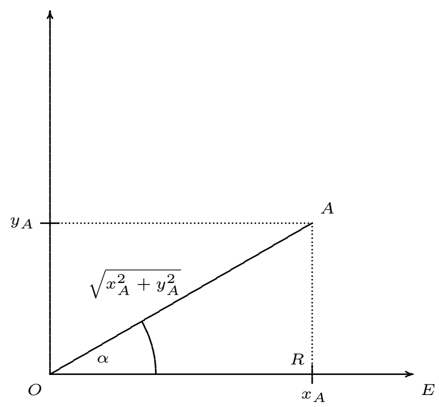
13.4.6 Bemerkung

Anstelle der Formeln in Abschnitt 13.4.3 könnte man auch ohne Verwendung des Einheitskreises die Formeln

$$\cos\alpha = \frac{\text{AK im } \Delta ORA}{\text{HY im } \Delta ORA} = \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2+y_A^2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{GK im } \Delta ORA}{\text{HY im } \Delta ORA} = \frac{y_A}{\sqrt{x_A^2+y_A^2}}$$

für einen Winkel $|\sphericalangle EOA| = \alpha$ aufschreiben und diese dann zur Erweiterung des Winkelbereichs heranziehen. Das ist aber aufwändiger und undurchsichtiger.



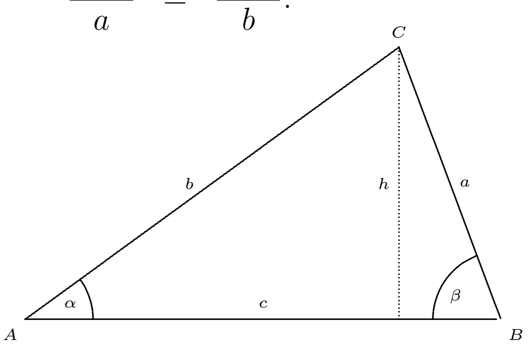
13.5 Der Sinussatz

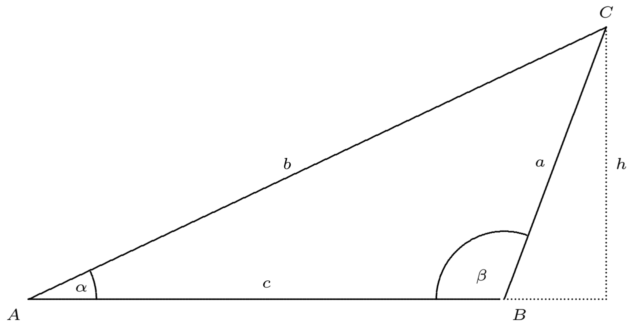
13.5.1 Der Sinussatz

Wir betrachten ein **beliebiges** Dreieck ABC.

Dann gilt für zwei der Seitenlängen und die jeweils gegenüberliegenden Winkel:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}.$$





13.5.2 Beweis

Wir betrachten simultan die beiden Dreiecks-Versionen ,,spitzwinklig" und ,,stumpfwinklig". Die Höhe h zum Eckpunkt C verläuft also einmal innerhalb, einmal außerhalb des Dreiecks.

(1) Drücke h jeweils mit Hilfe des Sinus aus:

$$b \cdot \sin\alpha \quad = \quad h \quad = \quad \begin{cases} & a \cdot \sin\beta, \qquad \text{beim linken Dreieck,} \\ a \cdot \sin(180^\circ - \beta) & \overset{(*)}{=} \; a \cdot \sin\beta, \qquad \text{beim rechten Dreieck.} \end{cases}$$

Die Beziehung $(*)$ in der unteren Zeile kann man einer Betrachtung am Einheitskreis entnehmen. Die zweiten Schenkel der Winkel β und $180^\circ - \beta$ für $0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$ liegen achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse. Deshalb sind ihre Sinuswerte gleich.

(2) Durch ,,Überkreuz-Dividieren" kann die Beziehung symmetrischer und damit übersichtlicher angegeben werden.

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}.$$

13.5.3 Kommentare

- Der Satz kann leichtgängig ergänzt werden durch die zweite Aussage

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

- Beachte, dass für den Beweis nur die Definitionsmenge $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ benötigt wird, nicht die des vollen Einheitskreises.

13.6 Der Kosinussatz

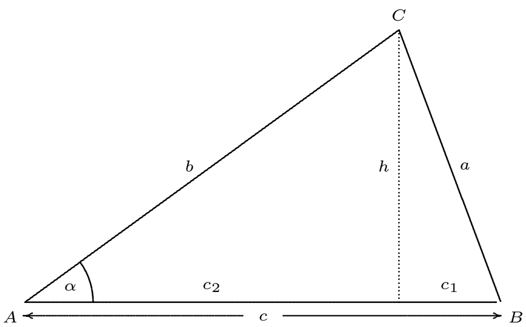
GY H17 T1

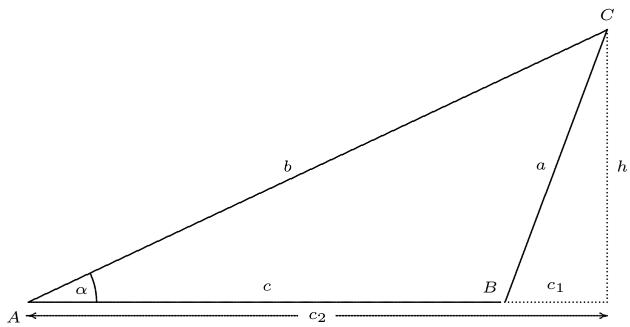
13.6.1 Der Kosinussatz

Wir betrachten ein **beliebiges** Dreieck ABC.

Dann gilt für die drei Seitenlängen und einen der Winkel, beispielsweise β:

$$b^2 \;=\; a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos\beta.$$





13.6.2 Beweis

(0) Wir betrachten simultan die beiden Dreiecks-Versionen

$$\begin{array}{c||c} \beta \text{ spitz} & \beta \text{ stumpf.} \end{array}$$

Die Höhe h zum Eckpunkt C verläuft also

$$\begin{array}{c||c} \text{innerhalb} & \text{außerhalb} \end{array}$$

des Dreiecks.

(1) Schreibe für die beiden Teildreiecke jeweils den Satz des Pythagoras auf:

$$\begin{array}{rcl||c} b^2 &=& h^2 + c_2^2 & \leftarrow \\ a^2 &=& h^2 + c_1^2 & \leftarrow \end{array}$$

(2) Eliminiere mit Hilfe der zweiten Gleichung h^2 aus der ersten Gleichung

$$\begin{array}{rcl||c} b^2 &=& a^2 + c_2^2 - c_1^2. & \leftarrow \end{array}$$

(3) Eliminiert man c_2 mittels der c-Bilanz

$$\begin{array}{rcl||rcl} c_2 &=& c - c_1 & c_2 &=& c + c_1, \end{array}$$

so gelangt man zu der Gleichung

$$\begin{array}{lrcl||lrcl} & b^2 &=& a^2 + (c - c_1)^2 - c_1^2 & & b^2 &=& a^2 + (c + c_1)^2 - c_1^2 \\ \Longleftrightarrow & b^2 &=& a^2 + c^2 - 2\,c\,c_1 & \Longleftrightarrow & b^2 &=& a^2 + c^2 + 2\,c\,c_1. \end{array}$$

(4) Eliminiert man c_1 mittels der Kosinusbeziehung

$c_1 = a\,\cos\beta$	$c_1 = a\,\cos(180^\circ - \beta) \overset{(*)}{=} -a\,\cos\beta,$

so gelangt man zur Aussage des Satzes

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos\beta. \quad \Big\| \quad \leftarrow$$

Die Beziehung ($*$) in Schritt (4) rechts kann man einer Betrachtung am Einheitskreis entnehmen. Die zweiten Schenkel der Winkel β und $180^\circ - \beta$ für $0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$ liegen achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse. Deshalb unterscheiden sich ihre Kosinuswerte im Vorzeichen.

13.6.3 Kommentare

- Beachte auch hier wieder, dass für den Beweis nur die Definitionsmenge $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ herangezogen wird, nicht die des vollen Einheitskreises.

- Oft wird der Kosinussatz als ,,Dreieinigkeit" mit zyklisch vertauschten Größen dargestellt:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2\,c\,a\,\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma \end{aligned}$$

  Dies soll betonen, dass keiner der drei Ecken irgendeine Sonderstellung zukommt.

  Das damit bezweckte Auffangen einer mangelnden Abstraktionsfähigkeit wird mit einer aufwändigeren Darstellung erkauft.

- Die c-Version des Kosinussatzes beinhaltet als Spezialfall die klassische Formel des Satzes von Pythagoras

$$\gamma = 90^\circ \quad \Longrightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

  Sollte auch der Satz des Pythagoras so als ,,Dreieinigkeit" dargestellt werden?

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ b^2 &= c^2 + a^2 \\ c^2 &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

- Die Formel aus dem Kosinussatz kann umgekehrt auch zu einer alternativen Definition des Kosinus herangezogen werden.

  Sind die drei Seitenlängen a, b, c eines Dreiecks gegeben, so definiert man den Kosinus des Winkels α durch

$$\cos\alpha \quad := \quad \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

- Gelegentlich werden die beiden Seitenabschnitte c_1 und c_2 mit p bzw. q bezeichnet. Ich halte das für nicht günstig, da so der ,,Eindruck der Rechtwinkligkeit" verstärkt wird.

- Gelegentlich wird in schulischen Kontexten eingefordert, dass der Kosinussatz auch als Text formuliert werden müsste, in etwa so:

  > In einem beliebigen Dreieck gilt:
  >
  > Das Quadrat einer Seitenlänge ist gleich der Summe der Quadrate der Seitenlängen der anderen beiden Seiten abzüglich dem doppelten Produkt dieser beiden Seitenlängen und des Kosinus ihres Zwischenwinkels.

  Dies mag eine nette fachdidaktische Übung zur Korrespondenz von Formeldarstellung und Textdarstellung mathematischer Zusammenhänge sein, der lerntheoretische Mehrwert ist hier m.E. negativ.

- Überlege, dass bei Vorliegen der SWS-Situation oder SSS-Situation mit Hilfe des Kosinussatzes alle anderen Größen in einem Dreieck ermittelt werden können. Das bedeutet, dass der Kosinussatz die beiden Dreiecks-Kongruenzsätze SSS (6.11.5) und SWS (6.11.6) impliziert.

13.7 Die Additionstheoreme

13.7.1 Satz: Additionstheoreme

Für zwei Winkel α, β mit $0^\circ \leq \alpha + \beta \leq 90^\circ$ gelten die Beziehungen

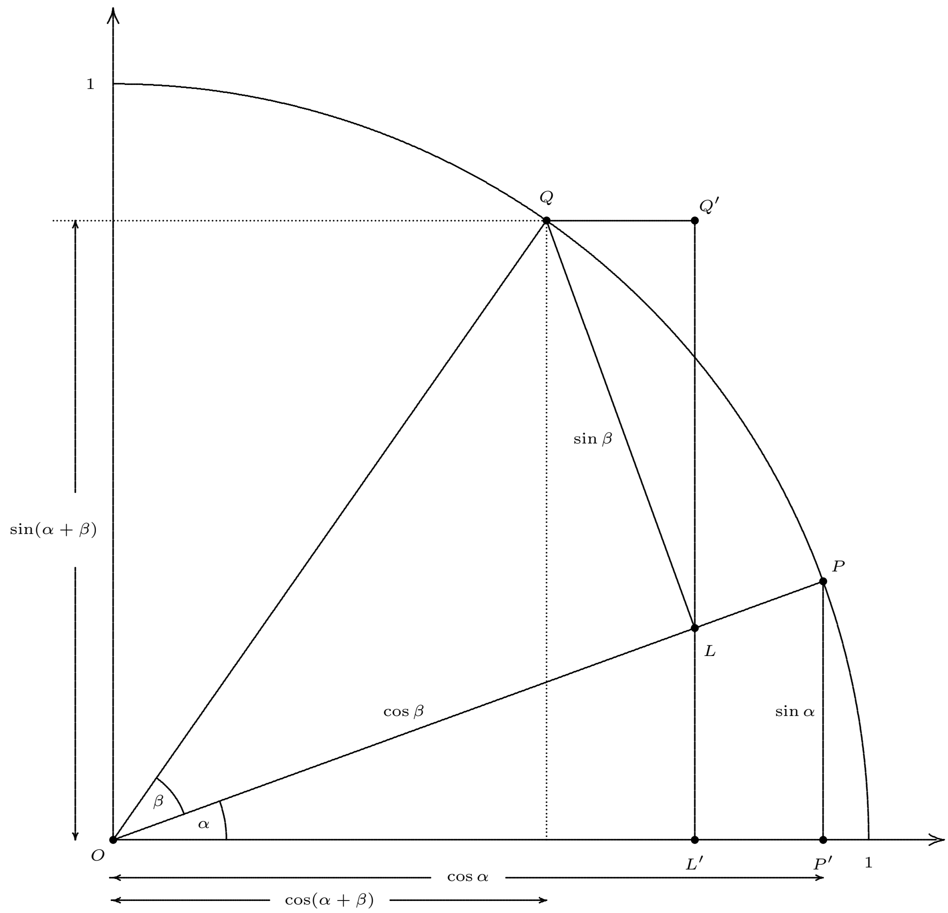
$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta \,+\, \cos\alpha\,\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\,\cos\beta \,-\, \sin\alpha\,\sin\beta.\end{aligned}$$

13.7.2 Kommentare

1. Die Additionstheoreme sind die wohl interessantesten und wichtigsten trigonometrischen Beziehungen. Sie würden später im Unterricht der Analysis zum Beweis der Ableitungsregeln für die Sinus- und Kosinusfunktion benötigt. Schade, dass sie aus den Lehrplänen verschwunden sind.

2. Bei Zugrundelegung der Einheitskreis-Definition ist der Beweis schulisch zugänglich, wenn auch relativ aufwändig.

13.7.3 Beweis



(0) Ausgangspunkt sind die beiden Winkel α und β mit $0^\circ \leq \alpha + \beta \leq 90^\circ$.

Man kann den beiden Winkeln die beiden rechtwinkligen Dreiecke $\Delta OP'P$ und ΔOLQ zuordnen.

(1) An diesen beiden Dreiecken lassen sich die sechs Streckenlängen

$$\begin{aligned} \overline{PP'} &= \sin\alpha, & \overline{LQ} &= \sin\beta \\ \overline{OP'} &= \cos\alpha, & \overline{OL} &= \cos\beta \\ \overline{OP} &= 1, & \overline{OQ} &= 1 \end{aligned}$$

ablesen.

(2) Überlege, dass die drei (mit Rot, Grün und Blau einzufärbenden) Dreiecke

$$\Delta OP'P, \qquad \Delta OL'L \qquad \text{und} \qquad \Delta LQ'Q$$

jeweils einen rechten Winkel und einen Winkel mit Maß α haben.

Sie sind also gemäß dem www-Ähnlichkeitssatz 7.1.4 ähnlich zueinander.

(3a) Aufgrund der Ähnlichkeiten (2) stimmen die folgenden Verhältnisse von Seitenlängen überein:

$$\begin{aligned} \tfrac{\overline{L'L}}{\overline{OL}} &= \tfrac{\overline{P'P}}{\overline{OP}} & &\Longrightarrow & \overline{L'L} &= \tfrac{\overline{P'P}}{\overline{OP}} \cdot \overline{OL} = \sin\alpha \cdot \cos\beta \\ \tfrac{\overline{LQ'}}{\overline{LQ}} &= \tfrac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} & &\Longrightarrow & \overline{LQ'} &= \tfrac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} \cdot \overline{LQ} = \cos\alpha \cdot \sin\beta \end{aligned}$$

(3b) Damit ergibt sich

$$\sin(\alpha+\beta) = \overline{L'L} + \overline{LQ'} = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

(4a) Aufgrund der Ähnlichkeiten (2) stimmen die folgenden Verhältnisse von Seitenlängen überein:

$$\begin{aligned} \tfrac{\overline{OL'}}{\overline{OP'}} &= \tfrac{\overline{OL}}{\overline{OP}} & &\Longrightarrow & \overline{OL'} &= \tfrac{\overline{OL}}{\overline{OP}} \cdot \overline{OP'} = \cos\alpha \cdot \cos\beta \\ \tfrac{\overline{QQ'}}{\overline{LQ}} &= \tfrac{\overline{PP'}}{\overline{OP}} & &\Longrightarrow & \overline{QQ'} &= \tfrac{\overline{PP'}}{\overline{OP}} \cdot \overline{LQ} = \sin\alpha \cdot \sin\beta \end{aligned}$$

(4b) Damit ergibt sich

$$\cos(\alpha+\beta) = \overline{OL'} - \overline{QQ'} = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

13.7.4 Satz: Additionstheorem für den Tangens

Es gilt für zwei Winkel α, β mit $0^\circ \leq \alpha+\beta \leq 90^\circ$ die Beziehung

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}.$$

13.7.5 Beweis

Aufgrund der Kurzformel $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ gilt

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}.$$

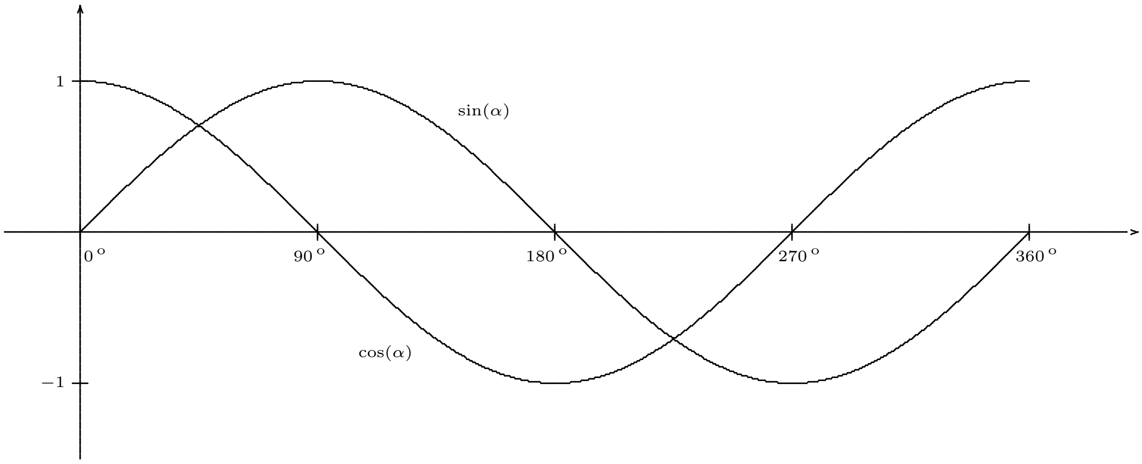
13.8 Übergang zu Funktionsgraphen

13.8.1 Darstellung des Funktionsgraphen

Die Graphen der Funktionen

$$\begin{cases} [0^\circ, 360^\circ] & \to & [0,1] \\ \alpha & \mapsto & \sin(\alpha) \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} [0^\circ, 360^\circ] & \to & [0,1] \\ \alpha & \mapsto & \cos(\alpha) \end{cases}$$

schauen wie folgt aus.



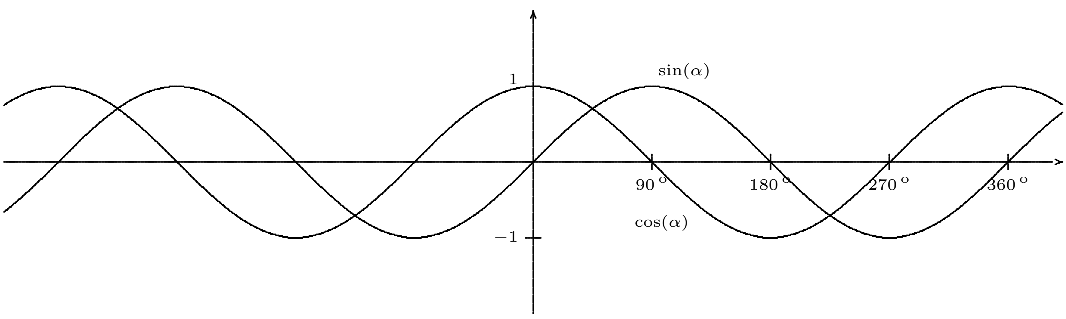
13.8.2 Periodische Fortsetzung

Ausgehend von der Deutung am Einheitskreis und anhand der Funktionsgraphen 13.8 lässt sich erkennen, dass die trigonometrischen Funktionen periodisch fortgesetzt werden können. Als Definitionsmenge tritt das unendliche Intervall

$$-\infty \;<\; \alpha \;<\; +\infty$$

in Erscheinung. Es gilt dann für alle Winkel α und $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \sin\alpha \\ \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \cos\alpha \\ \tan(\alpha + k \cdot 180^\circ) &= \tan\alpha. \end{aligned}$$



13.8.3 Übergang zum Bogenmaß

Die trigonometrischen Funktionen sollen sich immer weiter von der elementargeometrischen Grundlegung fortentwickeln und so eine immer größere Bedeutung in der Analysis erhalten.

Dazu dient zunächst die Idee, den Winkel-Grad-Maßen in $[0^\circ, 360^\circ]$ direkt-proportional Zahlen zuzuordnen, und zwar mit Hilfe der Bogenlänge des durch den Winkel bestimmten Bogens im Einheitskreis.

Daraus ergibt sich die Bogenmaß-Transformation

$$\begin{cases} [0^\circ, 360^\circ] & \to & [0, 2\pi] \\ \alpha & \mapsto & x = \alpha \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} = \alpha \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \end{cases}$$

mit der Umkehr-Transformation

$$\begin{cases} [0, 2\pi] & \to & [0^\circ, 360^\circ] \\ x & \mapsto & x \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = x \cdot \frac{180^\circ}{\pi}. \end{cases}$$

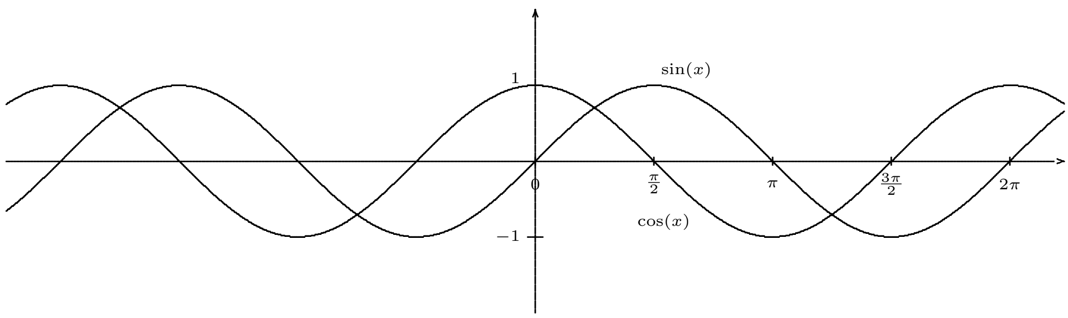
Man vergesse nicht, sich dieser Umstellung beim Verwenden des TR bewusst zu sein. Wie wird umgestellt?

13.8.4 Sinus und Kosinus bei Bogenmaß

Mit Hilfe dieser Transformation kann die Definitionsmenge der beiden trigonometrischen Funktionen sin und cos abgeändert werden, es ergeben sich die ,,Bogenmaß-Funktionen”

$$\begin{cases} [0, 2\pi] & \to & [0, 1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \begin{cases} [0, 2\pi] & \to & [0, 1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{cases}$$

mit den Graphen



Der eigentliche Grund für die Bogenmaß-Transformation bleibt in der Trigonometrie der Mittelstufe ($\sim$ 10. JGS) verborgen.

Sie ermöglicht später die Darstellung (besser: die eigentlich analytische Definition) der trigonometrischen Funktionen als Potenzreihen wie folgt.

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \pm \ldots \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \pm \ldots \\ \tan(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots \end{aligned}$$

Diese Formeln liegen der elektronischen Berechnung der trigonometrischen Funktionen zugrunde.

Dass die später zu erarbeitenden Formeln für die Ableitungen

$$\begin{aligned} \cos' x &= -\sin x \\ \sin' x &= \cos x \end{aligned}$$

diese schlichte Form annehmen, liegt ebenfalls am Bogenmaß.

13.9 Trigonometrische Beziehungen

13.9.1 Einstieg

Es können nun zahlreiche trigonometrische Beziehungen zusammengetragen werden.

Bei der Präsentation und bei den Begründungen stellt sich die Frage, ob man dies tut ...

im geometrischen Kontext, d.h. mit Hilfe des Einheitskreises,
mit Winkelsymbolen α, β, γ, speziellen Winkeln 90°, 180°, 270°, 360°,

oder im Analysis-Kontext, d.h. mit Hilfe von Funktionsgraphen,
mit Zahlsymbolen x, y, z, speziellen Zahlen $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π.

Wir wählen ab jetzt die zweite Art der Darstellung.

13.9.2 Satz: Fundamentaleigenschaften von Sinus und Kosinus

Die beiden Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ haben die folgenden Eigenschaften:

(i) Wechsel-Periodizität. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(x - \tfrac{\pi}{2}) &= -\cos(x) \\ \cos(x - \tfrac{\pi}{2}) &= \sin(x). \end{aligned}$$

(ii) Symmetrie. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin(x) \\ \cos(-x) &= \cos(x). \end{aligned}$$

(iii) Additionstheoreme. Für alle $x, \widetilde{x} \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(x + \widetilde{x}) &= \sin(x) \cdot \cos(\widetilde{x}) + \cos(x) \sin(\widetilde{x}) \\ \cos(x + \widetilde{x}) &= \cos(x) \cdot \cos(\widetilde{x}) - \sin(x) \sin(\widetilde{x}). \end{aligned}$$

(iv) Positivität. Für alle $x \in \,]0, \frac{\pi}{2}[$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(x) &> 0 \\ \cos(x) &> 0. \end{aligned}$$

(v) Stetigkeit. Die beiden Funktionen sin und cos sind stetig.

13.9.3 Beweis

Wir müssen für die Funktionen sin und cos zeigen, dass sie die Eigenschaften der Liste erfüllen. Dies geschieht durch Betrachtungen am Einheitskreis.

(i) Wechsel-Periodizität. Die geometrische Begründung besteht darin, dass durch die ,,Subtraktion von $90\,^{\circ}$" im Argument die Situation am Einheitskreis ,,um $+90\,^{\circ}$ gedreht" wird.

Da dabei die positive/negative x-Halbachse in die positive/negative y-Halbachse und die positive/negative y-Halbachse in die negative/positive x-Achse gedreht wird, gelten Beziehungen.

(ii) Symmetrie. Die geometrische Begründung besteht darin, dass die Situation an der x-Achse gespiegelt wird. Da dabei die positive/negative x-Halbachse bestehen bleibt und die positive/negative y-Halbachse in die negative/positive y-Halbachse gespiegelt wird, gelten die obigen Beziehungen.

(iii) Additionstheoreme. Für $x, \widetilde{x} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit $x + \widetilde{x} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ wurden die Additionstheoreme in Abschnitt 13.7 geometrisch hergeleitet. Dass sie auch für alle $x, \widetilde{x} \in \mathbb{R}$ gelten, kann dann per Induktion über $(k, \ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ für $x \in [k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}]$ und $\widetilde{x} \in [\ell\frac{\pi}{2}, (\ell+1)\frac{\pi}{2}]$ bewiesen werden. Grundlage für die Induktionsschritte ist dabei die $\frac{\pi}{2}$-Wechsel-Periodizität.

(iv) Positivität. Dass sin und cos für $x \in \,]0, \frac{\pi}{2}[$ positiv sind, kann unmittelbar der Betrachtung am Einheitskreis entnommen werden. Der zweite Schenkel des Winkels ist im I. Quadranten.

(v) Stetigkeit. Verändert sich der Winkel x, so verändert sich der zugehörige Punkt auf dem Einheitskreis stetig in Abhängigkeit von x. $\sin x$ und $\cos x$ wiederum sind die Koordinaten dieses Punktes und hängen deshalb stetig von x ab.

13.9.4 Satz: Charakterisierung durch Fundamentaleigenschaften

Sind $s, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit den im letzten Satz angegebenen Eigenschaften der Wechsel-Periodizität, Symmetrie, Additionstheoreme, Positivität und Stetigkeit, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} s(x) &= \sin x \\ c(x) &= \cos x. \end{aligned}$$

13.9.5 Beweis

(0) Es seien also s, c Funktionen mit den aufgelisteten Eigenschaften.

(1) Dann gilt wegen der Symmetrie für s, dass $s(0) = 0$. Weiter ist dann für $x \in \mathbb{R}$ aufgrund des s-Additionstheorems

$$s(x) = s(x+0) = s(x) \cdot c(0) + c(x) \cdot s(0) = s(x) \cdot c(0).$$

Da wegen der Positivität ein x mit $s(x) \neq 0$ existiert, folgt $c(0) = 1$.

Die Wechsel-Periodizität impliziert dann

$$s(\tfrac{\pi}{2}) = 1 = \sin(\tfrac{\pi}{2}) \qquad \text{und} \qquad c(\tfrac{\pi}{2}) = 0 = \cos(\tfrac{\pi}{2}).$$

(2) Mit Hilfe der Additionstheoreme kann man für fixiertes $x \in \mathbb{R}$ die Implikationen

$$\begin{aligned} s(x) &= \sin x &\Longrightarrow\quad s(k \cdot x) &= \sin(k \cdot x), &\quad k \in \mathbb{Z} \\ c(x) &= \cos x &\Longrightarrow\quad c(k \cdot x) &= \cos(k \cdot x), &\quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

per Induktion über k zeigen.

(3) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt aufgrund der Additionstheoreme und der Symmetrie

$$\begin{aligned} 0 &= c(\tfrac{x}{2} - \tfrac{x}{2}) = c^2(\tfrac{x}{2}) - s^2(\tfrac{x}{2}) \\ c(x) &= c(\tfrac{x}{2} + \tfrac{x}{2}) = c^2(\tfrac{x}{2}) + s^2(\tfrac{x}{2}), \end{aligned}$$

damit dann die Implikation

$$\begin{aligned} s^2(\tfrac{x}{2}) &= \tfrac{c(x)-1}{2} \\ c^2(\tfrac{x}{2}) &= \tfrac{c(x)+1}{2}, \end{aligned}$$

und dann, da sin und cos die gleichen Beziehungen erfüllen, wegen Positivität und Wechsel-Periodizität

$$\begin{aligned} s(x) &= \sin x &\Longrightarrow\quad s(\tfrac{x}{2}) &= \sin(\tfrac{x}{2}) \\ c(x) &= \cos x &\Longrightarrow\quad c(\tfrac{x}{2}) &= \cos(\tfrac{x}{2}). \end{aligned}$$

(4) Es folgt für ein fixiertes $a > 0$, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} s(\tfrac{k}{2^\ell}\,\tfrac{\pi}{2}) &= \sin(\tfrac{k}{2^\ell}\,\tfrac{\pi}{2}) \\ c(\tfrac{k}{2^\ell}\,\tfrac{\pi}{2}) &= \cos(\tfrac{k}{2^\ell}\,\tfrac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $\ell \in \mathbb{N}$ gelten. Da die Menge dieser Stellen dicht in $\mathbb{R}$ liegt, folgt mit der Stetigkeit die Behauptung.

13.9.6 Weitere wichtige Beziehungen

(i) Trigonometrischer Satz des Pythagoras. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

(ii) Periodizität. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \sin x \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos x. \end{aligned}$$

(iii) Symmetrie bzgl. $\frac{\pi}{4}$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin(\tfrac{\pi}{4} + x) = \cos(\tfrac{\pi}{4} - x).$$

(iv) ,,Subtraktionstheoreme". Für alle $x, \widetilde{x} \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(x - \widetilde{x}) &= \sin x \, \cos \widetilde{x} \; - \; \cos x \, \sin \widetilde{x} \\ \cos(x - \widetilde{x}) &= \cos x \, \cos \widetilde{x} \; + \; \sin x \, \sin \widetilde{x}. \end{aligned}$$

13.9.7 Beweis

Wir führen diese Beweise hier nicht durch, sie seien zur Übung empfohlen. Nur einige Kommentare:

Alle diese Beziehungen lassen sich streng analytisch mit Hilfe der Fundamentaleigenschaften aus Satz 13.9.2 herleiten.

Alternativ kann man sie auch direkt am Einheitskreis einsichtig machen.

Ein ganz anderer – sehr viel abstrakterer, aber dann letztlich einfacherer — Weg ist, die Definition über die Formel von Euler-Moivre im Kontext der komplexen Zahlen heranzuziehen:

$$\begin{aligned} \sin x &= \operatorname{Im}(e^{ix}) \\ \cos x &= \operatorname{Re}(e^{ix}). \end{aligned}$$

13.10 Kontextfelder

13.10.1 Funktionenlehre

- Bezüge zwischen Funktionstermen und -graphen
- Die allgemeine Sinus- bzw. Kosinusfunktion GY F17 T2

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a \cdot \cos(b \cdot x + c) + d \end{cases}$$

  Graphische Interpretation der Parameter.

13.10.2 Aktivitäten

- $\boxed{\text{V}}$ Idee: Der Graph der Sinus-Funktion erscheint, wenn die Ecke (Spitze) Stimmgabel über eine rußgeschwärzte Glasplatte gezogen wird.
- Eine Gurke (oder eine starke Papprolle) wird mehrfach mit einem langen Papierstreifen umwickelt. Schneidet man diese **schräg** sorgfältig durch, so ist die Schnittlinie des ausgebreiteten Papiers eine Sinuskurve.

13.10.3 Geometrie

- ,,Vermessungsaufgaben" Fokus 10, S. 27
- Historisch (Aristarch von Samos): Bestimmung des Längenverhältnisses $\frac{\text{Sonnenentfernung}}{\text{Mondentfernung}}$ bei Halbmond. XQua 10I, S. 91
- Veränderung von Größen bei schräger Projektion. Sonnenlichteinfall.
- Sphärische Geometrie (= Geometrie auf der Kugeloberfläche)
- Analytische Geometrie: Auftreten von Kosinus und Sinus beim Skalarprodukt bzw. Vektorprodukt.
- Einsatz von Dynamischer Geometrie-Software (DGS) GY H16 T2

13.10.4 Physik

- Zerlegung vektorieller Größen (Geschwindigkeit, Kraft, elektrisches oder magnetisches Feld)
- Projektion von Kreisbewegungen
- Schwingungen: Akustik, Schwebung. LS 10, S. 61
- $\boxed{\text{V}}$ Schreibstimmgabel über Papier oder rußgeschwärzte Glasplatte
- $\boxed{\text{V}}$ Laserstrahl beschreibt infolge Reflektion an Schwingspiegel und Drehspiegel eine Sinuskurve
- $\boxed{\text{V}}$ Mit Computer-Messwerterfassung wird schwingende Feder ,,aufgezeichnet".

13.10.5 Sachwelt

- Projektion von Kreisbewegungen: Räder, Riesenräder („London Eye")
- Kunst: Archimedische Spirale.

14 Umfang und Flächeninhalt des Kreises

14.1 Approximation des Kreisumfangs

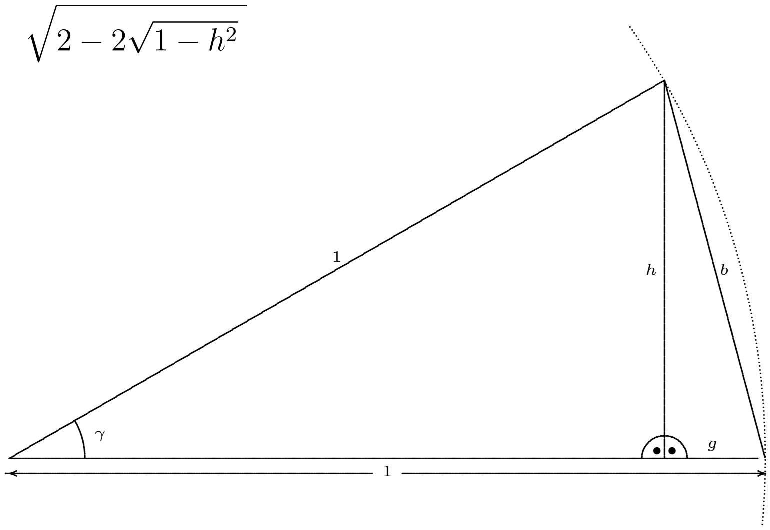
14.1.1 Satz: Basis-Höhe-Beziehung im gleichschenkligen Dreieck

In einem gleichschenkligen Dreieck mit

- Schenkellänge 1 und
- Scheitelwinkel $\gamma < 90\,^{\circ}$

besteht zwischen der Basis b und der ,,Eckpunkt-Höhe" h die Beziehung

$$b = \sqrt{2 - 2\sqrt{1-h^2}}$$



14.1.2 Beweis

(1) Ausgangspunkt sind die Hypotenusensatz-Beziehungen in den beiden Teildreiecken:

$$\begin{aligned} h^2 + g^2 &= b^2 \\ h^2 + (1-g)^2 &= 1 \end{aligned}$$

(2) Wir eliminieren g aus den beiden Gleichungen. Die zweite Gleichung lässt sich äquivalent umformen in

$$h^2 + g^2 = 2g$$

und es folgt durch Gleichsetzen mit der ersten

$$g = \frac{b^2}{2}.$$

(3) Setzt man g in die erste Gleichung ein, so erhält man die bzgl. b bi-quadratische Gleichung

$$b^4 - 4b^2 + 4h^2 = 0$$

(4) Mit der Substitution $u = b^2$ wird sie zur quadratischen Gleichung

$$u^2 - 4u + 4h^2 = 0$$

mit den zwei Lösungen

$$u_\pm = 2 \pm 2\sqrt{1-h^2}$$

(5) Daraus ergeben sich vier Lösungen der bi-quadratischen Gleichung

$$b_1 = +\sqrt{2+2\sqrt{1-h^2}} \qquad b_2 = -\sqrt{2+2\sqrt{1-h^2}}$$
$$b_3 = +\sqrt{2-2\sqrt{1-h^2}} \qquad b_4 = -\sqrt{2-2\sqrt{1-h^2}}.$$

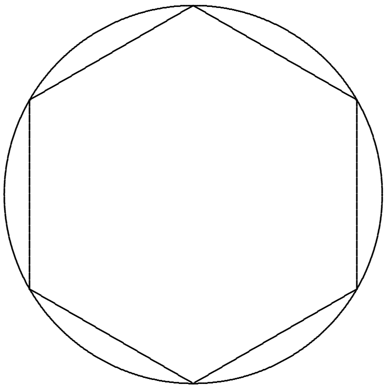
(6) Die Lösungen auf der rechten Seite sind negativ und scheiden deswegen aus. Die erste Lösung ist in h monoton fallend, sie beschreibt Basen bei Winkeln $\gamma > 90^\circ$ und scheidet auch aus. Es bleibt die dritte Lösung.

14.1.3 Übung

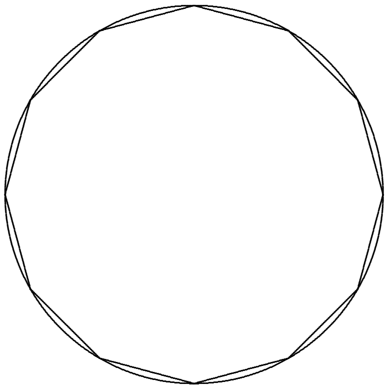
Ermitteln Sie die Beziehung für den Fall, dass die Schenkellänge gleich r ist!

14.1.4 Skizze: Eckenverdoppelung

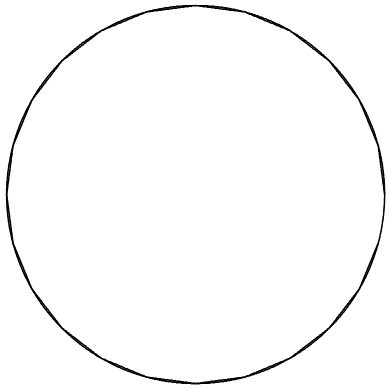
Wir beschreiben nacheinander regelmäßige n-Ecke für $n = 6, 12, 24, 48, \ldots$ in einen Kreis mit Radius 1 ein.



$n = 6$

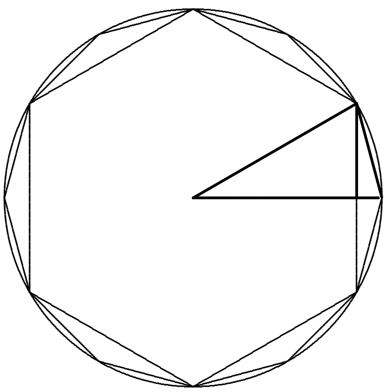


$n = 12$



$n = 24$

Die folgende Skizze zeigt am Beispiel $n = 6$, welche geometrischen Beziehungen zwischen einem einbeschriebenen n-Eck und dem zugehörigen $2n$-Eck bestehen. Es lässt sich damit die rechtsstehende Tabelle begründen.



Eckenzahl n	Seitenlänge s_n	Umfang u_n
6	1	6
12	0,5176380902	6,2116570825
24	0,2610523844	6,2652572266
48	0,1308062585	6,2787004061
96	0,0654381656	6,2820639018
192	0,0327234633	6,2829049446

In der ersten Zeile stehen die Daten für ein regelmäßiges 6-Eck. Weiter ergibt sich in der mittleren Spalte jeweils die Seitenlänge s_{2n} aus der Seitenlänge s_n (oberhalb) dadurch, dass die halbierte Seitenlänge s_n die Höhe in einem gleichschenkligen Dreieck ist, dessen Basis die neue Seitenlänge s_{2n} ist, vgl. Satz 14.1.1:

$$s_{2n} \quad = \quad \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}}.$$

Weiter ist in jeder Zeile

$$u_n \quad = \quad n \cdot s_n.$$

Wie man (mit Hilfe einer Tabellenkalkulation) sieht, nähern sich die Werte u_n für $n \to \infty$ immer weiter einem bestimmten Wert (genauer: Grenzwert) an. Die Hälfte dieses Wertes wird in der Mathematik mit π bezeichnet. Es gilt genauer

$$\pi \quad \approx \quad 3{,}14159265358979323846264338327 95\ldots$$

14.2 Approximation der Kreisfläche

Mit Hilfe der Formel für den Umfang des Kreises kann die für den Flächeninhalt ermittelt werden.

14.2.1 Vorgehensweise

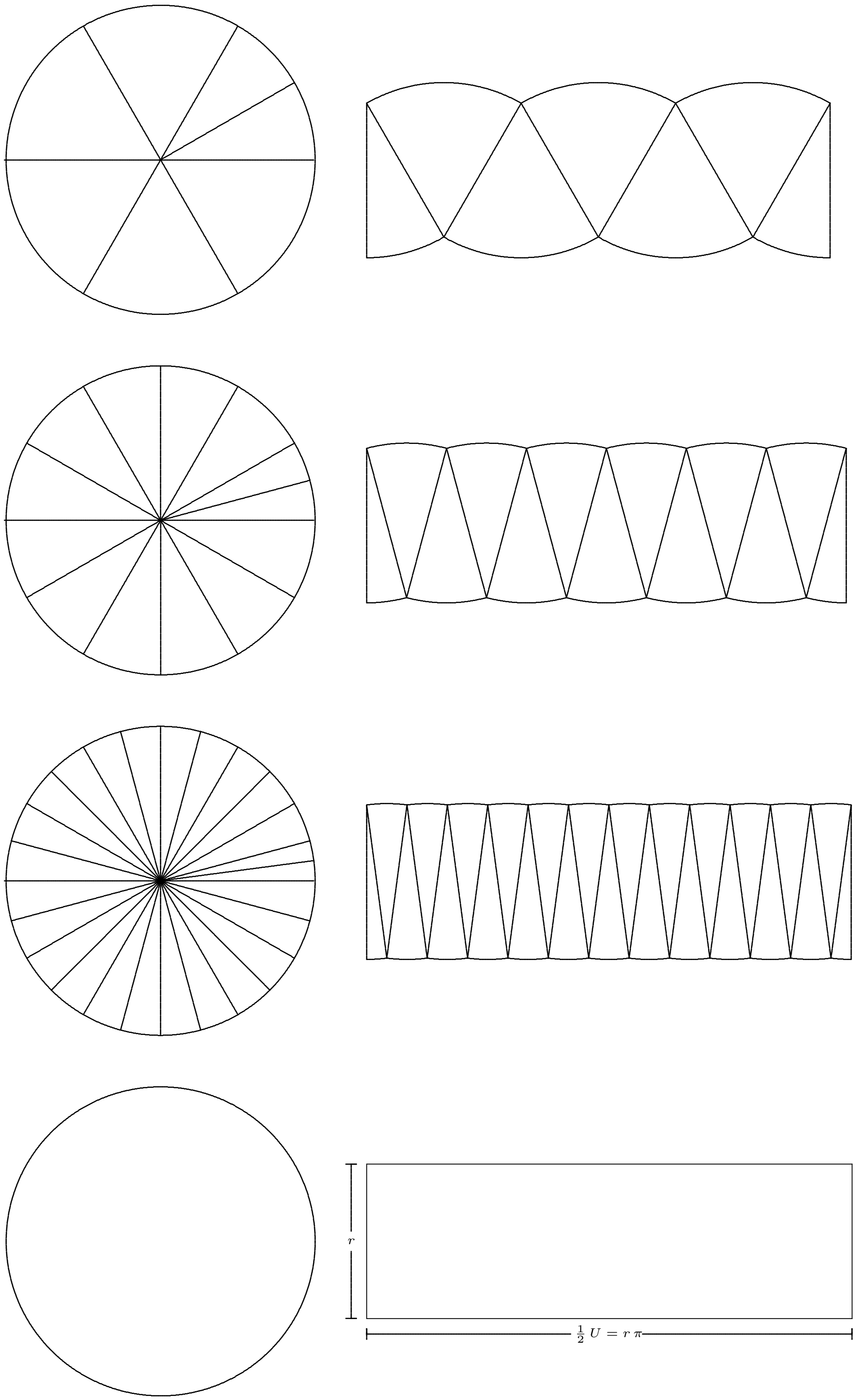
Dazu sei n eine vorgegebene Zahl, in der Zeichnung auf Seite 205 ist beispielsweise $n = 6, 12$ oder 24. Die Kreisfläche wird zunächst in n kongruente Sektoren zerlegt, einer der Sektoren wird symmetrisch halbiert. Dann werden die Sektoren aneinandergelegt, so dass eine nahezu rechtecksförmige durch Kreisbögen begrenzte Figur entsteht.

Lässt man nun gedanklich n gegen ∞ gehen, so nähert sich diese Figur immer mehr einem Rechteck an, das als Seitenlängen den Radius und den halben Umfang des ursprünglichen Kreises hat.

Damit ergibt sich mit Hilfe des Axioms 3b der Flächeninhaltslehre (vgl. 11.1.4)

$$\mathcal{A}_{\text{Kreis}} \quad = \quad r \cdot \tfrac{1}{2} \cdot U \quad = \quad r \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \quad = \quad \pi \cdot r^2.$$

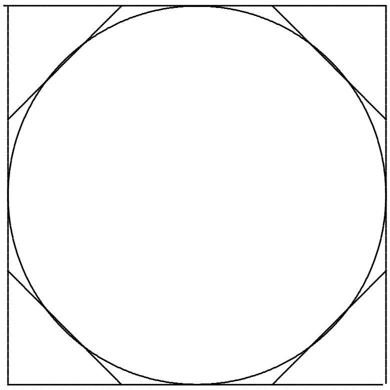
14.2.2 Zeichnungen zur Kreisflächenberechnung



14.2.3 Historisches

Im ,,Alten Ägypten” wurde die Kreisfläche durch ein Quadrat mit gekappten Ecken angenähert.

Umschreibe dem Kreis ein Quadrat mit Seitenlänge = Durchmesser d und entferne an jeder Ecke ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlänge gleich $\frac{1}{3} \cdot d$.



Als Flächeninhalt des entstehenden Achtecks ergibt sich

$$\mathcal{A}_{\text{Achteck}} \;=\; \mathcal{A}_{\text{Quadrat}} - 4 \cdot \mathcal{A}_{\text{Dreieck}} \;=\; d^2 - 4 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (\tfrac{d}{3})^2 \;=\; \tfrac{7}{9}\, d^2 \;=\; \tfrac{28}{9}\, r^2,$$

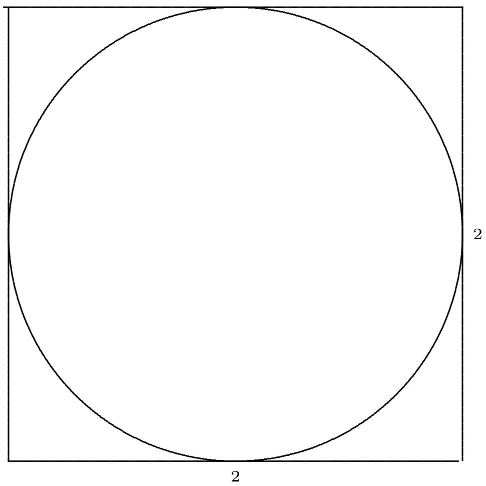
also ein Näherungswert

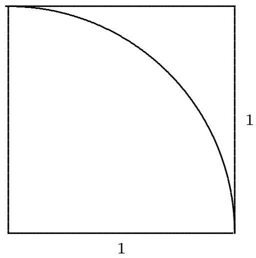
$$\pi \;\approx\; \tfrac{28}{9} \;=\; 3,\overline{1}.$$

14.3 Monte-Carlo-Methode zur Bestimmung von π

14.3.1 Situation

Der Monte-Carlo-Methode zur Bestimmung von π liegt die geometrische Situation zugrunde, dass in ein Quadrat mit Seitenlänge 2 ein Kreis mit Radius 1 genau einbeschrieben ist.





Wir werden sehen, dass es besser ist, statt des Vollkreises nur einen in das Einheitsquadrat einbeschriebenen Viertelkreis zu betrachten.

Es werden nun in dem Quadrat sehr viele Punkte **zufällig** erzeugt.

14.3.2 Prinzip der gleichmäßigen Verteilung

Dabei sollten diese Punkte **über die Gesamtfläche hinweg gleichmäßig** verteilt sein. Das heißt genauer, dass die Anzahl der Punkte in einer Teilfläche des Quadrats direkt proportional sein sollte zu dem Flächeninhalt

$$\#_{\text{Punkte in Teilfläche}} \sim \mathcal{A}_{\text{Teilfläche}}.$$

14.3.3 Auswertung

Zählt man nun die Anzahl der Punkte innerhalb des Viertelkreises (= VK) und innerhalb des Quadrats (= Q) insgesamt, so gilt (entsprechend der theoretischen Fundierung mit dem empirischen Gesetz der großen Zahlen) näherungsweise

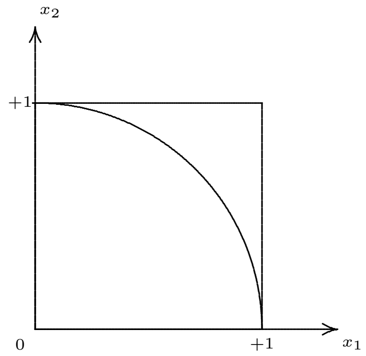
$$\frac{\#_{\text{VK}}}{\#_{\text{Q}}} \approx \frac{\mathcal{A}_{\text{VK}}}{\mathcal{A}_{\text{Q}}} = \frac{\pi}{4},$$

oder umgekehrt

$$\pi \approx 4 \cdot \frac{\#_{\text{VK}}}{\#_{\text{Q}}}.$$

14.3.4 Konkret: Computer-Simulation mit Tabellenkalkulationsprogramm

Man versieht die geometrische Situation mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem



und erzeugt die Punkte im Quadrat durch den Zahlen-Zufallsgenerator aus einem Tabellenkalkulationsprogramm.

Das geschieht beispielsweise dadurch, dass in einem Tabellenkalkulationsprogramm eine Tabelle der folgenden Form angelegt wird.

	x_1	x_2	$x_1^2 + x_2^2$	$1 - (x_1^2 + x_2^2)$	$\text{sgn}(1 - (x_1^2 + x_2^2))$	$\frac{1}{2} \cdot [\text{sgn}(1 - (x_1^2 + x_2^2)) + 1]$
1	0, 9023216753	0, 6952641837	1, 2975766909	−0, 2975766909	−1	0
2	0, 8951625968	0, 6777067764	1, 2606025496	−0, 2606025496	−1	0
3	0, 1320367253	0, 6785863808	0, 477913173	+0, 522086827	+1	1
4	0, 6135727703	0, 82330054	1, 0542953235	−0, 0542953235	−1	0
5	0, 9023216753	0, 6952641837	1, 2975766909	−0, 2975766909	−1	0
6	0, 8951625968	0, 6777067764	1, 2606025496	−0, 2606025496	−1	0
7	0, 1320367253	0, 6785863808	0, 477913173	0, 522086827	1	1
8	0, 6135727703	0, 82330054	1, 0542953235	−0, 0542953235	−1	0
9	0, 1098725018	0, 3424530411	0, 129346052	0, 870653948	1	1
10	0, 5624623634	0, 1006017379	0, 3264846199	0, 6735153801	1	1
11	0, 4042199508	0, 3000488991	0, 2534231105	0, 7465768895	1	1
12	0, 2439242301	0, 197905276	0, 0986655283	0, 9013344717	1	1
13	0, 3367550024	0, 498117411	0, 3615248868	0, 6384751132	1	1
14	0, 6656820499	0, 6597835028	0, 8784468622	0, 1215531378	1	1
15	0, 9777356519	0, 6681532885	1, 402395822	−0, 402395822	−1	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1000	0, 7967597288	0, 7578276601	1, 2091288278	−0, 2091288278	−1	0

- In den beiden linken Spalten werden die Koordinaten im Intervall $[0, 1]$ durch den Zahlen-Zufallsgenerator mit dem Befehl = ZUFALLSZAHL() erzeugt. Ein Drücken von F9 erzeugt jedesmal einen neuen Satz von Zufallszahlen.

  Hier erweist es sich als günstig, dass anstelle des Vollkreises nur der Viertelkreis betrachtet wird: Der Zufallsgenerator liefert positive Zahlen im Intervall $[0, 1]$.

- Man überlege, dass durch den Term in der rechten Spalte mit den beiden Werten 0 oder 1 angegeben wird, ob sich der zugehörige Punkt im Viertelkreis befindet oder nicht. Die mathematische Signum-Funktion sgn ist im Tabellenkalkulationsprogramm als Befehl = VORZEICHEN() realisiert.

- Bildet man dann die Summe (SUM) in der letzen Spalte, so erhält man die Anzahl $\#_{\text{VK}}$ der Punkte im Viertelkreis. Die Anzahl $\#_{\text{Q}}$ aller Punkte kann man in der letzten Zeile ganz links ablesen.

- Der Näherungswert für π ergibt sich wie oben ausgeführt zu

$$\pi \quad \approx \quad 4 \cdot \frac{\#_{\text{VK}}}{\#_{\text{Q}}}.$$

Das kann man natürlich im Tabellenkalkulationsprogramm programmieren.

14.3.5 Konkret: Simulation mit Reis

Der Viertelkreis aus Abschnitt 14.3.1 wird (möglichst groß) auf ein leeres Plakat gezeichnet. Evtl. spannt man eine transparente Klebefolie (mit der Klebeseite nach oben) über das Plakat. Man wirft dann Reiskörner auf dieses Papier.

Schließlich zählt man die Reiskörner, die innerhalb des Viertelkreises bzw. innerhalb des Quadrats kleben bleiben. Der Näherungswert für π ergibt sich wie oben ausgeführt zu

$$\pi \quad \approx \quad 4 \cdot \frac{\#_{\text{VK}}}{\#_{\text{Q}}}.$$

Kritisches Moment bei diesem Experiment ist die Frage, ob beim Werfen der Reiskörner das Prinzip 14.3.2 der gleichmäßigen Verteilung über die gesamte Fläche gewahrt ist.

Würden die Reiskörner beispielweise zentral über dem Mittelpunkt des Quadrats fallengelassen werden, so würden sie das Quadrat normalverteilt bzw. binomialverteilt bedecken.

15 Lagebeziehungen im Raum

Wir gehen davon aus, dass uns die Begriffe

> Punkt, Strecke, Halbgerade, Gerade, Streckenlänge, Lot auf eine Gerade, Winkel zwischen zwei Geraden

aus der ebenen Geometrie bekannt sind. Tatsächlich muss man bei einer Übertragung der Geometrie von der Zeichenebene in den ,,3D Raum" Sorgfalt walten lassen.

15.0.6 Grundlegende Begriffe

Wir setzen die Begriffe

> Punkt, Strecke, Halbgerade, Gerade

als bekannt auch im Raum voraus.

15.1 Geraden

15.1.1 Definition: Parallelität zweier Geraden im Raum

Die folgenden zwei Aussagen stellen verschiedene, aber eben äquivalente Definitionen, von ,,Parallelität im Raum" bereit.

Zwei Geraden g und h im Raum heißen *parallel* zueinander, wenn sie ...

- ,,an jeder Stelle" den gleichen Abstand haben.
- **zwei** gemeinsame Lote haben.

  Bei Verwendung dieser Definition muss der Begriff ,,Lot" vorab geklärt sein.
- von einer dritten Gerade unter dem gleichen Winkel geschnitten werden.

  Bei Verwendung dieser Definition muss der Begriff ,,Winkel" vorab geklärt sein. Sie nimmt den eigentlichen ,,Grundsatz über Stufenwinkel" vorweg.

15.1.2 Vergleich: Parallelität in der Zeichenebene und im Raum

In Abschnitt 3.4.1 hatten wie vier verschiedene, aber äquivalente, Definitionen von Parallelität zweier Geraden in der Ebene bereitgestellt.

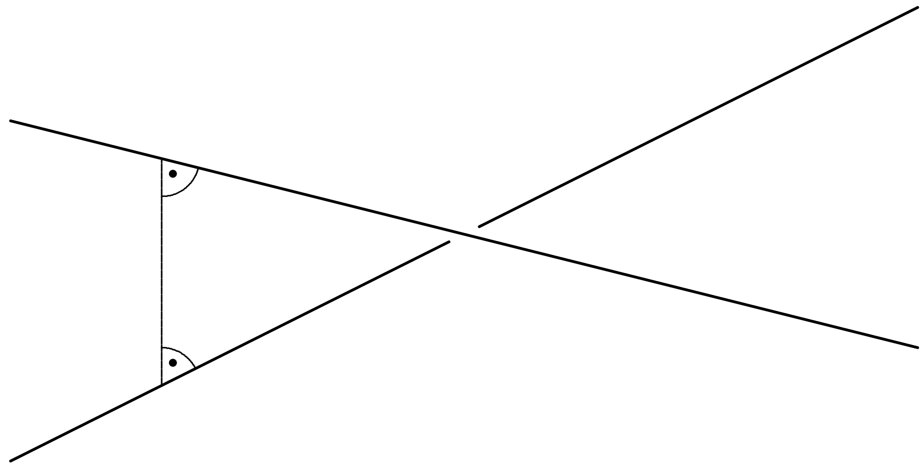
Die beiden zusätzlichen definierenden Eigenschaften von parallelen Geraden in der Ebene

- ,,Kein gemeinsamer Punkt" oder
- ,,Ein gemeinsames Lot"

können nicht in den Raum übertragen werden. Im Raum gibt es nämlich die neue Relation ,,windschief".

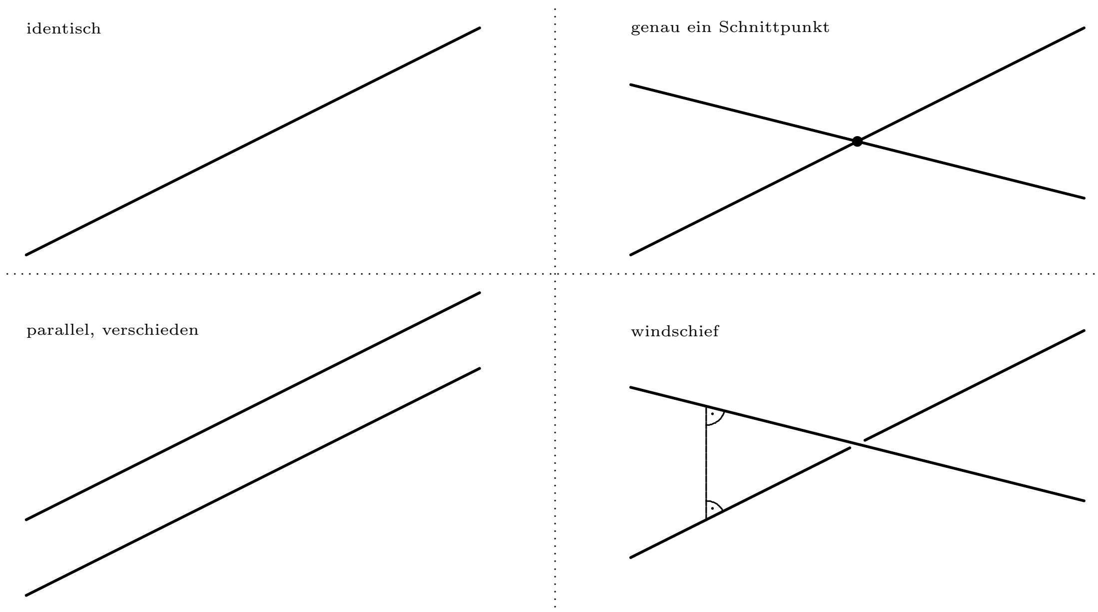
15.1.3 Definition: Windschiefe Geraden

Zwei Geraden im Raum heißen *windschief (zueinander)*, wenn sie weder parallel sind noch einen Schnittpunkt haben.



15.1.4 Vier verschiedene Situationen

Für die Lagebeziehung zweier Geraden im Raum gibt es die folgenden (sich ausschließenden) Alternativen.



15.2 Ebenen

15.2.1 Definition: Ebene

Es seien g und h zwei Geraden im Raum, die

- sich schneiden oder
- parallel zueinander, aber verschieden, sind.

Die Vereinigungsmenge der Geraden, die einen Punkt mit g und einen anderen Punkt mit h gemeinsam haben, heißt die *von g und h aufgespannte Ebene*.

Jede Teilmenge des Raums, die auf diese Weise zustandekommt, heißt einfach *Ebene*.

15.2.2 Winkel zwischen sich schneidenden Geraden

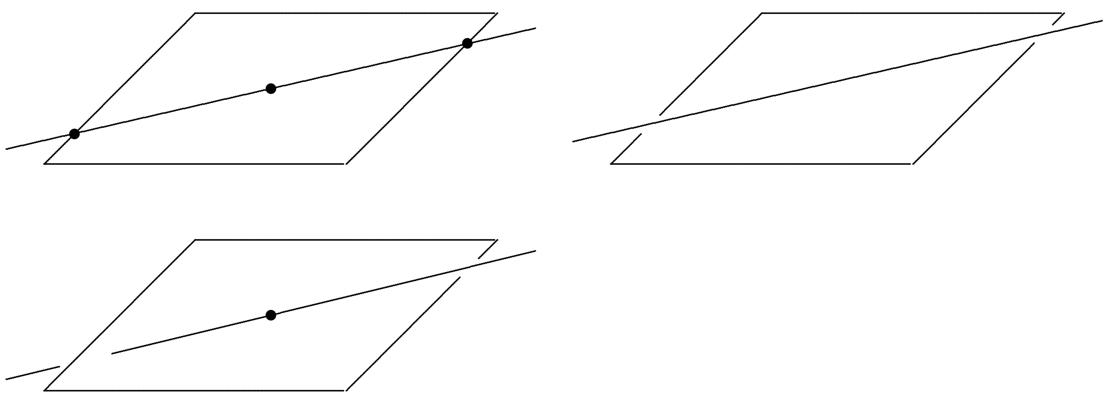
Wenn sich zwei Geraden in einem Punkt schneiden, so spannen sie eine Ebene auf. Auf diese Weise kann der Begriff des Winkels zwischen zwei sich schneidenden Geraden aus der Geometrie der Zeichenebene in die Geometrie des Raums übertragen werden.

15.2.3 Ebene und Gerade

Für die Lagebeziehung zwischen einer Gerade g und einer Ebene e gibt es die folgenden drei sich ausschließenden Möglichkeiten:

- Die Gerade ist in der Ebene enthalten: $g \subset e$.
- Gerade und Ebene haben keinen gemeinsamen Punkt: $g \cap e = \varnothing$.
- Die Ebene und die Gerade schneiden sich in genau einem Punkt: $g \cap e = \{S\}$.
  Der Punkt S wird *Schnittpunkt* genannt.

Wenn die oberen beiden Fälle vorliegen, sagt man, dass Gerade und Ebene *parallel* zueinander liegen.



15.2.4 Lot auf Ebene

Sind eine Ebene e und ein Punkt P außerhalb dieser Ebene gegeben, so gibt es genau einen Punkt L in der Ebene mit folgender Eigenschaft:

> Die Gerade PL steht auf allen Geraden in e durch L senkrecht.

Die Strecke $[PL]$ heißt dann das *Lot* von P auf e, der Punkt L der *Lotfußpunkt*. Man sagt auch, dass der Punkt P senkrecht auf e projiziert wurde.

15.2.5 Definition: Spurgerade

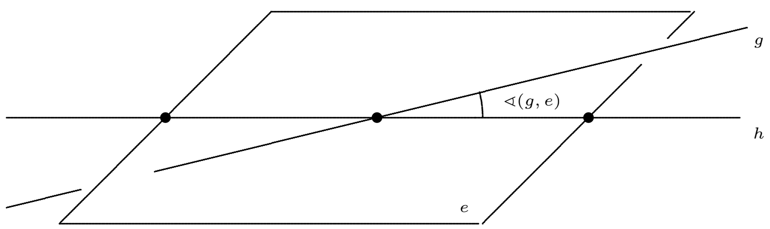
Es seien e eine Ebene und g eine Gerade, die diese Ebene in genau einem Punkt schneidet. Dann kann die ganze Gerade g auf e senkrecht projiziert werden, das Bild bezeichnet man als *Spurgerade*.

15.2.6 Definition: Winkel zwischen Gerade und Ebene

Der Winkel zwischen einer Ebene e und einer Geraden g, die mit der Ebene genau einen Schnittpunkt hat, wird definiert als der Winkel zwischen Gerade und Spurgerade.

$$\sphericalangle(g,e) \quad := \quad \sphericalangle(g,h), \qquad \text{wobei } h \text{ Spurgerade.}$$

Damit haben wir die Messung des Winkels zwischen Gerade und Ebene auf die Messung des Winkels zwischen zwei Geraden zurückgespielt.

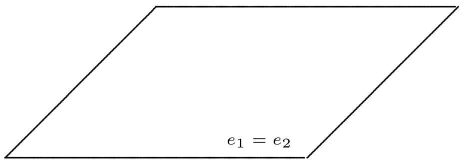


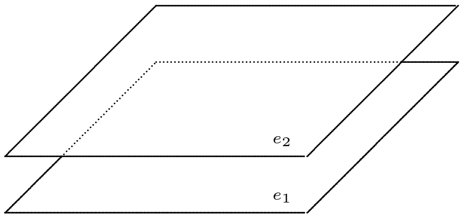
15.2.7 Zwei Ebenen

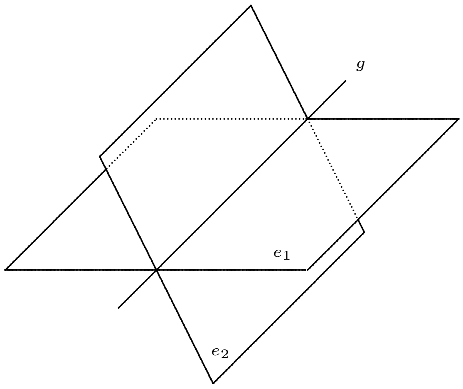
Für die Lagebeziehung von zwei Ebenen e_1 und e_2 im Raum gibt es die folgenden drei sich ausschließenden Möglichkeiten:

- Die beiden Ebenen sind identisch: $e_1 = e_2$.
- Sie haben keinen gemeinsamen Punkt: $e_1 \cap e_2 = \varnothing$.
- Die beiden Ebenen schneiden sich in einer Geraden s: $e_1 \cap e_2 \;=\; s$.
  Diese Gerade wird dann *Schnittgerade* genannt.

Wenn die ersten beiden Fälle zutreffen, so sagt man, dass die beiden Ebenen *parallel* zueinander sind.







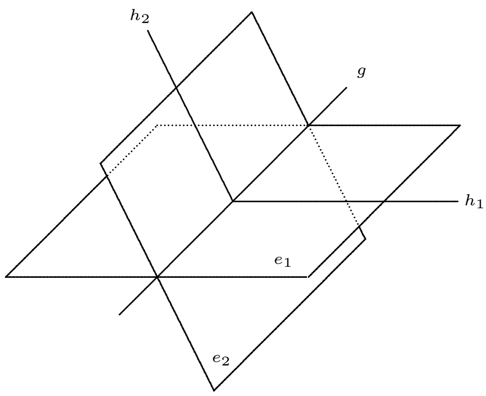
15.2.8 Winkel zwischen zwei Ebenen

Es seien e_1 und e_2 zwei Ebenen mit einer Schnittgeraden g.

Betrachte einen Punkt P auf g und dann zwei Geraden $h_1 \subseteq e_1$ und $h_2 \subseteq e_2$, die im Punkt P auf der Schnittgeraden senkrecht stehen.

Der Winkel zwischen den Ebenen ist dann definiert als der Winkel zwischen diesen beiden Geraden:

$$\sphericalangle(e_1, e_2) \;:=\; \sphericalangle(h_1, h_2).$$



16 Körper

16.1 Grundsätzliche Begriffe

16.1.1 Definition: Körper

Eine zusammenhängende und beschränkte Teilmenge des (als Punktmenge aufgefassten) drei-dimensionalen Raumes, die von endlich vielen ebenen oder gekrümmten Flächenstücken nach außen abgegrenzt ist, heißt ein *Geometrischer Körper*, oft auch kurz *Körper*.

Dies ist keine mathematisch rigorose Definition, da die in ihr enthaltenen Begriffe (Flächenstück, Abgrenzung, Beschränktheit) ihrerseits zunächst einer Definition bedürften. Sie ist aber im Hinblick auf den Alltags- oder Schulgebrauch ausreichend genau und aussagekräftig.

16.1.2 Weitere Begriffe

- Im Zusammenhang mit dem Körperbegriff heißt ...
  - ein begrenzendes Flächenstück *Seitenfläche*,
  - die Schnittmenge zweier Seitenflächen eine *Kante*,
  - die Schnittmenge von zwei (oder mehr) Kanten eine *Ecke*.
- Die Vereinigungsmenge aller Seitenflächen heißt *Oberfläche* des Körpers.
- Bei vielen — aber nicht allen — Körpern kann die Oberfläche durch Schneiden und Auseinanderfalten oder Abrollen in eine zusammenhängende ebene Figur umgeformt werden. Eine solche ebene Figur heißt ein *Netz* des Körpers.
- Der durch einen Körper erfüllte Raum hat ein Maß, es wird *Volumen* oder *Rauminhalt* genannt. Wird die Oberfläche eines Körpers als mit einer Flüssigkeit zu füllendes Gefäß aufgefasst, so spricht man hier auch vom *Hohlmaß*. Vergleiche später: Größenbereiche.

  Weiteres zum Volumen findet sich in Kapitel 19.
- Der ,,Flächeninhalt der Oberfläche" eines Körpers wird als *Oberflächeninhalt* bezeichnet und mit O bezeichnet. Da dies ein schwerfälliges Wortungetüm ist, spricht man abkürzend ebenfalls von der *Oberfläche* des Körpers.

  Weiteres zum Oberflächeninhalt findet sich in Kapitel 20.
- Ein Körper heißt *konvex*, wenn zu je zwei Punkten des Körpers auch die Verbindungsstrecke dazu gehört.

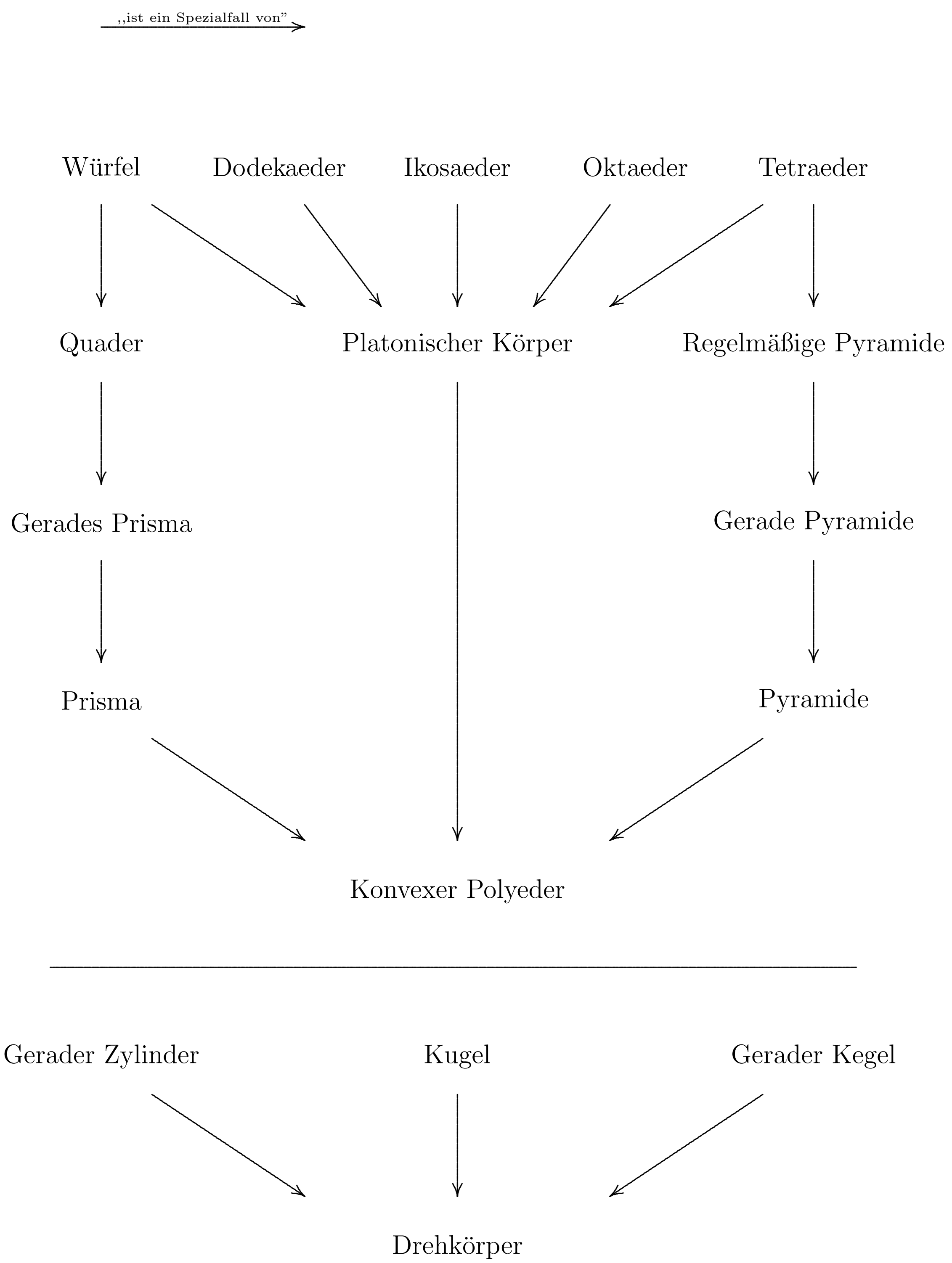
16.1.3 Bemerkungen

- Oft begegnet man der Formulierung, dass ein Körper x aus y-artigen Seitenflächen „besteht". Im Hinblick auf die obige Definition ist diese Sprechweise falsch, im Hinblick auf die Alltags- oder Schulsprache zu wenig sorgsam.

- Oft wird weder zwischen dem Körper an sich und seiner Oberfläche noch zwischen Oberfläche und Oberflächeninhalt unterschieden. Genauere Unterscheidungen erscheinen im Hinblick auf den Gebrauch im Alltag als zu penibel. Bei genaueren Auseinandersetzungen mit diesen Begriffsbildungen, beispielsweise im Mathematikunterricht können diese Gleichsetzungen aber Verwirrung stiften. Die Lehrerin sollte sich der Problematik bewusst sein.

Im Rahmen der Schule werden im wesentlichen zwei Grundtypen thematisiert: Die konvexen Polyeder und die Drehkörper.

16.2 Ein Überblick über die Körpertypen



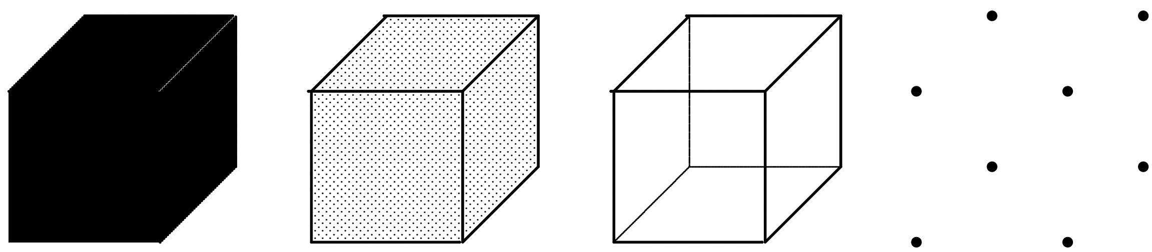
16.3 Körper in der Schul-Welt

Wir beschreiben zunächst allgemein Aktivitäten, die Schülerinnen und Schüler im Zusammenhang mit Körpern entwickeln können. Beispiele und Ideen, die stärker auf die einzelnen Körpertypen Bezug nehmen, werden weiter unten behandelt.

16.3.1 Erfassung in der Wirklichkeit

- Auffinden von Körpern in der Wirklichkeit: Klassenzimmer, Turnhalle, Haushalt, Freizeit.
  - Stück Kreide,
  - Fußball,
  - Kerze, Verpackungen aller Art,
  - Lampions,
- Bilder in Büchern, Arbeitsheften, Katalogen.
- Abstraktion von anderen Körpereigenschaften wie Farbe, Oberflächenbeschaffenheit, Gewicht, Volumen, Konsistenz, Längen, oder: Der Körper existiert nicht als Vollmodell: Klassenzimmer.
- Das Problem der Idealisierung: Häufig hat ein Körper in der Wirklichkeit nur strukturell-näherungsweise die exakte Form des mathematischen Modells. (vgl Spielwürfel, Tafelschwamm).
- Beschreiben ihrer Eigenschaften: rund, eckig, kugelförmig, quaderförmig. Die Seitenflächen sind rechteckig, quadratisch.

16.3.2 Handeln an Modellen



3|M Massivmodelle (Vollmodelle): Der Körper existiert als 3-dimensionaler raumerfüllender physikalischer Körper.

  - Schneiden aus Kartoffeln oder Käse
  - Schneiden aus Styropor
  - Sägen aus Holzblöcken oder Ytong-Steinen
  - Formen aus Knetgummi, Teig
  - Fertige Bausteine

2|F Flächenmodelle: Der Körper ist materiell in Form seiner 2-dimensionalen Oberfläche verwirklicht.

- Basteln aus Pappe, Papier (→ Lampions)
- Plastik- oder Blechdosen, Fertigmodelle
- Anfertigen mit speziellen ,,Baukästen" (vgl. Polydron, S. 161 RadatzSchipper3)
- Befüllen mit Wasser oder Sand und so Vergleich der Rauminhalte. In diesem Zusammenhang heißen Flächenmodelle auch *Hohlmodelle*.
- Die Seitenflächen eines Klassenzimmers sind als Wände, Boden und Decke ,,materialisiert".

2|N Bedeutsam im Zusammenhang mit Flächenmodellen sind die Netze: Schneidet man das Flächenmodell eines Körpers geeignet auf und wickelt oder rollt es ab, so entsteht das ebene 2-dimensionale Netz des Körpers.

1|K Kantenmodelle: Der Körper ist in Form seiner 1-dimensionalen Kanten verwirklicht.

- Stecken aus Schaschlikspießen (Zahnstochern), die Verbindungen an den Ecken werden durch Knetgummi oder Wachs realisiert.
- Die Kanten werden durch Pfeifenputzerdraht (Draht mir eingeflochtenen farbigen Plastik-Härchen) verwirklicht. Der Draht kann an den Ecken gebogen werden.
- Konstruieren mit Magnetstreben
- Konstruieren mit Fertigbauteilen aus Baukästen
- Fertigmodelle.

1|S Bedeutsam im Zusammenhang mit Kantenmodellen sind Schrägbilder: Die Kanten werden perspektivisch gezeichnet, so dass ein räumlicher Eindruck für den Betrachter entsteht.

0|P Punktmodelle sind nur zeichnerisch-perspektivisch darstellbar, nicht aber als reale Modelle herstellbar.

Beim Herstellen all dieser Modelle tritt die oben angesprochene Problematik des idealen Körpers wieder in Erscheinung: Hier gilt es, feinfühlig — je nach Unterrichtssituation — diesem Problem Rechnung zu tragen: Beim Abzählen von Kanten, Ecken oder Seitenflächen eines Würfels kommt es nicht so sehr auf die exakte Form an. Das Herausarbeiten der Parallelität der Kanten erfordert dagegen ein sorgfältiger hergestelltes Modell.

16.3.3 Andere Aktivitäten

- Zähl-Kombinatorik am Körper
  - Zahl der Ecken, Kanten, Seitenflächen am Körper?
  - Wieviele Seitenflächen bzw. Kanten stoßen an einer Ecke zusammen? Wieviele Kanten stoßen an eine Seitenfläche?
  - Zahl der nicht-deckungsgleichen Netze eines Würfels (11) oder Quaders (54).
  - Zahl und Anordnung der Laschen im Netz: Da in einem Netz 6 Seitenflächen an 5 Kanten (bzw. Falzen) verbunden sind, braucht man $12 - 5 = 7$ Laschen.
  - Kombinatorik bei platonischen Körpern (vgl. oben):
  - Euler'sche Polyederformel
  - Spielwürfel: Die Summe der Augen auf je zwei Gegenseitenflächen ist 7.
- Die Lage des Körpers im Raum.
  - Erkennen oder Darstellen aus verschiedenen Perspektiven
  - Veränderung bei Drehungen im Raum (Spielwürfel).
- Konstruieren, Bauen mit Körpern
  - Turmbauten nach Grundriss
  - Dichteste Packungen: Bausteine verpacken, in Kasten einordnen.
- Zeichnen:
  - Schrägbilder (vgl. nächster Abschnitt)
    - Würfel oder Quader
    - Perspektiv-Täuschung: Hintere Teile wirken größer als vordere
    - Darstellung von Verdeckungen
  - Zentralsicht von einer der sechs Hauptseiten (links, rechts, oben, unten, vorne hinten)
  - Netze: Siehe später!
- Rechnen:
  - Wieviel Papier (Zahl der Kästchen) braucht man für ein Flächenmodell?
  - Wieviel Draht braucht man für ein Drahtmodell?

16.4 Schrägbild-Darstellungen

16.4.1 Einstieg

Unter der Schrägbild-Darstellung (kurz: Schrägbild) eines geometrischen Körpers (3D) versteht man ein perspektivisches Abbild — meistens der Kanten — in der Zeichenebene (2D), die aufgrund der geometrisch-optischen Bedingungen des Sehens beim Betrachter die Illusion der Räumlichkeit hervorruft. Es wird gemäß der folgenden Konvention angefertigt:

- Die Kanten in Ebenen, die senkrecht zur Blickrichtung stehen, werden in maßstäblicher (oder wahrer) Größe gezeichnet.
- Die Kanten, die parallel zur Blickrichtung verlaufen, werden ...
  - bzgl. des Maßstabs gekürzt (mit einem Faktor $q < 1$)
  - unter einem Winkel α gegenüber den horizontalen und senkrecht zur Blickrichtung verlaufenden Kanten

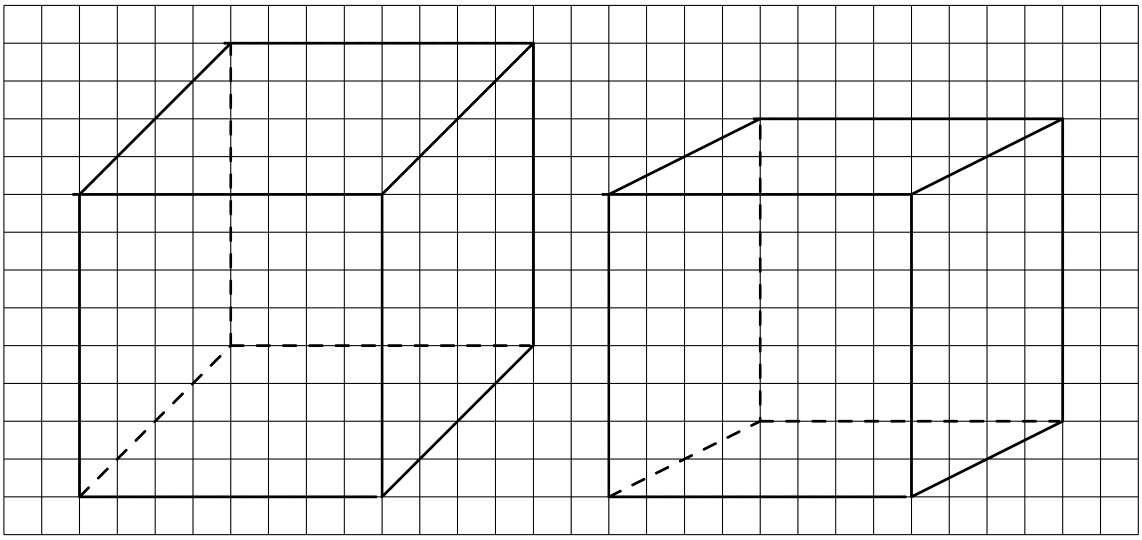
  gezeichnet.
- Alle übrigen (schräg verlaufenden) Kanten und Linien werden zwischen den dann vorgegebenen Endpunkten direkt gezeichnet.

16.4.2 Beispiele Auf der nächsten Seite 222 sind einige konkrete Beispiele zu sehen.

- Die Werte für q und α bei den beiden ersten Beispielen wirken sehr ungewöhnlich, im Hinblick auf ein Zeichnen auf Kästchenpapier sind sie sehr gut geeignet.
- Sehr günstig ist es, verdeckte Kanten durch Strichelung, Punktelung oder Verdünnung nur anzudeuten

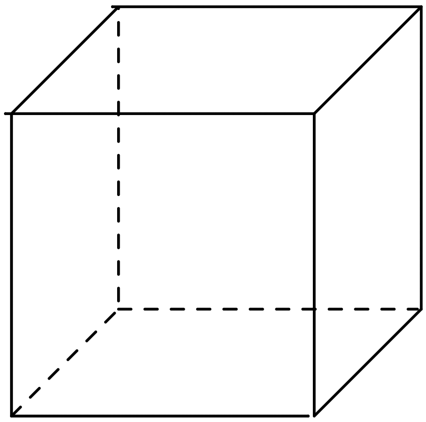
  Unterlässt man dies, so sind im allgemeinen die Tiefen (vorne — hinten) nicht mehr unterscheidbar. Man kann dies beim Necker-Würfel (Mitte unten) wahrnehmen, bei längerer Betrachtung ,,kippt" die Wahrnehmung auf die Darstellung links oder rechts.
- Für das tatsächliche Zeichnen von Perspektivdarstellungen gibt es noch viele weitere Konventionen, die im Spannungsfeld aus
  - einfachem Anfertigen in der Zeichenebene und
  - leichtgängigem Erfassen der räumlichen Situation

  angesiedelt sind:
  - Militär-Perspektive
  - Verkürzung weiter hinten liegender Kanten.
- Innerhalb der Schulgeometrie erfolgt eine Beschränkung auf Schrägbilder von Würfeln oder Quadern.
- Zur Übung: Zeichnen Sie eine Kugel oder einen Torus (vgl. Abschnitt 18.5) im Schrägbild.

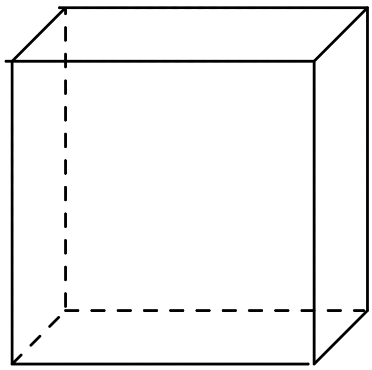


$q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha = 45\,^{\circ}$

$q = \frac{\sqrt{5}}{4}$, $\alpha = 26,6\,^{\circ}$

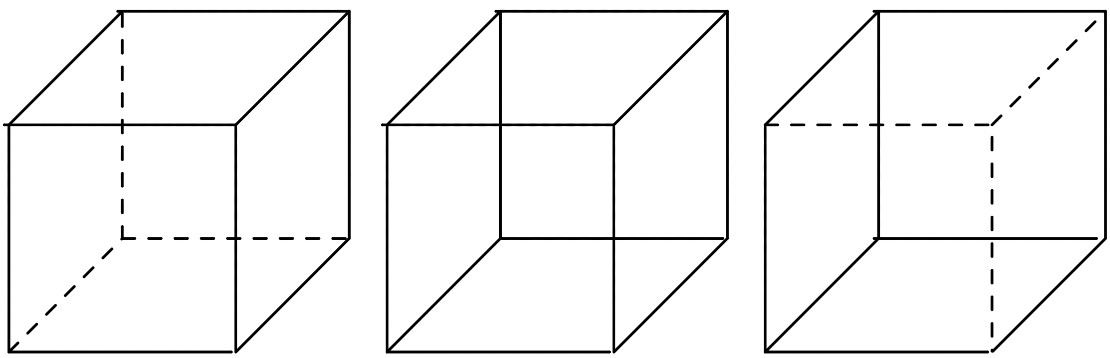


$q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45\,^{\circ}$



$q = \frac{1}{4}$, $\alpha = 45\,^{\circ}$

Der Necker-Würfel

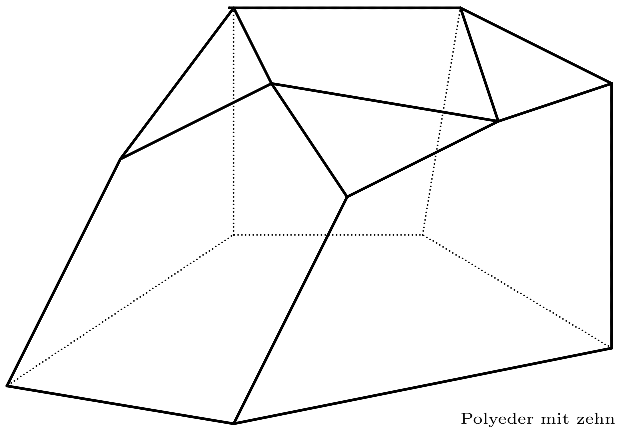


17 Polyeder

17.1 Einstieg

17.1.1 Definition: Polyeder

Ein Körper, der ausschließlich von ebenen Flächenstücken begrenzt ist, heißt *Polyeder*. Es sind auch die Bezeichnungen *Vielflach* oder *Vielflächner* üblich.



Polyeder mit zehn Seitenflächen

Ein Massivmodell eines Polyeders erhält man also durch mehrfaches ebenes Abschneiden mit Messer, Säge, Spachtel oder heißem Draht aus einem zuvor ,,unförmigen" Körper.

17.1.2 Anzahlen von Ecken, Kanten , Seitenflächen

Liegt ein Polyeder vor, so kann man klar die folgenden Anzahlen definieren

$$\begin{aligned} E &:= \text{Anzahl der Ecken} \\ K &:= \text{Anzahl der Kanten} \\ F &:= \text{Anzahl der Seitenflächen.} \end{aligned}$$

Gelegentlich findet man im Schulkontext Aufgaben vor, wo solche Anzahlen bei Körpern bestimmt werden sollen. Mathematisch und praktisch ist dies nur sinnvoll, wenn es sich um Polyeder handelt. Für andere Typen von Körpern ist das nicht sinnvoll, manchmal auch nicht eindeutig.

17.2 Die Euler'sche Polyederformel

17.2.1 Definition: Euler'sche Charakteristik

Für einen vorgegebenen Polyeder heißt der aus den obigen Anzahlen gebildete Term

$$\chi \quad := \quad \underbrace{E - K + F}_{\text{math.}} \quad = \quad \underbrace{E + F - K}_{\text{GS}}.$$

die *Euler'sche Charakteristik*. Mit ihr hat es, wie wir gleich sehen werden, eine besondere Bewandnis.

17.2.2 Beispiele

Wir wollen diese Charakteristik an einigen Beispielen ermitteln.

- Ermitteln Sie — gedanklich — die Euler-Charakteristik für folgende Polyeder
  - Quader
  - Tetraeder
  - Dreiecks-Prisma
  - Quadratische Pyramide
  - Polyeder wie oben abgebildet
- Experiment: Nehmen Sie ein Quaderstück Käse und schneiden Sie beliebige Stücke ab. Sind die Schnitte eben, so bleibt das Stück ein Polyeder. Ermitteln Sie die Euler-Charakteristik des Käsestückes.

Sie werden jeweils den folgenden Satz bestätigt finden.

17.2.3 Satz: Die Euler'sche Polyederformel

Die Euler-Charakteristik eines **konvexen** Polyeders hat immer den folgenden Wert.

$$\chi \quad := \quad E - K + F \ = \ 2 \qquad \text{(Euler'sche Polyeder-Formel)}$$

17.2.4 Beispiele zur Euler'schen Polyederformel

- Das sieht man auch bei den weiter unten zu behandelnden platonischen Körpern.
- Überlegung: Wie verändern sich die Zahlen E, K und F, wenn man eine Ecke eines Polyeders abstumpft, das heißt durch Abschneiden abflacht.
  - Ecken: Eine Ecke wird abgeschnitten, es entstehen drei neue: $E' = E + 2$.
  - Kanten: Es entstehen drei neue Kanten: $K' = K + 3$.
  - Seitenflächen: Es entsteht eine neue Seitenfläche: $F' = F + 1$.
  - Insgesamt gilt:

    $$E' - K' + F' \ = \ (E+2) - (K+3) + (F+1) \ = \ E + F - K.$$

    Das heißt, beim Abstumpfen verändert sich die Euler-Charakteristik nicht.

17.2.5 Mathematisches Sätzchen

Um das Netz eines konvexen Polyeders mit E Ecken zum Flächenmodell zusammenzukleben, muss man im Netz $(E-1)$ Laschen vorsehen.

17.2.6 Beweis

(1) Im Netz hängen F Flächen an $(F-1)$ Kanten zusammen, für diese Kanten benötigt man keine Laschen.

(2) Der Polyeder hat insgesamt K Kanten. Er muss also an den verbleibenden

$$L = K-(F-1)$$

Kanten mit Hilfe von Laschen ($L =$ Laschenzahl) verklebt werden.

(3) Durch Umstellung der Euler'schen Polyederformel erkennt man, dass

$$K-F = E-2.$$

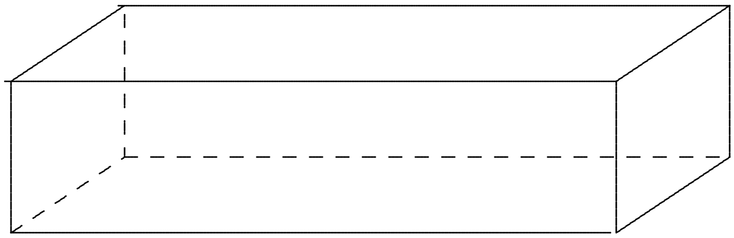
(4) Wird die Formel aus (3) in die Formel aus (2) eingesetzt, so erhält man

$$L = K-(F-1) = K-F+1 = E-2+1 = E-1.$$

17.3 Quader

17.3.1 Definition: Quader

Wird ein geometrischer Körper ausschließlich von Rechtecken begrenzt, so wird er *Quader* genannt.



Dies ist eine minimalistische Definition. In ihr wird versucht, eine Liste von eindeutig charakterisierenden Eigenschaften so sparsam wie möglich zu halten.

17.3.2 Weitere Eigenschaften

Je nach Bedarf an weiteren alltagsrelevanten Erkennungsmerkmalen oder fachdidaktischer Ausleuchtung kann man daraus — hier ohne weitere Begründung — viele weitere Eigenschaften erschließen:

- Seitenflächen: Ein Quader wird durch **sechs** Rechtecke begrenzt. Diese Rechtecke lassen sich in drei Paare einteilen, so dass
  - zwei Rechtecke innerhalb eines Paares kongruent und parallel zueinander sind,
  - zwei Rechtecke aus verschiedenen Paaren an einer gemeinsamen Kante senkrecht aufeinander stehen.
- Kanten: Ein Quader hat zwölf Kanten. Diese lassen sich in drei Gruppen zu je vier Kanten einteilen, so dass
  - die Kanten innerhalb einer Gruppe gleich lang sind und parallel verlaufen,
  - je drei Kanten aus verschiedenen Gruppen in einer Ecke senkrecht aufeinander stoßen.

  Die drei verschiedenen Kantenlängen bezeichnet man meist mit *Länge, Breite, Höhe.* Je nach Situation ist einer dieser Begriffe durch den der *Tiefe* ersetzt. Als Symbole dafür sind

  $$a, b, c \qquad \text{oder} \qquad \ell, b, h$$

  üblich.
- Ecken: Ein Quader hat acht Ecken.
- Gelegentlich wird ein Quader, bei dem zwei Seitenflächen quadratisch sind, als *Säulenquader* bezeichnet.

- Eine Strecke, die zwei Ecken des Quaders verbindet, die nicht in einer gemeinsamen Seitenfläche liegen, bezeichnet man als *Raumdiagonale*.
  - Ein Quader hat vier Raumdiagonalen.
  - Die vier Raumdiagoanlen schneiden sich in einem Punkt innerhalb des Quaders. Dieser Schnittpunkt heißt *Mittelpunkt* = *Schwerpunkt* des Quaders.
  - Die Länge einer Raumdiagonale ist aufgrund des Satzes von Pythagoras gleich $\sqrt{\ell^2 + b^2 + h^2}$, vgl. Abschnitt 12.7.5.
- Netze: Sind bei einem Quader alle drei Kantenlängen verschieden, so gibt es 54 nicht-kongruente Netze.
- Ein Quader ist der Spezialfall eines Prismas, damit auch der eines Polyeders.
- Umgekehrt ist der Würfel der Spezialfall eines Quaders.

17.3.3 Quader in der Schul-Welt

Das Auftreten von **rechten** Winkeln an den Ecken bzw. Kanten von Quadern bedeutet, dass sich quaderförmige Körper in der Realität

- lückenlos sparsam ,,packen" lassen,
- stabil auf Unterlagen stehen,
- selbst stabile Unterlagen sind,
- sich stabil stapeln lassen.

Aus diesen Gründen sind Quader in der uns umgebenden Welt vielfach präsent:

- Verpackungsschachteln für Seife, Schuhe, Lebensmittel, Getränke, Geräte, CDs
- Zündholzschachtel, Geschenke
- Umzugskisten
- Paperback-Taschenbuch
- Ziegelsteine, Bausteine, Jura-Quadersteine
- Spielbausteine aller Art, Lego-Steine(?)
- Möbel: Regale, Kommoden, Truhen, Schubladen, Sitzhocker
- Räume: Zimmer, Säle, Klassenzimmer, Turnhalle, Garage, Industriehalle, Container (auf Eisenbahnwaggons, Lastwägen)
- Im Klassenzimmer: Tafelschwamm, Schultasche, Radiergummi
- Sonstiges: Nougatriegel, Käsestück, Holzbrett

17.3.4 Aktivitäten an Quadern

- Massivmodelle herstellen.
- Flächenmodelle herstellen: Das Quadernetz
  - Aufschneiden von Schachteln.
  - Zusammenkleben eines Quaders.
  - Anordnung und Zahl der Klebelaschen im Netz.
  - Siehe auch nächster Abschnitt 17.3.5.
- Kantenmodelle herstellen
- Schrägbild-Zeichnungen:
  - Zeichnen an sich: Welche Größen werden längen- bzw. winkeltreu gezeichnet, welche erscheinen perspektivisch?
  - Welche Teile sind sichtbar, welche unsichtbar?
  - Verändern der Sichtweise: Beschreiben der Körper aus anderer Perspektive.
- Zentralsicht auf eine oder mehrere der Seitenflächen
- Eine Großpackung Papiertaschentücher enthält entlang der Kanten zwei bzw. drei bzw. fünf Päckchen. Wie viele Päckchen bzw. einzelne Taschentücher enthält die Großpackung?

17.3.5 Kopfgeometrie mit Würfel- oder Quadernetzen

Ganz allgemein lässt sich die Kopfgeometrie mit Würfel- oder Quadernetzen so beschreiben:

$\boxed{\text{R}}$ Ein Würfel oder Quader liegt in zwei verschiedenen Repräsentationen vor.

- Konkretes materielles Massiv-, Flächen-, oder Kantenmodell.
- Schrägbild
- Netz perspektivisch
- Netz maßstäblich

$\boxed{\text{M}}$ Verschiedenste geometrische Situationen werden in der einen Repräsentation geeignet markiert durch

- Farbe
- Buchstaben
- Ziffern
- Augenzahl-Symbole
- Pfeile

$\boxed{\text{S}}$ Solche Situationen sind

- Ecken oder Mittelpunkte von Kanten
- Kanten oder Diagonalen von Seitenflächen
- ganze Seitenflächen
- geteilte (rechteckige oder dreieckige) Seitenflächen
- Streckenzüge entlang von Kanten oder Diagonalen

A Es ergeben sich dann die verschiedensten Aufgabenstellungen:

- Übertrage die Situation von einer Repräsentation auf die andere!
- Wie verändert sich die Situation, wenn mit dem Würfel oder Quader ,,operiert" wird:
  * Drehungen
  * Auseinanderfalten eines Flächenmodells zum Netz oder
  * Zusammenkleben des Netzes zum Flächenmodell
  * Kippbewegungen
  * Teilung des Würfels oder Quaders (in 2, 4 8 oder 3, 9, 27 Teilquader)
- Kombinatorische Übungen

17.3.6 Konkret

Die im folgenden beschriebenen Beispiele werden in der Veranstaltung gezeigt.

- Arbeiten mit Punkten
  - Finde zugehörige Ecken in Netz und Flächenmodell!
  - Finde zugehörige Flächen- oder Kantenmittelpunkte in Netz und Flächenmodell!
  - Welche Ecken im Netz kommen beim Zusammenkleben des Quaders zur Deckung?
  - Kann man im Netz zählen, wie viele Ecken ein Quader hat.
- Arbeiten mit Strecken
  - Finde zugehörige Kanten, Diagonalen, Strecken.
  - Finde zugehörige Streckenzüge.
  - Finde je zwei Kanten im Netz, die zusammengeklebt werden müssen.
  - Wie viele Laschen braucht man beim Zusammenkleben?
  - Wie viele Kanten müssen beim Auseinanderfalten aufgeschnitten werden?
  - Kann man im Netz ermitteln, wie viele Kanten ein Quader hat?
  - Ein Käfer krabbelt auf dem Quader. Finde den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten auf der Oberfläche?
- Arbeiten mit Flächen

- Finde zugehörige Seitenflächen!
- Finde im Netz die Vorder-, Rück- Ober-, Unter-, rechte und linke Seitenfläche!
- Finde zugehörige Halb-Seitenflächen (rechteckig oder dreieckig).
- Die ,,halbe Oberfläche" des Quaders wird eingefärbt. Finde die zugehörige Färbung beim Netz!

- Arbeiten mit Körpern
  - Zeichne im Schrägbild die Seitenmittelpunkte ein und verbinde sie zu einem neuen Körper!
  - Ein aus 27 kleinen Würfeln bestehender großer Würfel wird gedanklich in Farbe getaucht und dann ,,auseinandergenommen". Wie viele der kleine Würfel haben dann keine / eine / zwei / drei gefärbte Seitenflächen?
  - Bauen mit Würfeln oder Quadern

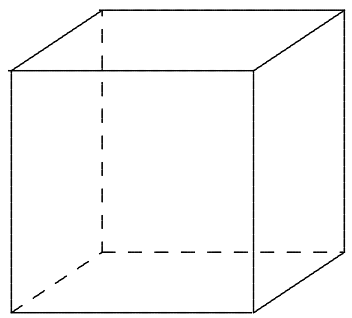
- Andere Ideen:
  - Eine Ecke des Quaders wird — gedanklich — abgeschnitten. Wie wirkt sich das im Netz aus?
  - Wie müssen die Augenzahlen eines Spielwürfels im Netz gezeichnet werden?
  - Ein Quader (Streichholzschachtel) wird mehrfach über Kanten gekippt. Welche (zuvor markierten) Seitenflächen liegen unten, oben,. . . ?

    Welche ,,Spur" hinterlässt der Quader?

17.4 Würfel

17.4.1 Definition

Wird ein geometrischer Körper ausschließlich von Quadraten begrenzt, so wird er *Würfel* oder *Kubus* oder *Hexaeder* genannt.



17.4.2 Weitere Eigenschaften

Daraus lassen sich — wieder ohne weitere Begründung — viele weitere Eigenschaften erschließen:

- Ein Würfel wird durch **sechs** kongruente Quadrate begrenzt. Diese Quadrate lassen sich in drei Paare einteilen, so dass
  - zwei Quadrate innerhalb eines Paares parallel zueinander sind,
  - zwei Quadrate aus verschiedenen Paaren an einer gemeinsamen Kante senkrecht aufeinander stehen.

  An einer gemeinsamen Ecke stehen jeweils drei Quadrate (paarweise) senkrecht aufeinander.
- Ein Würfel hat zwölf gleich lange Kanten. Diese lassen sich in drei Gruppen zu je vier Kanten einteilen, so dass
  - die Kanten innerhalb einer Gruppe parallel verlaufen,
  - je drei Kanten aus verschiedenen Gruppen in einer Ecke senkrecht aufeinander stoßen.
- Ein Würfel hat acht Ecken.
- Als Symbol für die Kantenlänge ist meist

  $$a \qquad \text{oder} \qquad s$$

  üblich.
- (Wh:) Eine Strecke, die zwei nicht in einer gemeinsamen Seitenfläche gelegenen Ecken verbindet, heißt *Raumdiagonale*.
  - Ein Würfel hat vier Raumdiagonalen.

  - Sie schneiden sich im *Mittelpunkt* = *Schwerpunkt* des Würfels.
  - Alle Raumdiagonalen haben die Länge $\sqrt{3} \cdot a$.

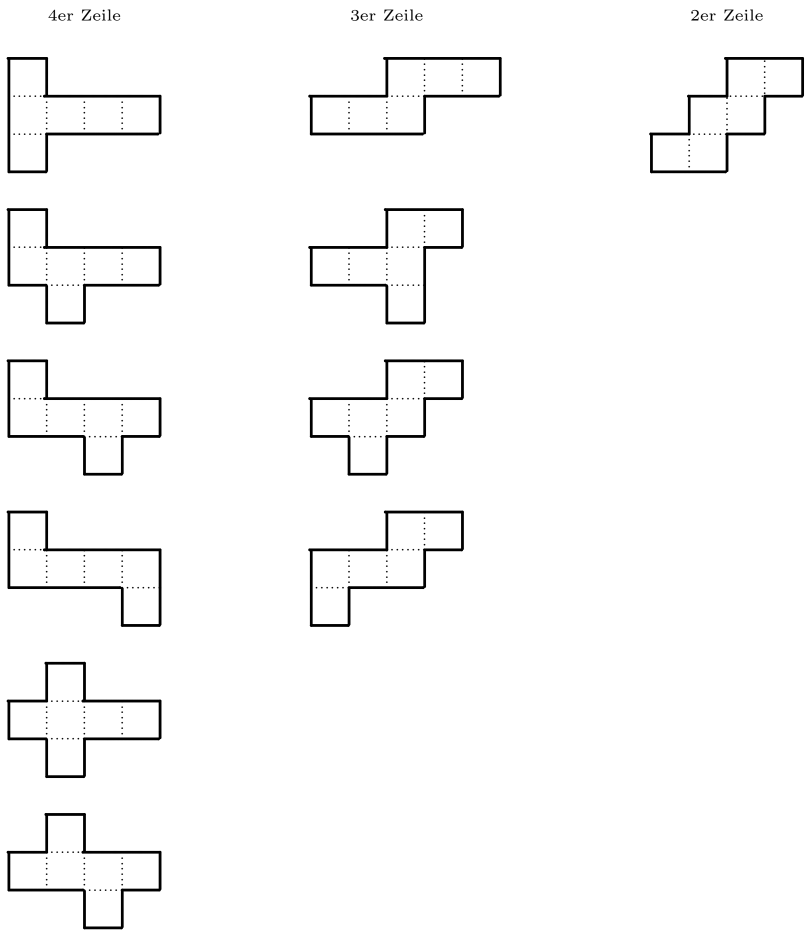
- Ein Würfel ist ein spezieller Quader: Vor allem in der Schul- und Didaktikliteratur findet man oft die Auffassung, dass ein Würfel nicht als Quader gilt. Dies mag in Bezug auf den Alltagssprachgebrauch naheliegend sein, im Hinblick auf die Erschließung eines mathematisch-strukturellen Denkens ist diese Auffassung mehr als unglücklich. Im Bayerischen Lehrplan ist als Lernziel festgehalten, dass der Würfel als besonderer Quader erkannt werden soll.

- Ein Würfel ist zugleich einer der platonischen Körper; er wird uns deshalb noch einmal in Abschnitt 17.7 begegnen.

17.4.3 Würfelnetze

Zu einem Würfel gibt es 11 nicht-kongruente Netze.

Um zu ermitteln, wie viele nicht-kongruente Würfelnetze es gibt, orientiert man sich am besten an der „maximalen Zeilenlänge" und überlegt dann, wie die übrigen Seitenflächen angesetzt werden können.



17.4.4 Würfel in der Schul-Welt

Generell lässt sich auf die entsprechenden Überlegungen für Quader verweisen.

Auffinden

- Verpackungen: Eher selten.
- Werbeartikel: Telefonmarkt.
- Würfelzucker: Sind die Zuckerstücke wirklich würfelförmig?
- Spielwürfel. Sie haben eigentlich ,,abgerundete Ecken", sind aber ,,im wesentlichen" als (mathematische) Würfel geformt.

Herstellen

- Flächenmodell aus fertigen Modulen (vgl. Tutorium)

Bauen mit Würfeln:

- Turmbauen: Aufschichten nach Grundriss-Plan.
- Bauen größerer Würfel mit kleineren: Wieviele kleine Würfel werden für einen größeren mit doppelter bzw. dreifacher Kantenlänge benötigt?
- Der Soma-Würfel ist aus $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ kleineren Würfeln zusammengesetzt. Diese kleineren Würfel sind zu

  eine Dreier-Portion und sechs Vierer-Portionen

  zusammengeklebt, so dass

  – alle Portionen verschieden sind und
  – es keine weiteren Dreier- oder Vierer-Portionen

  gibt. Damit wird der Soma-Würfel zu einem ,,3-dimensionalen Tangram" bzw. ,,3-dimensionalen Puzzle". Ideen und Informationen finden sich beispielsweise auf

  `http://www.mathematische-basteleien.de/somawuerfel.htm` oder

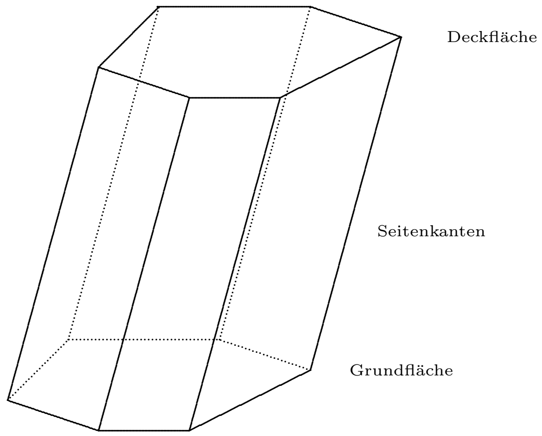
  `http://www.fam-bundgaard.dk/SOMA/SOMA.HTM`

- Kopfgeometrie:
  – Finde unter Quadrat-Sechslingen die Würfelnetze
  – Zuordnung von Seitenflächen, Kanten und Ecken zwischen Schrägbild-Darstellung und Würfelnetz.
  – Kopfgeometrie wie in Abschnitt 17.3.5.

17.5 Prismen

17.5.1 Definition: Prisma Es sei $n \geq 3$.

Wird ein geometrischer Körper durch zwei kongruente n-Ecke und n Parallelogramme begrenzt, so heißt dieser Körper ein *(n-seitiges) Prisma*.



6-seitiges Prisma

17.5.2 Weitere Eigenschaften

Es ergeben sich daraus viele weitere Eigenschaften (ohne Begründung) und Begriffsbildungen:

- Man kann sich ein Prisma dadurch entstanden denken, dass ein (ebenes) n-Eck im Raum parallel verschoben wird. Erfolgt die Verschiebung senkrecht zu dem n-Eck, so wird ein gerades Prisma überstrichen.

- Ein n-seitiges Prisma wird durch insgesamt $(n + 2)$ Seitenflächen begrenzt.

  Die beiden in der Definition erwähnten parallelen n-Ecke heißen in diesem Zusammenhang *Grundfläche* und *Deckfläche*. Man stellt sich oft vor, dass die Grundfläche die ,,Unterseite", die Deckfläche die ,,Oberseite" des Prismas ist.

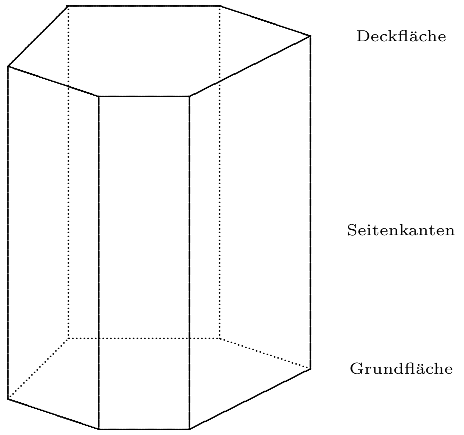
  Die Parallelogramme (oder Rechtecke) bilden zusammen die *Mantelfläche*.

- Ein n-seitiges Prisma hat $3 \cdot n$ Kanten. Die Kanten, die jeweils eine Ecke der Grundfläche mit der zugehörigen in der Deckfläche verbinden, heißen *Seitenkanten*. Die Seitenkanten sind parallel und gleich lang.

- Ein n-seitiges Prisma hat $2 \cdot n$ Ecken.

17.5.3 Definition: Gerades Prisma Es sei $n \geq 3$.

Wird ein geometrischer Körper durch zwei kongruente n-Ecke und n Rechtecke begrenzt, so heißt dieser Körper ein *(n-seitiges) gerades Prisma*.



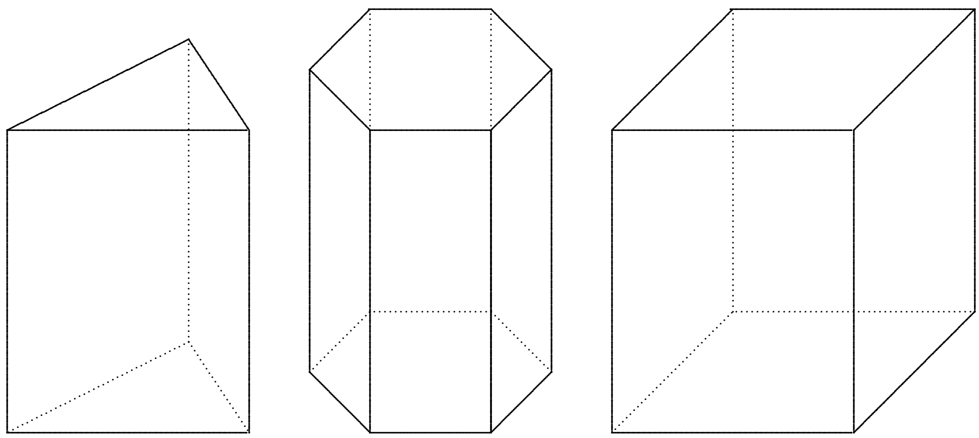
6-seitiges gerades Prisma

17.5.4 Weitere Eigenschaften

Man kann sich ein gerades Prisma dadurch entstanden denken, dass ein (ebenes) n-Eck im Raum parallel verschoben wird. Dabei ist die Richtung der Verschiebung senkrecht zu dem n-Eck.

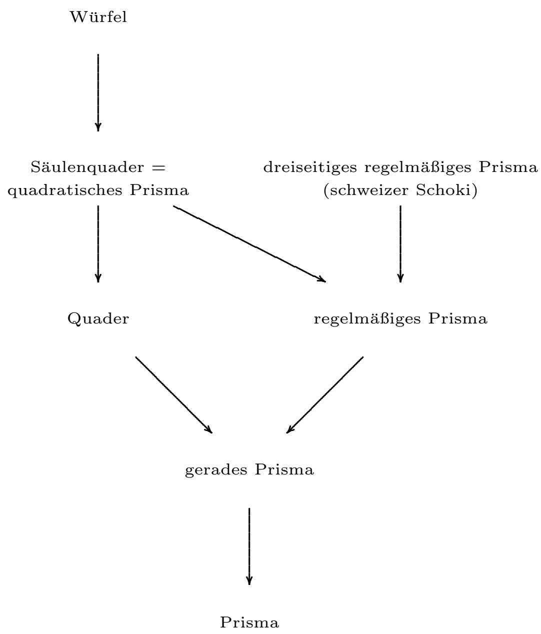
17.5.5 Regelmäßiges Prisma

- Gelegentlich wird ein gerades Prisma *regelmäßig* genannt, wenn Grund- und Deckfläche regelmäßige n-Ecke sind.
- Ein regelmäßiges Prisma heißt *quadratisch*, wenn Grund- und Deckfläche Quadrate sind. Ein quadratisches Prisma ist nichts anders als ein Säulenquader.



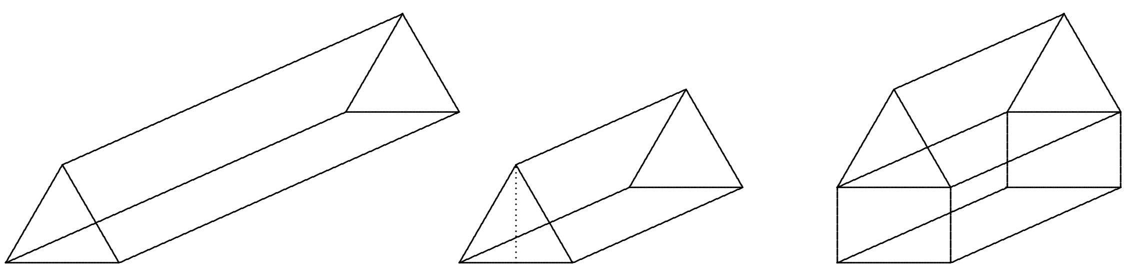
regelmäßiges 3-seitiges Prisma regelmäßiges 6-seitiges Prisma quadratisches Prisma = Säulenquader

17.5.6 Diagramm der speziellen Prismen



17.5.7 Prismen in der Schul-Welt

- Typische Umverpackung einer schweizer Schokolade
- Bleistift, Marketing eines Schreibwaren-Herstellers
- Die klassische Form eines Zeltes
- Das Dachgeschoss unter einem Satteldach hat die Form eines Dreiecksprismas. Die Giebelwände bilden die ,,Grund-" und ,,Deck"-Fläche.
- Glasprisma. In der Alltagssprache verbindet man mit dem Begriff am ehesten ein dreiseitiges Prisma aus Glas, an dem das physikalische Phänomen der Dispersion (unterschiedliche Brechung/Ablenkung von Lichtstrahlen unterschiedlicher Farbe) aufgezeigt werden kann.
- Das mysteriöse Internet-Überwachungsprogramm der NSA heißt ,,PRISM".

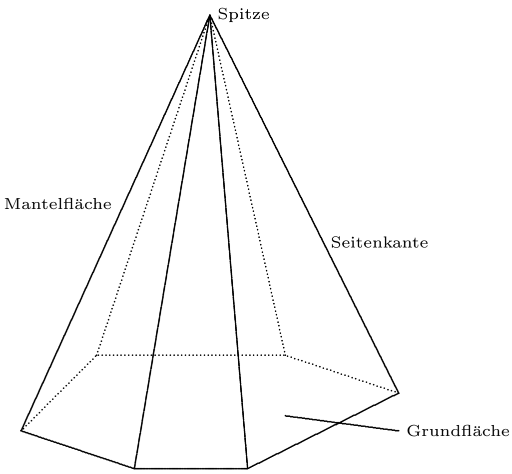


Schweizer Schoki — Zelt — Satteldach

17.6 Pyramiden

17.6.1 Definition Pyramide Es sei $n \geq 3$.

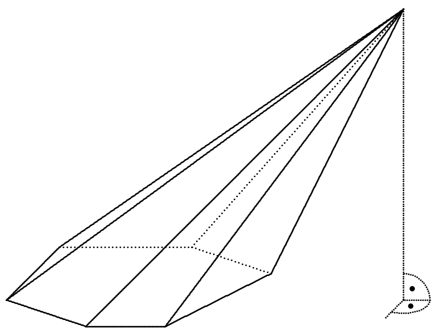
Wird ein geometrischer Körper durch ein n-Eck und n Dreiecke begrenzt, so heißt dieser Körper eine *(n-seitige) Pyramide*.



17.6.2 Weitere Eigenschaften

Es ergeben sich daraus viele weitere Eigenschaften (ohne Begründung) und Begriffsbildungen:

- Die n Dreiecke stoßen an einer Ecke — sie heißt *Spitze* — außerhalb der Grundfläche der Pyramide zusammen. Die Pyramide hat $(n+1)$ Ecken.
- Die Pyramide hat $2 \cdot n$ Kanten. Die von der Spitze ausgehenden Kanten heißen *Seitenkanten*.
- Das n-Eck heißt in diesem Zusammenhang *Grundfläche*. Man stellt sich oft vor, dass diese Grundfläche die ,,Unterseite" der Pyramide ist. Die Pyramide wird durch insgesamt $(n+1)$ Seitenflächen begrenzt. Die Dreiecke bilden zusammen die *Mantelfläche*.
- Die Strecke, die von der Spitze ausgeht und senkrecht auf der Grundfläche steht, heißt *Höhe* der Pyramide. Der Höhenfußpunkt kann außerhalb der eigentlichen Grundfläche liegen.



17.6.3 Gerade Pyramiden

Schaut man in die einschlägige Literatur zur Geometrie-Didaktik, in Schulbücher oder ins Internet, so findet man eine Vielzahl verschiedener Auffassungen darüber vor, was eine gerade Pyramide sein soll.

Gemeinsam an allen Auffassungen ist, dass es sich um eine Pyramide handelt, deren Spitze senkrecht über einem ,,Mittelpunkt" der Grundfläche befindet.

Umgekehrt ausgedrückt: Der Lotfußpunkt des Lotes von der Spitze auf die Grundfläche/ebene ist der Mittelpunkt der Grundfläche.

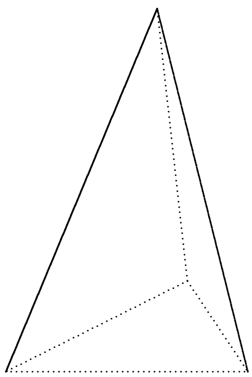
Es besteht aber die Unklarheit über den Begriff ,,Mittelpunkt eines Vielecks", siehe dazu Abschnitt 5.3.3.

17.6.4 Zusätzliche Beobachtung

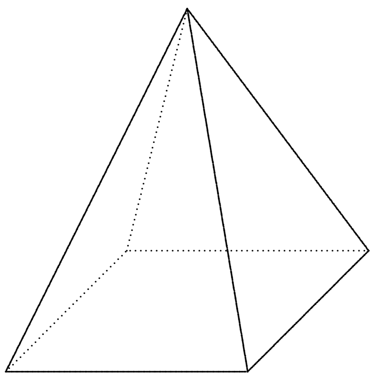
Eine Pyramide hat genau dann gleich lange Seitenkanten, wenn sie gerade bzgl. des Umkreismittelpunkts ist. Der Beweis besteht in einer Anwendung des Satzes von Pythagoras.

17.6.5 Regelmäßige Pyramiden

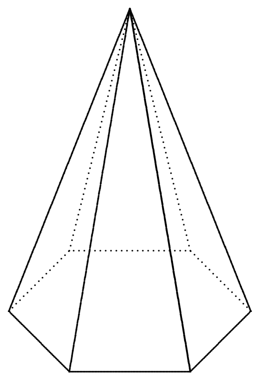
Eine Pyramide heißt *regelmäßig (=regulär)*, wenn die Grundfläche ein regelmäßiges n-Eck ist und die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt liegt.



regelmäßige 3-seitige Pyramide



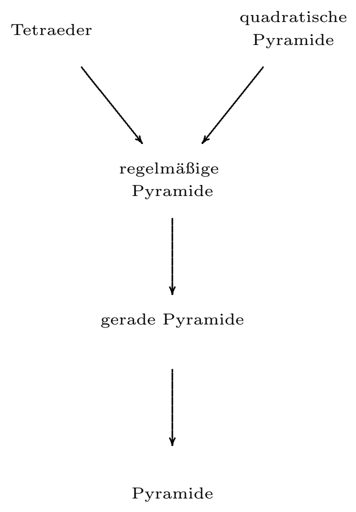
quadratische Pyramide



regelmäßige 6-seitige Pyramide

Da der Mittelpunkt eines regelmäßigen n-Ecks sowohl Umkreismittelpunkt, Drehzentrum, Schwerpunkt, Inkreismittelpunkt und — im Falle des Quadrats — Diagonalenschnittpunkt ist, ist eine reguläre Pyramide jedenfalls gerade.

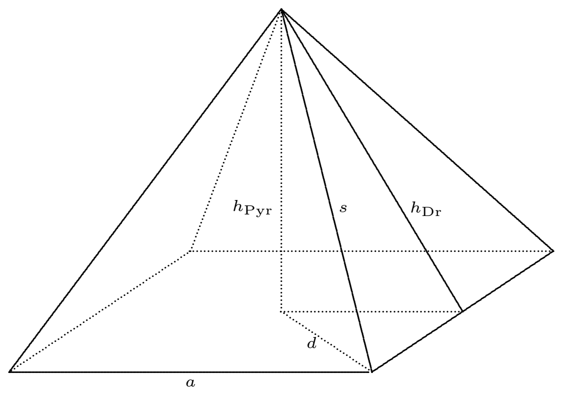
17.6.6 Diagramm der speziellen Pyramiden



17.6.7 Die quadratische Pyramide

Eine Pyramide heißt *quadratisch*, wenn ihre Grundfläche ein Quadrat ist und die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt des Quadrats ist.

Damit ist eine quadratische Pyramide regelmäßig.



17.6.8 Berechnungen an der quadratischen Pyramide

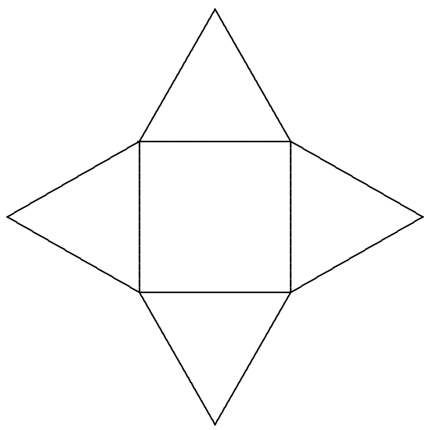
Aufgrund des Hypotenusensatzes von Pythagoras ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned} d^2 &= \tfrac{a^2}{2} \\ h_{\mathrm{Dr}}^2 &= (\tfrac{a}{2})^2 + h_{\mathrm{Pyr}}^2 \\ s^2 &= d^2 + h_{\mathrm{Pyr}}^2 \end{aligned}$$

17.6.9 Quadratische Pyramiden in der Schul-Welt

Auffinden in der Wirklichkeit:

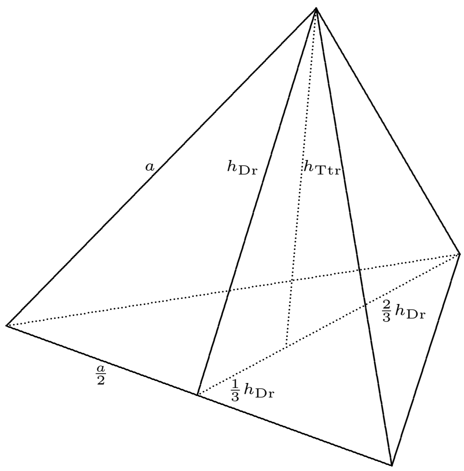
- Die Pyramiden von Gizeh: Beachte, dass diese Pyramiden eigentlich gestuft sind.
- Pyramiden als Dachform werden als Zeltdach bezeichnet, bei quadratischer Grundfläche als Pyramidendach bezeichnet.
- Kirchturmdächer
- Zeltdach eines Garten-Pavillons
- Das Netz



17.6.10 Der Tetraeder

Eine Pyramide heißt (der oder das) *Tetraeder*, wenn ihre Grundfläche ein Dreieck ist und alle Kanten gleich lang sind.

Damit ist ein Tetraeder eine regelmäßige Pyramide und einer der fünf platonischen Körper.



17.6.11 Berechnungen am Tetraeder

Aufgrund des Hypotenusensatzes von Pythagoras und des Satzes 8.4.10 über Seitenhalbierende im Dreieck ergeben sich die Beziehungen

$$a^2 = (\tfrac{a}{2})^2 + h_{\mathrm{Dr}}^2$$
$$a^2 = (\tfrac{2}{3}h_{\mathrm{Dr}})^2 + h_{\mathrm{Ttr}}^2$$

und deshalb

$$h_{\mathrm{Dr}}^2 = \tfrac{3}{4}a^2$$
$$h_{\mathrm{Ttr}}^2 = a^2 - \tfrac{4}{9}(h_{\mathrm{Dr}})^2 = a^2 - \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{3}{4}a^2 = \tfrac{2}{3}a^2.$$

17.6.12 Tetraeder in der Schul-Welt

- Verpackungstüten von Orangensaft oder Bunt-Bonbons.
- Tetrapoden als Wellenbrecher an erosionsgefährdeten Küsten
- In Halbleiter-Chips (in Dioden, Transistoren, Elektronik-Chips, Speicherchips, Prozessoren,. . .) sind Siliziumatome (u.a.) tetraedisch angeordnet.
- Die innere Struktur von Diamanten $\boxed{\text{W}}$ ist ,,tetraedisch".
- So genannte Krähenfüße sind tetraedisch verbundene spitze Stahlnägel. Werden sie irgendwie auf den Boden gelegt, so zeigen die Spitzen in alle Richtungen. Fährt ein Auto darüber, so platzen die Reifen.
- Besonderheit: Verbindet man die Seitenmittelpunkte des Tetraeders durch Kanten, so entsteht wieder ein Tetraeder. Man sagt dazu, dass der Tetraeder ,,selbst-dual" sei.
- Zeichnen des Netzes.

17.7 Platonische Körper

17.7.1 Definition

Ein Polyeder heißt *Platonischer Körper*, wenn er die folgenden ,,Regelmäßigkeiten" aufweist:

- Alle Seitenflächen sind kongruent.
- Die Seitenflächen sind regelmäßige N-Ecke.
- An jeder Ecke stoßen gleich viele Kanten (bzw. Seitenflächen) zusammen.

Das Beispiel einer Doppelpyramide mit einem regelmäßigen 5-Eck als Grundfläche macht deutlich, dass die dritte Eigenschaft wesentlich ist.

Lebensnäher könnte man sagen, dass die platonischen Körper beim Werfen auf eine Tischplatte (Problematische Beschreibung: Würfeln) mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit auf eine ihrer Seiten zu liegen kommen.

17.7.2 Weitere Eigenschaften

Zur genaueren Beschreibung und Erkundung der platonischen Körper legen wir Bezeichnungen fest:

N Zahl der Ecken einer Seitenfläche,
α Innenwinkel der Seitenflächen,
F Zahl der Seitenflächen,
K Zahl der Kanten,
E Zahl der Ecken,
S Zahl der Kanten (bzw. Seitenfächen), die in einer Ecke zusammenstoßen.

Für platonische Körper gelten die Formeln (Begründe!):

$$K = \frac{F \cdot N}{2}, \qquad E = \frac{F \cdot N}{S}, \qquad E + F - K = 2.$$

17.7.3 Beobachtung A Es gibt **mindestens** fünf platonische Körper.

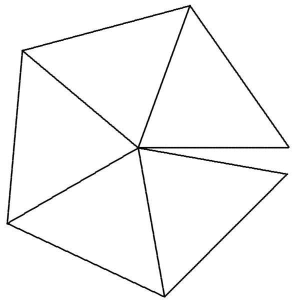
Dies ,,beweist" man dadurch, dass man sie beschreibt, was wir in Form einer Tabelle tun wollen:

Name	Seitenflächen	N	α	F	K	E	S
Tetraeder	Dreiecke	3	60°	4	6	4	3
Würfel (Hexaeder)	Quadrate	4	90°	6	12	8	3
Oktaeder	Dreiecke	3	60°	8	12	6	4
Dodekaeder	Fünfecke	5	108°	12	30	20	3
Ikosaeder	Dreiecke	3	60°	20	30	12	5

Anschaulich umgesetzt wird diese Tabelle durch Abbildungen auf Seite 246.

17.7.4 Beobachtung B Es gibt **höchstens** fünf platonische Körper.

Denken Sie sich zur Begründung einen platonischen Körper „rund um eine Ecke" platt gedrückt.



(1) Daraus lässt sich erkennen, dass

$$S \cdot \alpha \quad \leq \quad 360^{\circ}$$

(2) Da an dieser Ecke mindestens 3 Seitenflächen aneinander stoßen müssen, hat jeder Winkel Platz von höchstens einem Drittel des Vollwinkels:

$$\alpha < 120^{\circ}$$

(3) Für den Innenwinkel α eines regelmäßigen N-Ecks gilt (vgl. Abschnitt 5.4):

$$\alpha \quad = \quad 180^{\circ} - \frac{360^{\circ}}{N}.$$

(4) Fügt man jetzt die beiden Bedingungen aus (2) und (3) zusammen

$$180^{\circ} - \frac{360^{\circ}}{N} \quad < \quad 120^{\circ},$$

so folgt daraus

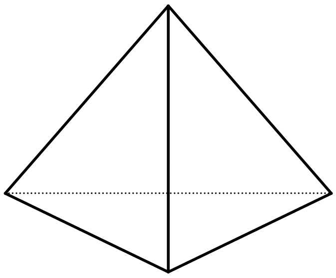
$$N < 6$$

Ein platonischer Körper kann also höchstens durch Dreiecke, Vierecke oder Fünfecke begrenzt sein.

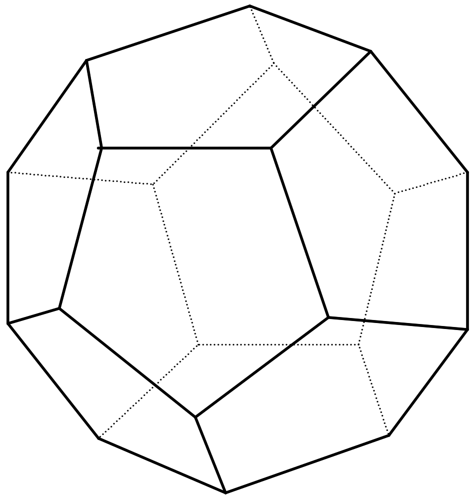
(5) Stellt man nun in einer Tabelle alle gemäß (1) und (4) möglichen Kombinationen aus N und S zusammen, so stellt sich heraus, dass gerade mal 5 Möglichkeiten übrig bleiben. Damit haben wir begründet, dass es höchstens 5 platonische Körper gibt.

N	α	S	$S \cdot \alpha$		
3	60°	3	180°	$\surd$	Tetraeder
3	60°	4	240°	$\surd$	Oktaeder
3	60°	5	300°	$\surd$	Ikosaeder
3	60°	≥ 6	$\geq 360^{\circ}$	–	
4	90°	3	270°	$\surd$	Hexaeder
4	90°	≥ 4	$\geq 360^{\circ}$	–	
5	108°	3	324°	$\surd$	Dodekaeder
5	108°	≥ 4	$\geq 432^{\circ}$	–	

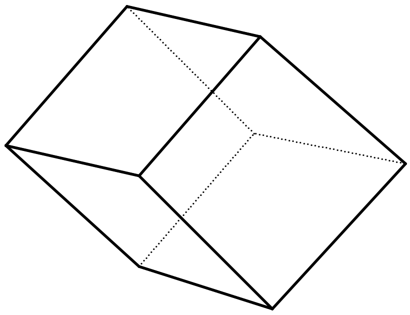
17.7.5 Abbildungen der platonischen Körper



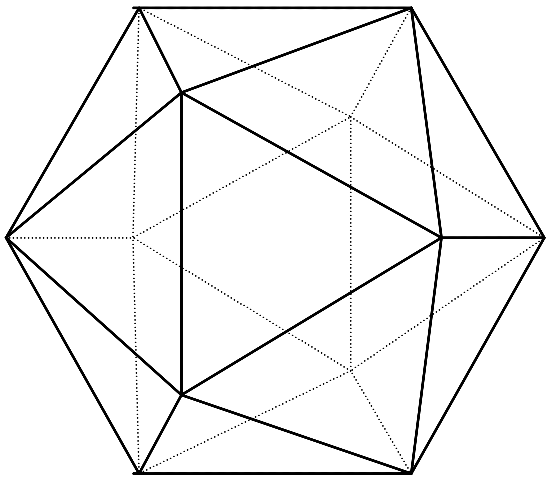
Tetraeder



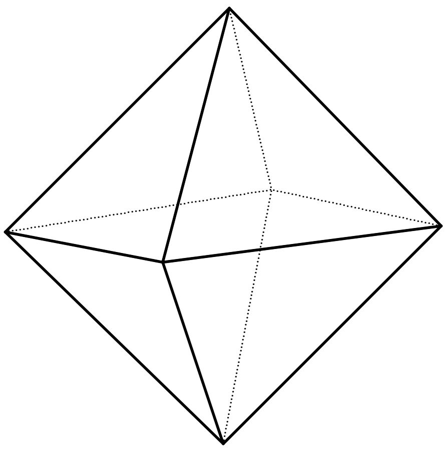
Dodekaeder



Hexaeder (Kubus, Würfel)



Ikosaeder



Oktaeder

17.7.6 Platonische Körper in der Schul-Welt

- Platonische Körper kann man als Spiel-,,Würfel" verwenden. Beispielsweise wird bei ,,Ubongo" ein Ikosaeder-Würfel eingesetzt.

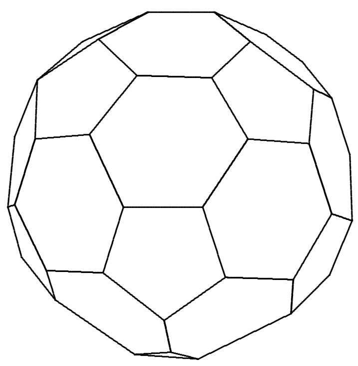
- Tetraeder: Siehe Abschnitt 17.6.12.

- In zahlreiche chemischen (naturvorkommenden wie künstlich hergestellten) Molekülen sind die Atome wie die Ecken in einem platonischen Körper angeordnet. Diese Moleküle können wegen der symmetrischen Struktur leicht Kristalle bilden.

  – Beim Methanmolekül CH_4 sitzt das einzelne Kohlenstoffatom in der Mitte eines gedachten Tetraeders, die 4 Wasserstoffatome befinden sich an den Ecken.
  – Beim Methanhydrat ist es so, dass ein Methanmolekül in der Mitte eines gedachten Dodekaeders sitzt, an den 20 Ecken sitzt jeweils ein Wassermolekül.
  – Fullerene $\boxed{\text{W}}$ sind Kohlenstoffmoleküle, die eine hochsymmetrische Struktur, meist die Struktur eines platonischen Körpers, aufweisen.
  – Die innere Struktur von Diamanten $\boxed{\text{W}}$ ist ,,platonisch". Sie setzt sich makroskopisch fort. Natur-Diamanten zeigen oft die Form von Oktaedern.
  – Ein Silizium-Kristall besteht aus Silizium-Atomen, die in den Mittelpunkten von ,,gedachten, raumausfüllenden" Tetraedern sitzen. Solche Silizium-Kristalle sind der technische Ausgangspunkt für die Herstellung von elektronischen ICs, Chips, Speichern, Prozessoren, ... — ohne die Sie nicht durchs Leben kommen würden?

- Aus einem gegebenen platonischen Körper P kann man — gedanklich — einen anderen P' dadurch erstellen, dass man die Flächenmittelpunkte von P zu den Ecken von P' werden lässt. Der Körper P' heißt dann *dual* zu P. Es ist dann der Tetraeder dual zu sich selbst. Weiter sind Oktaeder und Hexaeder dual zueinander sowie Dodekaeder und Ikosaeder. Vergleiche Ecken- und Flächenzahlen zweier zueinander dualer Körper.

- Schneide gedanklich die Ecken eines Ikosaeders gleichmäßig so ab, dass anstelle der Ecken regelmäßige Fünfecke entstehen, die von jeweils fünf regelmäßigen Sechsecken umgeben sind: Fertigt man dieses Gebilde aus Leder und dehnt es kugelförmig aus, so sieht man: Der klassische ,,WM-Fußball" ist ein abgestumpfter Ikosaeder.



18 Drehkörper

18.1 Allgemeine Drehkörper

18.1.1 Definition

Ein Körper heißt *Rotationskörper (= Drehkörper)*, wenn

es eine Gerade gibt,
so dass alle ebenen Schnitte des Körpers senkrecht zu dieser Gerade
vollständig drehsymmetrisch (vgl. 6.6.1) sind.

18.1.2 Weitere Erläuterungen und Begriffe

- Die oben erwähnte besondere Gerade heißt auch *Rotationsachse* oder *Drehachse* des Körpers.
- Eine ,,vollständig drehsymmetrische Figur" (vgl. Abschnitt 6.6.1) ist nichts anderes als eine Kreisfläche, ein Kreisring oder eine Vereinigung von mehreren Kreisringen. Bei den typischen Fällen der Schulgeometrie sind die Schnitte Kreisflächen.
- Man kann sich einen Drehkörper dadurch entstanden denken, dass sich eine ebene Figur um eine Gerade im Raum dreht und dabei den Körper ,,überstreicht".
- Es lassen sich zwei Ebenen finden
  - mit minimalem Abstand
  - senkrecht zur Rotationsachse
  - zwischen denen sich der Körper befindet.

  Diese beiden Ebenen werden *Grund-* bzw. *Deckfläche* genannt.

  Ob man auch beim Kegel von einer Deckfläche, bei der Kugel von Grund- und Deckfläche sprechen sollte, bleibt dahingestellt.
- Die Oberfläche ohne Grund- und Deckfläche heißt dann auch *Mantelfläche*.
- Der Abstand zwischen Grund- und Deckfläche heißt *Höhe* des Rotationskörpers.
- Die Hauptbeispiele von Rotationskörpern sind Zylinder, Kegel, Kugel.
- Weitere Beispiele, die im Schulkontext gelegentlich eine Rolle spielen, sind Hohlzylinder, Kegelstumpf, Doppelkegel, Halbkugel und Torus.

18.1.3 Aktivitäten an und mit Drehkörpern

- Auffinden in der Wirklichkeit: Flaschen, Trinkgläser, Vasen, Geschirr.
- Basteln von Lampions
- Töpfern
- Abrollen zum Netz: Wann ist dies möglich?

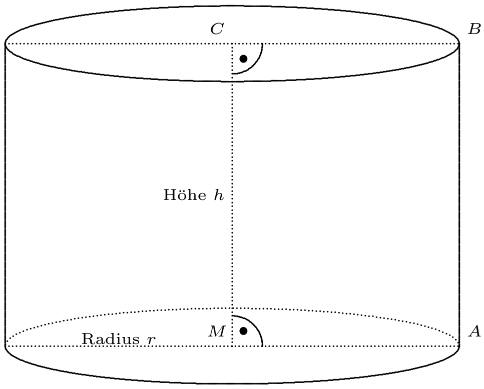
18.2 Der Zylinder

18.2.1 Definition

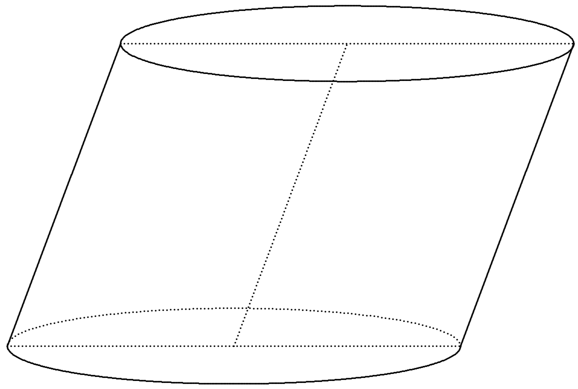
Es seien zwei Kreisscheiben vorgegeben, ...

> die zueinander kongruent sind, und
>
> so, dass die Verbindungsstrecke der Kreismittelpunkte senkrecht zu den beiden Kreisscheiben steht.

Die Menge aller Verbindungsstrecken zwischen den beiden Kreisscheiben bildet einen *geraden Zylinder*.



gerader Zylinder



schiefer Zylinder

18.2.2 Weitere Eigenschaften

(1) Fachlich genauer spricht man auch vom geraden *Kreiszylinder*, ungenauer auch nur vom Zylinder.

(2) Die beiden Kreisscheiben werden oft ,,Grundfläche" ,,Deckfläche" des Zylinders genannt. Dieser anschaulich naheliegende Begriff ist ungünstig insofern, als dadurch eine besondere Lage ,,stehend in Raum" des Zylinders suggeriert wird.

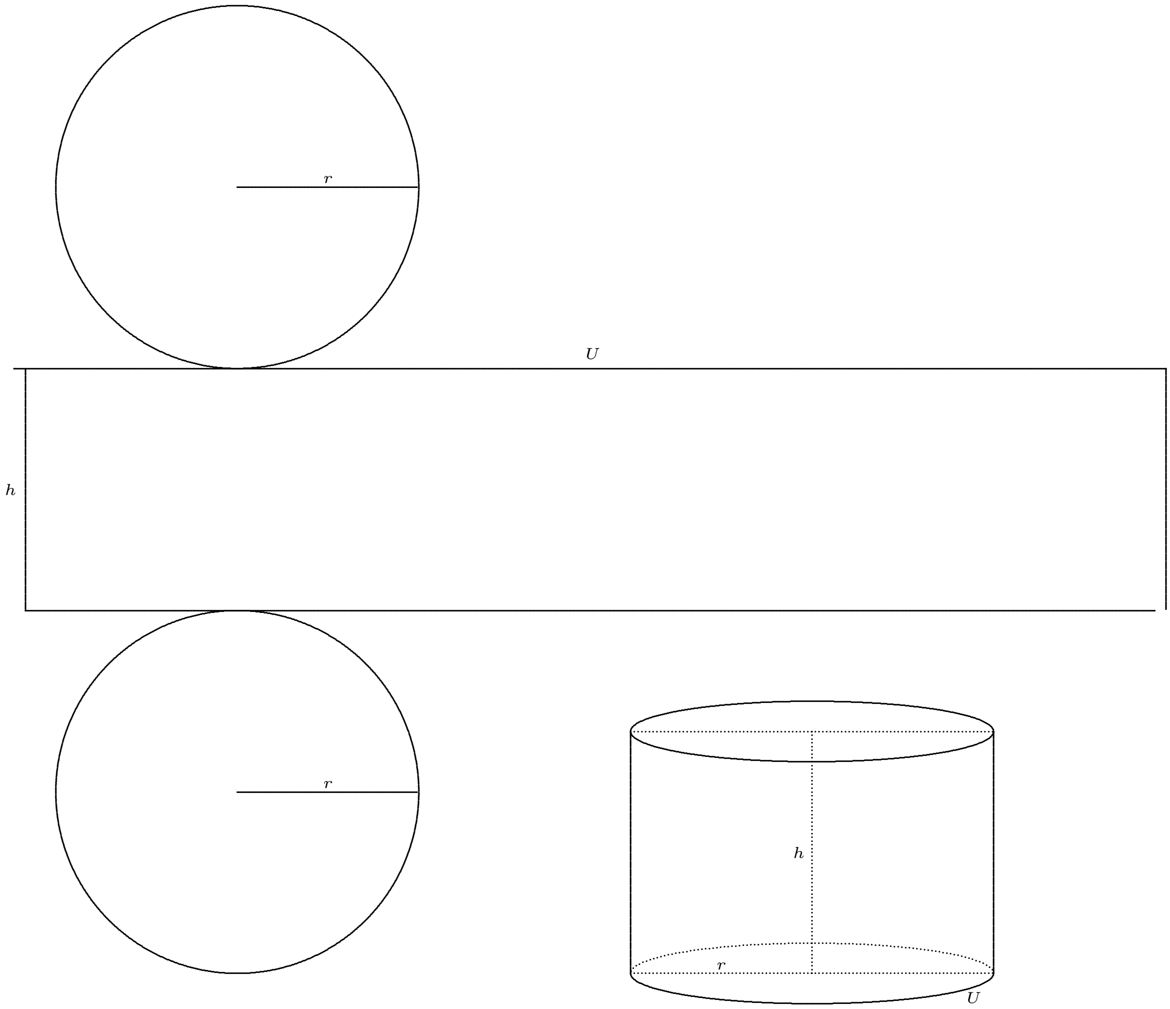
(3) Man kann sich den geraden Zylinder dadurch entstanden denken, dass ein Rechteck $ABCM$ um die Gerade CM rotiert und so der Zylinder überstrichen wird. Der gerade Zylinder ist also ein Drehkörper.

(4) Man kann sich den geraden Zylinder auch so vorstellen, dass eine Kreisscheibe längs einer Gerade, die senkrecht zu ihr steht, verschoben wird.

(5) Wird die zweite Bedingung des Senkrechtstehens dahingehend abgeschwächt, dass die beiden Kreisscheiben nur parallel zueinander sind, so heißt der Zylinder auch *schiefer Zylinder*. Dies ist kein Drehkörper.

18.2.3 Das Netz des geraden Zylinders

Die Oberfläche des geraden Zylinders kann zu einem Netz in Form eines ,,Rechtecks mit zwei Kreisscheiben" abgerollt werden.



18.2.4 Kontextfelder

- Auffinden in der Wirklichkeit. Tafelkreide, Stück Wurst, Konservendose, Küchenrolle, Teig-Rollholz, Klebestift, Smarties-Dose, Kerze.
- Aus DINA4 Blättern werden Rollen zusammengeklebt. Sie können dann für den Bau von Flößen, Häusern, Kantenmodellen verwendet werden.

18.3 Der Kegel

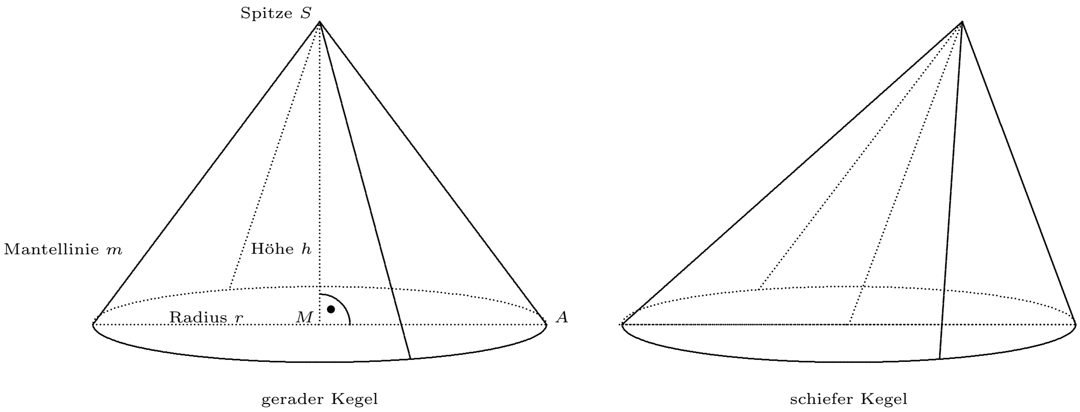
18.3.1 Definition

Es seien vorgegeben ...

eine Kreisscheibe und

ein Punkt, der auf der Lotgeraden durch den Kreismittelpunkt liegt.

Die Menge aller Verbindungsstrecken zwischen Kreisscheibe k und Punkt S bildet einen *geraden Kegel*.



18.3.2 Weitere Eigenschaften

(1) Fachlich genauer spricht man auch vom geraden *Kreiskegel*, ungenauer auch nur vom Kegel.

(2) Die Kreisscheibe wird oft ,,Grundfläche" des Kegels genannt. Dieser anschaulich naheliegende Begriff ist ungünstig insofern, als dadurch eine besondere Lage ,,stehend in Raum" des Kegels suggeriert wird.

(3) Man kann sich den geraden Kegel dadurch entstanden denken, dass ein rechtwinkliges Dreieck ASM (mit rechtem Winkel bei M) um die Gerade SM rotiert und so der Kegel überstrichen wird. Der gerade Kegel ist also ein Drehkörper.

(4) Befindet sich der Punkt S nicht auf der Lotgeraden, so heißt der Kegel auch *schiefer Kegel*. Dies ist kein Drehkörper.

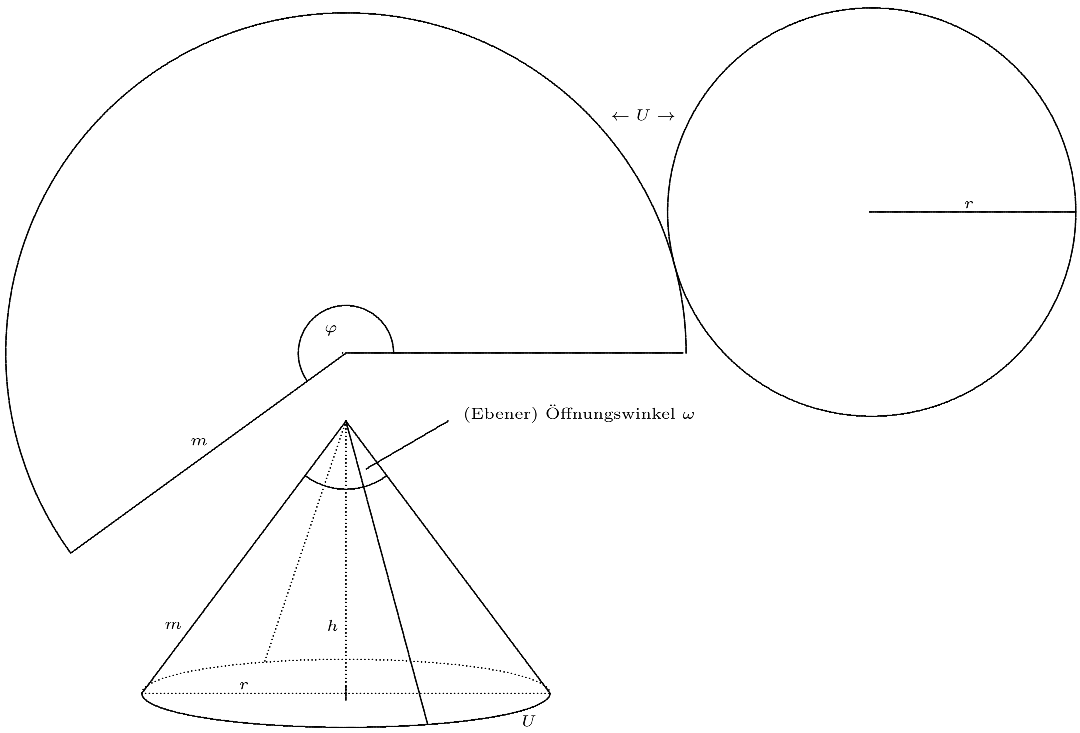
(5) Aufgrund des Satzes des Pythagoras besteht der Zusammenhang

$$h^2 + r^2 \quad = \quad m^2$$

zwischen Höhe, Radius und Mantellinie.

18.3.3 Das Netz des geraden Kreiskegels

Die Oberfläche des geraden Kegels kann zu einem Netz in Form eines ,,Kreissektors mit Kreisscheibe" abgerollt werden.



Der Bezug zwischen Kegel und Netz wird dadurch hergestellt, dass der ...

Umfang U des Kegelgrundkreises mit dem des Sektorbogens übereinstimmt und

die Länge m der Mantellinie mit dem Radius des Kreissektors übereinstimmt.

Bzgl. des Kegels gelten die folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} U &= 2 \cdot \pi \cdot r \\ \sin \tfrac{\omega}{2} &= \tfrac{r}{m}. \end{aligned}$$

Bzgl. des Netzes gilt

$$U = 2 \cdot \pi \cdot m \cdot \tfrac{\varphi}{360^{\circ}}.$$

Es ergibt sich der Zusammenhang

$$\varphi = \tfrac{U}{2\pi m} \cdot 360^{\circ} = \tfrac{r}{m} \cdot 360^{\circ} = \sin \tfrac{\omega}{2} \cdot 360^{\circ}.$$

18.3.4 Kontextfelder

- Eistüte, Schultüte, Weinkorken.
- Kleid eines Weihnachtsengels
- Trichter aus Plastik oder Papier (Flüstertüte)
- Idee des Zuckerhuts
- Warum ist eine Gemüse-Tüte (in etwa) kegelförmig?
- Kegelschnitte entstehen als Schnittmengen der Oberfläche des Kegels mit einer Ebene. Es ergeben sich dabei Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln oder Punkte, Geraden, Geradenpaare.
- Mit welchem Radius rollt ein Kegelstumpf? (Beispiel: Trinkglas oder Flaschenkorken) Siehe Aufgabe **??**.

18.4 Die Kugel

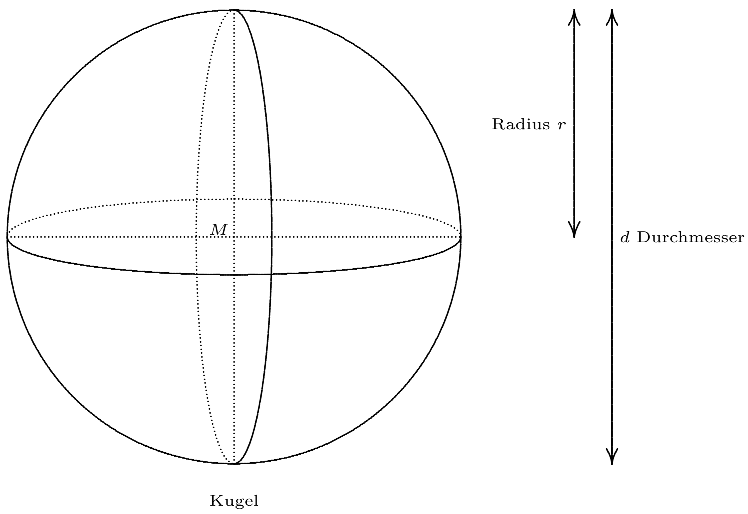
18.4.1 Definition

Es seien im drei-dimensionalen Raum vorgegeben ...

ein Punkt M und

eine Länge r.

Die Menge aller Punkte im drei-dimensionalen Raum, die vom Punkt M die Entfernung höchstens gleich r haben, bilden eine *Kugel*.



18.4.2 Weitere Bezeichnungen und Eigenschaften

- Der gegebene Punkt heißt *Mittelpunkt* der Kugel, die gegebene Länge *Radius* der Kugel.
- Die Oberfläche einer Kugel wird gelegentlich als *Sphäre* bezeichnet.
- Die Länge einer Strecke zwischen zwei Punkten auf der Sphäre durch den Mittelpunkt wird als *Durchmesser* d bezeichnet. Es ist

$$d = 2 \cdot r.$$

- Man kann sich eine Kugel dadurch entstanden denken, dass sich eine Halbkreisscheibe um eine ,,Durchmesser"-Gerade dreht.
- Eine Kugeloberfläche kann **nicht** zu einem Netz abgerollt werden.

18.4.3 Kontextfelder

- Christbaumkugel, Ball.
- Sonne, Mond, Erde und alle anderen Planeten und Sterne. Beachte, dass die Erde nur annähernd eine Kugelgestalt hat. Aufgrund der erhöhten Zentrifugalkräfte bildet sich in den Äquatorbreiten ein leichter ,,Wulst" bzw. umgekehrt an den Polen eine Abplattung.

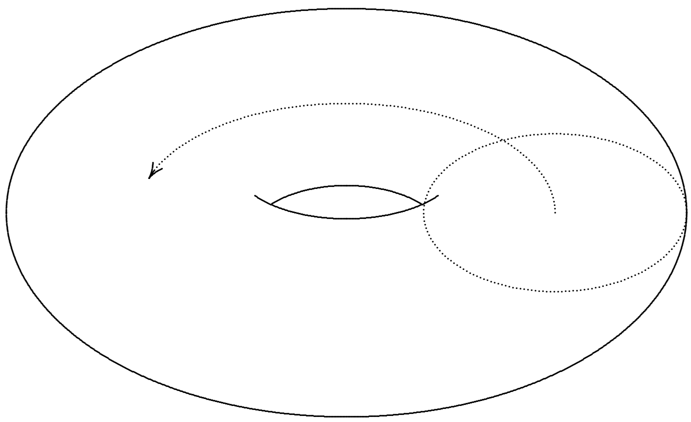
- Explosion einer ,,Kugelbombe" beim Sylvester-Feuerwerk
- Seifenblasen sind kugelförmig
- Wassertropfen im freien Fall sind kugelförmig (Regen)
- Warum spielt man mit Bällen und nicht mit Würfeln?
- Sphärische Oberflächen von Kosmetikspiegeln, Verkehrsspiegeln, Glas-Linsen (in Brillen)
- Warum verwendet man in Kugellagern Kugeln?
- ,,Der Ball ist umgefallen"
- Basteln einer Kugel aus Papier-Trichtern.

18.5 Der Torus

18.5.1 Beschreibung des Torus

In einer Ebene befinden sich eine Kreisscheibe mit Radius r und eine Gerade, die mit der Kreisscheibe keinen Punkt gemeinsam hat (d.h. an ihr vorbeigeht). Der Abstand des Mittelpunkts der Kreisscheibe von der Geraden werde mit R bezeichnet.

Lässt man nun die Kreisscheibe (gedanklich) um die Gerade rotieren, so wird ein *Torus* überstrichen.



18.5.2 Kontextfelder

- Schläuche in Auto- oder Fahrradreifen
- Rettungsring
- Gedankenexperiment: Sie befinden sich auf der Oberfläche des Torus und laufen dann immer ,,geradeaus". Kommen Sie wieder am Ausgangspunkt an?

19 Das Volumen eines Körpers

19.1 Grundlegung

19.1.1 Einstieg

Wir beschränken uns einfach darauf, die grundsätzlichen Überlegungen zum Flächeninhalt aus dem Kapitel 11.1 einfach von der Zeichenebene (dim = 2) auf den Raum (dim = 3) zu übersetzen.

Die abstrakte ,,Volumenlehre" gründet darauf, dass das Volumen eine Abbildung

$$\mathcal{V} : \Big\{ \text{Geometrische Körper} \Big\} \quad \to \quad \mathbb{R}_0^+$$

ist. Es ist also eine Menge von geometrischen Körpern im Raum vorgegeben. Jeder dieser Körper wird eine nicht-negative Zahl zugeordnet. Dabei müssen die folgenden Axiome erfüllt sein.

19.1.2 Axiom 1: Normung

Es ist einen Körper mit einem fixierten Volumen vorgegeben.

19.1.3 Axiom 2: Invarianz unter Kongruenz

Zwei kongruente Körper haben das gleiche Volumen.

19.1.4 Axiom 3a: Endliche Additivität

Wird ein Körper in **endlich** viele paarweise disjunkte Teilkörper zerlegt, so addieren sich die einzelnen Volumina der Teilkörper zum Volumen des Gesamtkörpers auf.

19.1.5 Axiom 3b: Unendliche Additivität

Wird ein Körper in **abzählbar unendlich** viele paarweise disjunkte Teilkörper zerlegt, so addieren sich die einzelnen Volumina der Teilkörper zum Volumen des Gesamtkörpers auf.

19.1.6 Kommentare

Wir könnten an dieser Stelle auch die korrespondierenden Kommentare aus Kapitel 11.1 wiederholen. Wir tun dies nur für die, die (ein wenig) abgeändert werden.

- Zu Axiom 1: Fast immer wird hier ein Würfel gewählt. Hat dieses Würfel die Seitenlänge 1 LE, wo wird das Volumen 1 VE (Volumeneinheit) festgesetzt.

  Es ist zu bedenken, dass die Verwendung von Begriffen wie LE und VE abstrakt und alltagsfern ist. Alternativ kann man die alltäglichen Längeneinheiten 1 cm, 1 dm oder 1 m sowie die zugehörigen Volumeneinheiten $1\,\text{cm}^3$, $1\,\text{dm}^3$ bzw. $1\,\text{m}^3$ wählen.

- Zu Axiom 2: Da hier der Begriff ,,Kongruenz im Raum" auftritt, müssten wir vorab die Theorie der Kongruenzabbildungen im Raum aufbauen. Darauf verzichten wir.

19.2 Das Volumen von Quadern und Prismen

19.2.1 Das Volumen eines Würfels

Gemäß Axiom 1 ist also vorgegeben, dass ein ,,Einheitswürfel" W mit Kantenlänge 1 LE das Volumen 1 VE hat:

$$\mathcal{V}_{\text{Einheitswürfel}} = 1\,\text{VE}.$$

19.2.2 Das Volumen eines Quaders

Hat ein Quader Q als Länge, Breite und Höhe rationale Vielfache der Längeneinheit LE, also

$$\ell = \tfrac{m_\ell}{n_\ell}\,\text{LE}, \qquad b = \tfrac{m_b}{n_b}\,\text{LE}, \qquad h = \tfrac{m_h}{n_h}\,\text{LE},$$

so kann man $n_\ell \cdot n_b \cdot n_h$ solche Quader zu einem großen Quader aneinanderreihen, der in $m_\ell \cdot m_b \cdot m_h$ Einheitswürfel zerlegt werden kann.

Es folgt, dass

$$(n_\ell \cdot n_b \cdot n_h) \cdot \mathcal{V}_{\text{Q}} = (m_\ell \cdot m_b \cdot m_h) \cdot \mathcal{V}_{\text{W}}$$

und damit

$$\mathcal{V}_{\text{Quader}} = \frac{m_\ell \cdot m_b \cdot m_h}{n_\ell \cdot n_b \cdot n_h} \cdot \mathcal{V}_{\text{W}} = \frac{m_\ell}{n_\ell}\,\text{LE} \cdot \frac{m_b}{n_b}\,\text{LE} \cdot \frac{m_h}{n_h}\,\text{LE} = \ell \cdot b \cdot h.$$

Hat ein Quader Q als Länge, Breite und Höhe irrationale Vielfache der Längeneinheit LE, so können wir diese durch rationale Vielfache beliebig genau approximieren. Insgesamt folgt
Ergebnis: Ein Quader mit Länge ℓ, Breite b und Höhe h hat das Volumen

$$\mathcal{V}_{\text{Quader}} = \ell \cdot b \cdot h.$$

Das Volumen eines Würfels mit Kantenlänge a ist gegeben durch

$$V_{\text{Würfel}} = a \cdot a \cdot a = a^3.$$

19.2.3 Das Volumen eines Prismas

Ist nun ein Prisma mit Grundfläche(ninhalt) $\mathcal{A}_{\text{Prisma}}$ und Höhe h vorgegeben, so kann die Grundfläche in (endlich oder unendlich) viele Rechtecke R_j zerlegt werden, also

$$\mathcal{A}_{\text{Prisma}} = \mathcal{A}_{\text{R}_1} + \mathcal{A}_{\text{R}_2} + \mathcal{A}_{\text{R}_3} + \ldots\ldots$$

Das entspricht einer Zerlegung des gesamten Prismas in (endlich oder unendlich) viele Quader Q_j mit Grundfläche R_j und Höhe h. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{\text{Prisma}} &= \mathcal{V}_{\text{R}_1} + \mathcal{V}_{\text{R}_2} + \mathcal{V}_{\text{R}_3} + \ldots\ldots \\
&= \mathcal{A}_{\text{R}_1} \cdot h + \mathcal{A}_{\text{R}_2} \cdot h + \mathcal{A}_{\text{R}_3} \cdot h + \ldots\ldots \\
&= (\mathcal{A}_{\text{R}_1} + \mathcal{A}_{\text{R}_2} + \mathcal{A}_{\text{R}_3} + \ldots\ldots) \cdot h \\
&= \mathcal{A}_{\text{Prisma}} \cdot h.
\end{aligned}$$

Ergebnis: Ein Prisma mit Grundfläche $\mathcal{A}_{\text{Prisma}}$ und Höhe h hat das Volumen

$$\mathcal{V}_{\text{Prisma}} = \mathcal{A}_{\text{Prisma}} \cdot h.$$

19.2.4 Das Volumen eines verallgemeinerten Prismas

Verallgemeinert (auch in der Fachmathematik) heißt ein Körper ein *verallgemeinertes Prisma*, wenn eine (geradlinig oder krummlinig begrenzte) ebene Figur als Grundfläche ,,senkrecht hochgezogen" wird. Man könnte auch den Begriff ,,Scheibe" heranziehen.

Ist nun ein verallgemeinertes Prisma mit Grundfläche(ninhalt) $\mathcal{A}_{\text{vallg Prisma}}$ und Höhe h vorgegeben, so können die gleichen Überlegungen wie in Abschnitt 19.2.3 beim gewöhnlichen Prisma angewandt werden.

Ergebnis: Ein verallgemeinertes Prisma mit Grundfläche $\mathcal{A}_{\text{vallg Prisma}}$ und Höhe h hat das Volumen

$$\mathcal{V}_{\text{vallg Prisma}} = \mathcal{A}_{\text{vallg Prisma}} \cdot h.$$

19.2.5 Das Volumen eines Zylinders

Aus dem letzten Abschnitt ergibt sich dann auch das Volumen eines (Kreis-)Zylinders mit Radius r der Grundfläche und Höhe h

$$\mathcal{V}_{\text{Zylinder}} = r^2 \cdot \pi \cdot h.$$

19.3 Das Prinzip von Cavalieri

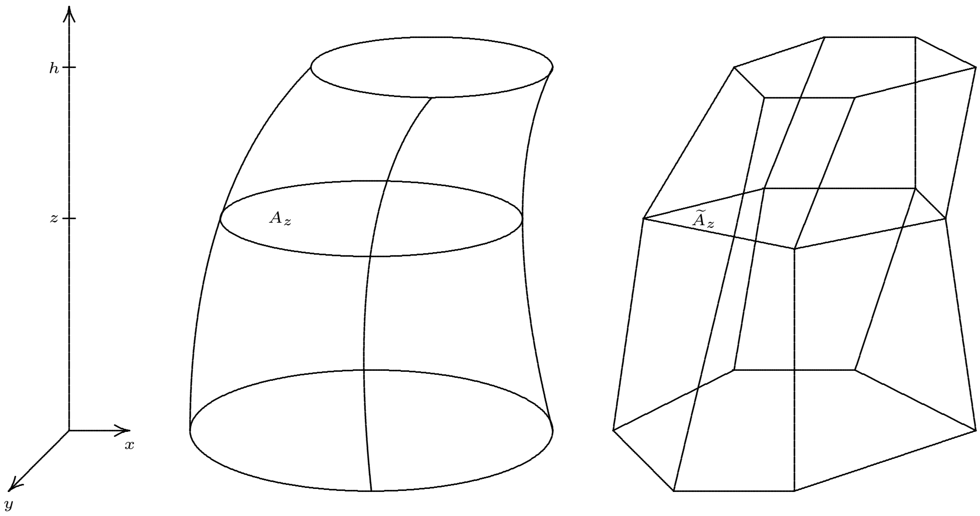
19.3.1 Satz: Starkes Prinzip von Cavalieri

WENN zwei „aufrechtstehende" Körper die folgende Bedingung erfüllen:

In **jeder** Höhe z stimmen die beiden Querschnittsflächeninhalte überein:

$$A_z = \widetilde{A}_z,$$

DANN stimmen die beiden Volumina überein: $V = \widetilde{V}$.



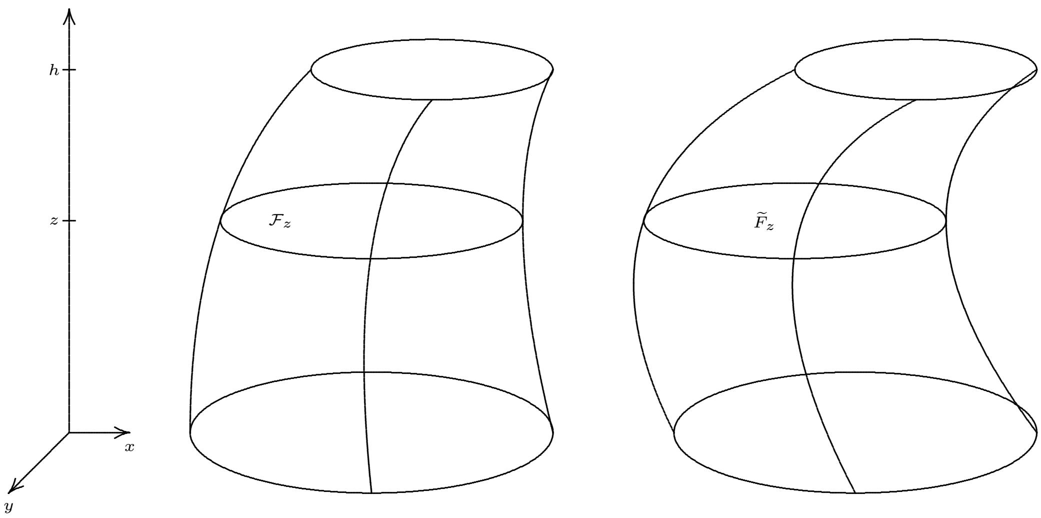
19.3.2 Bemerkungen

- Das Prinzip heißt *stark*, da die Wenn-Bedingung in dem Satz vergleichsweise schwach ist. Es wird nur Flächengleichheit der Querschnitte verlangt.
- Der genaue mathematische Beweis wird in der mehrdimensionalen Analysis mit Hilfe des Satzes von Fubini erbracht.
- Plausibilitätsbetrachtung:
  1. Zerschneide die beiden Körper in n Scheiben gleicher Höhe $\frac{h}{n}$.
  2. Wenn n sehr groß wird, werden die beiden Scheiben in Höhe z immer dünner, immer mehr zu „zylinderförmigen" Körpern mit Grundfläche A_z bzw. $\widetilde{A}_z$ und Höhe $\frac{h}{n}$.
  3. Gemäß 19.2.4 haben diese beiden Scheiben gleiches Volumen.
  4. Die beiden Körper lassen sich also näherungsweise in Scheiben zerlegen, die paarweise gleiches Volumen haben. Deswegen haben die Körper gleiches Volumen.

19.3.3 Satz: Schwaches Prinzip von Cavalieri

WENN zwei „aufrechtstehende" Körper die folgende Bedingung erfüllen:
In **jeder** Höhe z sind die beiden Querschnittsfiguren kongruent: $\mathcal{F}_z \simeq \widetilde{\mathcal{F}}_z$.

DANN stimmen die beiden Volumina überein: $V = \widetilde{V}$.



19.3.4 Bemerkungen

- Das Prinzip heißt *schwach*, da die Wenn-Bedingung in dem Satz vergleichsweise stark ist. Es wird die Kongruenz der Querschnittsfiguren verlangt.
- Der Beweis ist eher eine Plausibilitätsbetrachtung:
  1. Zerschneide die beiden Körper in n Scheiben gleicher Höhe $\frac{h}{n}$.
  2. Wenn n sehr groß wird, werden die beiden Scheiben in Höhe z immer dünner, immer mehr zu „zylinderförmigen" Körpern mit $\mathcal{F}_z$ und $\widetilde{\mathcal{F}}_z$ als Grundfigur und Höhe $\frac{h}{n}$.
  3. Dann sind auch die Scheiben kongruent, deshalb haben sie gleiches Volumen.
  4. Die beiden Körper lassen sich also näherungsweise in Scheiben zerlegen, die paarweise gleiches Volumen haben. Deswegen haben die Körper gleiches Volumen.

19.3.5 Anschaulich-konkrete Repräsentation des schwachen Prinzips

Die obige Situation lässt sich mit der „Stapelung dünner Schichten" handelnd plausibel machen:

Ein Stapel Papier (aus Notizblock, oder CD-Scheiben, Spielkarten, Münzen) behält sein Volumen, wenn die Schichten gegeneinander verschoben werden.

Es ist didaktisch nicht so ganz günstig, dass die „dünnen Schichten" in den verschiedenen Höhen zueinander kongruent sind. Das schwache Prinzip hat ja nur die viel allgemeinere Voraussetzung „Kongruenz auf gleicher Höhe".

19.4 Das Prinzip von Cavalieri für Spitzkörper

19.4.1 Definition: Spitzkörper

Es seien eine ebene Figur in der Zeichenebene und ein einzelner Punkt außerhalb dieser Ebene gegeben. Ein Körper, der dadurch entsteht, dass alle Punkte der ebenen Figur mit dem Punkt außerhalb verbunden werden, heißt *Spitzkörper*.

Die Fläche (auch der Flächeninhalt) der ebenen Figur hießt dann *Grundfläche* und der einzelne Punkt außerhalb heißt *Spitze*. Der Abstand zwischen der Zeichenebene und der Spitze heißt *Höhe* des Spitzkörpers.

Den Inhalt der Grundfläche bezeichnen wir mit G.

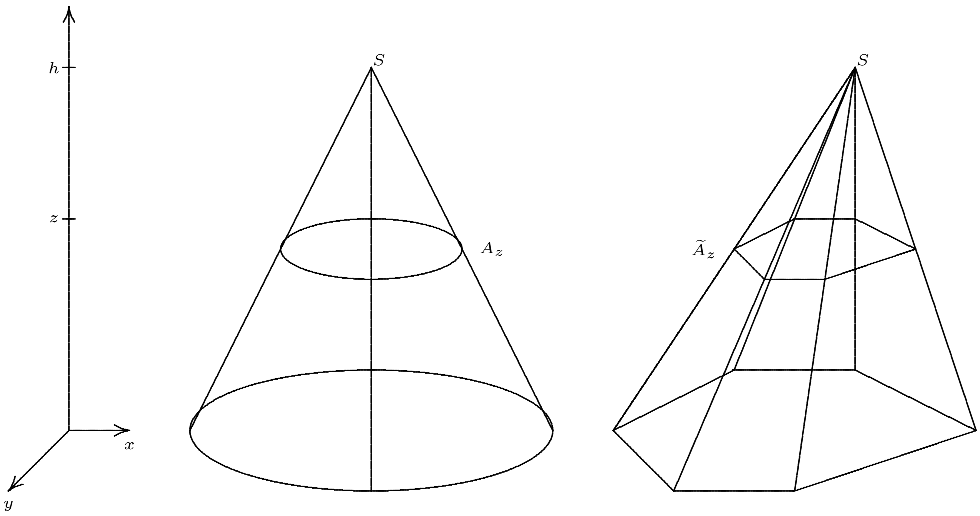
19.4.2 Bemerkungen

- Der Begriff Spitzkörper ist nicht so sehr verbreitet.
- Die zwei bekanntesten Beispielklassen für Spitzkörper sind
  - Pyramiden (mit Vielecken als Grundfläche) und
  - Kegel (mit Kreisscheiben als Grundfläche).

19.4.3 Satz: Starkes Prinzip von Cavalieri für Spitzkörper

WENN zwei Spitzkörper flächeninhaltsgleiche Grundflächen und die gleiche Höhe h haben,

DANN stimmen die beiden Volumina überein.



19.4.4 Beweis

(1) Auf beiden Seiten kann die Grundfläche mittels einer räumlichen zentrischen Streckung bei Zentrum S und Streckungsfaktor $m = \frac{h-z}{h} < 1$ auf die Querschnittsfläche in Höhe z abgebildet werden.

(2) Da die Grundflächeninhalte in Höhe 0 gleich sind, sind es auch die Querschnittsflächeninhalte in Höhe z.

(3) Gemäß dem starken Cavalieri-Prinzip 19.3.1 stimmen dann die beiden Volumina überein.

19.4.5 Kommentar

Natürlich könnte man auch hier wieder ein schwaches Prinzip von Cavalieri für Spitzkörper formulieren. Tatsächlich würde dieses für die Überlegungen im nächsten Kapitel 19.5 ausreichen.

19.5 Das Volumen von Spitzkörpern

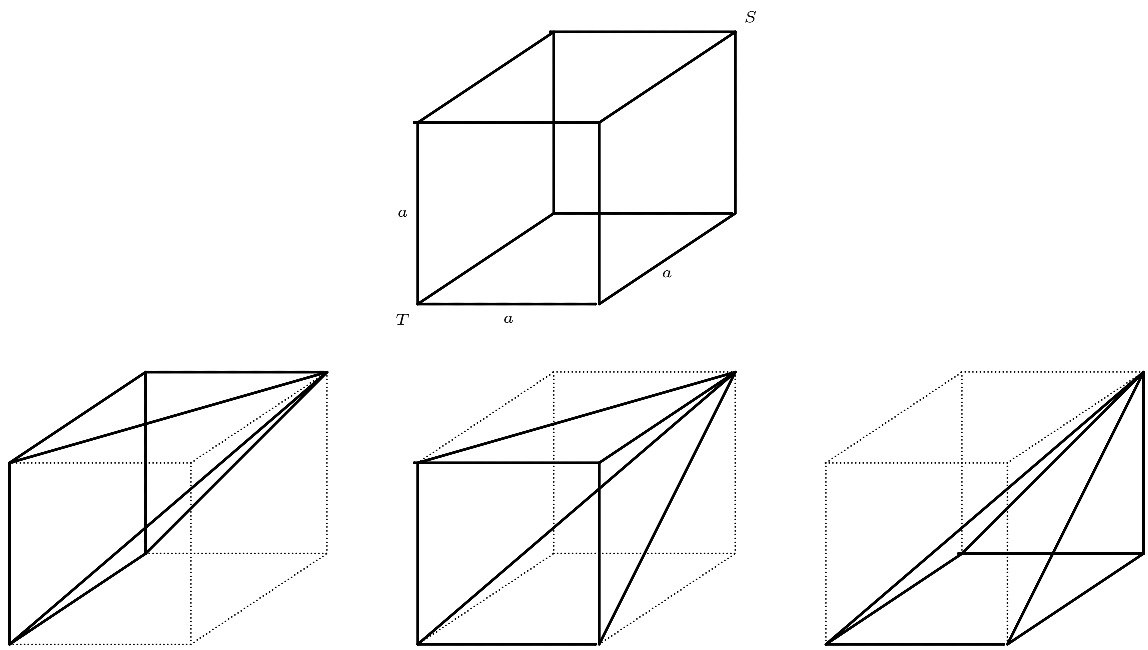
19.5.1 Satz: Das Volumen von Spitzkörpern

Ein Spitzkörper mit Grundflächeninhalt G und Höhe h hat das Volumen

$$V \quad = \quad \frac{1}{3} \cdot G \cdot h.$$

Im folgenden wird der Beweis (oder eher eine Begründung) in mehreren Schritten erbracht.

19.5.2 Beweis Schritt 1: Drei kongruente Pyramiden im Würfel



1. Es sei ein Würfel mit Kantenlänge a gegeben.
2. Wähle eine Ecke S des gegebenen Würfels aus. An der gegenüberliegenden Ecke T stoßen drei Seitquadrate zusammen.
3. Mit den Seitquadraten als Grundfläche und S als Spitze entstehen drei quadratische Pyramiden mit Seitenkante und Höhe gleich a.
4. Die drei Pyramiden sind kongruent zueinander und zerlegen den Würfel.
5. Deshalb gilt für das Pyramidenvolumen in diesem Fall

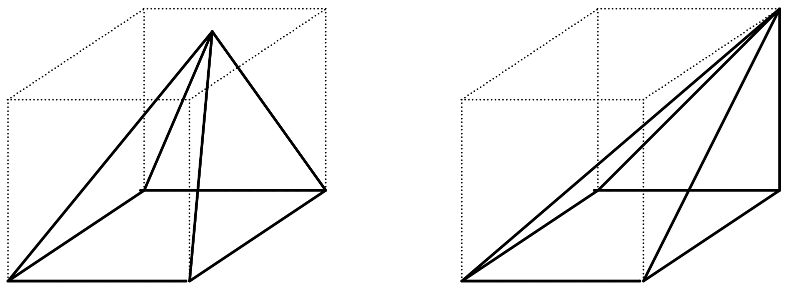
$$V \quad = \quad \frac{1}{3} \cdot a^3 \quad = \quad \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a \quad = \quad \frac{1}{3} \cdot G_{\text{Würfel}} \cdot h$$

Damit ist der Satz 19.5.1 für einen sehr speziellen Fall bewiesen: Eine quadratische Pyramide mit Kantenlänge gleich Höhe, bei der die Spitze sich senkrecht über einer Ecke des Grundquadrats befindet.

19.5.3 Beweis Schritt 2: Die Spitze wird parallelverschoben

Wir betrachten jetzt eine quadratische Pyramide mit Kantenlänge gleich Höhe, bei der die Spitze nicht notwendig senkrecht über einer Ecke des Grundquadrats liegt.

Wir stellen ihr die Pyramide aus Schritt 1 gegenüber.



Aufgrund des Cavalieri-Prinzips für Spitzkörper 19.4.3 haben die beiden Pyramiden gleiches Volumen.

19.5.4 Beweis Schritt 3: Beliebige Spitzkörper

1. Es sei nun ein beliebiger Spitzkörper K_{Spitz} mit Höhe h und Grundfläche G gegeben.

2. Man betrachte dazu eine quadratische Pyramide K_{quPyr} mit Grundkantenlänge $a = h$.

3. Mit Hilfe der Prinzipien und Methoden aus Kapitel 11.1, das sind

   - endliche Additivität
   - Prinzip der Ergänzungsgleichheit
   - Prinzip der Zerlegungsgleichheit
   - Prinzip der Kongruenz-Verdoppelung
   - Unendliche Additivität,

   kann die Grundfläche von K_{Spitz} mit der Grundfläche von K_{quPyr} in Bezug gebracht werden. Man verfolge dabei, wie sich der Grundflächeninhalt G_{Spitz} als Vielfaches (oder Bruchteil, rational oder reell) aus dem Grundflächeninhalt G_{quPyr} ergibt:

   $$G_{\text{Spitz}} = \beta \cdot G_{\text{quPyr}}.$$

4. Bei Anwendung der obigen Prinzipien auf die Grundflächen kann man mitverfolgen, dass die Körper selbst (bei gleicher Spitze) auf gleiche Weise in Bezug stehen. Deshalb muss zwischen den Volumina die gleiche Vielfachenbeziehung bestehen wie zwischen den Grundflächeninhalten:

   $$V_{\text{Spitz}} = \beta \cdot V_{\text{quPyr}}.$$

5. Jetzt kann man die Argumentation abschließen. Es ist

   $$V_{\text{Spitz}} = \beta \cdot V_{\text{quPyr}} = \beta \cdot \tfrac{1}{3} \cdot G_{\text{quPyr}} \cdot h = \tfrac{1}{3} \cdot G_{\text{Spitz}} \cdot h$$

19.5.5 Volumen der quadratischen Pyramide

Allgemeiner lässt sich das Volumen der quadratischen Pyramide mit Grundfläche Seitenlänge a der Grundfläche und Höhe h angeben als

$$V_{\text{quPyr}} = \tfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_{\text{Pyr}}.$$

19.5.6 Volumen des Tetraeders

Als Volumen des Tetraeders mit Kantenlänge a erhält man mit Hilfe von 17.6.11

$$V_{\text{Ttr}} = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot h_{\text{Dr}} \cdot h_{\text{Ttr}} = \tfrac{1}{6} \cdot \sqrt{\tfrac{3}{4}} \cdot \sqrt{\tfrac{2}{3}} \cdot a^3 = \tfrac{1}{6\sqrt{2}} \cdot a^3.$$

19.5.7 Volumen des Kegels

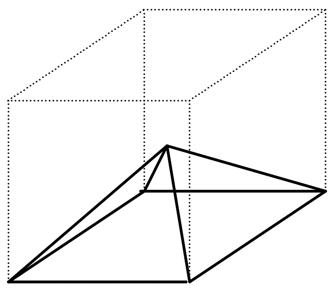
Als Volumen des Kegels mit Radius der Grundfläche r und Höhe h erhält man

$$V_{\text{Kegel}} = \tfrac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h.$$

Der Kegel muss nicht notwendig gerade sein.

19.5.8 Zusatz: Die Sechstel-Würfel-Pyramide

Ausgangspunkt ist die Zerlegung eines Würfels mit Kantenlänge a in sechs kongruente quadratische Pyramiden der Höhe $\frac{a}{2}$.



1. Betrachte einen Würfel mit Kantenlänge a.
2. Er lässt sich in sechs kongruente Pyramiden zerlegen, deren Grundflächen die Seitenquadrate sind und deren Spitzen gleich dem Mittelpunkt des Würfels sind.
3. Diese quadratischen Pyramiden haben Grundkantenlänge a und Höhe $\frac{a}{2}$.
4. Deswegen gilt

   $$V_{\text{Pyr}} = \tfrac{1}{6} \cdot a^3.$$

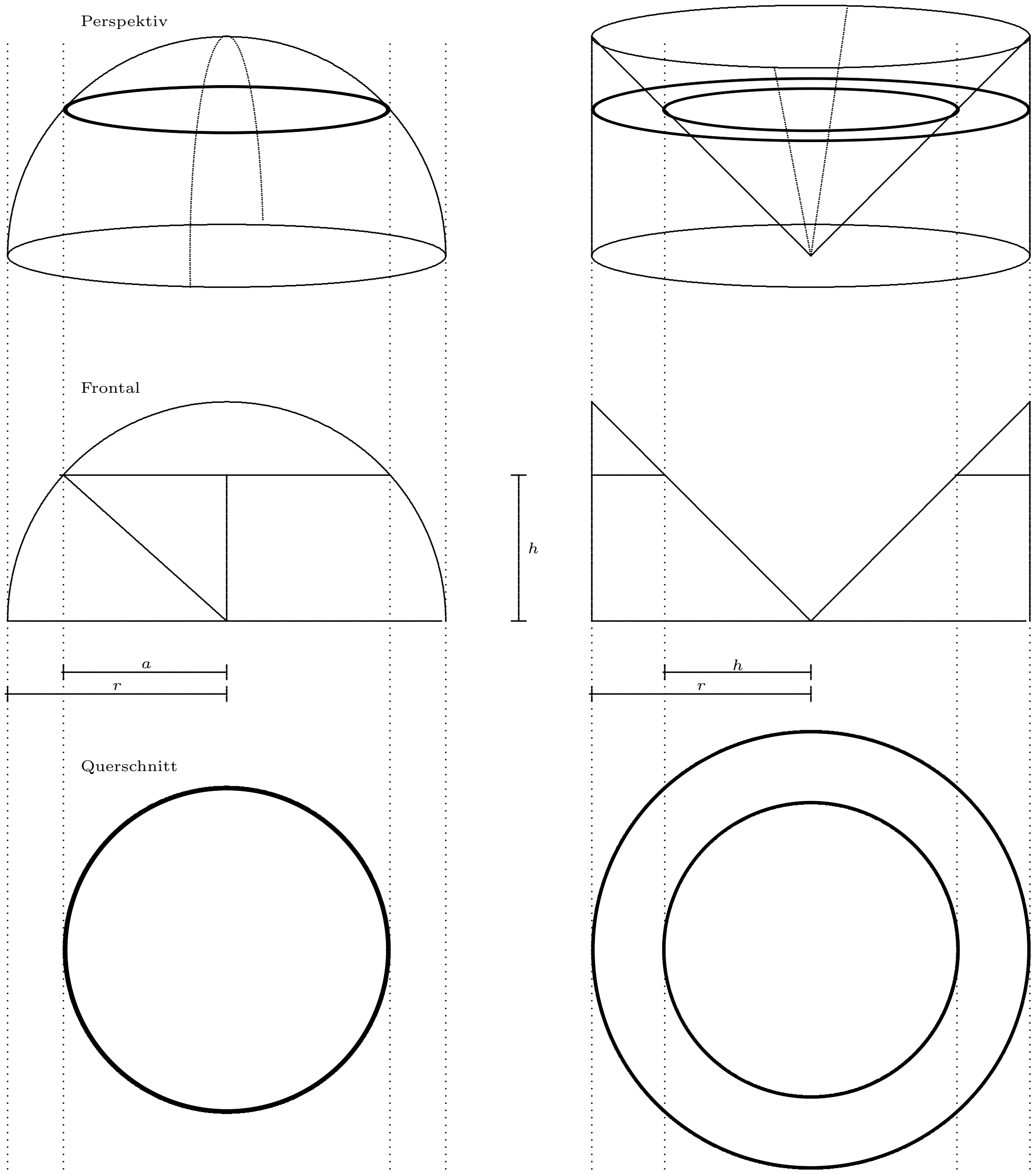
   Für diesen Typ von Pyramide lässt sich also die Volumenformel völlig unabhängig von dem obigen Satz 19.5.1 (und seinem Beweis) herleiten.

   Tatsächlich könnte diese Formel für den Beweis 19.5.2 – 19.5.4 dieses Satzes herangezogen werden: Anstelle der Zerlegung des Würfels in drei Pyramiden der Höhe a erfolgt eine Zerlegung in sechs quadratische Pyramiden der Höhe $\frac{a}{2}$.

19.6 Das Volumen der Kugel

19.6.1 Situation

Zur Ermittlung des Volumens einer Halbkugel mit Radius r betrachten wir neben ihr einen Zylinder, dessen Grundkreisradius und Höhe ebenfalls gleich r sind. Aus dem Zylinder ist ein kopfstehender gerader Kegel — wie in der Skizze erkennbar — ausgebohrt.



19.6.2 Behauptung

In jeder Höhe haben die beiden Körper gleiche Querschnittsfläche.

Begründung:

- Aus der Frontalsicht links ist erkennbar, dass der Flächeninhalt eines Schnitts durch die Halbkugel in Höhe h gegeben ist durch

$$A_{\text{HK}}^{(h)} \;=\; a^2 \cdot \pi \;=\; (r^2 - h^2) \cdot \pi$$

- Aus der Frontalsicht rechts ist erkennbar, dass der Flächeninhalt eines Schnitts durch den ausgebohrten Zylinder in Höhe h gegeben ist durch

$$A_{\text{Zyl}\setminus\text{Keg}}^{(h)} \;=\; r^2 \cdot \pi - h^2 \cdot \pi \;=\; (r^2 - h^2) \cdot \pi.$$

19.6.3 Schlussfolgerung

Mit dem starken Prinzip von Cavalieri 19.3.1 folgt dann, dass die Volumina der beiden Körper übereinstimmen. Da das Volumen des ausgebohrten Zylinders bekannt ist, können wir auf das der Halbkugel schließen:

$$V_{\text{HK}} \;=\; V_{\text{Zyl}\setminus\text{Keg}} \;=\; V_{\text{Zyl}} - V_{\text{Keg}} \;=\; r^2 \cdot \pi \cdot r - \tfrac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot r \;=\; \tfrac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Mittels Verdoppelung ergibt sich für das Kugelvolumen

$$V_{\text{Kugel}} \;=\; \tfrac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

20 Der Oberflächeninhalt eines Körpers

20.1 Der Oberflächeninhalt eines Körpers mit Netz

20.1.1 Definition: Der Oberflächeninhalt eines Körpers mit Netz

Hat ein Körper ein Netz, so ist der *Oberflächeninhalt* des Körpers gleich der Summe der Flächeninhalte der Teilstücke im Netz.

20.1.2 Kommentare

1. Diese Definition trifft insbesondere auf Polyeder zu, d.h. von ebenen Flächenstücken begrenzte Körper.

2. Wir haben bereits kennengelernt, dass auch einige Körper, die gekrümmte Seitenflächen haben, Netze haben. In diesem Fall können die gekrümmten Teilstücke zwar nicht mit einer Kongruenzabbildung in die Zeichenebene abgebildet werden, sie können aber in die Zeichenebene „abgewickelt" oder „abgerollt" werden.

3. Die Kugeloberfläche oder der Torus haben kein Netz.

20.1.3 Formeln: Oberflächeninhalt für Körper mit Netz

Für alle Körper, für die wir Netze angegeben haben, erhalten wir also sofort Formeln für den Oberflächeninhalt.

1. Der Oberflächeninhalt eines Quaders mit Länge ℓ, Breite b und Höhe h ist gegeben durch

$$\mathcal{O}_{\text{Quader}} = 2 \cdot \ell \cdot b + 2 \cdot \ell \cdot h + 2 \cdot b \cdot h.$$

2. Der Oberflächeninhalt eines Würfels mit Kantenlänge a ist gegeben durch

$$\mathcal{O}_{\text{Quader}} = 6 \cdot a^2$$

3. Der Oberflächeninhalt eines Prismas mit Umfang U_{Gr} und Flächeninhalt $\mathcal{A}_{\text{Gr}}$ der Grundfläche sowie Höhe h ist gegeben durch

$$\mathcal{O}_{\text{Prisma}} = \mathcal{A}_{\text{Gr}} + U_{\text{Gr}} \cdot h.$$

4. Der Oberflächeninhalt einer quadratischen Pyramide mit Seitenlänge a des Grundquadrats und Höhe h_{Pyr} erhält man mit Hilfe von 17.6.8

$$\mathcal{O}_{\text{quPyr}} = a^2 + 4 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{(\tfrac{a}{2})^2 + h_{\text{Pyr}}^2} = a^2 + a \cdot \sqrt{a^2 + 4h_{\text{Pyr}}^2}$$

5. Als Oberflächeninhalt des Tetraeders mit Kantenlänge a erhält man mit Hilfe von 17.6.11

$$\mathcal{O}_{\text{Ttr}} = 4 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot h_{\text{Dr}} = 2 \cdot \sqrt{\tfrac{3}{4}} \cdot a^2 = \sqrt{3} \cdot a^2.$$

6. Den Oberflächeninhalt eines geraden Kreiszylinders mit Radius r des Grundkreises und Höhe h erhält man mit Hilfe von 18.2.3

$$\mathcal{O}_{\text{ger Zylinder}} = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h = 2 \cdot r \cdot (r + h) \cdot \pi.$$

7. Den Oberflächeninhalt eines geraden Kreiskegels mit Radius r des Grundkreises und Mantellinie m erhält man mit Hilfe von 18.3.3

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\text{gK Kegel}} &= r^2 \cdot \pi + m^2 \cdot \pi \cdot \tfrac{\varphi}{360\,^\circ} = r^2 \cdot \pi + m^2 \cdot \pi \cdot \tfrac{r}{m} \\ &= r \cdot (r + m) \cdot \pi. \end{aligned}$$

20.2 Der Oberflächeninhalt der Kugel

20.2.1 Vorbemerkung

- Der einzige schulrelevante Fall eines Körpers ohne Netz ist die Kugel. Hier kann man die Formel 20.2.2 für den Oberflächeninhalt durch einen Rückgriff auf ,,Volumen-Approximation" schulisch plausibel machen.
- Andererseits kann man die Problematik des Argumentierens mit vermeintlichen Eigenschaften des Oberflächeninhalts durch ein interessantes Beispiel 20.2.5 aufzeigen.
- Gibt es zu einem Körper kein Netz, so müsste eine fachmathematisch korrekte und sinnvolle Definition des Oberflächeninhalts eigentlich über eine Parametrisierung (als zweidimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten) erfolgen. Klar, dass dies dann schulisch nicht mehr zugänglich ist.

20.2.2 Satz: Oberflächeninhalt der Kugel

Für den Oberflächeninhalt der Kugel mit Radius r gilt

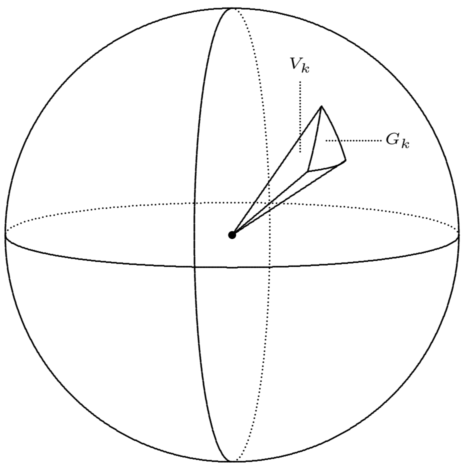
$$\mathcal{O}_{\text{Kugel}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2.$$

20.2.3 Begründung mittels Pyramiden

Die gesamte Kugeloberfläche wird in n kleine Teilstücke mit Flächeninhalt G_k zerlegt. Daraus resultiert eine zugehörige Zerlegung der Vollkugel in Pyramiden mit sphärischen Grundflächen G_k.

Man bedient sich dann der Näherung, dass die Grundflächen der Pyramiden nicht sphärisch, sondern eben wären. Da die Höhe dieser Pyramiden gleich dem Kugelradius ist, erhält man für das Volumen der k-ten ,,Pyramide"

$$V_k = \tfrac{1}{3} \cdot r \cdot G_k.$$



Daraus ergibt sich die Gleichung

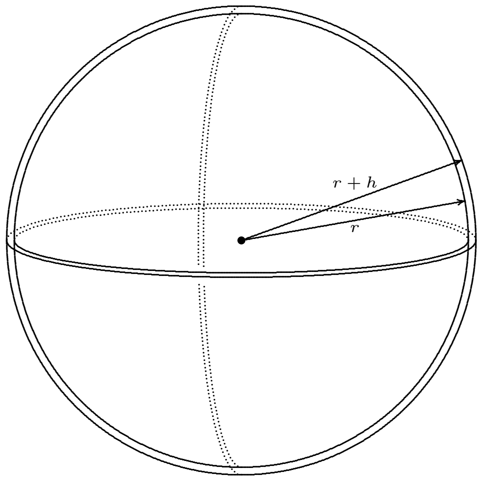
$$\begin{aligned} V_{\text{Kugel}} &= V_1 + \ldots + V_n \\ &= \tfrac{1}{3} \cdot r \cdot G_1 + \ldots + \tfrac{1}{3} \cdot r \cdot G_n = \tfrac{1}{3} \cdot r \cdot \mathcal{O}_{\text{Kugel}}. \end{aligned}$$

Setzen wir in die nach $\mathcal{O}_{\text{Kugel}}$ aufgelöste Gleichung das bekannte Kugelvolumen ein, so erhalten wir

$$\mathcal{O}_{\text{Kugel}} = \tfrac{3}{r} \cdot V_{\text{Kugel}} = \tfrac{3}{r} \cdot \tfrac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = 4 \cdot \pi \cdot r^2.$$

20.2.4 Begründung mittels Kugelschale

Wir betrachten eine Kugelschale mit innerem Radius r und äußerem Radius $r + h$.



Als Volumen der Schale ergibt sich

$$V_{\text{Schale}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot [(r+h)^3 - r^3] = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (3r^2 h + 3rh^2 + h^3).$$

Wir bedienen uns jetzt der Näherung, dass das Volumen der Kugelschale — ähnlich wie beim Prisma — berechnet werden kann als

$$V_{\text{Schale}} = \mathcal{A}_{\text{Sphäre}} \cdot h.$$

wobei wir uns eine geeignete 2-dimensionale Sphäre in die Kugelschale hineingelegt denken.

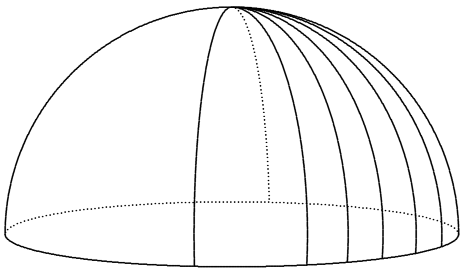
Umgekehrt kann dann der Flächeninhalt der Sphäre angegeben werden als

$$\mathcal{A}_{\text{Sphäre}} = \frac{1}{h} \cdot V_{\text{Schale}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (3r^2 + 3rh + h^2).$$

Mit $h \searrow 0$ ergibt sich

$$\mathcal{O}_{\text{Kugel}} = \lim_{h \searrow 0} \mathcal{A}_{\text{Sphäre}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2.$$

20.2.5 Eine andere Formel für die Kugeloberfläche?



Die Oberfläche der Halbkugel wird wie in der Skizze angedeutet durch n kongruente sphärische Dreiecke zerlegt. Es sind Grundseite und Höhe jeweils

$$g = \tfrac{U}{n}, \qquad h = \tfrac{U}{4}.$$

Bedient man sich dann der Näherung, dass die sphärischen Dreiecke eben wären, so ergäbe sich als Flächeninhalt eines der Dreiecke

$$\mathcal{A}_{\text{Dreieck}} = \tfrac{1}{2} \cdot g \cdot h = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{U}{n} \cdot \tfrac{U}{4} = \tfrac{U^2}{8n}$$

und damit

$$\mathcal{O}_{\text{Halbkugel}} = n \cdot \mathcal{A}_{\text{Dr}} = \tfrac{U^2}{8}.$$

Benutzt man nun die Kreisumfangsformel, so stellt sich heraus, dass

$$\mathcal{O}_{\text{Halbkugel}} = \tfrac{U^2}{8} = \tfrac{\pi^2}{2} \cdot r^2,$$

was der Beziehung 20.2.2 widerspricht. Man sieht an diesem Beispiel, dass die allzu naive Anwendung von anschaulich-intuitiven Ideen, hier ist das die der Flächeninhaltsformel für ebene Dreiecke auf sphärische Dreiecke, zu falschen Schlussfolgerungen führen kann.

Dieses Problem wird auch nicht dadurch beseitigt, dass man $n \to \infty$ gehen lässt, dadurch werden die sphärischen Dreiecke nicht eben.

20.2.6 Beispiel: Der Torus

Ein Torus besitzt kein Netz. Nichtsdestoweniger legt eine „anschauliche" Herstellung des Netzes mit ein wenig Strecken und Stauchen die richtige Formel nahe. Sind r und R die beiden Radien gemäß 18.5.1, so gilt

$$\mathcal{O}_{\text{Torus}} = (2r \cdot \pi) \cdot (2 \cdot R \cdot \pi) = 4 \cdot r \cdot R \cdot \pi^2.$$

21 Konstruieren

21.1 Konstruieren mit Zirkel und Lineal

21.1.1 Ebene geometrische Objekte

Wir wollen hier zur Vereinfachung Teilmengen der Zeichenebene *(ebene geometrische) Objekte* nennen, wenn es sich um

- Punkte, Geraden, Halbgeraden, Strecken, Kreislinien und Kreisbögen, Winkel, Pfeile oder
- deren Vereinigung oder Schnitte

handelt.

21.1.2 Kommentare

- Man könnte in dieser ,,Definition" auf die Erwähnung von Geraden, Strecken oder Winkeln verzichten, da sich diese Objekte als Vereinigungs- oder Schnittmengen der anderen ergeben.
- Ein Pfeil ist die Zusammenstellung einer Halbgerade und einer in ihr enthaltenen Strecke.
- Wird die Zeichenebene mit einem Koordinatensystem versehen, so werden die erwähnten Objekte durch lineare oder quadratische Gleichungen und Ungleichungen beschrieben.
- Umgekehrt umfasst die Liste oben nicht alle Objekte, die durch quadratische Gleichungen beschrieben werden, beispielsweise Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln.

21.1.3 Definition: Konstruieren

Die folgenden Möglichkeiten beschreiben, wie man — ausgehend von gegebenen Objekten — neue Objekte ,,erstellen" kann. Wir wollen sie *elementare Schritte* nennen.

- Zu zwei gegebenen Punkten können erstellt werden
  - die Verbindungsstrecke
  - die Halbgerade mit einem der beiden Punkte als Anfangspunkt
  - die Gerade durch die zwei Punkte
- Zu einem gegebenen Punkt und einer gegebenen Strecke kann der Kreis erstellt werden, der den vorgegebenen Punkt als Mittelpunkt und die Länge der vorgegebenen Strecke als Radius hat.
- Sind zwei Geraden und/oder Kreise gegeben, so können der oder die Schnittpunkte dieser beiden Objekte erstellt werden.

Jede Abfolge von solchen elementaren Schritten wird als *Konstruktion* bezeichnet. Die zugehörige Tätigkeit heißt *Konstruieren.*

21.1.4 Kommentare

- Oft wird — auch in der Schule — das Wort ,,Konstruieren" ganz allgemein für die zeichnerische Ermittlung von Objekten benutzt. Wenn man die Unterscheidung betonen will, sollte man einerseits vom ,,Konstruieren mit Zirkel und Lineal" (KZL) sprechen, andererseits vom ,,Zeichnen".
- Es sollte dann aber wiederum betont werden, dass die Maßskala des Lineals nicht zugelassen ist.
- Die obige Beschreibung beinhaltet einen Kompromiss zwischen dem mathematischen Bestreben, die elementaren Schritte sparsam und abstrakt auszuwählen und dem Anliegen des Schulunterrichts, die elementaren Schritte anschaulich und konkret zu formulieren.
- Anders als gelegentlich suggeriert, dient die Idee des Konstruierens nicht der Erhöhung von Genauigkeit.

21.1.5 Konstruieren als Einschränkung der Möglichkeiten

- Aus Sicht von Schüler(inne)n oder im Alltag erscheint die Einschränkung auf die Werkzeuge ,,Zirkel und Lineal" als unnötig, antiquiert, bevormundend.

  Warum sollte man nur diese zwei Zeichenwerkzeuge, noch dazu ohne Skala, verwenden dürfen, wenn es doch vielerlei andere und bequemere Zeichenwerkzeuge gibt?
- Beim Bauzeichnen oder beim Zeichnen von aufwändigen technischen Situationen werden zahlreiche weitere Handwerkzeuge bis hin zu ausgetüftelter Software eingesetzt. Alltagsgeometrie und Anwendungsgeometrie werden dadurch einerseits erheblich vereinfacht, andererseits ergeben sich dadurch vielfältigste zusätzliche zeichnerische Möglichkeiten.
- In mathematischer Hinsicht definiert die ,,Einschränkung auf Zirkel und Lineal" ein klassisches und interessantes, aber eben abstraktes, Teilgebiet der Geometrie. Es wird darin präzise und abstrakt untersucht, welche Objekte prinzipiell mit Zirkel und Lineal erstellt werden können.

21.1.6 Das GEO-Dreieck als Hilfsmittel

Die äußeren Konturen des GEO-Dreiecks enthalten den $90\,^\circ$- und den $45\,^\circ$-Winkel. Da diese beiden Winkel konstruiert werden können, könnte die Verwendung des GEO-Dreiecks zur ,,Zusammenfassung von elementaren Konstruktionen" auch zugelassen werden. Nach wie vor werden die Maßskalen auf Lineal und GEO-Dreieck nicht verwendet.

Das GEO-Dreieck vereinfacht einige Konstruktionen, die aber auch mit den elementaren Schritten durchgeführt werden können.

- Konstruktion des Lotes.
- Konstruktion des $45\,^\circ$-Winkels.
- Konstruktion einer Parallelen durch Parallelverschiebung.

Auch beim technischen Zeichnen werden fertige Dreiecks-Vorrichtungen, hauptsächlich für das Parallel-Verschieben, benutzt.

21.1.7 Gitterlinien als Hilfsmittel

Gitterlinien auf dem so genannten Kästchenpapier erleichtern das Abmessen von Streckenlängen und die Bestimmung von rechten Winkeln. Da dies auch durch Konstruieren erreicht werden kann, kann die Verwendung von Kästchenpapier zugelassen werden.

Soll die Idee des Konstruierens mit Zirkel und Lineal herausgearbeitet werden, empfiehlt sich die Verwendung von blankem Papier.

Es ist schade, wenn die für Konstruktionen vorgegebenen Objekte entlang der horizontalen oder vertikalen Linien gezeichnet sind.

21.2 Überblick über die Konstruktionen der Schulmathematik

21.2.1 Tabelle

Die Tabelle gibt einen Überblick über die schulisch relevant Konstruktionen. Die Unterscheidung ,,vorgegebenes Objekt — Referenzobjekt" dient dem Verständnis, sie ist mathematisch nicht wesentlich.

Vorgegebenes Objekt	Referenzobjekt	Zu konstruierendes Objekt	Beschreibung
Kreis oder Gerade		(gebundener) Punkt	21.1.3
Zwei (Geraden o. Kreise)		Schnittpunkte	
Zwei Punkte		Gerade, Halbgerade, Strecke	
Punkt	Strecke	Kreis	
Halbgerade	Strecke	Übertragene Strecke	
Gerade, Punkt		Lot, Lotfußpunkt	3.3.5
Strecke		Mittelsenkrechte, Mittelpunkt	
Gerade, Punkt		Parallele	3.4.5
Gerade	Strecke	Parallelenpaar	3.4.4
Strecke		n-Teilung	
Winkel		Winkelhalbierende	3.2.1
Halbgerade	Winkel	Übertragener Winkel	3.2.4
Halbgerade		$60\,^\circ$-Winkel	3.2.6
Punkt	Gerade	achsengespiegelter Punkt	4.3.4, 4.3.6
Punkt	Punkt	punktgespiegelter Punkt	4.4.3
Punkt	Punkt, Winkel	gedrehter Punkt	4.5.2
Punkt	Pfeil	verschobener Punkt	4.6.4
Strecke		Thaleskreis	8.6.2
Strecke	Winkel	Fasskreisbogenpaar	10.1.5
Dreieck		Umkreis	8.4.6
		Inkreis	8.4.9
		Seitenhalbierende, Schwerpunkt	8.4.13
		Höhenschnittpunkt	8.4.16
Kreis oder Strecke		Regelmäßiges n-Eck, $n = 3, 4, 6$	
Kreis, Punkt		Tangente	10.2.3
Zwei Strecken		Strecke bei Quadratur	
Zwei Kreise		Tangente	10.3.2
Kreis oder Strecke		Regelmäßiges Fünfeck	3.2.9
Drei Kreise		Berührkreis	

21.2.2 Nicht-Beispiele

Bei den folgenden Beispielen handelt es sich nicht um Konstruieren im Sinne der Definition 21.1.3, sondern eben nur um Zeichen-Verfahren.

- Übertragen einer Streckenlänge mit Hilfe der Maßskala des Lineals.
- Die n-Teilung einer Strecke mit Hilfe der Maßskala des Lineals.
- Bestimmung des Mittelpunkts eines Kreises mit Hilfe der Maßskala des Lineals.
- Übertragen eines Winkels mit Hilfe der Winkelmaßskala des GEO-Dreiecks.
- Die n-Teilung eines Winkels mit Hilfe der Maßskala des GEO-Dreiecks.
- Zeichnen von Parallelen mit Hilfe der Parallellinien des GEO-Dreiecks.
- Bestimmung der Tangente an einen Kreis durch „Drehen des Lineals".

21.3 Algebraisierung der Konstruierbarkeit

21.3.1 Einstieg

Die klassischen Fragen, welche Objekte konstruiert werden können, können durch Algebraisierung genauer gestellt — und dann auch beantwortet — werden.

21.3.2 Modellierung durch kartesisches Koordinatensystem

Mit Hilfe eines Koordinatensystems (Zwei senkrecht zueinander stehende Achsen, mit Längenskalen) können die Punkte der Zeichenebene eineindeutig reellen Zahlenpaaren oder komplexen Zahlen zugeordnet werden.

$$\begin{array}{cc}\text{Zeichenebene} & \longleftrightarrow \\ \text{Punkt} & \longleftrightarrow \end{array} \underbrace{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longleftrightarrow & \mathbb{C} \\ \text{reelles Zahlenpaar} & \longleftrightarrow & \text{komplexe Zahl}\end{array}}_{\text{kurz: Zahl}}$$

Bezogen auf diese Korrespondenz seien zwei Punkte $\triangleq$ Zahlen fest vorgegeben:

$$\begin{array}{ccccc} O & \longleftrightarrow & (0,0) & \longleftrightarrow & 0 \\ E & \longleftrightarrow & (1,0) & \longleftrightarrow & 1 \end{array}$$

21.3.3 Satz: Die Menge der konstruierbaren Zahlen

Für einen Punkt C der Zeichenebene und die zugehörige Zahl c sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(K) Der Punkt C ist — ausgehend von O und E — in endlich vielen Schritten mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

(R) Die Zahl c ergibt sich — ausgehend von den Zahlen 0 und 1 — durch eine endliche Abfolge von Grundrechenarten und Ziehen von Quadratwurzeln.

21.3.4 Begründung

(K) $\Rightarrow$ (R)

Es sei C ein Punkt, der — ausgehend von bereits konstruierten Punkten — konstruiert werden kann. Das bedeutet, dass sich C als Schnittpunkt von zwei Geraden und/oder Kreisen ergibt, die durch bereits konstruierte Punkte definiert sind.

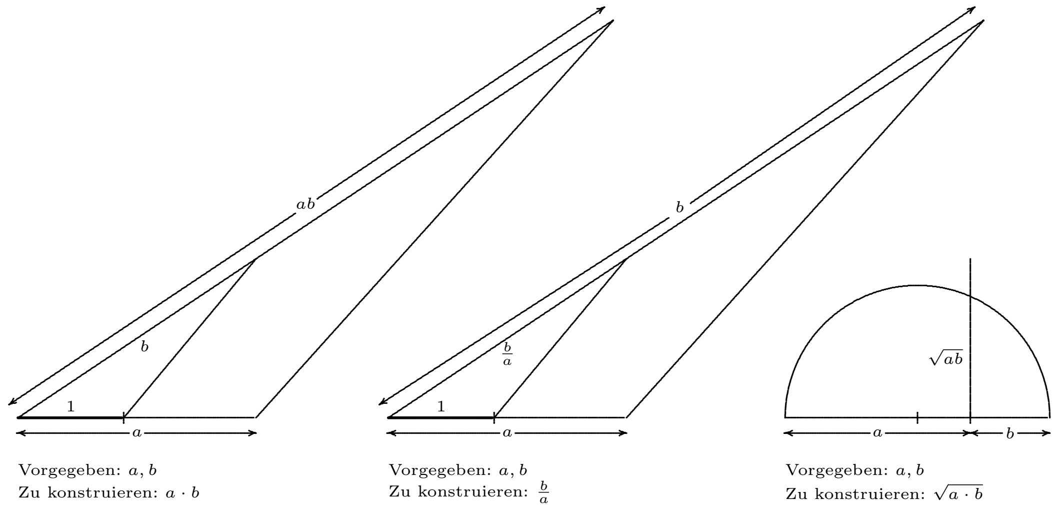
Die zugehörige Zahl c ist demzufolge Lösung eines Systems von zwei linearen oder quadratischen Gleichungen, deren Koeffizienten sich aus denen der bereits konstruierten Punkte ergeben. Diese Koeffizienten sind also selbst mit Grundrechenarten und Quadratwurzelziehen herstellbar.

Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind wiederum mit Grundrechenarten und Quadratwurzelziehen herstellbar. Es gilt also (R).

(R) $\Rightarrow$ (K)

(1) Summe und Differenz von zwei Zahlen können geometrisch mittels Aneinandersetzen der Ursprungs-Verbindungsstrahlen (= Ortsvektoren) konstruiert werden.

(2) Dass auch Produkte, Quotienten und Quadratwurzeln von Zahlen geometrisch konstruiert werden können, zeigen wir zunächst für vorgegebene reell-positive Zahlen auf. Man kann dies anhand der folgenden Konstruktionen einsehen, die auf den Strahlensätzen 7.2.2 bzw. auf dem Höhensatz 12.1.5/12.8.2 beruhen.



(3) Sind dann a und b beliebige komplexe Zahlen, so können Produkt, Quotient und Quadratwurzeln mit Hilfe von Polarkoordinaten auf

- Produkt, Quotient und Quadratwurzel der Beträge sowie
- Winkeladdition, -subtraktion und -halbierung der Argumente

zurückgeführt werden.

21.3.5 Bezüge zur Algebra/Körpertheorie

Im Satz 21.3.3 kann die folgende zu (K) und (R) äquivalente Aussage hinzugefügt werden.

(A) Die Zahl c ist enthalten in einem Körper K_n, der sich mit einer endlichen Abfolge von Körpererweiterungen vom Grad 2 aus dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ergibt:

$$\mathbb{Q} \;=:\; K_0 \;\subseteq\; K_1 \;\subseteq\; K_2 \;\subseteq\; \ldots\ldots \;\subseteq\; K_n \;\subsetneq\; \mathbb{C}$$

$$[K_i : K_{i-1}] \;=\; 2 \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

21.4 Klassische Fragen der Konstruierbarkeit

In Zeiten, in denen die Mathematikdidaktik Begriffe wie ,,Anwendung, Konkretisierung, Veranschaulichung" als alleinige Prinzipien eines gelingenden Mathematikunterrichts darstellt, erscheint die Formulierung dieser Aussage als ,,schwer, abstrakt, absurd".

Tatsächlich ermöglicht sie auf dann ,,einfache" Weise, klassische Fragen der Konstruierbarkeit zu beantworten.

21.4.1 Verdoppelung des Würfelvolumens

Es sei die Kantenlänge eines Würfels in der Zeichenebene vorgegeben. Kann die Kantenlänge des Würfels mit doppeltem Volumen konstruiert werden?

NEIN. Sieht man man die gegebene Kantenlänge als ,,gleich 1" an, so ist die Frage auf die nach der Konstruierbarkeit der Zahl $\sqrt[3]{2}$ reduziert.

Als Nullstelle des irreduziblen Polynoms $x \mapsto x^3 - 2$ ist sie in einem Erweiterungskörper K mit $[K : \mathbb{Q}] = 3$ enthalten. Damit kann sie nicht in einem Körper des Typs wie in Aussage 21.3.5 (A) enthalten sein.

21.4.2 Konstruktion des regelmäßigen n-Ecks

Es sei ein Kreis vorgegeben. Kann das ihm einbeschriebene regelmäßige n-Eck konstruiert werden?

Mittels der in Abschnitt beschriebenen Punkt-Zahl-Korrespondenz lässt sich diese Frage auf die nach der Konstruierbarkeit einer n-ten primitiven Einheitswurzel $\zeta_n \in \mathbb{C}$ zurückführen. Mit algebraischen Methoden zeigt man die folgende Kette von Äquivalenzen (Carl Friedrich Gauss, 1796)

Das regelmäßige n-Eck ist konstruierbar.

$\Leftrightarrow$ Eine primitive n-te Einheitswurzel $\zeta_n \in \mathbb{C}$ ist konstruierbar.

$\Leftrightarrow$ ζ_n ist in einem Körper wie 21.3.5 (A) enthalten.

$\Leftrightarrow$ Das Minimalpolynom Φ_n von ζ_n (= n-tes Kreisteilungspolynom) hat eine Zweierpotenz als Grad.

$\Leftrightarrow$ Es ist $\varphi(n) = 2^j$ für ein $j \in \mathbb{N}_0$. (φ ist die so genannte Eulersche φ-Funktion.)

$\Leftrightarrow$ Die Zahl n hat eine Primfaktorzerlegung der Form $n = 2^k \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$, wobei $k \in \mathbb{N}_0$ und $p_1, \ldots, p_r$ paarweise verschiedene Fermatsche Primzahlen sind. Dabei heißt eine Primzahl Fermatsch, wenn sie eine Primfaktorzerlegung der Form $p = 2^{(2^\ell)} + 1$ mit $\ell \in \mathbb{N}_0$, hat.

Die heute bekannten fünf Fermatschen Primzahlen sind in der Tabelle aufgelistet. Man vermutet, dass es keine weiteren gibt.

ℓ	0	1	2	3	4		5
2^ℓ	1	2	4	8	16		32
$2^{(2^\ell)}+1$	2^1+1 $=3$	2^2+1 $=5$	2^4+1 $=17$	2^8+1 $=257$	$2^{16}+1$ $=65\,537$		$2^{32}+1$ $=4\,294\,967\,297$
Fermat'sch?	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$		$=641\cdot 6\,700\,417$

21.4.3 Dreiteilung des Winkels

Kann ein beliebiger vorgegebener Winkel gedrittelt werden?

NEIN.

Anderenfalls würde beispielsweise der konstruierbare Winkel mit Maß $60\,^\circ$ gedrittelt werden können. Mit Hilfe des Winkels mit Maß $20\,^\circ$ könnte dann ein regelmäßiges 18-Eck konstruiert werden, was aber gemäß Abschnitt 21.4.2 unmöglich ist.

21.4.4 Die Quadratur des Kreises

Es sei ein Kreis vorgegeben. Kann die Seitenlänge des Quadrats mit gleichem Flächeninhalt konstruiert werden?

NEIN. Sieht man man den gegebenen Radius als ,,gleich 1" an, so ist die Frage auf die nach der Konstruierbarkeit der Zahl $\sqrt{\pi}$ reduziert.

Die Frage wurde endgültig im Jahr 1882 von Ferdinand von Lindemann (1852 – 1939) negativ beschieden: Er bewies, dass π transzendent ist, d.h. nicht als Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten auftritt. Dann kann aber π und demzufolge auch $\sqrt{\pi}$ nicht in einem Körper wie in Aussage 21.3.5 (A) enthalten sein.