Skript zur Vorlesung

Mechanik

(Wintersemester 2013/14)

Dieses Geheft enthält in kompakter, manchmal nur stichpunktartig aufzählender Form, die wesentlichen fachlichen und experimentellen Grundlagen, wie sie in der Vorlesung ,,Mechanik" vorgestellt werden.

Es ist zum Gebrauch neben der Vorlesung gedacht und erhebt nicht den Anspruch, ,,in sich selbst verständlich" oder vollständig zu sein.

S. Hilger

Inhaltsverzeichnis

1 Größen in der Physik 4
1.1 Die Sinnesorgane 4
1.2 Das Messen 4
1.3 Physikalische Größen 4
1.4 Vorsatzzeichen und Zehnerpotenzen 6

2 Kinematik — die Lehre von den Bewegungen 7
2.1 Die Länge ⊕ 7
2.1.1 Die Schublehre ⊖ 8
2.2 Die Zeit ⊕ 9
2.2.1 Periodische Vorgänge 9
2.3 Die Geschwindigkeit ⊕ 11
2.3.1 Eindimensionales Koordinatensystem 11
2.3.2 Mittlere Geschwindigkeit 11
2.3.3 Konstante Geschwindigkeit 13
2.3.4 Momentan-Geschwindigkeit 13
2.4 Die Beschleunigung 14
2.4.1 Mittlere Beschleunigung 14
2.4.2 Momentan-Beschleunigung 14
2.5 Die Bewegungsgleichungen ⊖ 16
2.6 Bremsweg, Reaktionsweg, Anhalteweg ⊕ 17
2.7 Der freie Fall — Der senkrechte Wurf ⊖ 18

3 Bewegung im Raum ⊖ 20
3.1 Das kartesische Koordinatensystem 20
3.2 Der schiefe Wurf ⊖ 21
3.3 Die gleichförmige Kreisbewegung 22
3.3.1 Das Federpendel 24
3.3.2 Das Fadenpendel 25
3.3.3 Sinusschwingungen 26

4 Grundlagen der Dynamik 27
4.1 Masse 27
4.2 Kraft 28
4.2.1 Die vier fundamentalen Wechselwirkungen 28
4.2.2 Bestimmungsstücke einer Kraft 29
4.2.3 Vieldeutigkeit des Kraftbegriffs 29
4.3 Der Trägheitssatz ⊕ 31
4.3.1 Formulierung 31
4.3.2 Alltagserfahrungen 31
4.3.3 Didaktische Überlegungen 31
4.3.4 Statik ⊖ 33
4.3.5 Reibungskräfte 34
4.4 Das Grundgesetz der Mechanik 38
4.4.1 Tabelle zur Auswertung 40
4.4.2 Bewegung eines Körpers auf einer geneigten Bahn ⊖ 41

4.5 Der Wechselwirkungssatz . . . 43
4.5.1 Impuls ⊖ . . . 44
4.6 Mechanische Arbeit . . . 46
4.7 Mechanische Kraftwandler ⊕ . . . 48
4.7.1 Die schiefe Ebene . . . 49
4.7.2 Flaschenzug . . . 51
4.7.3 Produktflaschenzüge . . . 52
4.7.4 Potenzflaschenzüge . . . 53
4.7.5 Die hydraulische Presse . . . 54
4.7.6 Das Prinzip des Hebels als Kraftwandler . . . 55
4.7.7 Das Prinzip des Wellrads als Kraftwandler . . . 56
4.7.8 Die goldene Regel der Mechanik . . . 56
4.8 Mechanische Leistung . . . 57
4.9 Mechanische Energie . . . 58
4.9.1 Der Energieerhaltungssatz der Mechanik ⊕ . . . 59

5 Drehbewegung 60
5.1 Das Hebelgesetz ⊕ . . . 60
5.2 Der Schwerpunkt ⊖ . . . 63
5.3 Dynamik der Drehbewegung ⊖ . . . 65
5.4 Die Zentripetalkraft . . . 67
5.5 Die Zentrifugalkraft . . . 68
5.6 Das Newton'sche Gravitationsgesetz . . . 70
5.7 Die Kepler'schen Gesetze . . . 72

6 Mechanik der Flüssigkeiten und Gase ⊕ 73
6.1 Dichte . . . 73
6.2 Der hydrostatische (oder Stempel-) Druck . . . 75
6.2.1 Das Gesetz von Pascal . . . 77
6.3 Der Schweredruck . . . 78
6.3.1 Der Schweredruck — mathematisch ⊖ . . . 78
6.3.2 Der Schweredruck in einer Flüssigkeit . . . 79
6.3.3 Der Schweredruck in einem Gas ⊖ . . . 80
6.4 Der Auftrieb ⊕ . . . 81
6.4.1 Schwimmen ⊖ . . . 83

1 Größen in der Physik

1.1 Die Sinnesorgane

Menschen verfügen über Sinnesorgane, die eine unmittelbare Beobachtung ihrer Umwelt ermöglichen. Sie haben sich im Laufe der Evolution optimal an die Lebensverhältnisse angepaßt, Sinneseindrücke werden aufgenommen und verarbeitet gemäß der Aufgabe, das Leben des Menschen zu gestalten.
Im Sinne der Physik sind sie nicht optimal geeignet:

- Sie unterliegen Täuschungen. Optische Täuschung, Täuschung über Temperatur (Unsere Haut misst eigentlich nicht die Temperatur, sondern den Energieentzug/die Energiezufuhr).
- Sie unterliegen den Vorstellungen des Wahrnehmenden. (Ein Apfel wird von Hungrigen und Satten unterschiedlich wahrgenommen, Entfernungen (beim Wandern) werden unterschiedlich geschätzt, Zeitspannen werden (je nach Langeweile oder Abwechslung) unterschiedlich empfunden.

1.2 Das Messen

Mit Hilfe des Messens werden Beobachtungen (z.B. im Experiment) zahlenmäßig erfasst. Dies hat folgende Vorteile:

- Der ,,Unzulänglichkeit" der Sinnesorgane wird Rechnung getragen. Die Täuschung der Sinnesorgane kann (in gewissem Maße) ausgeschlossen werden.
- Man kann Vorgänge unmittelbar quantitativ erfassen. Es hat sich im Laufe der Physikgeschichte herausgestellt, daß gerade quantitative Erfassung Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten aufdeckt.

1.3 Physikalische Größen

Eine physikalische Größe wird durch eine Messvorschrift charakterisiert.
Im wesentlichen beschreibt die Messvorschrift, wie Objekten oder Situationen mit gleichartigen Eigenschaften aus der mit den Sinnesorganen wahrnehmbaren Welt *Werte* zugeordnet werden.

Gegebenheiten aus der ,,Welt" $\longrightarrow$ Wert der Größe

- Für eine physikalische Größe werden ein Name und ein Symbol festgelegt.
  Beispiele: Länge ℓ, Elektrische Stromstärke I, Geschwindigkeit v.
- Messvorschriften sind in Textformulierungen möglichst genau niedergelegt: DIN–Norm, SI–Konvention (System International d'Unites), Verwaltung in Deutschland durch die Physikalisch–technische–Bundesanstalt Braunschweig (ptb).
- Die Messvorschrift enthält Informationen darüber, wann Messwerte als gleich angesehen werden und darüber, in welche mathematische Beziehungen zueinander (Größenvergleich, Algebraische Verknüpfungen) sie gesetzt werden können.

- Der Wert einer physikalischen Größe wird im allgemeinen in der Form

  Maßzahl · Einheit.

  angegeben. Die Messvorschrift muss also enthalten, wie

  - die Einheit (mit Name und Symbol) definiert ist (B: Urmeter),
  - die (Maß-)Zahl als Vielfachheit des gemessenen Wertes bezüglich der Einheit bestimmt wird (B: Aneinanderlegen).

  Notation: $U = 6,2\,\mathrm{V}$, $\{U\} = 6,2$; $[U] = 1\,\mathrm{V}$.

- Hilfsmittel, die die oben beschriebene Zuordnung erleichtern oder überhaupt erst ermöglichen, werden als *Messgeräte* bezeichnet.

  - Die Festlegung der Einheit bei einem Messgerät wird als *Eichung* bezeichnet (B: ,,Kopieren" des Urmeters).
  - Die Festlegung darüber, wie bei einem geeichten Gerät die (Maß-)Zahlen bestimmt werden, wird als *Kalibrierung* bezeichnet

    B: Anbringen einer 100er–Skala auf einem Meter–Stab oder zwischen den Eichmarken eines Thermometers.

- Bei den physikalischen Größen unterscheidet man zwischen *Basisgrößen* (mit *Basiseinheiten*) und *abgeleiteten Größen* (mit *abgeleiteten Einheiten*).

  - Basisgrößen und -einheiten wurden früher über ,,Prototypen" (Urmeter, Urkilogramm, Erdbewegung,...) festgelegt. Noch früher gab es regional unterschiedliche Einheiten — was beispielsweise den Handel unheimlich erschwerte. Heute stellt man die Forderung, dass eine Basiseinheit ,,leicht" überall auf der Welt reproduzierbar sein muss (Massen, Wellenlängen, Frequenzen atomarer Vorgänge,...).

    Die Basisgrößen und Basiseinheiten in der Physik sind:

Name der Größe	Symbol	Name der Einheit	Symbol
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
El. Stromstärke	I	Ampere	A
Thermodynamische Temperatur	T	Kelvin	K
Lichtstärke	I	Candela	cd
Stoffmenge	ν	Mol	mol

– Abgeleitete Größen: Werden bei der Beobachtung eines Phänomens mehrere Basisgrößen simultan gemessen, so kann man sinnvoll algebraische Kombinationen definieren. Die Einheit ergibt sich dann entsprechend aus den Einheiten der Basisgrößen.

  Beispiel: Bei einer Bewegung misst man eine Zeitspanne und die zurückgelegte Wegstrecke. Die mittlere Geschwindigkeit ist dann **definiert** als Quotient aus Wegstrecke und Zeitspanne. Als Einheit ergibt sich $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

1.4 Vorsatzzeichen und Zehnerpotenzen

Vorsatz-zeichen	gelesen als	Faktor	gelesen als
T	Tera	$10^{12} = 1.000.000.000.000$	Billion
G	Giga	$10^{9} = 1.000.000.000$	Milliarde
M	Mega	$10^{6} = 1.000.000$	Million
k	Kilo	$10^{3} = 1.000$	Tausend
h	Hekto	$10^{2} = 100$	Hundert
da	Deka	$10^{1} = 10$	Zehn
		$10^{0} = 1$	(Ein)
d	Dezi	$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$	Zehntel
c	Centi	$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$	Hundertstel
m	Milli	$10^{-3} = \frac{1}{1.000} = 0,001$	Tausendstel
μ	Mikro	$10^{-6} = \frac{1}{1.000.000} = 0,000\,001$	Millionstel
n	Nano	$10^{-9} = \frac{1}{1.000.000.000} = 0,000\,000\,001$	Milliardstel
p	Piko	$10^{-12} = \frac{1}{1.000.000.000.000} = 0,000\,000\,000\,001$	Billionstel

2 Kinematik — die Lehre von den Bewegungen

Griechisch: $\chi\iota\nu\varepsilon\iota\nu$ sich bewegen.
Idealisierung: Man beobachtet die Bewegung punktförmiger Körper, die in diesem Zusammenhang auch ,,Massepunkte" heißen. Ihre Masse, Volumen, innere Größen sind ohne Belang.
Was ist Bewegung? Ein Körper verändert in einer bestimmten Zeitspanne seinen Ort. Dabei kommt es auf das Bezugssystem an. Allein die Größen Länge und Zeit und aus ihnen abgeleitete Größen spielen eine Rolle.

Beispiele:

- Ein Ball oder eine Kugel werden durch den Raum geworfen.
- Ein Spielzeugauto fährt auf einer Fahrbahn, eine Kugel rollt in einer Schiene.
- Ein Schlüssel fällt zu Boden.

2.1 Die Länge ⊕

Die Länge an einem Körper wird in anderem Zusammenhang auch als Breite, Dicke, Tiefe, Höhe, Durchmesser,... bezeichnet.
Bezeichnet die Länge eher den Abstand zweier Punkte im Raum, so spricht man auch von Wegstrecke, Distanz, Entfernung.

Symbol ℓ. Die Festlegung der SI–Basiseinheit 1 m (1 Meter) ist im Laufe der Zeit verändert worden:

- Seit 1799: 1/40.000.000 des Erdumfangs, fixiert im Urmeter, aufbewahrt in Paris (Bild: [?, S. 5]).
- (1960 – 1983) 1 Meter ist das 1.650.763,73–fache der Vakuumwellenlänge der (orangefarbenen) Spektrallinie des Nuklids ^{86}Kr beim Übergang vom Zustand $5d_5$ zum Zustand $2p_{10}$
- (1983 – Heute) 1 Meter ist die Strecke, die das Licht im Vakuum in $\frac{1}{299.792.485}$ Sekunde zurücklegt.

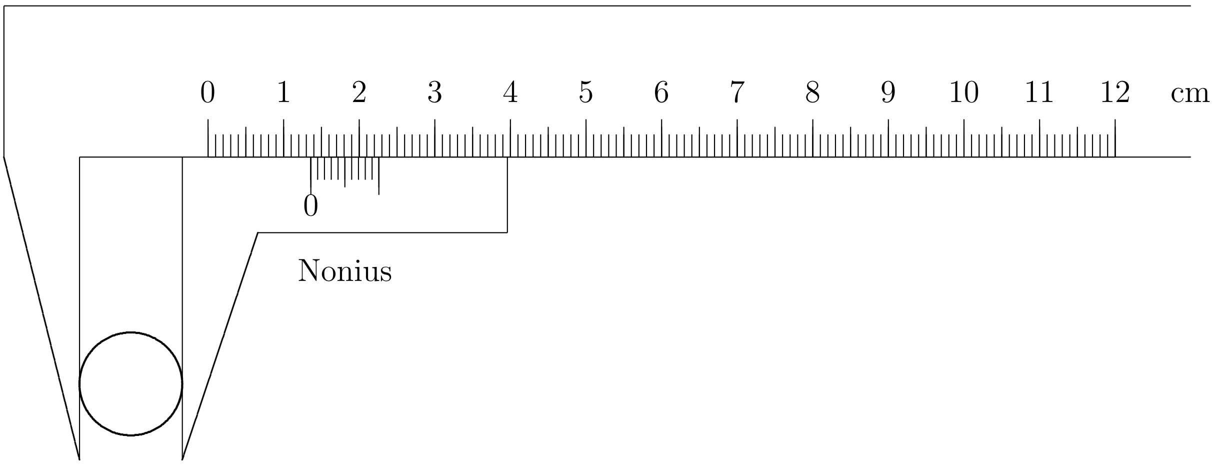
Typische andere Einheiten sind: cm, km, $1\,\text{in} = 2,54\,\text{cm}$, 1 Seemeile $= 1852\,\text{m}$, $1\,\text{ly} = 9,4605 \cdot 10^{12}\,\text{km}$ (Lichtjahr), $1\,\text{parsec} = 3,26\,\text{ly}$ (Entfernung, unter der der Erdbahnradius unter dem Winkel 1 Bogensekunde erscheint), 1 Angstrom $= 10^{-10}\,\text{m}$. Typische Längen-Größenordnungen sind

D Atomkern	10^{-14} m
D Atom	10^{-10} m
Augen–Auflösung	10^{-4} m
D Apfel	10^{-1} m
D Erde	10^{+7} m
D Sonnensystem	10^{+12} m
D Milchstraße	10^{+20} m
D Weltall	10^{+26} m

Messinstrumente:

- Maßstab, Maßband, Zollstock, Lineal
- Mikrometerschraube, Schublehre
- Laserinstrumente (Laufzeit von Lichtsignalen)
- ,,Kilometerzähler" in Fahrzeugen, am Fahrrad
- Rolltacho (= Hodometer)

2.1.1 Die Schublehre ⊖



Die Nonius–Skala mit 10 Längenintervallen ist 9 mm lang. Ein Intervall hat die Länge 0,9 mm.

Beispiel: Der Durchmesser $d = 1,3x$ cm eines Rohres soll bestimmt werden. (In der Zeichnung $x = 6$, x bedeutet die Ziffer auf der 10–tel–mm–Stelle).

Bei der Messung markiert der Nullpunkt der Nonius–Skala die exakte Länge. Dieser Wert kann jedoch nicht auf 10–tel–mm genau abgelesen werden.
Die mathematische Trick–Überlegung

$$1,3x\,\mathrm{cm} + x \cdot 0,9\,\mathrm{mm} = 1,3\,\mathrm{cm} + x \cdot 0,1\,\mathrm{mm} + x \cdot 0,9\,\mathrm{mm} = 1,3\,\mathrm{cm} + x\,\mathrm{mm}.$$

zeigt, dass nur der x–te Teilstrich der Nonius–Skala genau einem mm–Teilstrich der gewöhnlichen metrischen Skala gegenüber liegt. Auf der Nonius–Skala kann also x abgelesen werden.

V

- Bestimme den Durchmesser eines Drahtes!
- Bestimme den Durchmesser einer Rasierklinge!
- Bestimme den Innendurchmesser eines Glasröhrchens!

2.2 Die Zeit ⊕

In der Grundschuldidaktik wird genauer zwischen Zeitpunkt und Zeitspanne unterschieden. Die Physik betrachtet eher die Zeitspannen.
Die Festlegung der SI-Einheit Sekunde ist auch Veränderungen unterworfen:

- (Früher) $\frac{1}{86400}$ des mittleren Sonnentages.
- (Heute) 1 Sekunde ist das 9192631770–fache der Periode der Strahlung beim Übergang zwischen den Hyperfeinstruktur–Niveaus $F = 4, M = 0$ und $F = 3, M = 0$ des Grundzustands ${}^2S_{\frac{1}{2}}$ des von äußeren Feldern ungestörten Cäsium–Atoms ^{133}Cs.
- Andere Einheiten: Minute, Stunde, Tag, Monat, Jahr (bezogen auf Sterne, Sonne). Beachte die nicht–dekadische Umwandlung, Beispiel: $3,4\,\mathrm{h} = 3\,\mathrm{h}24\,\mathrm{min}$.

$\boxed{\text{V}}$ 1 Sekunde ist in etwa die Zeitspanne zwischen zwei Pulsschlägen.

$\boxed{\text{V}}$ Sekundenpendel: 1 Sekunde ist in etwa die Zeitdauer einer Halbschwingung eines Fadenpendels mit 1 m Fadenlänge.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1\,\mathrm{m}}{9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{9,81}}\,\mathrm{s} = 2,006\,\mathrm{s} \quad (3 \text{ Promille Abweichung}) \; .$$

Die Masse des Gewichtsstücks und die Amplitude (Maximalauslenkung) sind unerheblich.

Typische Zeiten:

Alter des Weltalls	$2 \cdot 10^{10}$ a
Alter der Erde	$5 \cdot 10^9$ a
Leben auf der Erde	$4 \cdot 10^9$ a
Jura Gestein	$2 \cdot 10^8$ a
Dinosaurier	$200 - 65 \cdot 10^6$ a
Menschheit	$3 \cdot 10^6$ a
Mensch	100 a
Zeitliche Auflösung des Auges	$\frac{1}{20}$ s

(a bedeutet 1 Jahr.)

2.2.1 Periodische Vorgänge

Wiederholt sich eine Bewegung (ein physikalischer Vorgang) nach jeweils gleichen Zeitspannen immer wieder, so spricht man von einer periodischen Bewegung.

- Die (minimale) Zeitspanne heißt dann *Periode* T.
- Die *Frequenz* des periodischen Vorgangs f ist der Quotient aus der Anzahl n der Perioden und der dazu benötigten Zeit t.

$$f = \frac{n}{t} \qquad \text{Einheit: } 1\,\mathrm{Hz} = \frac{1}{s} \qquad (\text{Hertz}) \; .$$

(Heinrich Rudolph Hertz, 1857 – 1894, Untersuchung elektromagnetischer Wellen).

- Betrachtet man eine einzige Periode, so ergibt sich wegen $n = 1$:

$$f = \frac{1}{T}.$$

- Beispiele: Rotationen (von Himmelskörpern), Fadenpendel, Federpendel (Schraubenfedern, Blattfedern), Torsionspendel, Elektromagnetischer Schwingkreis.

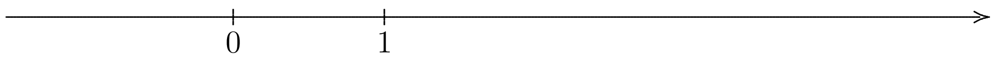
$\boxed{\text{V}}$ Zeit–Messinstrumente (Uhrzeit – Zeitspannen):

- Sonnenuhr (Rotation der Erde kann als Schwingung aufgefasst werden.),
- Wasseruhren, Sanduhren,
- Mechanische Uhren (Federn, Pendel),
- Elektronische Uhren (in Verbindung mit Lichtschranken),
- Quarzkristall–Uhren,
- Computer–Uhren,
- Atomuhren.

2.3 Die Geschwindigkeit ⊕

2.3.1 Eindimensionales Koordinatensystem

Bewegt sich ein Körper auf einer Gerade (oder einer Kurve), so kann seine Position bzw. sein Ort nach Einführung eines Koordinatensystems durch reelle Zahlen ausgedrückt werden. Der Abstand zwischen den durch 0 und 1 festgelegten Orten nennt man Einheit des Koordinatensystems. Beachte den Unterschied zwischen realer Bahn und Koordinatenachse. Die Koordinatenachse kann gegenüber der realen Bahn gestreckt, verschoben, umorientiert werden.



Beispiele: Eisenbahn auf einer Schiene, Auto auf einer Straße, freier Fall.

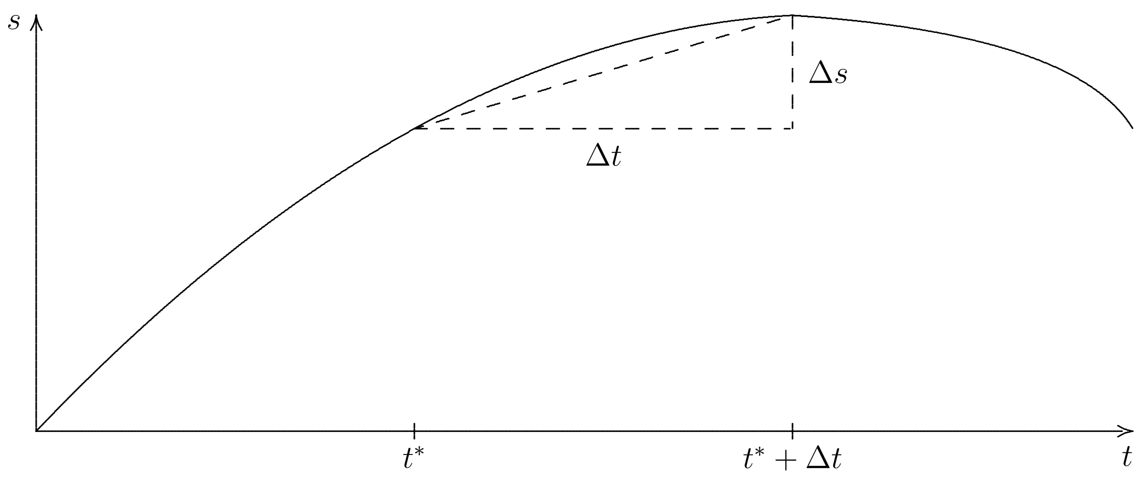
$\boxed{\text{V}}$ Realisierung in Versuchen:

- Motorgetriebener Wagen (Phywe, Duplo),
- Rollenfahrbahn,
- Luftkissenfahrbahn,
- Tropfenwagen,
- Fahrrad auf dem Schulhof.

2.3.2 Mittlere Geschwindigkeit

Befindet sich ein (bewegter) Körper zum Zeitpunkt t^* am Ort $s(t^*)$ und zum Zeitpunkt $t^* + \Delta t$ am Ort $s(t^* + \Delta t)$, so hat er in der Zeitspanne Δt die *mittlere* oder *Durchschnittsgeschwindigkeit*

$$\overline{v} := \frac{s(t^* + \Delta t) - s(t^*)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$



Wichtig: Sie kann nur für eine Zeit**spanne** festgelegt werden.

Veranschaulichung durch Steigungsdreieck im t–s–Diagramm.
Beispiel: Ein Weltklasse–Sprinter legt die 100 m–Strecke in 10,0 s zurück. Seine Durchschnittsgeschwindigkeit ist:

$$\overline{v} = \frac{100\,\mathrm{m} - 0\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{s}} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 10 \cdot \frac{3600}{1000}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 36\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

(Er ist anfangs etwas langsamer, später schneller als es dieser Wert angibt.)
Typische Geschwindigkeiten:

Donovan Bailey (Atlanta 96)	$10,1626\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{100\,\mathrm{m}}{9{,}84\,\mathrm{s}}$
Maurice Green (Sydney 2000)	$10,1112\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{100\,\mathrm{m}}{9{,}89\,\mathrm{s}}$
Wachstum eines Stala**k**titen/Stala**g**miten:	$\frac{1\,\mathrm{mm}}{10a}$
Regenwurm	$0,001\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Haarwachstum	$3 \cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 0,3\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{Tag}}$
Fallschirmspringer im freien Fall	$250\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$
Thermische Bewegung von Elektronen im Metall	$\approx 100\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Luftteilchen* bei 20 °C	$\approx 500\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Elektronenbewegung bei geringen Spannungen	$1\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}$
Schallgeschwindigkeit in Luft	$331,3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\vartheta}{273\,^\circ\mathrm{C}}}$
Fußball bei TOP–Elfmeter	$90\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$
Orkan	$120\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

Eine andere Einheit ist der *Knoten* in der Schifffahrt: $1\,\mathrm{kn} = 1852\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{h}}$

* Die kinetische Gastheorie ermöglicht es, die Temperatur eines Gases mit der mittleren Geschwindigkeit in Zusammenhang zu bringen:

$$\frac{m}{2}\,v^2 = \frac{3}{2}\,k\,T$$

Dabei bezeichnet m die Teilchenmasse, v die Geschwindigkeit, T die absolute Temperatur.
$k = 1,38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$ ist die *Boltzmann–Konstante*, eine fundamentale Naturkonstante.

2.3.3 Konstante Geschwindigkeit

Sind während einer Bewegung die Durchschnittsgeschwindigkeiten für beliebige Zeitspannen gleich, so gilt:

$$s = v \cdot t.$$

(Hier ist der Anfangsort $s_0 = 0$ gesetzt.)

Diese Formel beinhaltet ein alltagsnahes Beispiel für direkte Proportionalität. Direkte Proportionalitäten lassen sich formelmäßig–mathematisch, sprachlich oder graphisch darstellen (Vgl. DID).

$\boxed{\text{V}}$ Im Versuch läßt sich eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit am besten durch einen Elektromotor–Wagen (Duplo–Eisenbahn) realisieren.

Übungsaufgabe: Wie lang braucht der Fußball bis zum Tor?

2.3.4 Momentan-Geschwindigkeit

Wie kann die Geschwindigkeit eines Körpers für einen einzelnen Zeitpunkt t^* angegeben werden? Man läßt die Zeitspanne Δt gegen Null gehen.

$$v(t^*) \; := \; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t^* + \Delta t) - s(t^*)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Graphisch heißt das: Die Steigung der Sekante geht in die Steigung der Tangente über (Vergleiche die Diagramme auf dem Beiblatt S. 15).

Beispiele Der Tachometer zeigt die Momentangeschwindigkeit an.

Mathematik Die Momentangeschwindigkeit als Funktion der Zeit ist die *erste Ableitung* der Zeit–Ort–Funktion.

2.4 Die Beschleunigung

Was bedeutet ,,Von Null auf Hundert in Drei Sekunden"? (Vgl. Renault–Werbung) Die Beschleunigung misst die Veränderung der Geschwindigkeit.

2.4.1 Mittlere Beschleunigung

$$\overline{a} := \frac{v(t^* + \Delta t) - v(t^*)}{\Delta t} \qquad [a] = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Im Beispiel oben:

$$\overline{a} = \frac{100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} - 0\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{3,0\,\mathrm{s}} = \frac{\frac{100\,\mathrm{m}}{3{,}6\,\mathrm{s}}}{3,0\,\mathrm{s}} = 9,3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Typische Beschleunigungen:

Auto Anfahrt	$+5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
Auto Bremsen (trocken)	$-6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
Auto Bremsen (nass)	$-2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
Bemannte Rakete	$50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
Gewehrkugel im Lauf	$10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
Schwebfliege	$10\,\mathrm{g}$
Floh beim Absprung	$100\,\mathrm{g}$

Dabei ist g die immer öfter benutzte Einheit $g = 9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, dies ist die mittlere Fallbeschleunigung auf der Erde (vgl. Abschnitt 2.7).

2.4.2 Momentan-Beschleunigung

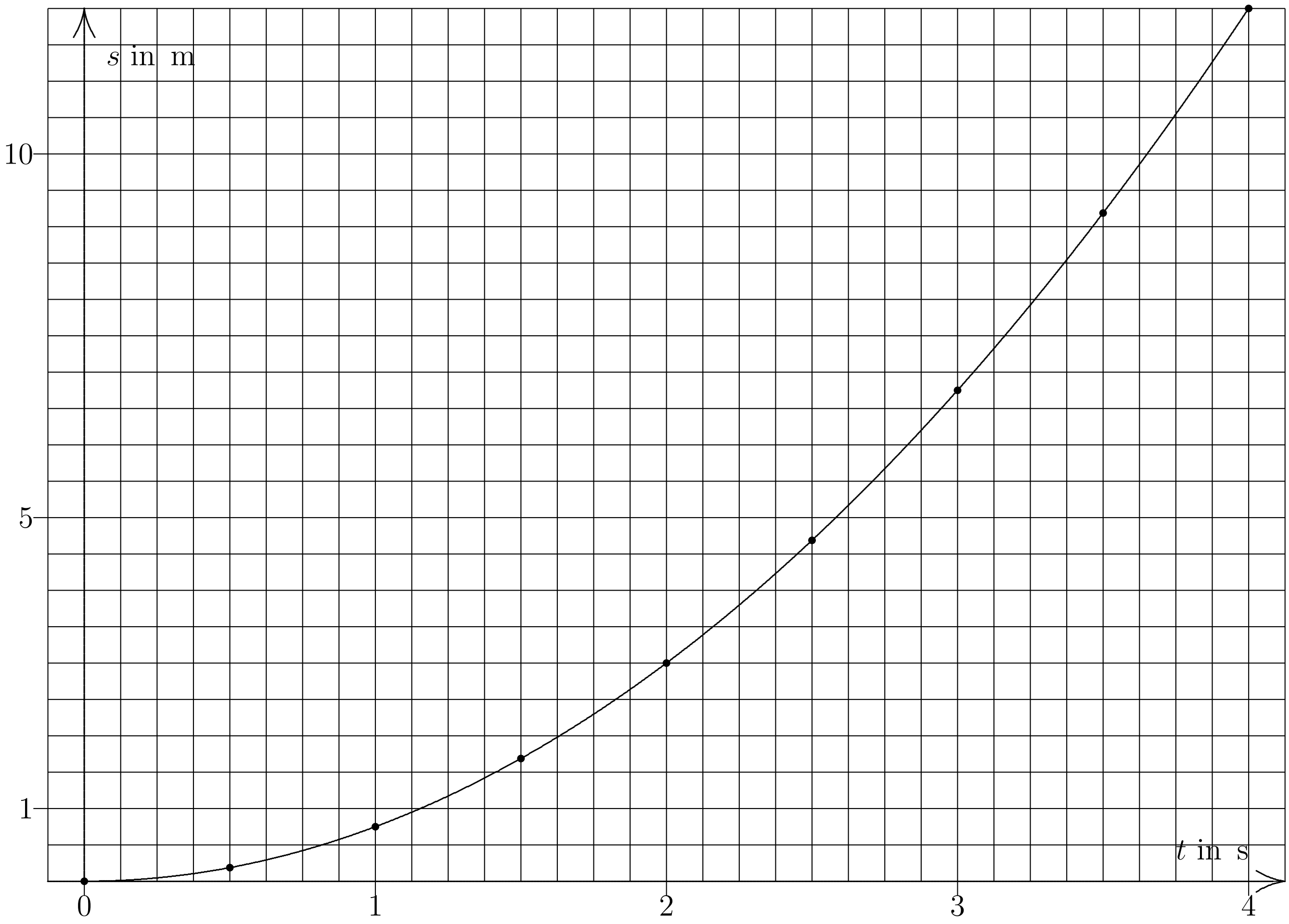
Sie ist für einen einzelnen Zeitpunkt t^* gegeben durch:

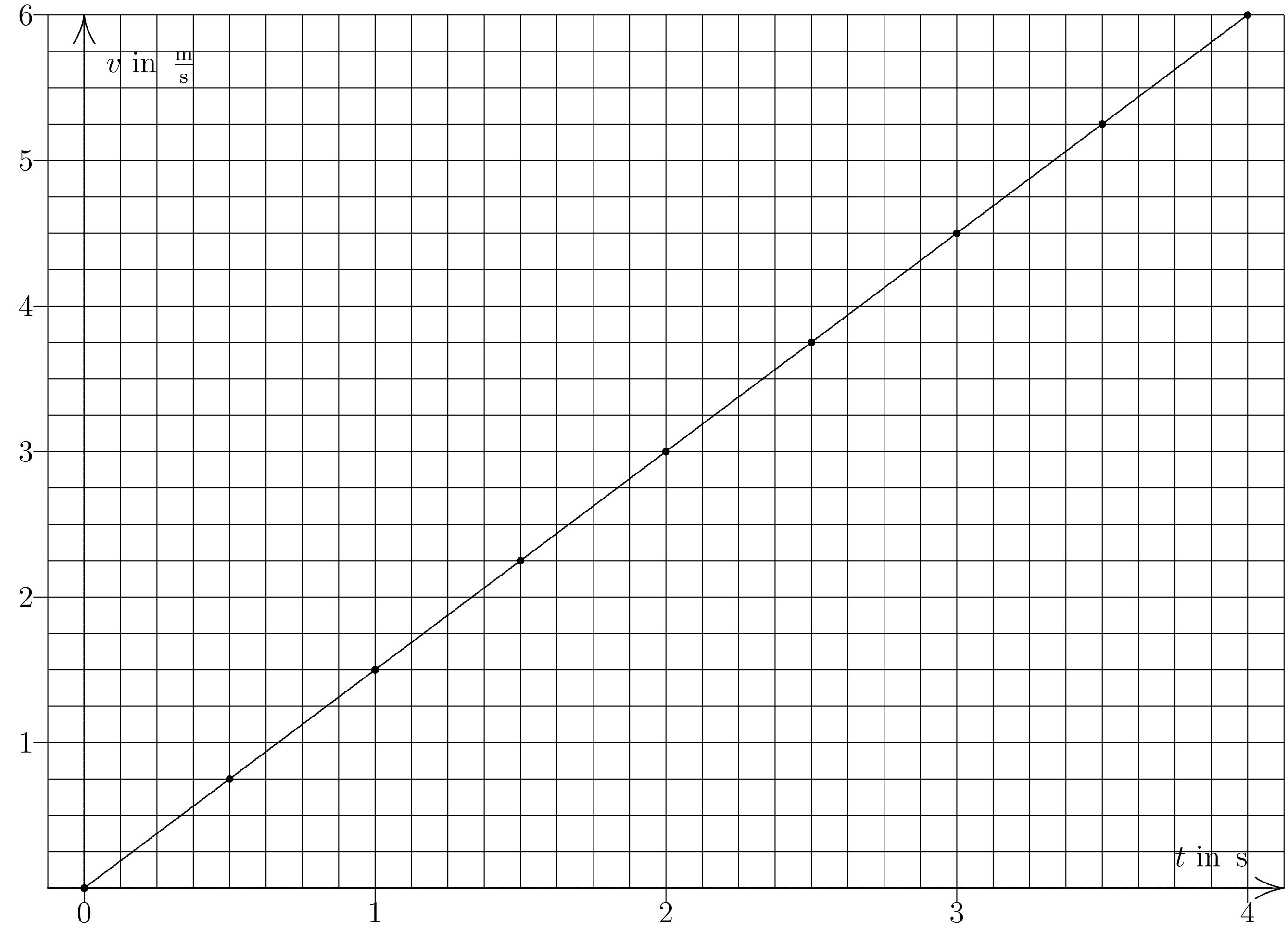
$$a(t^*) = \lim_{t\to 0} \frac{v(t^* + \Delta t) - v(t^*)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}(t^*).$$

Mathematisch bedeutet dies, dass die Beschleunigung die zweite Ableitung der Funktion

$$\text{Zeit } t \quad \mapsto \quad \text{Ort } s$$

ist.


s in m
10
5
1
t in s
0
1
2
3
4


v in m/s
6
5
4
3
2
1
t in s
0
1
2
3
4

2.5 Die Bewegungsgleichungen ⊖

Es wird hier generell vorausgesetzt, dass die Bewegung geradlinig mit konstanter Beschleunigung erfolgt

$$a(t) = a = \text{const.}$$

Eine solche Bewegung heißt *gleichmäßig beschleunigt*.

Zweimalige Integration — mit Anfangszeit $t_0 = 0$ — liefert:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & v(t) & = & at + v_0 \\ (2) & s(t) & = & \dfrac{a}{2}\,t^2 + v_0\,t + s_0 \end{array}$$

Sehr oft wird das Koordinatensystem so eingerichtet, dass $s_0 = s(0) = 0$ gesetzt werden kann:

$$(2') \quad s(t) \quad = \quad \frac{a}{2}\,t^2 + v_0\,t.$$

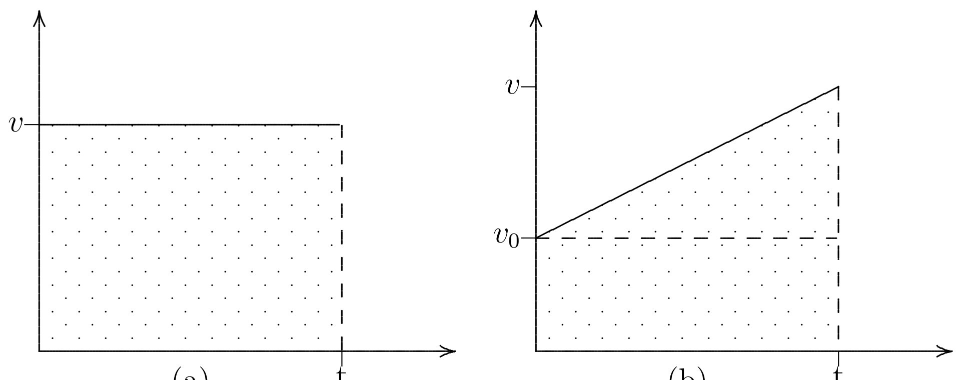
Man kann dies auch graphisch begründen. Zunächst sieht man an der Graphik (a), dass bei einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit der zurückgelegte Weg durch die Fläche unter dem Graphen im t–v–Diagramm gegeben ist:

$$s = v \cdot t.$$

Diese Idee wird nun auf die Bewegung mit konstanter Beschleunigung übertragen. Aus der Graphik (b) ist die Formel (2)

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot at \cdot t = v_0 \cdot t + \frac{a}{2}\,t^2.$$

ersichtlich.



(a) (b)

Gleichungen (1) und (2) beschreiben vollständig die gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Bemerkenswert ist die quadratische Abhängigkeit des Ortes von der Zeit in Gleichung (2).

Beispiel: $a = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $v_0 = 0$, $s_0 = 0$. Es ist dann $s = \frac{a}{2}\,t^2 = t^2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

t in s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s in m	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Es kann weiter eine Gleichung aus (1) und (2') hergeleitet werden, die sehr nützlich bei konkreten Berechnungen ist. Löse (1) nach at auf

$$at = v - v_0$$

und setze in (2') (mit $2a$ multipliziert) ein:

$$2as = a^2t^2 + 2av_0t = at(at + 2v_0) = (v - v_0)(v + v_0) = v^2 - v_0^2.$$

Im wesentlichen handelt es sich um eine Elimination von t (Übungsaufgabe: Herleitung ohne Verwendung des Tricks). Die dritte Bewegungsgleichung lautet also:

$$(3) \quad 2\,a\,s \;=\; v^2 - v_0^2.$$

Sie zeigt die quadratische Abhängigkeit des Ortes von der (Anfangs–)Geschwindigkeit.

2.6 Bremsweg, Reaktionsweg, Anhalteweg ⊕

- Als *Bremsweg* bezeichnet man die Strecke, die ein Fahrzeug für den reinen Abbremsvorgang benötigt.

  Beispiel: Gegeben sind Bremsverzögerung $a = -4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, Anfangsgeschwindigkeit v_0, Endgeschwindigkeit $v = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Gesucht ist der Bremsweg s.

$$s = \frac{-v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \frac{\left[\frac{(v_0 \text{ in } \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}})\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{3{,}6}\right]^2}{8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \frac{(v_0 \text{ in } \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}})^2}{103}\,\mathrm{m}.$$

  Man erhält den Bremsweg (in m), wenn man die Geschwindigkeit (in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$) durch 10 teilt, und das Ergebnis mit sich selbst multipliziert.

  Eine Verdoppelung (bzw. Verdreifachung) der Geschwindigkeit zieht eine Vervierfachung (Verneunfachung) des Bremswegs nach sich.

- Die Strecke, die ein Fahrzeug zwischen Auftreten einer ,,Gefahr" und beginnender Reaktion des Fahrers zurücklegt, heißt *Reaktionsweg.*

  Beispiel: Gegeben sind die Zeitspanne $t = 1,8\,\mathrm{s}$ (,,Schrecksekunde") und die Geschwindigkeit v. Für den zurückgelegten Weg s gilt dann:

$$s = v \cdot t = \frac{(v \text{ in } \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}})\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{3,6} \cdot 1,8\,\mathrm{s} \;\approx\; \frac{v \text{ in } \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{2}\,\mathrm{m}.$$

  Damit sind wir bei der Fahrschulformel ,,Sicherheitsabstand = Halber Tacho" angelangt.

- Der *Anhalteweg* setzt sich aus Reaktionsweg und Bremsweg zusammen.

  Der oben ermittelte Sicherheitsabstand reicht also nur für die Reaktion.

2.7 Der freie Fall — Der senkrechte Wurf ⊖

V Fallschnur: In eine senkrecht hängende Schnur sind mehrere Holzkugeln eingeknüpft. Sie haben einen Abstand vom Boden gemäß der folgenden Tabelle

20 cm	80 cm	180 cm	320 cm	500 cm	720 cm		
$1s_1$	$s_2 = 4s_1$	$s_3 = 9s_1$	$s_4 = 16s_1$	$s_5 = 25s_1$	$s_6 = 36s_1$	......	$s_n = n^2 s_1$

Die Schnur wird fallengelassen, die einzelnen Kugeln fallen dabei aus verschiedenen Höhen s_n zu Boden. Bei bewusstem Hinhören stellt man fest, dass die Kugeln nach jeweils gleichen Zeitabständen auf den Boden treffen. Für die Fallzeit der n–ten Kugel gilt also $t_n = n \cdot t_1$.
Man vergleicht jetzt die Fallhöhen und die Fallzeiten auf folgende Weise:

$$\frac{s_n}{t_n^2} = \frac{n^2 \cdot s_1}{n^2 \cdot t_1^2} = \frac{s_1}{t_1^2} = \text{const.}$$

Induktiver Schluss vom Beispiel zum Allgemeinen: Es zeigt sich, dass der freie Fall (ohne Reibung) eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung ist. Aufgrund der zweiten Bewegungsgleichung ist:

$$s = \frac{a}{2} t^2 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{a}{2} = \frac{s}{t^2}.$$

V Mittels einer Schaltung aus Elektromagnet (Start) und Bodenschalter (Stopp) wird die Fallzeit für eine Stahlkugel gemessen.

V Alternativ kann man die Fallzeit auch mit Hilfe von Lichtschranken und einer el. Uhr messen.

Die konstante Beschleunigung hat den Wert

$$g = 9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Andere genauere Werte kann man mit einem *Gravimeter* messen:

Standort	Fallbeschleunigung in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Pole	9,83
Trondheim	9,821 524 3
Hamburg	9,813 944 3
Hannover	9,812 874 5
München	9,807 291 4
Rom	9,803 475 5
Äquator	9,78
Mond	1,62
Sonne	273,7
Schwerelosigkeit	0

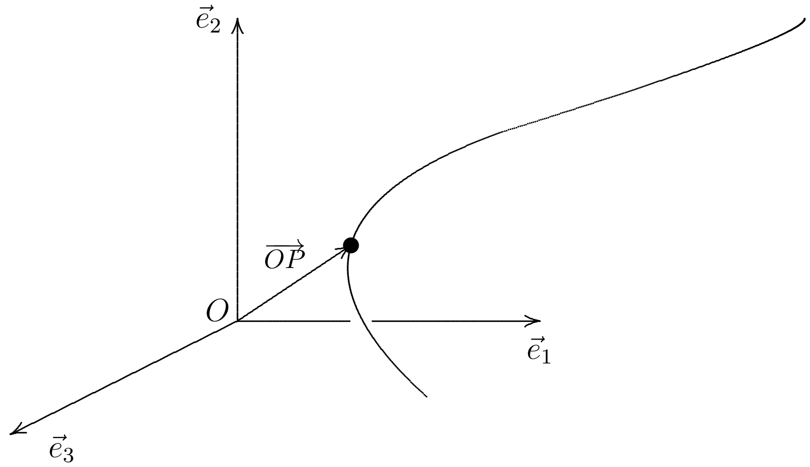
Eine Tabelle der Fallbeschleunigungen auf Planeten ist unter Fallbeschleunigung (Wikipedia) zu finden.

Für den freien Fall (bzw. senkrechten Wurf) gelten die Bewegungsgleichungen mit $a = \pm g$, je nach Orientierung der Koordinatenachse.

$\boxed{\text{V}}$ Besenstiel–Reaktionszeit (vgl. PBG).

3 Bewegung im Raum ⊖

3.1 Das kartesische Koordinatensystem



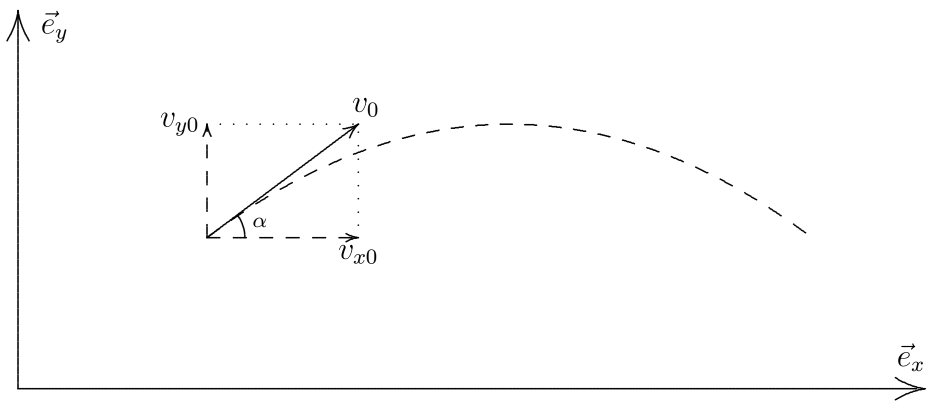
Es sei P irgendein fester Punkt im drei–dimensionalen Raum.

1. Ein fester Punkt O im Raum wird als *Ursprung (Origin)* festgelegt.
2. Drei Vektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, die nicht in einer Ebene liegen, bilden eine *Basis (Dreibein)* des drei–dimensionalen Raumes.
3. Stehen die drei Vektoren paarweise senkrecht aufeinander, so heißt die Basis *kartesisch* (René Descartes, 1596 – 1650).
4. Ein *Koordinatensystem* besteht aus einem Ursprung und einer Basis.
5. Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{OP}$ heißt *Ortsvektor* für P (bzgl. O).
6. Der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ lässt sich eindeutig als *Linearkombination* der Basisvektoren schreiben:
$$\overrightarrow{OP} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3, \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$
7. Die drei Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ heißen *Koordinaten* des Punktes P bzgl. des Koordinatensystems $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Man schreibt auch
$$P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad \text{oder} \quad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}.$$
Wichtig: Die Koordinaten eines Punktes P ändern sich bei einem Wechsel des Koordinatensystems, der Punkt P bleibt gleich.
8. Die Vektoren $\lambda_1\vec{e}_1$, $\lambda_2\vec{e}_2$, $\lambda_3\vec{e}_3$ heißen *Komponenten* des Ortsvektors $\overrightarrow{OP}$.

Die Bewegungen eines Körpers bzgl. unterschiedlicher Richtungen überlagern sich ohne gegenseitige Beeinflussung (Superpositionsprinzip).

3.2 Der schiefe Wurf ⊖

V An einem speziellen Bolzen (Fa. Leybold) sind zwei Plastikkugeln befestigt. Beim Auslösen fliegt die eine Kugel senkrecht nach unten, die andere waagerecht davon. Die Kugeln schlagen gleichzeitig auf dem Boden auf.



Induktiver Schluss: Die Bewegungen in horizontaler Richtung (mit konstanter Geschwindigkeit) und in vertikaler Richtung (senkrechtes Fallen) überlagern sich ohne gegenseitige Beeinflussung.

Für die Fallbewegung brauchen beide Kugeln die gleiche Zeit.

Zur mathematischen Beschreibung des schiefen Wurfs nehmen wir weiter — idealisierend — an, dass keine Reibungskräfte auftreten. Die beiden Bewegungsgleichungen für die beiden Richtungen ergeben das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} s_x = x = x(t) &= v_{x0} \cdot t \\ s_y = y = y(t) &= \frac{-g}{2} \cdot t^2 + v_{y0} \cdot t \end{aligned}$$

Eine Elimination von t liefert:

$$y = y(x) = \frac{-g}{2v_{x0}^2} \cdot x^2 + \frac{v_{y0}}{v_{x0}} \cdot x.$$

Für den Spezialfall des **waagrechten Wurfs** ($v_{y0} = 0$) ergibt sich:

$$y = \frac{-g}{2v_{x0}^2} \cdot x^2.$$

Das ist die Gleichung der nach unten geöffneten *Wurfparabel*.

Versuche, Medien:

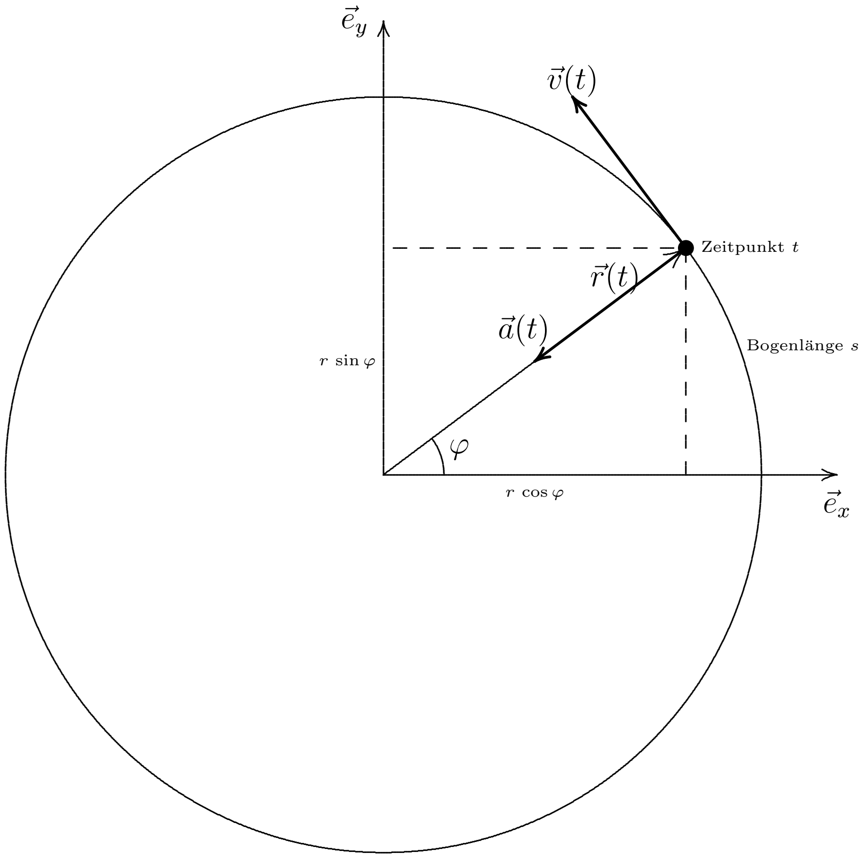
- Vitamin–C–Tablette im Wasser bei leicht seitlicher Beleuchtung.
- Bild eines Vulkanauswurfs (Ätna).

Das Gesetz stellt eine Idealisierung dar. Bei vergleichsweise leichten Körpern spielt die Luftreibung eine – vielleicht sogar entscheidende – Rolle.

V Papier (Blatt, zur Kugel geknüllt, zum Kegel gefaltet) wird fallengelassen.

3.3 Die gleichförmige Kreisbewegung

Illustration: Ein Stück Kreide wird auf einen drehbaren (Platten–)Teller gelegt.



1. Die Position eines Körpers auf einer Kreisbahn ist durch den Phasenwinkel (gemessen im Bogenmaß) festgelegt:

$$\varphi \ := \ \frac{\text{Bogenlänge } s}{\text{Radius } r}.$$

2. Definition: Die Kreis–Bewegung eines Körpers heißt *gleichförmig*, wenn die *Winkelgeschwindigkeit*

$$\omega \ := \ \frac{\varphi}{t} \qquad [\omega] = \frac{\text{rad}}{s} = \frac{1}{s}.$$

konstant ist.

3. Der Ortsvektor als Funktion der Zeit ist dann

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Es gilt: $|\vec{r}| = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \sqrt{r^2} = r.$

4. Die Momentangeschwindigkeit des Körpers ist:

$$\vec{v} := \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -\omega \cdot r\sin(\omega t) \\ \omega \cdot r\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

   Der Geschwindigkeitsvektor ist in jedem Zeitpunkt tangential an die Kreislinie. Für den Betrag gilt:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-\omega r\sin(\omega t))^2 + (\omega r\cos(\omega t))^2} = \omega r.$$

5. Die Momentanbeschleunigung ist

$$\vec{a} := \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} -\omega^2 \cdot r\cos(\omega t) \\ -\omega^2 \cdot r\sin(\omega t) \end{pmatrix} = -\omega^2\vec{r}.$$

6. Der Beschleunigungsvektor ist zu jedem Zeitpunkt t zum Mittelpunkt (zentripetal) gerichtet. (Man spricht von *Zentripetalbeschleunigung*). Der Betrag ist

$$|\vec{a}| = \omega^2 r.$$

7. Das magische Viereck:

$$\begin{array}{ccc} \text{Bogenlänge } s & \xrightarrow{:r} & \text{Phasenwinkel } \varphi \\ \downarrow : t & & \downarrow : t \\ \text{Geschwindigkeit } v & \xrightarrow{:r} & \text{Winkelgeschwindigkeit } \omega \end{array}$$

8. Die Zeit für einen ganzen Umlauf heißt *Umlaufdauer (oder Periode) T*. Für einen Umlauf gilt: $\varphi = 2\pi$, also

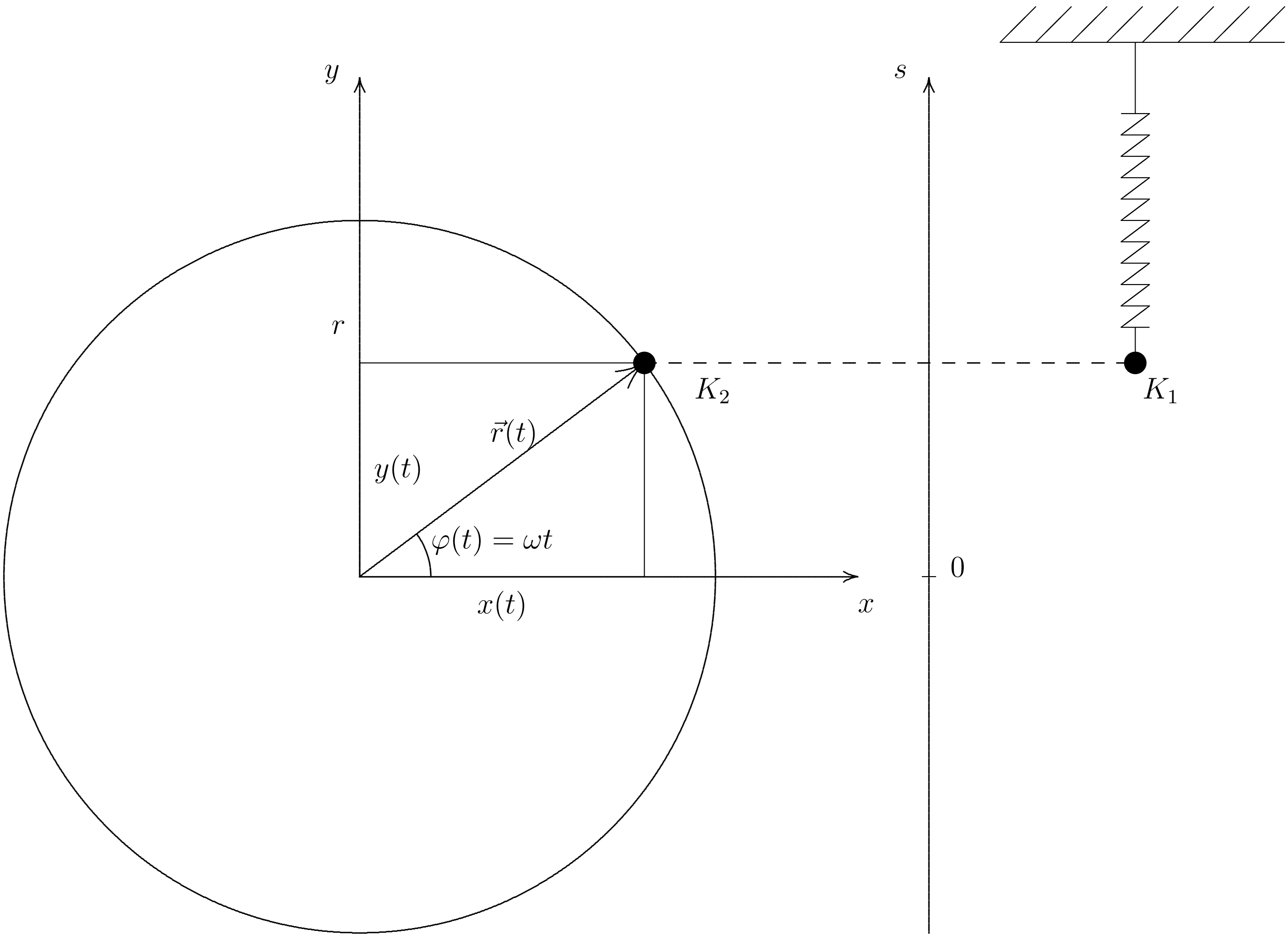
$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

9. Die *Kreisfrequenz* ist definiert als die Anzahl n der Umdrehungen in einer Zeitspanne t: $f = \frac{n}{t}$. Für einen Umlauf gilt:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Viele Menschen haben den Eindruck, dass beim ,,Kreisfahren”, beispielsweise in einem Karussell, die Geschwindigkeit oder die Beschleunigung radial nach außen gerichtet sei. Das ist jedoch nicht der Fall, vergleiche auch Abschnitt 5.5.

3.3.1 Das Federpendel



Die Bewegung eines Federpendels ist gleich der projizierten gleichförmigen Kreisbewegung. Daraus ergeben sich die folgenden Analogien:

Kreisbewegung		Federpendel		Fadenpendel	
Vertikalabstand	$y(t)$	Elongation (Höhe)	$s(t)$	Elongation (Winkel)	$\gamma(t)$
Drehwinkel	$\varphi(t)$	Phasenwinkel	$\varphi(t)$	Phasenwinkel	$\varphi(t)$
Kreisradius	r	Amplitude (Höhe)	A	Amplitude (Winkel)	Γ
Winkelgeschwindigkeit	ω	Phasengeschwindigkeit	ω	Phasengeschwindigkeit	ω
Umlaufzeit	T	Schwingungsdauer	T	Schwingungsdauer	T
Frequenz (Drehzahl)	f	Frequenz	f	Frequenz	f

Wir wissen über die Kreisbewegung, dass

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot \cos(\omega t) \\ A \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Die Körper K_1 und K_2 sind immer auf gleicher Höhe, deshalb gilt für die *Elongation*

$$s(t) = A \cdot \sin(\omega t).$$

Das ist die Zeit–Ort–Funktion für das Federpendel mit Amplitude (= Schwingungsweite) A und Kreisfrequenz ω. Für den Zusammenhang zwischen Schwingungsdauer, Phasengeschwindigkeit und Frequenz gilt wieder

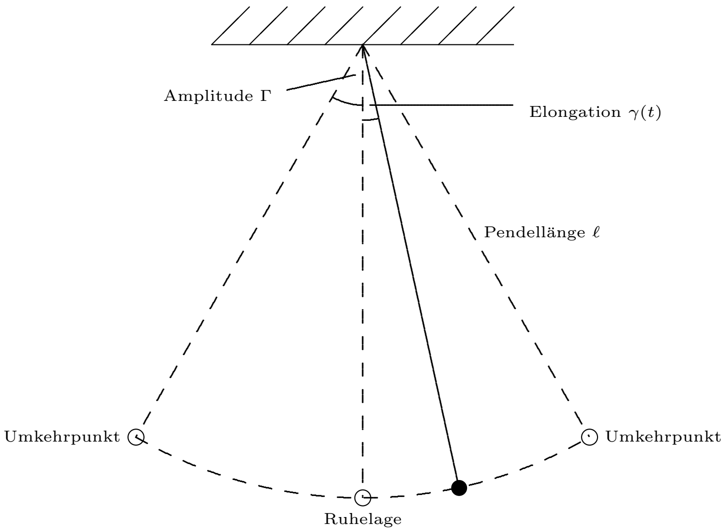
$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$$

Man kann in der Dynamik zeigen, dass

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}}$$

wobei D die Federhärte, m die Masse des an der Feder hängenden Körpers ist.

3.3.2 Das Fadenpendel



Sind die Auslenkwinkel ($\neq$ Phasenwinkel) nicht zu groß, so können die beim Fadenpendel auftretenden Größen ebenfalls in Analogie zum Federpendel und zur projizierten Kreisbewegung gesetzt werden. Dies ist in der Tabelle oben schon festgehalten.

Für die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ gilt hier

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$$

Dabei sind g die Fallbeschleunigung und ℓ die Pendellänge.

3.3.3 Sinusschwingungen

Mit Hilfe der folgenden Versuche kann der sinusförmige Verlauf von natürlichen Schwingungen direkt sichtbar gemacht werden:

$\boxed{\text{V}}$ Sandschaukel. Ein Trichter wird mit der Öffnung nach unten mit zwei Schnüren wie eine Kinderschaukel (bifilar) aufgehängt. Die Öffnung muss gerade so groß sein, dass der eingefüllte Sand in etwa 10 Sekunden herausrieselt. Eventuell kann man sie mit einem gelochten Korkstopfen verengen. Zieht man nun gleichmäßig senkrecht zur Schwingungsrichtung unter dem Trichter ein Endlospapier durch, so hinterlässt der Sand eine sinusförmige Kurve.

$\boxed{\text{V}}$ Der Leuchtfleck eines durch einen Schwingspiegel vertikal umgelenkten Laserstrahls schwingt auf und ab. Wird der Strahl gleichmäßig gedreht (Anordnung auf einer Drehscheibe oder horizontale Umlenkung durch einen rotierenden Spiegel), so beschreibt der Leuchtfleck eine Sinuskurve.

4 Grundlagen der Dynamik

4.1 Masse

Definition der Einheit:

- Ursprüngliche Idee: 1 kg ist die Masse von 1 dm^3 Wasser bei 4 °C und 1 bar Druck.
- Seit etwa 100 Jahren: Definition über das Urkilogramm, das ist ein Platin–Iridium–Zylinder, der in Paris aufbewahrt wird. Relative Genauigkeit 10^{-9}. In fast allen Ländern existieren Kopien (PTB Braunschweig).
- Symbol m, Einheiten $[m] = 1\,\mathrm{kg}$, $1\,\mathrm{g} = \frac{1}{1000}\,\mathrm{kg}$, $1\,\mathrm{t} = 1000\,\mathrm{kg}$.

	Masse in kg
Elektron	$9,1 \cdot 10^{-31}$
Proton	$1,6726231 \cdot 10^{-27}$
Neutron	$1,6749286 \cdot 10^{-27}$
Atom	$10^{-27} \ldots 10^{-25}$
Mensch	$\approx 10^2$
PKW	$\approx 110^3$
Kleiner Elefant	$\approx 10^4$
Lokomotive	$\approx 10^5$
Erde	$5,98 \cdot 10^{24}$
Sonne	$1,99 \cdot 10^{30}$
Milchstraße	$\approx 10^{42}$
Weltall	$\approx 10^{50}$

Die Messung von Massen geschieht letztlich immer über die Messung von Kräften:

- Die schwere Masse: Es wird die Kraft gemessen, die zwei massebehaftete Körper aufeinander ausüben (Gravitationskraft).
- Die träge Masse: Es wird die Kraft gemessen, die zur Erzeugung einer bestimmten Beschleunigung benötigt wird (Siehe Bezug zum 2. Newton'schen Gesetz).

Das sind zwei völlig verschiedene Messvorschriften. Sie bringen aber (abgesehen von einem Proportionalitätsfaktor) genau das gleiche Ergebnis hervor.
Diese ,,überraschende" Tatsache hat Albert Einstein veranlasst, nach einer Theorie zu suchen, die dies als selbstverständlich erscheinen lässt: Die Allgemeine Relativitätstheorie (1915). Sie besagt, dass Gravitations- und Trägheitskräfte ,,zwei Seiten einer Medaille", nämlich der Krümmung der Raumzeit sind. Es handelt sich um eine komplizierte mathematische (differentialgeometrische) Theorie.

4.2 Kraft

4.2.1 Die vier fundamentalen Wechselwirkungen

- Die Wechselwirkung der Allgemeinen Relativitätstheorie:
  - Gravitation: Schwerkräfte auf Himmelskörpern, Kräfte zwischen Himmelskörpern, Kontrahierende Kräfte in Himmelskörpern.
  - Trägheit: Kräfte, die in beschleunigten Bezugssystemen auftreten: Trägheitskraft, Zentrifugalkraft, Corioliskraft (vgl. Abschnitt 5.5)
- Elektromagnetische Wechselwirkung (Ruhende und bewegte Ladungen): Elektrostatische Kräfte, Kräfte in Körpern (chemische Bindungskräfte, Bindung in Festkörpern und Flüssigkeiten), Kräfte an der Oberfläche von Körpern (Reibung, Adhäsion, Oberflächenspannung, Verformungskräfte), Magnetische Kräfte (Dauermagnete, Elektromagnetische Maschinen).
- Schwache Wechselwirkung (B verantwortlich für den β–Zerfall)
- Starke Wechselwirkung: (B Anziehende Kraft der Nukleonen im Atomkern)

Der Begriff der Kraft und die Messvorschrift muss sich auf eine dieser Wechselwirkungen stützen. Es ergeben sich folgende Alternativen:

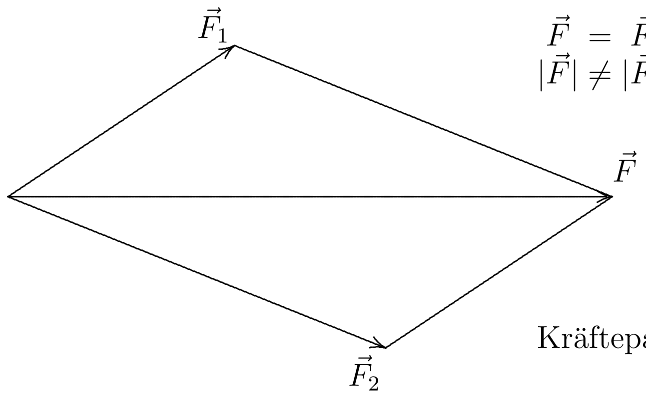
- (Schulisch / generell) Auf einen Körper wirkt dann eine Kraft, wenn sich seine Geschwindigkeit (nach Betrag oder Richtung) oder seine Form ändert.
  $\boxed{\text{V}}$ Eine rollende Stahlkugel wird von einem Magneten in ihrer Richtung abgelenkt.
- (Fachlich / Trägheit) 1 N ist die Kraft, die der Masse 1 kg eine Beschleunigung von $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ erteilt. Das zweite Newton'sche Gesetz wird zur Definition.
- (Schulisch / Gewichtskräfte) 1 N ist die Kraft, die die Erde auf eine verpackte 100 g–Tafel Schokolade (Gesamtmasse 102 g) ausübt. Die Masse–Kraft–Beziehung (mit Ortsfaktor) $F_G = m \cdot g$ wird zur Definition.
- (Schulisch / Verformung) 1 N ist die Kraft, die zur Dehnung einer bestimmten ,,Urfeder" um eine bestimmte Länge benötigt wird. Das Hooke'sche Gesetz wird zur Definition. Federwaagen werden zu Kraftmessern.

Die jeweils genannten Gesetze sind nur dann echte ,,Gesetze", wenn sich die Definition der Kraft auf ein jeweils anderes Gesetz stützt.

Symbol für die Kraft: F, Einheit: $[F] = 1\,\mathrm{N}$ (Newton).

4.2.2 Bestimmungsstücke einer Kraft

- Betrag: Festgelegt durch Einheit und Vielfachheit
- Richtung: Kräfte gleichen Betrages können verschiedene Wirkungen hervorrufen. Sie haben eine Richtung (Vektorcharakter). (Illustration: Kräfte gleichen Betrages greifen mit unterschiedlicher Richtung an einem Klotz an).



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$
$$|\vec{F}| \neq |\vec{F}_1| + |\vec{F}_2|$$

Kräfteparallelogramm

  Das Zusammenwirken mehrerer Kräfte muss durch die Vektoraddition beschrieben werden. Umgekehrt kann eine gegebene Kraft bei vorgegebenen Richtungen in Komponenten zerlegt werden. Unterscheide dabei

  - Real wirkende Kräfte (Zurückzuführen auf die vier Fundamentalkräfte)
  - Ersatz- oder resultierende Kräfte.

- Angriffspunkt: Eher didaktisch–methodischer als fachlicher Begriff, hier wird schon der ,,Drehmoment–Aspekt" der Kraft angesprochen.

$\boxed{\text{V}}$ Verschiedene Gewichtsstücke werden an Kraftmesser gehängt.

4.2.3 Vieldeutigkeit des Kraftbegriffs

- Mensch: Denkkraft, Geisteskraft, Glaubenskraft, Willenskraft, Muskelkraft, überirdische Kraft, Sehkraft, Stoßkraft, Kraftmeier, Kraftsport,
- Arbeitskraft, Lehrkraft, Pflegekraft, Reinigungskraft,
- Streitkräfte,
- Wirtschaftskraft, Finanzkraft, Kaufkraft,
- Deutsch–Jugend–Kraft (DJK),
- Technik: Kraftwagen, Kraftrad (motorisiert, Pferdestärke), Kraftpost, Kraftwerk, Atomkraft, Kernkraft.
- Physik:
  - Elektromotorische Kraft (Spannung).
  - Leuchtkraft (Lichtleistung eines Sterns).

  - Koerzitivkraft (Magnetfeldstärke).
  - Brechkraft einer Linse.

- (Art. 152, BV)

  > Ihm [dem Staat] obliegt die Sicherstellung der Versorgung des Landes mit elektrischer Kraft.

4.3 Der Trägheitssatz ⊕

4.3.1 Formulierung

Ein Körper verharrt in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung, (genau dann) wenn ...

- auf ihn keine Kraft einwirkt oder (äquivalent)
- die auf ihn einwirkende Gesamtkraft Null ist oder (äquivalent)
- die auf ihn wirkenden Kräfte im Gleichgewicht sind.

Dieses erste Newton'sche Gesetz wird heute als *Trägheitssatz* bezeichnet.

4.3.2 Alltagserfahrungen

Der Trägheitssatz scheint unseren Alltagserfahrungen zu widersprechen:

- Ein Fahrzeug muss doch, um seine Geschwindigkeit halten zu können, ständig angetrieben werden.
- Jeder Körper, der durch einen Stoß in Bewegung versetzt wird, kommt nach einer Weile wieder zum Stehen.
- Bereits Aristoteles (384 – 322 v.Chr.) behauptete, dass die Geschwindigkeit eines Körpers direkt proportional zur angreifenden Kraft ist. Diese Vorstellung hat sich aufgrund des nachhaltigen Einflusses des Aristoteles auf das naturwissenschaftliche Weltbild des Mittelalters und der Renaissance sehr lange gehalten. Es war dann Galilei, der diese Vorstellung hinterfragt hat.

Dieser Widerspruch ist nur scheinbar: Bei realen Bewegungen muss eine Kraft gerade zur Kompensation der immer vorhandenen Reibungskraft aufgebracht werden. Die Gesamtkraft ist Null.

4.3.3 Didaktische Überlegungen

Wegen der konkreten Alltagserfahrungen ist es vergleichsweise schwierig, den — bezüglich seines Gehalts einfachen — Trägheitssatz Schüler(inne)n einsichtig zu machen. Dies kann aber doch beispielsweise so geschehen:

- $\boxed{\text{V}}$ Beobachtung eines nahezu reibungsfrei langsam fahrenden Wagens, beispielsweise auf der Luftkissenfahrbahn.
- $\boxed{\text{V}}$ Der Luftballongleiter
- Hover-Puck: Das ist eine Scheibe, unter der ein batteriebetriebener Motor ein Luftkissen erzeugt.
- Eine Kugel rollt eine Rampe herab und dann ein Stück weiter. Als Unterlage werden nacheinander verwendet ...

  - ein Tischtuch,
  - ein Stück Pappe oder Korkplatte,
  - keine Unterlage,
  - eine Stahlplatte (oder -schiene).

  Man beobachtet, dass die Kugel immer weniger abgebremst wird und deshalb immer weiter rollt. Diese Beobachtung kann dahingehend ,,extrapoliert" werden, dass sie bei einer idealen Unterlage (reibungsfreie Bewegung) gar nicht mehr zum Stillstand kommen würde.

  Diese Begründung erfordert ein gutes Abstraktionsvermögen.

- Beobachtung von Bewegungen in der Wirklichkeit, die gut reibungsfrei ablaufen:
  - Diesel–Triebwagen nach Abschalten des Motors (Beispiel: EI Bhf – EI Stadt),
  - Curling, Eisstock–Schießen: Beachte dabei auch das ,,Kehren der Bahn".

  Dies ist ebenfalls nur beschränkt überzeugend, genau genommen könnte man umgekehrt gerade den Eindruck gewinnen, dass eben doch jede Bewegung zum Stillstand kommt.

- Gedankliche Beobachtungen:
  - Raumschiffe ohne Antrieb, fernab von Himmelskörpern: Sie sind in Ruhe (Was heißt das eigentlich?) oder bewegen sich gleichförmig immer weiter.
  - Ein Astronaut in der Schwerelosigkeit bleibt in Ruhe oder er bewegt sich geradlinig weiter.

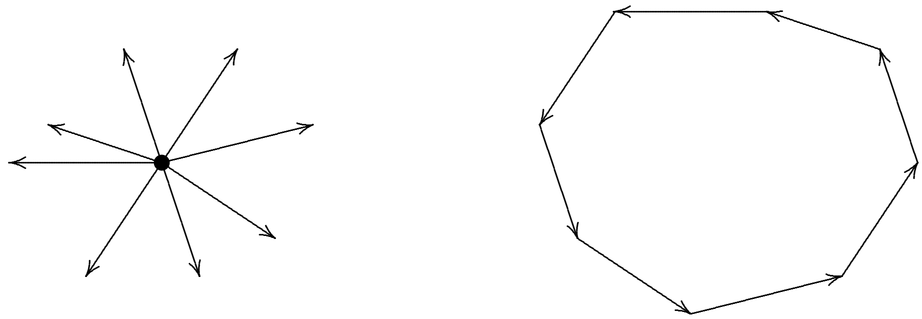
$\boxed{\text{V}}$ Die Unterlage unter einem Sektglas wird ruckhaft weggezogen. Genauer ist dieser Versuch nicht eine Bestätigung des Trägheitssatzes; er demonstriert vielmehr, dass ab einer bestimmten Schwelle die Reibungs–Haftkraft nicht mehr ausreicht, um die beschleunigende Kraft auf den Boden des Sektglases zu übertragen.

4.3.4 Statik ⊖

Definition des Kräftegleichgewichts:

Ein *Kräftegleichgewicht* zwischen n Kräften, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$, die am gleichen Punkt angreifen, tritt ein, wenn ihre vektorielle Summe Null ist.

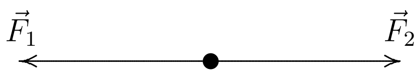
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \vec{0}.$$



Aufgrund des Trägheitssatzes ist eine Anordnung, bei der an allen Punkten Kräftegleichgewicht herrscht, in Ruhe oder die Teile bewegen sich gleichförmig.

Der Begriff ,,Statik" suggeriert hier eigentlich fälschlich, dass es nur um ruhende (statische) Anordnungen geht. Genau genommen erfasst die Statik auch Situationen, bei denen sich alles gleichförmig bewegt.

Spezialfall: Zwei Kräfte sind im Kräftegleichgewicht, wenn $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$.



Dieses Gesetz kann zur Definition der Gleichheit von Kraftbeträgen herangezogen werden.
Dies ist nicht das Wechselwirkungsgesetz (siehe unten!).
Beispiele:

- Aufhängung einer Laterne,
- Oberleitung,
- Ausleger,
- Kräfte in einem Seil, beim Tauziehen.

4.3.5 Reibungskräfte

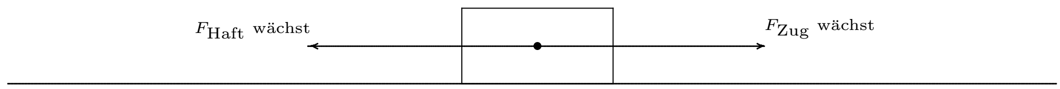
$\boxed{\text{V}}$ Verschiedene Körper (Münze, Radiergummi, Stahlkugel) werden auf verschiedenen Unterlagen (Tischfläche, Glas, Pappe, Kork) angeschubst.

Gemäß Trägheitssatz müssten sich diese Körper gleichförmig weiter bewegen. Offenbar (GGM) verhindert dies eine der Bewegungsrichtung entgegengerichtete Kraft, wir nennen sie *Reibungskraft*.

Um diese Reibungskraft genauer kennenzulernen, beobachten wir die Bewegung eines

- Klotzes mit ebener Unterfläche
- auf verschiedenen ebenen Unterlagen
- bei Einwirkung einer Zugkraft, deren Wirkungslinie durch den Schwerpunkt des Klotzes geht. Evtl. kann man diese Zugkraft auch als Hangabtriebskraft an einer geneigten Ebene realisieren.

1. Der Klotz ruht. Er bleibt auch in Ruhe, wenn die Zugkraft langsam anwächst.



Dabei gilt: $F_{\text{Haft}} = -F_{\text{Zug}}$

Mikroskopische Deutung: Die mikroskopischen Unebenheiten an den Auflageflächen greifen fein ineinander. Die Zugkraft verursacht eine elastische Verformung dieser Unebenheiten. Dadurch werden Gegenkräfte geweckt, die insgesamt die *Haftreibungskraft* F_{Haft} konstituieren.

Die Zugkraft und die geweckte Haftreibungskraft sind betragsmäßig gleich groß. Dies ist in Übereinstimmung mit dem Trägheitssatz: Der Klotz bleibt in Ruhe.

$\boxed{\text{V}}$ Das Modell der gegeneinander verhakten Kleiderbürsten.

2. Bei Überschreitung eines bestimmten Betrags der Zugkraft setzt sich der Körper ruckartig in Bewegung. Diese in dieser Grenzsituation wirkende Haftkraft heißt die *maximale Haftreibungskraft*. Sie wird mit F_{maxHaft} o.ä. bezeichnet.

$\boxed{\text{V}}$ Ein Körper wird auf eine Fahrbahn mit verstellbarer Neigung gelegt (Alternativ: Radiergummi auf Karton). Die Neigung wird — beginnend mit der horizontalen Stellung — kontinuierlich erhöht. Der Grenz–Winkel α bei beginnendem Rutschen des Klotzes wird registriert. Aus der Bedingung

$$F_{\text{maxHaft}} \cdot \cos\alpha \; = \; F_{\text{Gewicht}} \cdot \sin\alpha \quad \Longrightarrow \quad F_{\text{maxHaft}} \; = \; F_{\text{Gewicht}} \cdot \tan\alpha$$

kann die maximale Haftreibungskraft — und daraus der zugehörige Koeffizient μ_{maxHaft} (vgl. unten) — bestimmt werden.

3. Es wird versucht(?!), den Klotz so zu bewegen, dass er sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

   Aufgrund des Trägheitssatzes ist die Summe der auf den Klotz einwirkenden Kräfte gleich Null. Daraus folgt, dass eine zur Zugkraft F_{Zug} gegengleiche Kraft, die *Gleitreibungskraft*

   $$F_{\text{Gleit}} = -F_{\text{Zug}}$$

   wirkt.

   Mikroskopische Deutung: Die mikroskopischen Unebenheiten gleiten unter geringeren Verformungen übereinander hinweg.

   Die Gleitreibungskraft ist im allgemeinen geringer als die maximale Haftreibungskraft:

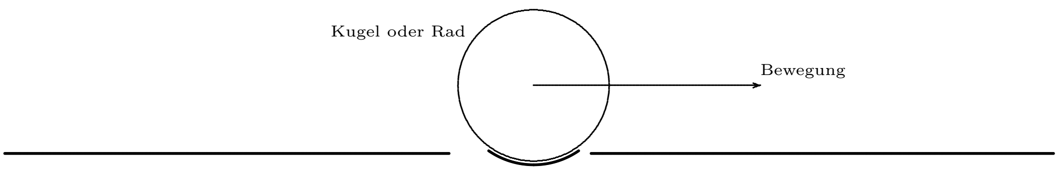
   $$F_{\text{Gleit}} < F_{\text{maxHaft}}.$$

   Dies verursacht auch den sogenannten *Haftgleiteffekt* (Stick–Slip–Effekt), er bedeutet eine schnelle periodische Abfolge aus Haften und Gleiten. Er verursacht einerseits die oft unangenehmen Reibungsgeräusche (Quietschen von Rädern, Knarzen von Türen, Quietschen von Kreide), andererseits das Klingen einer Geigensaite beim Anstreichen mit dem Bogen.

4. Beim gleichförmigen Rollen einer Kugel (oder eines Rades) auf ebener Unterlage tritt die *Rollreibungskraft* F_{Roll} in Erscheinung. Sie ist — bei gleichen Materialien — geringer als die Gleitreibungskraft:

   $$F_{\text{Roll}} < F_{\text{Gleit}}.$$

   Mikroskopische Deutung: Das mikroskopische Einsinken der Kugel in die Auflagefläche verursacht die Ausbildung eines ringförmigen ,,Wulstes". Dieser Wulst muss in Bewegungsrichtung durch Verformung überwunden werden.



$\boxed{\text{V}}$ Eine Kugel wird am oberen Ende einer schräg gestellten Rinne losgelassen. Sie rollt die Rinne herab und bewegt sich dann auf verschiedenen horizontalen Unterlagen (Glas, Pappe, Kork) weiter.

Ergebnis: Die Kugel rollt — je nach Unterlage — verschieden weit.

Deutung: Die Kugel hat am unteren Ende der Rinne jeweils die gleiche (Anfangs–) Geschwindigkeit für die horizontale Bewegung. Es wirkt dann keine Zugkraft, nur die Rollreibungskraft entgegen der Bewegungsrichtung. Je stärker diese Kraft, desto größer die Bremsung (Betrag der negativen Beschleunigung), desto kürzer der zurückgelegte Weg.

Sorgfältige Messungen zeigen, dass die Beträge der Reibungskräfte aus 2., 3. und 4. jeweils

- direkt proportional zum Betrag der Normalkraft F_N (= Auflagekraft = Komponente der Gewichtskraft senkrecht zur Unterlage),
- unabhängig von der Größe der Auflagefläche.

sind. Es gilt also

$$\begin{aligned} F_{\text{maxHaft}} &= \mu_{\text{maxHaft}} \cdot F_N \\ F_{\text{Gleit}} &= \mu_{\text{Gleit}} \cdot F_N \\ F_{\text{Roll}} &= \mu_{\text{Roll}} \cdot F_N \end{aligned}$$

Die verschiedenen *Reibungszahlen* (= *Reibungskoeffizienten*) μ_{X} hängen allein von den Oberflächenbeschaffenheiten (Material und Rauheit) der Kontaktflächen ab.

Sie können Formelsammlungen entnommen werden.

Reibung in Flüssigkeiten

$\boxed{\text{V}}$ Stelle eine Mischung her aus 350 g Wasser und 400 g Mais-Speisestärke.

Reibung in Alltag und Technik

Reibung erwünscht:

- Ohne Reibung wäre unsere „Bewegungswelt" nicht vorstellbar. Die Traktion kommt durch Reibung zustande
- Bremsvorgänge aller Art
- Befestigungen aller Art: Knoten, Dübel oder Verschraubungen würden sich lösen.
- Halten: Man könnte sich mit den Händen nicht festhalten
- Schutz vor Abgleiten, Weggleiten: Handtuch über dem Handtuchhalter, Hose auf der Stuhllehne/Kleiderbügel
- Schnürsenkel
- Letztlich ist eine eigengesteuerte Fortbewegung auf Reibung angewiesen: Fußgänger, Fahrzeuge aller Art (Nicht: Rakete, Rückstoß) („Spiegelglatte Fahrbahn")
- Freisetzen von Wärme: Streichholz, Feuerstein
- Schleifen, Hobeln, Fräsen,. . .
- Freistoßtreffer um die Mauer, Ecke ins Tor
- Fallschirmspringen
- Bowling, Billard
- Kupplung
- Streichinstrumente
- Bumerang

Reibung unerwünscht:

- Bei Bewegungen aller Art:

  Fahrzeuge auf dem Land, im Wasser, in der Luft (→ Energiesparen).

  Die Reibungskraft kompensiert teilweise die Antriebskraft. Es muss daher bei gleicher Bewegung eine höhere Antriebskraft und damit eine höhere Antriebsarbeit aufgebracht werden. Das erhöht die für den Antrieb nötige Energie und damit die Kosten.

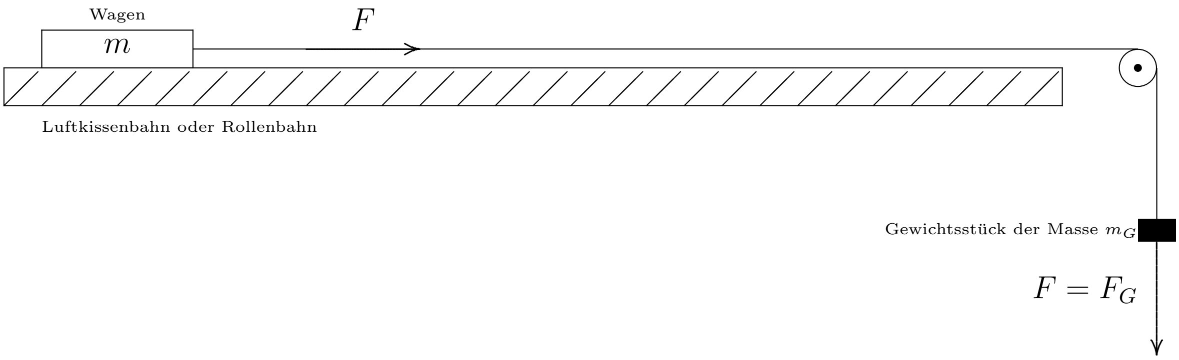
- „Radsport": Fahrrad, Inliner, Skateboard, Roller
- Werkzeuge, Maschinen,
- Bei Physikexperimenten, die die idealisierten grundlegenden Gesetze der Mechanik (Newton) aufzeigen sollen.
- Wintersport.
- Schubladen, Türen

Unerwünschte Reibung kann vermindert werden durch ...

- Geeignete Lagerung (Kugellager)
- Schmierstoffe (Fette, Öle, Graphit, Wasser,...)
- Präzise Geometrie

Reibung in Flüssigkeiten $\boxed{\text{V}}$ Stelle eine Mischung her aus 350 g Wasser und 400 g Mais-Speisestärke.

4.4 Das Grundgesetz der Mechanik



$\boxed{\text{V}}$ Ein Wagen, der sich (möglichst reibungsfrei) auf einer Fahrbahn bewegen kann, wird durch ein Gewichtsstück (Schnur über Umlenkrolle) beschleunigt. Es wird der Zusammenhang zwischen

- *Beschleunigter Masse* m des Wagens,
- *Beschleunigender Kraft* $F = F_G = m_G \cdot g$, und
- *Beschleunigung* $a = \frac{2s}{t^2} \iff s = \frac{a}{2}t^2$

ermittelt. Eine Tabelle zur Auswertung ist in Abschnitt 4.4.1 enthalten.

Es stellt sich heraus:

$$F \sim m \cdot a.$$

Genau genommen werden durch die angreifende Kraft die Masse m des Wagens und die Masse m_G des Gewichtsstücks selbst beschleunigt. Bei präziseren Messungen müßte dies berücksichtigt werden.

Dieser Zusammenhang wird als **Grundgesetz der Mechanik** (abgekürzt GGM) bzw. **2. Newton'sches Gesetz** bezeichnet. Er stellt eine direkte Proportionalität zwischen Kraft und Beschleunigung (nicht: Geschwindigkeit) her.
Die ,,internationale Physikergemeinschaft" hat dies zum Anlaß genommen, die Kraft auf einen Körper zu definieren als:

$$F = m \cdot a.$$

Entsprechend ist die Einheit der Kraft dann eine abgeleitete Einheit:

$$1\,\mathrm{N} \;:=\; 1\,\mathrm{kg} \cdot 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

$\boxed{\text{V}}$ Dies ist in etwa die Gewichtskraft einer (verpackten) Tafel Schokolade auf der Erde.

$\boxed{\text{V}}$ Kraftmesser werden ausprobiert.

Das obige Gesetz wurde von Isaac Newton (1643 – 1727) begründet, auf seine Genialität gehen unter anderem zurück ...

- das Gravitationsgesetz,

- die Grundlagen der Mechanik,
- die Spektral–Zerlegung des Lichts,
- die Differential- und Integralrechnung.

Beispiele

- Genauer gilt noch:

  $$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}).$$

  Hier sind zusätzlich berücksichtigt, dass Kraft und Beschleunigung (im Raum) Vektorcharakter haben und dass die Masse eines Körpers veränderlich sein kann:

  – Eine Rakete stößt Treibstoff aus.

  – Eine am Boden liegende Kette wird gleichförmig hochgezogen.

- Wie kann dieses Gesetz erfahrbar werden:

  – Kinder schieben einen Güterwagen: [**?**, Heft 29].

  – Eine am Kran schwebende Tonnenlast kann leicht von Hand bewegt werden.

- Fallbeschleunigung (Siehe Abschnitt 2.7). Aufgrund der Definition der Einheit N (Newton) ergibt sich für die Fallbeschleunigung g_{HK} auf einem Himmelskörper die Gleichheit der Einheiten $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$.

  Damit gilt beispielsweise für die Fallbeschleunigung auf der Erde:

  $$g_{\mathrm{Erde}} = 9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 9,81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}.$$

  Damit stellt diese Konstante den Zusammenhang zwischen Masse m eines Körpers und seiner Gewichtskraft F_G her:

  $$F_G = m \cdot g_{\mathrm{Erde}}.$$

  Die Konstante g_{Erde} heißt dann auch *Ortsfaktor*. Da es in diesem Zusammenhang eigentlich immer um die Erde geht, wird sie einfach mit g bezeichnet.

  (In der Schule (Gym/RS) geht man umgekehrt vor: In der Mittelstufe wird der Ortsfaktor eingeführt, der sich später (11./10. Jgs.) als Fallbeschleunigung entpuppt.

  Die Unterscheidung der Größen Masse und Gewichtskraft ist im Alltagsleben wenig präsent, da nur der eine Ortsfaktor g_{Erde} auftritt. Die begriffliche Differenzierung ist daher bei der praktischen Bestimmung von Massen bzw. Gewichtskräften überflüssig. Im aktuellen Lehrplan der Grundschule wird auf dieses Problem im Spannungsfeld

  Physik als Wissenschaft — Physik im täglichen Leben

  kurz hingewiesen.

4.4.1 Tabelle zur Auswertung

$\boxed{\text{V}}$ Ein Wagen auf der Luftkissenfahrbahn wird durch ein Gewichtsstück (Schnur über Umlenkrolle) beschleunigt. Es wird der Zusammenhang zwischen

- *Beschleunigter Masse* m des Wagens,
- *Beschleunigender Kraft* $F = F_G = m_G \cdot g,$ und
- *Beschleunigung* $a = \frac{2s}{t^2} \iff s = \frac{a}{2}t^2$

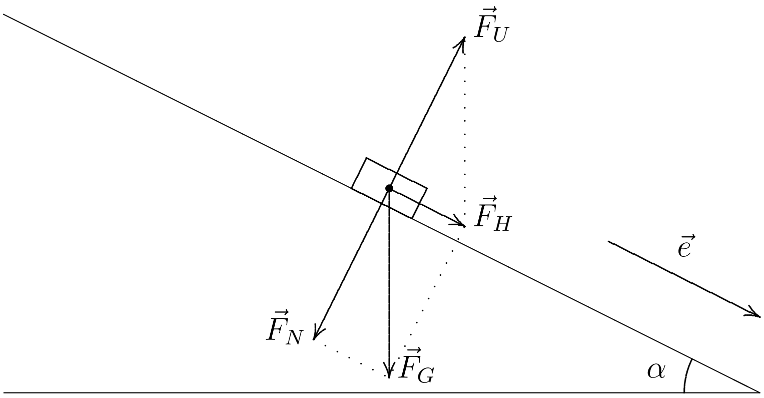
ermittelt.

Zurückgelegte Wegstrecke: $s = 1,00\,\mathrm{m}$.

Wagenmasse	Masse Gewichtsstück	Beschleunigende Kraft	Zeitspanne	Beschleunigung
m in g	m_G in g	$F = m_G \cdot g$ in N	t in s	$a = \frac{2s}{t^2}$ in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
100	10			
200	10			
200	20			
300	20			
400	10			
400	20			

Ergebnis durch ,,induktiven Schluss":

4.4.2 Bewegung eines Körpers auf einer geneigten Bahn ⊖



Ein Körper (Wagen) befindet — oder bewegt — sich auf einer Bahn, die um den Winkel α gegen die Horizontale geneigt ist. Man spricht auch vom *Hang* bzw. einer *schiefen Ebene.*

An dem Körper greifen die folgenden physikalisch–realen Kräfte an:

- Die Gewichtskraft $\vec{F}_G$, sie wirkt senkrecht nach unten.
- Die Gegenkraft der Unterlage $\vec{F}_U$, sie wird durch die Normalkomponente $\vec{F}_N$ der Gewichtskraft geweckt und kompensiert diese gerade:

  $$\vec{F}_U = -\vec{F}_N.$$

- Die Reibungskraft $\vec{F}_R$ wirkt entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung des Körpers. (Sie ist in der Skizze nicht eingezeichnet, da die Bewegungsrichtung nicht vorgegeben ist.)
- Eine Zugkraft $\vec{F}_Z$ parallel zum Hang, die durch einen Motor (innerhalb des Körpers) oder über einen Seilzug (außerhalb des Körpers) wirkt. Sie kann hangabwärts oder -aufwärts (auch entgegen der Bewegungsrichtung) gerichtet sein. (Sie ist ebenfalls nicht eingezeichnet.)
- Als gesamt beschleunigende Kraft ergibt sich damit

  $$\vec{F}_a = \vec{F}_G + \vec{F}_U + \vec{F}_R + \vec{F}_Z$$

- Die Summe der beiden zuerst genannten Kräfte

  $$\vec{F}_H := \vec{F}_G + \vec{F}_U$$

  wird *Hangabtriebskraft* genannt.
- Wegen $\vec{F}_U = -\vec{F}_N$ gilt $\vec{F}_G = \vec{F}_H + \vec{F}_N$. Es bilden also die Normalkraft und die Hangabtriebskraft eine Komponentenzerlegung der Gewichtskraft.

Um die Beiträge zu der beschleunigende Kraft genauer zu berechnen, legen wir eine Koordinatenachse $\vec{e}$ fest (hier: parallel zum Hang nach unten, siehe Skizze).

Für den Betrag der Hangabtriebskraft gilt:

$$|\vec{F}_H| = F_G \cdot \sin\alpha = m \cdot g \cdot \sin\alpha.$$

Die Reibungskraft $\vec{F}_R$ hat den Betrag:

$$|\vec{F}_R| = \mu \cdot |\vec{F}_N| = \mu \cdot F_G \cdot \cos\alpha = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha.$$

Die gesamte beschleunigende Kraft ist also (in Komponenten):

$$F_a = m \cdot g \cdot \sin\alpha \pm \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha + F_Z = m \cdot g \cdot (\sin\alpha \pm \mu \cdot \cos\alpha) + F_Z.$$

Das Vorzeichen $\pm$ richtet sich nach der Bewegungsrichtung des Wagens bzw. Körpers.

Sonderfall: Die gleichförmige Bewegung eines Körpers ist durch die folgende Bedingung charakterisiert.

$$F_a = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad m \cdot g \cdot (\sin\alpha \pm \mu \cdot \cos\alpha) + F_Z = 0.$$

Beispiel: Kräfte beim Schlepplift–Fahren.

4.5 Der Wechselwirkungssatz

Übt ein Körper K_1 auf einen Körper K_2 eine Kraft $\vec{F}_{12}$ aus, so übt umgekehrt der Körper K_2 eine (gegengleiche) Kraft

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

auf den Körper K_1 aus.

Dieser Satz wird als Wechselwirkungssatz oder 3. Newton'sches Gesetz bezeichnet, er ist eng verwandt mit dem Impulserhaltungssatz und hat nicht direkt mit dem Kräftegleichgewicht zweier Kräfte zu tun.
Die auf Newton zurückgehende Kurz–Formel

$$\text{actio} \quad = \quad \text{reactio}$$

wird heute vielfach (aus didaktischen Gründen) als „actio gegengleich reactio" gesprochen.

Beispiele:

- Zwei Kinder stehen auf dem Skateboard oder sitzen auf der Luftmatratze im Wasser: Wenn das erste das zweite wegstößt, so bedeutet das immer einen Gegenstoß vom zweiten auf das erste.
- Tauziehen auf dem Eis: Die beiden Mannschaften würden aufeinander zu rutschen, unabhängig davon, welche kräftiger zieht.
- Zwei Wagen mit Magneten (Magnetschwebebahn),
- Fischerstechen, Ritterturniere,
- Münchhausen zieht sich selbst aus dem Wasser (???),
- Jim Knopf treibt die Lokomotive mit einem „vorausgehängten" Magneten an.
- Mond und Erde.

4.5.1 Impuls ⊖

$\boxed{\text{V}}$ Zwei Menschen auf (reibungsfrei beweglichen) Skateboards stoßen aufeinander. Ausgehend vom Wechselwirkungsgesetz (zu jedem Zeitpunkt) kann man schließen

$$\begin{aligned}
& \vec{F}_{12}(t) = -\vec{F}_{21}(t) \\
\Longrightarrow \quad & m_1 a_1(t) = -m_2 a_2(t) \\
\Longrightarrow \quad & \int_t^{t'} m_1 a_1(s)\, ds = -\int_t^{t'} m_2 a_2(s)\, ds \\
\Longrightarrow \quad & m_1 \cdot (v_1' - v_1) = -m_2 \cdot (v_2' - v_2) \\
\Longrightarrow \quad & m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'.
\end{aligned}$$

Es gilt also ein Erhaltungssatz für den letzten Term. Das ist Anlaß, dieser Größe einen Namen zu geben:

Definition Der (vektorielle) Impuls $\vec{p}$ eines Körpers ist das Produkt aus Masse m des Körpers und seiner Geschwindigkeit $\vec{v}$.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Es gilt der Impulserhaltungssatz (IES): Der Gesamtimpuls bei einer Wechselwirkung ist konstant.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i{}'$$

Index: Nummer des beteiligten Körpers, Ungestrichen: Vor der Wechselwirkung, Gestrichen: Nach der Wechselwirkung.

Hinweis: Der IES gilt auch bei unelastischen Stößen.

$\boxed{\text{V}}$ LK–Bahn.

Beispiele:

- Antrieb einer Rakete durch den Rückstoß: Stößt ein Körper Massen mit großer Geschwindigkeit hinten aus, so wird ihm infolge des IES ein Impuls in Gegenrichtung verliehen. Damit ist ein Antrieb verwirklicht, der unabhängig von einem umgebenden Medium (Luft, Wasser, Straße) ist. Eine Rakete kann auch im Vakuum angetrieben und gesteuert werden.

- Tuborg Werbung: Ein trudelnder Astronaut öffnet eine Bierdose, Bier schwappt heraus, der Rückstoß befördert ihn zum Raumschiff zurück.

- Thrust reverser an den Triebwerken eines Flugzeuges. Er ermöglicht die Schubumkehr beim Landen oder Rückwärtsfahren.

- $\boxed{\text{V}}$ Rückstoß beim hängenden Föhn,

- Billard.

- $\boxed{\text{V}}$ Huckepackball: Ein kleiner Superball sitzt auf einem großen und wird fallengelassen. Der kleine Ball schnellt – im idealisierten Fall — mit 3–facher Geschwindigkeit zurück und erreicht das 9–fache der Ausgangshöhe.

  Begründung: Gehe in das Bezugssystem des gerade reflektierten großen Balls, es bewegt sich mit v nach oben. In diesem Bezugssystem prallt der kleine Ball mit $-2v$ auf den großen Ball (Masse unendlich), er erhält die Geschwindigkeit $2v$ im Bezugssystem, hat also im Laborsystem die Geschwindigkeit $3v$)

- Neutronen–Bremsung (Moderation) am effektivsten bei Stoßpartnern vergleichbarer Masse.

4.6 Mechanische Arbeit

Definition (MS–Niveau): Wird ein Körper längs einer Wegstrecke s mit einer dazu parallel gerichteten Kraft F bewegt, so wird an ihm die Arbeit (work)

$$W = F \cdot s$$

verrichtet.

$$\begin{array}{cccccc} \text{Arbeit} & = & \text{Kraft} & \cdot & \text{Weg} & \text{(Name)} \\ W & = & F & \cdot & s & \text{(Symbol)} \\ 1\,\mathrm{J} & = & 1\,\mathrm{N} & \cdot & 1\,\mathrm{m} & \text{(Einheit)} \end{array}$$

Die Einheit ist nach dem engl. Physiker James Prescott Joule, (1818 – 1889) benannt. Zur Veranschaulichung der Einheit J und anderer Einheiten (Kalorien, Kilowattstunden) siehe Vorlesung WLE.

Die obige Definition der Arbeit ist stark elementarisiert (vgl. StEx H89/3). Umfassender und genauer lautet sie beispielsweise so:
Einer Bewegung längs einer Kurve K in einem Kraftfeld $\vec{F}(\vec{x})$ wird durch

$$W := \int_K \vec{F}(\vec{s}) \cdot \vec{ds}$$

die Arbeit W zugeordnet (Das hier auftretende Kurvenintegral kann mathematisch genau begründet werden).

Diese Definition verallgemeinert die erste dahingehend, dass ...

- der zurückgelegte Weg nicht notwendig geradlinig sein muss:

  Man verwendet das Kurvenintegral $\int_K \quad ds$.

- die Kraft nicht notwendig parallel zum Weg gerichtet sein muss:

  Man verwendet das Skalarprodukt $\vec{F} \cdot \vec{ds} = |\vec{F}| \cdot |\vec{ds}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{F}, \vec{ds})$.

- die Kraft entlang des Weges ihren Wert (nach Betrag oder Richtung) ändern kann:

  Man verwendet eine Funktion Weg $s \mapsto$ Kraft F.

Für die Berechnung der Arbeit längs eines geradlinigen Weges (Richtungsvektor $\vec{e}$) zwischen den Orten 0 und ℓ vereinfacht sich die allgemeinen Definition zu:

$$W := \int_0^\ell \vec{F}(\vec{s}) \cdot \vec{ds} = \int_0^\ell F(s) \cdot \cos\sphericalangle(\vec{F}(s), \vec{e})\, ds.$$

Je nachdem, welcher mechanische Vorgang zugrundeliegt, spricht man von den folgenden Arten physikalischer Arbeit:

- Hubarbeit: Wird ein Körper im Schwerefeld der Erde gleichförmig hochgezogen, so wird dabei die Arbeit $W = F_Z \cdot h = F_G \cdot h = m \cdot g \cdot h$. verrichtet. Beachte, dass dabei die ,,Hubkraft" F_H betragsmäßig gleich der Gewichtskraft F_G ist.
- Reibungsarbeit $W_R = F_R \cdot s$.
- Beschleunigungsarbeit $W_B = F_B \cdot s$.
- Kompressionsarbeit (vgl. WLE).
- Spannarbeit: Die Kraft F ist gemäß Hooke'schem Gesetz ($F = D \cdot s$) direkt proportional zur Federdehnung s. Wird die Feder um die Länge ℓ gedehnt (oder gestaucht), so ergibt sich als zugehörige Arbeit:

  $$W_{\text{Spann}} = \int_0^\ell F(s)\,ds = \int_0^\ell D \cdot s\,ds = \frac{1}{2} D \cdot \ell^2.$$

  Beispiel: Spielzeugauto mit DARDA–Motor.
- Wird ein Schlitten oder Leiterwagen mit einer Kraft $\vec{F}$ (Betrag F) bei einer Schnurneigung von $60\,^\circ$ gegenüber der Horizontalen über eine Strecke ℓ gezogen, so ergibt sich als Arbeit:

  $$W_{\text{Zug}} = \int_0^\ell \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_0^\ell F \cdot \cos \sphericalangle(\vec{F}, \vec{ds}) \cdot ds = \frac{1}{2} F \cdot \ell.$$
- Wird ein Körper von der Erdoberfläche aus unendlich weit in den Weltraum geschossen, so ergibt sich die dafür notwendige Arbeit aus dem Newton'schen Gravitationsgesetz zu:

  $$W = \int_{R_E}^\infty F(s)\,ds = \int_{R_E}^\infty G \cdot \frac{M_E \cdot m}{s^2}\,ds = G \cdot \frac{M_E \cdot m}{R_E}.$$

  (G Gravitationskonstante, R_E Erdradius, M_E Erdmasse, vgl. Abschnitt 5.6). Durch Gleichsetzen dieser Arbeit mit der kinetischen Anfangsenergie kann man die *Zweite Fluchtgeschwindigkeit* v_{II} ausrechnen:

  $$G \cdot \frac{M_E \cdot m}{R_E} = \frac{m}{2} \cdot v_{II}^2 \qquad \Longrightarrow$$
  $$v_{II} = \sqrt{2G \cdot \frac{M_E}{R_E}} = \sqrt{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot \frac{5,97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{6,38 \cdot 10^6\,\mathrm{m}}} = 11,2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

4.7 Mechanische Kraftwandler ⊕

Kraftwandler sind mechanische Geräte (oder Prinzipien), die es gestatten, bei bestimmten mechanischen Vorgängen die aufzuwendende Kraft zu verringern.

Beispiele für Kraftwandler in der Technik:

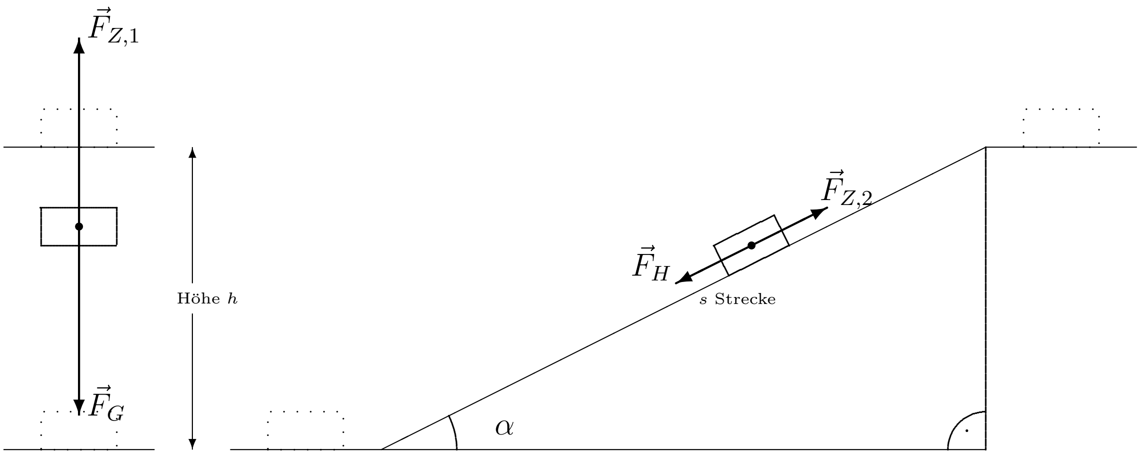
- Schiefe Ebene: Rampe, Serpentinen, vgl. Abschnitt 4.7.1
- Gewinde, Korkenzieher, Wagenheber
- Flaschenzug: Baukran, Bergsteigen, vgl. Abschnitt 4.7.2
- Hydraulikanlagen aller Art vgl. Abschnitt 4.7.5
- Hebelwerkzeuge aller Art vgl. Abschnitt 4.7.6
- Wellrad, vgl. Abschnitt 4.7.7
- Transmission durch Riemen- und Ketten
- Zahnrad–Getriebe: Fahrzeuge, Maschinen

Ein Kraftwandler heißt *ideal*, wenn er

- reibungsfrei arbeitet,
- auch sonst keine Wärmeverluste (beispielsweise infolge einer Verformung) aufweist und
- seine Bauteile als masselos (→ gewichtslos, trägheitslos) aufgefasst werden können.

(Die letzte Bedingung ist für die ,,Goldene Regel" (weiter unten) nicht von prinzipieller Bedeutung, sie elementarisiert aber die Rechnungen.)

4.7.1 Die schiefe Ebene



Ein Körper (Wagen), auf den die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ wirkt, soll gleichförmig auf die Höhe h befördert werden. Wir vernachlässigen dabei Reibungskräfte.

- Wird er direkt senkrecht hochgehoben, so muss die Zugkraft $\vec{F}_{Z,1}$ gegengleich zur Gewichtskraft $\vec{F}_G$ sein.

  Für die zu verrichtende Hubarbeit gilt hier also

  $$W_1 = |\vec{F}_{Z,1}| \cdot h = m \cdot g \cdot h.$$

- Wird der Körper auf einer schiefen Ebene (Rampe) — reibungsfrei — nach oben geschoben, so ist die Kraft

  $$|\vec{F}_{Z,2}| = |\vec{F}_H| = m \cdot g \cdot \sin\alpha$$

  nötig. Die dabei zurückzulegende Wegstrecke ist

  $$s = \frac{h}{\sin\alpha}$$

- Hier muss die Arbeit

  $$W_2 = |\vec{F}_{Z,2}| \cdot s = (m \cdot g \cdot \sin\alpha) \cdot \frac{h}{\sin\alpha} = m \cdot g \cdot h$$

  verrichtet werden.

- Es stellt sich also heraus, dass die Arbeit bei beiden ,,Hebe–Methoden" die gleiche ist:

  $$W_1 = W_2.$$

  Dies ist die goldene Regel der Mechanik für den Spezialfall der schiefen Ebene.

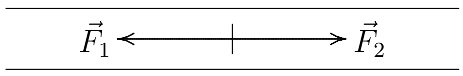
Beispiele:

- Rampe, Treppe, Abschleppfahrzeug
- Serpentinen
- Keil, Axt, Beil
- Bei einem Schraubengewinde handelt es sich um eine kreisförmig angeordnete schiefe Ebene: Schraube, Korkenzieher, Wagenheber.

4.7.2 Flaschenzug

Für das Verständnis eines Flaschenzugs sind die beiden folgenden Betrachtungen zum Kräftegleichgewicht entscheidend:

Gespanntes Seil: In jedem Punkt eines (gespannten) gleichförmig bewegten Seils sind die beiden in Seilrichtung angreifenden Kräfte gegengleich:

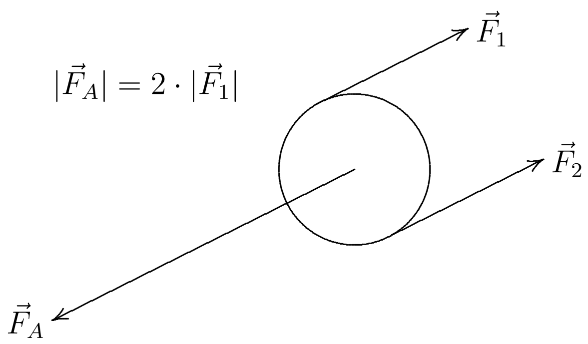


$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Bewegte Rolle: Ist ein Seil so um eine Rolle gelegt, dass die beiden Seilenden parallel verlaufen und bewegen sich Seil und Rolle gleichförmig, so gilt :

- Die beiden (parallel gerichteten) Seilkräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ haben den gleichen Betrag.
- Die entgegengesetzt gerichtete Kraft $\vec{F}_A$ auf die Rollenachse hat den doppelten Betrag wie $\vec{F}_1$.

$$|\vec{F}_A| = 2 \cdot |\vec{F}_1|$$



$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$$

Vergleicht man bei einem idealen Flaschenzug die wirkenden Kräfte und die Wegstrecken jeweils auf Zugseite (Index Z) und auf der Lastseite (Index L), so stellt sich heraus (vgl. Beiblatt):

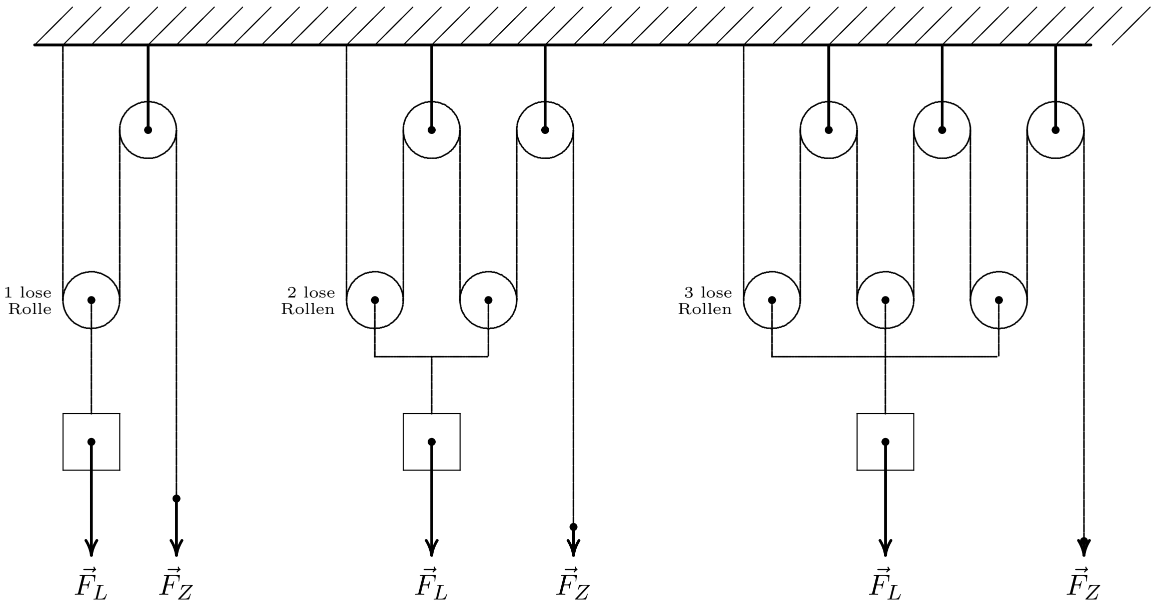
$$F_Z : F_L = 1 : k \qquad\qquad s_Z : s_L = k : 1,$$

wobei k eine bestimmte — von der Bauart des Flaschenzugs abhängige — natürliche Zahl ist. Damit ergibt sich ein Zusammenhang zwischen der auf der Zugseite und der Lastseite auftretenden Arbeit:

$$W_Z = F_Z \cdot s_Z = (\frac{1}{k} \cdot F_L) \cdot (k \cdot s_L) = F_L \cdot s_L = W_L.$$

Das ist die goldene Regel der Mechanik für den idealen Flaschenzug.

4.7.3 Produktflaschenzüge



$$\boxed{F_Z = \tfrac{1}{2} \cdot F_L} \qquad \boxed{F_Z = \tfrac{1}{4} \cdot F_L} \qquad \boxed{F_Z = \tfrac{1}{6} \cdot F_L}$$

$$\boxed{s_Z = 2 \cdot s_L} \qquad \boxed{s_Z = 4 \cdot s_L} \qquad \boxed{s_Z = 6 \cdot s_L}$$

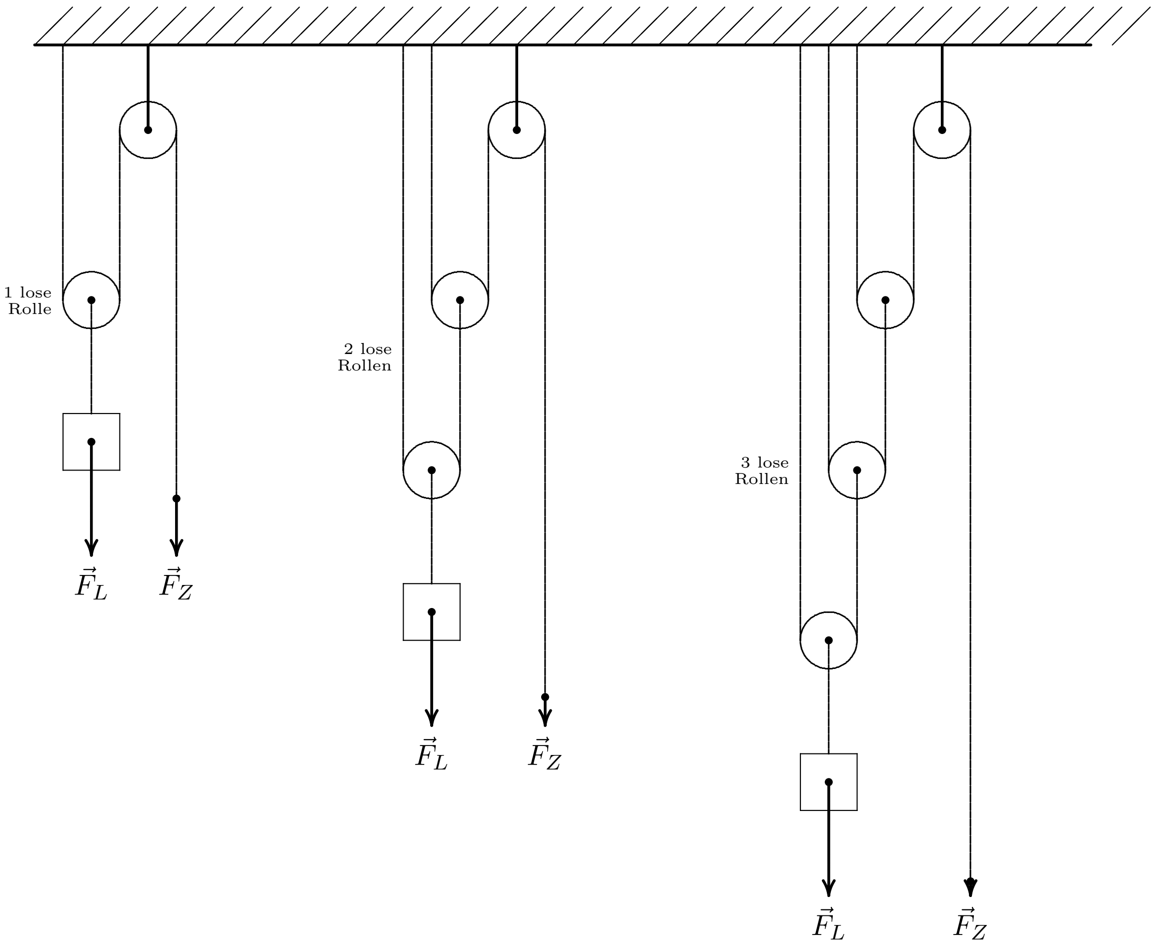
Beim *Produktflaschenzug* sind n lose Rollen durch einen einfachen Steg miteinander verbunden. Für den Zusammenhang zwischen den Kräften bzw. Seillängen auf Last- und Zugseite gilt allgemein:

$$\boxed{F_Z = \tfrac{1}{2n} \cdot F_L} \quad \text{und} \quad \boxed{s_Z = 2n \cdot s_L}$$

Beispiele:

- Kran, Seilwinden in Forst- oder Landwirtschaft
- Beim Zuziehen von Taschen oder Schuhen mit Hilfe von Schnür(s)en(keln) wird das Prinzip des Produkt–Flaschenzugs angewandt.
- $\boxed{\text{V}}$ Flaschenzug an der Hafttafel
- $\boxed{\text{V}}$ Tauziehen mit dem Baumarkt–Flaschenzug
- $\boxed{\text{V}}$ Besenstiel–Flaschenzug
- $\boxed{\text{Ü}}$ Welche Kraft benötigt ein Mensch, um sich selbst mit Hilfe einer festen Rolle hochzuziehen?

4.7.4 Potenzflaschenzüge

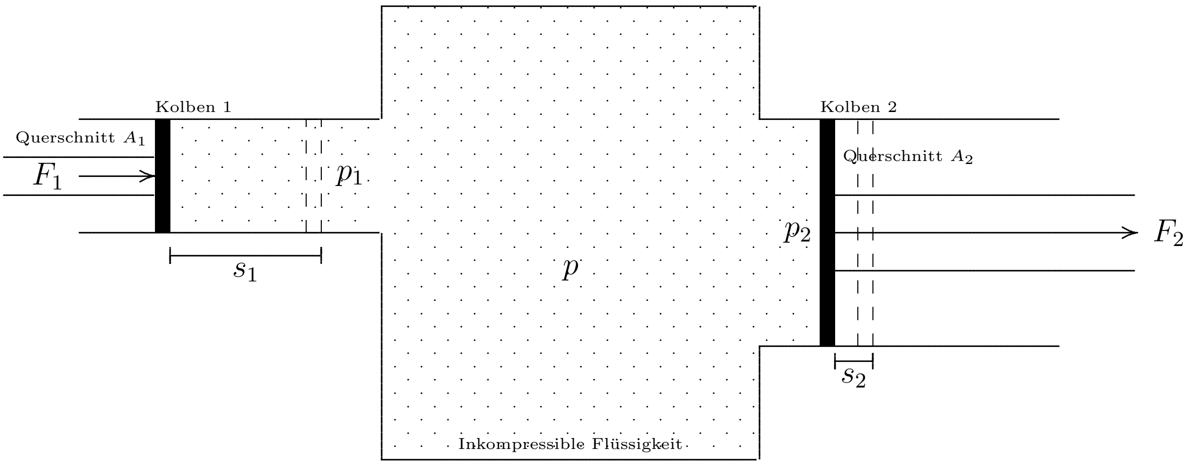


$F_Z = \frac{1}{2} \cdot F_L$	$F_Z = \frac{1}{4} \cdot F_L$	$F_Z = \frac{1}{8} \cdot F_L$
$s_Z = 2 \cdot s_L$	$s_Z = 4 \cdot s_L$	$s_Z = 8 \cdot s_L$

Beim *Potenzflaschenzug* sind n lose Rollen durch einseitige Achsaufhängungen miteinander verbunden. Für den Zusammenhang zwischen den Kräften bzw. Seillängen auf Last- und Zugseite gilt hier allgemein:

$$\boxed{F_Z = \frac{1}{2^n} \cdot F_L} \quad \text{und} \quad \boxed{s_Z = 2^n \cdot s_L}$$

4.7.5 Die hydraulische Presse



Nach dem Gesetz von Pascal herrscht auf beiden Seiten der gleiche Druck. Daraus folgt für die Kraftübersetzung:

$$p_1 = p_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{F_2 = \tfrac{A_2}{A_1} \cdot F_1}$$

Das verdrängte Volumen muss auf beiden Seiten gleich groß sein. Daraus folgt für die Wegübersetzung:

$$V_1 = V_2 \quad \Longleftrightarrow \quad A_1 \cdot s_1 = A_2 \cdot s_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{s_2 = \tfrac{A_1}{A_2} \cdot s_1}$$

Insgesamt zeigt sich für die Arbeit

$$W_2 = F_2 \cdot s_2 = \frac{A_2}{A_1} \cdot F_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} \cdot s_1 = F_1 \cdot s_1 = W_1.$$

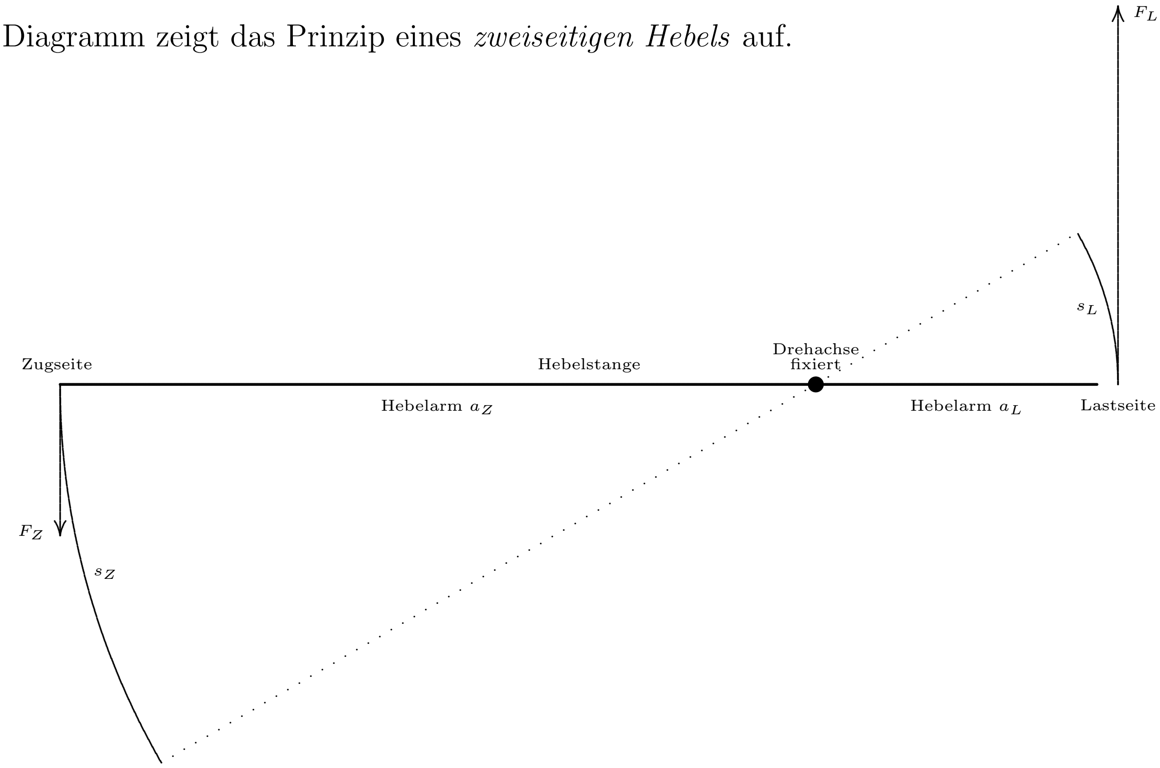
Das ist — für den Fall der hydraulischen Presse — die goldene Regel der Mechanik. Beispiele:

- Hebebühne
- Roll–Lader, Gabelstapler
- Wagenheber, Bremsanlagen
- Baumaschinen

V Modellversuch Hydraulik: Zwei Kolbenprober unterschiedlicher Querschnittsflächen werden durch einen Schlauch verbunden. Messung von Kräften und Wegstrecken.

4.7.6 Das Prinzip des Hebels als Kraftwandler

Das Diagramm zeigt das Prinzip eines *zweiseitigen Hebels* auf.



Gemäß Hebelgesetz (Abschnitt 5.1) besteht — bei Reibungsfreiheit der Hebeldrehung — eine Gleichheit der Drehmomente („Kraft mal Kraftarm")

$$F_L \cdot a_L \; = \; F_Z \cdot a_Z \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{F_L \; = \; \frac{a_Z}{a_L} \cdot F_Z}$$

Die Bogenmaße der bei der Hebeldrehung zurückgelegten Winkel stimmen überein

$$s_L : a_L \; = \; s_Z : a_Z \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{s_L \; = \; \frac{a_L}{a_Z} \cdot s_Z}$$

Für die dabei verrichtete Arbeit gilt

$$W_L \; = \; F_L \cdot s_L \; = \; \frac{a_Z}{a_L} \cdot F_Z \cdot \frac{a_L}{a_Z} \cdot s_Z \; = \; F_Z \cdot s_Z \; = \; W_Z$$

Das ist — für den Fall des zweiseitigen Hebels — die goldene Regel der Mechanik.

Beispiele:

- Brechstange
- Zange, Schere
- Flaschenöffner, Nussknacker
- Schraubenschlüssel
- Fahrradhandbremse
- Ziehbrunnen
- Sackkarren
- Aufstellen des Maibaums
- Kranbeschwerung

4.7.7 Das Prinzip des Wellrads als Kraftwandler

Die genau gleiche Überlegung wie beim Hebel kann man für das Wellrad durchführen. Die Hebelstange ist durch eine oder mehrere Rollen mit gemeinsamer Drehachse realisiert. Die Länge des Kraftarms ist jeweils gleich dem Radius der Rolle.

Beispiele:

- Griff von Schraubenziehern und vielen anderen Werkzeugen.
- Radschlüssel
- Pedale beim Fahrrad
- Motorgetriebe

4.7.8 Die goldene Regel der Mechanik

Die bisherigen Beispiele zeigen eine allgemeine Regel für ideale Kraftwandler auf, die goldene Regel der Mechanik:

> Bei einem idealen Kraftwandler (d.h. reibungsfreie Bewegungen, gewichtslose Bauteile) ist die abgegebene (= Nutz-)Arbeit gleich der aufgenommenen (= zugeführten) Arbeit
>
> $$W_{\text{ab}} = W_{\text{zu}}.$$

Bei realen Kraftwandlern gilt:

$$W_{\text{ab}} < W_{\text{zu}}.$$

Die „Idealität" (Qualität) kann durch den Wirkungsgrad charakterisiert werden, der wie folgt definiert ist:

$$\eta := \frac{W_{\text{ab}}}{W_{\text{zu}}}.$$

Dieser Quotient wird in Prozent ($1\% = \frac{1}{100}$) angegeben. Er nimmt Werte im Bereich

$$0 \leq \eta < 1 \qquad = 1 \quad \text{im Idealfall}$$

an.

4.8 Mechanische Leistung

Dem Begriff der physikalischen Leistung liegt die allgemeine Situation zugrunde, dass in einer bestimmten Zeitspanne t die Arbeit W verrichtet wird. In diesem Zusammenhang wird die Leistung wie folgt definiert:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Leistung} & := & \text{Arbeit} & : & \text{Zeit} & & \text{(Name)} \\ P & = & W & : & t & & \text{(Symbol)} \\ 1\,\mathrm{W} & = & 1\,\mathrm{J} & : & 1\,\mathrm{s} & & \text{(Einheit)} \end{array}$$

W steht für *Watt* nach dem englischen Ingenieur James Watt (1736 – 1819, Erfinder der Dampfmaschine). Es handelt sich um eine abgeleitete Einheit:

$$1\,\mathrm{W} = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{s}} = 1\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^3}}.$$

Eine veraltete, aber noch gebräuchliche Einheit ist die „Pferdestärke"

$$1\,\mathrm{PS} = 0,75\,\mathrm{kW} = 750\,\mathrm{W} \quad \Longleftrightarrow \quad 1\,\mathrm{kW} = 1,\overline{3}\,\mathrm{PS}.$$

Geschieht ein physikalischer Vorgang bei konstanter Kraft F mit einer Geschwindigkeit v, so ergibt sich die dabei aufgebrachte Leistung zu

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v.$$

Beispiele:

- Eine (verpackte) Tafel Schokolade ($F_G = 1\,\mathrm{N}$) wird in einer Sekunde $1\,\mathrm{m}$ hoch gehoben:

  $$P = \frac{W}{t} = \frac{F_G \cdot h}{t} = \frac{1\,\mathrm{N} \cdot 1\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{W}.$$

- Ein Schlepplift transportiert einen Skifahrer mit einer Zugkraft von $200\,\mathrm{N}$ bei einer konstanten Geschwindigkeit von $2,5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Die zugehörige Leistung ergibt sich zu

  $$P = F \cdot v = 200\,\mathrm{N} \cdot 2,5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 500\,\mathrm{W} = 0,5\,\mathrm{kW}.$$

- Ein Gewichtheber reißt eine $100\,\mathrm{kg}$-Hantel in einer Sekunde zwei Meter hoch.

  $$P = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} = \frac{100\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \cdot 2\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = 2000\,\mathrm{W}.$$

- Typische Werte für die Leistung:

Glühbirne	$0,1\,\mathrm{kW}$
Dauerleistung Mensch	$0,07\,\mathrm{kW}$
Höchstleistung Mensch	$2,2\,\mathrm{kW}$
Pferd	$0,5\,\mathrm{kW}$
Kraftwerk	$\approx 1\,\mathrm{GW}$
El. Leistung in D	$\approx 100\,\mathrm{GW}$
El. Leistung weltweit	$\approx 10\,\mathrm{TW}$
Schiffsgeschütz	$50 \cdot\ \mathrm{GW}$

4.9 Mechanische Energie

Definition Die Fähigkeit eines Körpers, Arbeit zu verrichten, heißt *(Mechanische) Energie.*
Genauer könnte man sagen, dass die Energie eines Körpers eine physikalische Größe ist, die ist durch die folgenden beiden Merkmale gekennzeichnet ist:

- Wird an einem Körper (Physikalischen System) Arbeit verrichtet, so speichert er diese Arbeit als Energie.
- Verrichtet ein Körper (Physikalisches System) Arbeit, so verliert er die dafür notwendige Energie.

Diese Definition und die unten angegebenen Formeln für die Berechnung sind vergleichsweise abstrakt bzw. anspruchsvoll. Deshalb wir dieses Konzept in der Hauptschule durch Aspektierung elementarisiert: Man arbeitet nur die zugänglichen, alltagsrelevanten Aspekte des Energiekonzepts heraus.
Beispiele für Arten mechanischer Energie

- Ein in die Höhe h gehobener Körper der Masse m hat die *(potentielle) Lageenergie*

  $$E_L = m \cdot g \cdot h.$$

  Beispiel: Speicherseen.

- Bewegt sich ein Körper der Masse m mit der Geschwindigkeit v, so hat er die *Bewegungsenergie* (oder *kinetische Energie)*

  $$E_B = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

  Dies kann beispielsweise dadurch begründet werden, dass zur Erreichung dieser Geschwindigkeit v an dem Körper die Beschleunigungsarbeit

  $$W_B = F_B \cdot s = m \cdot a \cdot s \stackrel{*}{=} m \cdot \frac{v^2}{2}$$

  verrichtet werden muss. (* Siehe Gleichung (3) in Abschnitt 2.5).

  Dabei ergibt sich ein Problem in der Sekundarstufe I: Die sich auf der rechten Seite ergebende Einheit $1\,\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$ kann nicht als $1\,\mathrm{J}$ erkannt werden, da die Gleichheit $1\,\mathrm{N} = 1\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}$ noch nicht bekannt ist.

- Eine **um** die Länge ℓ gestauchte oder gedehnte Feder der Federhärte D hat die *(potentielle) Spannenergie*

  $$E_S = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \ell^2.$$

4.9.1 Der Energieerhaltungssatz der Mechanik ⊕

Bei mechanischen Vorgängen wandeln sich ständig verschiedene Energie–Arten in andere um oder sie werden von einem Körper auf einen anderen übertragen.

Im Zuge immer neuer physikalischen Entdeckungen haben die Physiker bemerkt, daß bei allen mechanischen Vorgängen — auch wenn sie sehr kompliziert sind — ein wichtiger Grundsatz gilt:

Bei allen reibungsfrei und ohne Wärmeverluste ablaufenden mechanischen Vorgängen bleibt die mechanische Gesamt–Energie erhalten, d.h. sie kann weder

- aus dem Nichts erzeugt werden noch
- im Nichts verschwinden.

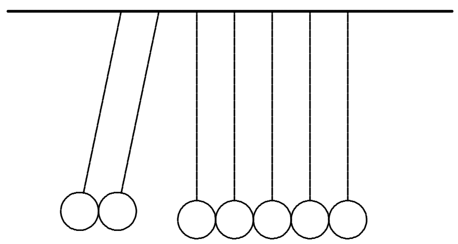
Es können lediglich Energieformen in andere umgewandelt werden.

Dabei ist die mechanische Gesamt–Energie die Summe

- aller mechanischen Energien (Lage-, Bewegungs-, Spannenergien)
- aller beteiligten Körper.

Beispiele

- Pendel: Es wird ständig wechselweise potentielle (Lage– oder Spann–)Energie in kinetische Energie umgewandelt.
- Balance–Ball, TicToc.

  Wir gehen von der Situation aus, dass n Kugeln mit der Geschwindigkeit v auf die übrigen stoßen.

  Frage: Wieviele (n') Kugeln werden mit welcher Geschwindigkeit (v') auf der anderen Seite abgestoßen?

  $$\begin{aligned} n \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 &= n' \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v')^2 \quad (EES) \\ n \cdot m \cdot v &= n' \cdot m \cdot v' \qquad\qquad (IES) \end{aligned}$$

  Wir ,,verdoppeln" den EES und ,,dividieren" durch den IES. Es folgt

  $v = v'$ und dann $n = n'$

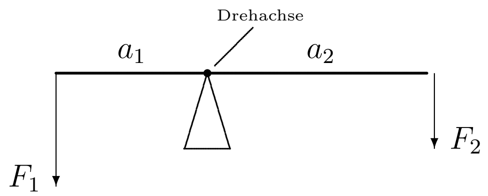
- Mit der Federpistole wird eine Erbse senkrecht nach oben geschossen.
- Ein Superball (Flummy) wird fallengelassen.
- Wasser fließt oder ,,fällt" herab (Walchenseekraftwerk, Mühlen).

5 Drehbewegung

5.1 Das Hebelgesetz ⊕

Im folgenden wird das Hebelgesetz, ausgehend vom einfachsten Fall bis zu immer allgemeineren (und schwierigeren) Formulierungen dargestellt. Wir führen sozusagen eine Elementarisierung in umgekehrter Richtung durch.
Allgemeine Voraussetzung: Ein starrer Körper ist um eine fixierte Achse frei drehbar gelagert.

1. Zwei Gewichtskräfte greifen senkrecht an einer waagerecht gelagerten ,,gewichtslosen" Hebelstange rechts und links von der Drehachse an. Die Anordnung heißt *zweiarmiger* oder *zweiseitiger Hebel*.

   Der Hebel ist im Gleichgewicht (in Ruhe), wenn

   $$F_1 \cdot a_1 = F_2 \cdot a_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{F_2}{F_1} = \frac{a_1}{a_2}.$$

   Dabei ist F_i die i–te Kraft und a_i der Abstand des Angriffspunkts von der Drehachse. Das Produkt aus diesen beiden Größen heißt *Drehmoment*.

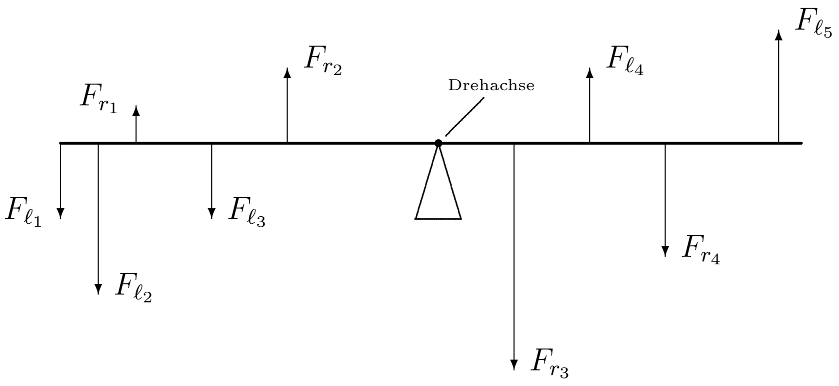
   - Die Wippe am Kinderspielplatz,
   - Mobile,
   - Nürnberger Brunnen (Wasserwippe),
   - Tragen von schweren Gegenständen möglichst nahe am Körper.

2. Die Situation kann dahingehend erweitert werden, dass es sich nicht um Gewichtskräfte handelt oder der Hebel nicht waagerecht gelagert ist.

   - Der Hebel als Kraftwandler (Vgl. Abschnitt 4.7.6): Allgemein ergibt sich hier das didaktische Problem des Übergangs von der Statik (des Hebelgesetzes) zur Dynamik (der Kraftwandlung).

3. Wenn die beiden Kräfte auf der gleichen Seite bzgl. der Drehachse angreifen und entgegengesetzt gerichtet sind, so spricht man vom *einarmigen* oder *einseitigen Hebel*.

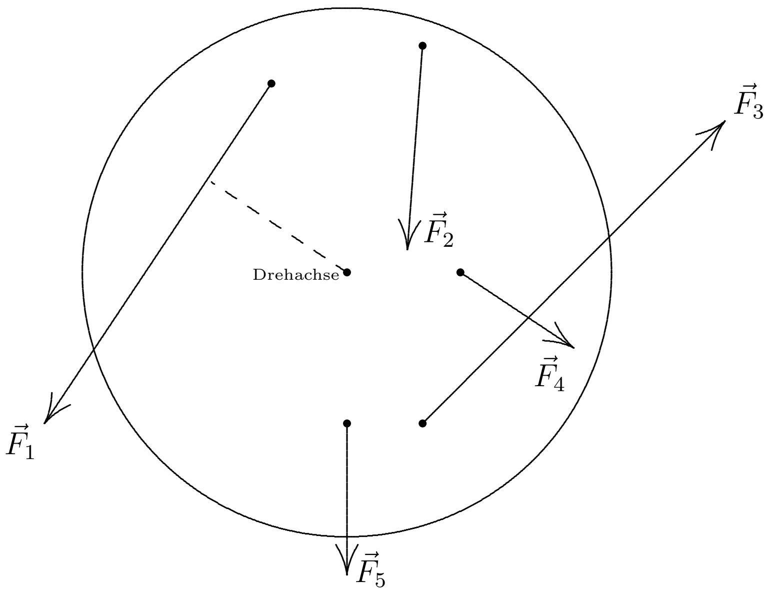
4. Es greifen beliebig viele Kräfte senkrecht an einer waagerechten Hebelstange an.



Das Hebelgesetz kann zur Erfassung dieser Situation dadurch erweitert werden: Der Hebel ist im Gleichgewicht, wenn die Summe der linksdrehenden Drehmomente gleich der Summe der rechtsdrehenden Drehmomente ist.

$$\sum_i F_{\ell_i} \cdot a_{\ell_i} = \sum_j F_{r_j} \cdot a_{r_j}.$$

5. Es greifen beliebige Kräfte an beliebigen Stellen und mit beliebigen Richtungen an einem ebenen Körper (B Drehmomentenscheibe) an. Alle Kraftrichtungen und Angriffspunkte liegen in der Ebene senkrecht zur Drehachse.



Definition (Erweiterung): Das von einer an einem Körper mit fixierter Drehachse angreifenden Kraft $\vec{F}$ verursachte *Drehmoment* ist gegeben durch das Produkt

$$M = F \cdot a, \qquad \text{Drehmoment} = \text{Kraftbetrag} \cdot \text{Kraftarm}.$$

Die Einheit ist $[M] = 1\,\mathrm{N} \cdot 1\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{Nm}$, nicht: $1\,\mathrm{J}$. Dabei ist der *Kraftarm* der Abstand der Drehachse zur Wirkungslinie der Kraft. (B Die Kraft $\vec{F}_5$ in obigem Beispiel bewirkt kein Drehmoment).

6. Es ist ein beliebiger starrer Körper gegeben. Bezüglich irgend eines festen Punktes P wird für eine an dem Körper angreifende Kraft das Drehmoment mathematisch genauer mit Hilfe des Vektorprodukts als

$$\vec{M} \; := \; \vec{F} \times \vec{a}$$

definiert. Dabei ist $\vec{a}$ ein Längenvektor, der von dem beliebigen Punkt zum Angriffspunkt der Kraft (oder einen anderen Punkt auf der Kraftlinie) zeigt.

Das allgemeine Hebelgesetz lautet dann:

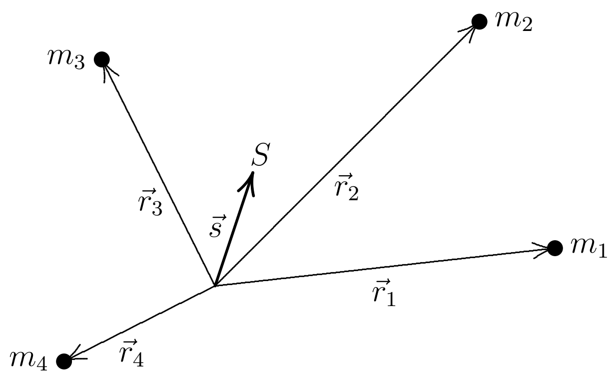
> Ein starrer Körper befindet sich im Gleichgewicht (genauer: er verbleibt in gleichförmiger Rotation), wenn die Summe aller angreifenden Drehmomente Null ist:
> $$\sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{F}_i \times \vec{a}_i = \vec{0}.$$

7. Eine weitere Verallgemeinerung ergibt sich dadurch, dass der Hebelkörper nicht als gewichtslos angenommen wird. Es kommt dann ein weiteres Drehmoment zustande, das durch die im Schwerpunkt angreifende Gewichtskraft gegeben ist. Man spricht vom *schweren Hebel*.

8. Eine weitere Abstraktion ergibt sich in Bezug auf die Realisierung des ,,Hebelkörpers": Bei Verwendung einer (eindimensionalen) Stange oder einer (zweidimensionalen) Scheibe sind die drehmomentübertragenden Kraftarme offensichtlich. Dies muss im allgemeinen nicht der Fall sein.

   - Beißzange
   - Flaschenöffner
   - Sackkarren
   - Kleiderbügel

5.2 Der Schwerpunkt ⊖



Es befinden sich n Massenpunkte der Masse m_i, $i = 1, \ldots n$ in den (Raum-)Punkten P_i mit Ortsvektor $\vec{r}_i = \overrightarrow{OP_i}$.

Definition Der Ortsvektor $\vec{s}$ des *Schwerpunkts* S ist definiert durch

$$\vec{s} = \frac{m_1\vec{r}_1 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + \ldots + m_n}.$$

Im Nenner steht die Gesamtmasse m. Es handelt sich also um einen ,,massegewichteten Mittelwert" der Ortsvektoren.

- Sind alle Massen gleich $m_1 = \ldots = m_n$, so gilt:

$$\vec{s} = \frac{1}{n} \cdot (\vec{r}_1 + \ldots + \vec{r}_n).$$

- Im Fall $n = 3$ und $m_1 = m_2 = m_3$ ist der Schwerpunkt der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des durch die Ortsvektoren gebildeten Dreiecks.

- Bei einer kontinuierlichen Masseverteilung (größerer starrer Körper) muss man die Summen durch Volumen–Integrale ersetzen, die Gewichtung erfolgt dann durch die Dichte:

$$\vec{s} = \frac{\int_V \varrho(\vec{r}) \cdot \vec{r}\, dV}{\int_V \varrho(\vec{r}) dV} = \frac{\int_V \varrho(\vec{r}) \cdot \vec{r}\, dV}{m}.$$

Besondere physikalische Eigenschaften des Schwerpunkts:

- Wird ein Körper in einem Punkt frei drehbar aufgehängt (oder sonst irgendwie unterstützt), so verursacht die Gewichtskraft ein Drehmoment. Der zugehörige Angriffspunkt ist der Schwerpunkt (→ Schwerer Hebel: siehe oben).

- Befindet sich der Aufhängepunkt (Unterstützungspunkt) genau über / im / unter dem Schwerpunkt, so befindet sich der Körper im stabilen / indifferenten / labilen Gleichgewicht. Die Gerade durch Aufhängepunkt und Schwerpunkt heißt auch *Schwerelinie*.

- Beispiel: Gedanklicher Hochsprung auf dem Mond:

  Wird beim Hochsprung der Schwerpunkt eines Athleten aus der Höhe $1,0\,\mathrm{m}$ über dem Boden auf die Höhe $1,4\,\mathrm{m}$ gebracht, so überwindet er eine Höhendifferenz von $0,4\,\mathrm{m}$. Auf dem Mond ist die Gewichtskraft bei gleicher Masse nur $1/6$ so groß. Der Athlet kann also seinen Körper um die Höhendifferenz $2,4\,\mathrm{m}$ bewegen und damit eine Höhe von $3,4\,\mathrm{m}$, (nicht etwa $8,4\,\mathrm{m}$) erreichen.

- $\boxed{\text{V}}$ Standfestigkeitsapparat

5.3 Dynamik der Drehbewegung ⊖

Es besteht eine Analogie zwischen der Translations– und Rotationsbewegung.

Translationsbewegung	Drehbewegung
Wegstrecke $\vec{s}$	Winkel $\vec{\varphi}$ (im Bogenmaß)
Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$	Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$
Beschleunigung $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$	Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$
Kraft $\vec{F}$	Drehmoment $\vec{M}$
Masse m	Trägheitsmoment Θ
(GGM) $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	$\vec{M} = \Theta \cdot \vec{\alpha}$
Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	Drehimpuls $\vec{D} = \Theta \cdot \vec{\omega}$
Impulserhaltungssatz	Drehimpulserhaltungssatz
Kin. Energie $E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}v^2$	$E_{\text{kin}} = \frac{\Theta}{2}\omega^2$
Energieerhaltungssatz	

Das Trägheitsmoment mit der Einheit

$$[\Theta] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

ist eine physikalische Größe, die einem Rotationskörper bei festgelegter Drehachse zugeordnet ist.

> Je größer die Masse des Rotationskörpers und
> je weiter die Massen von der Drehachse entfernt sind,
> desto größer ist das Trägheitsmoment.

Ein (infinitesimal) dünnwandiger Hohlzylinder mit Radius r und Masse m hat beispielsweise das Trägheitsmoment $\Theta = m \cdot r^2$, für einen Vollzylinder mit den gleichen Daten gilt: $\Theta = \frac{m \cdot r^2}{2}$.

Der Drehimpulserhaltungssatz lautet wie folgt:

> In einem abgeschlossenen System von (einem oder mehreren) rotierenden Körpern ist der Gesamtdrehimpuls konstant.

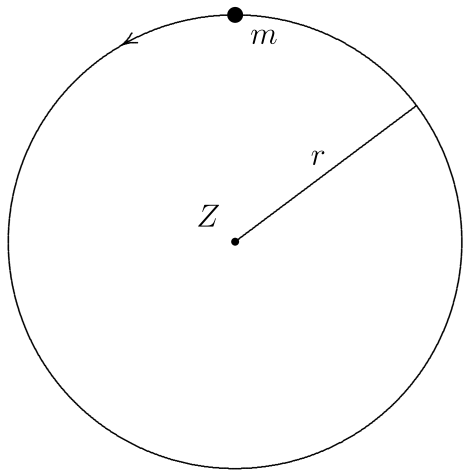
Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich viele vermeintliche Paradoxien aus dem Alltag klären. Der Satz hat zahlreiche Anwendungen.

- Lage–Stabilisierung:
  - Ein Fahrrad oder Motorrad fällt nicht um, wenn sich die Räder drehen.
  - Die Gerade–aus–Fahrt von ,,Rad–Fahrzeugen" weist eine gewisse Eigenstabilität auf.

  - Lage–Stabilisierung von Satelliten (Hubble–Teleskop).
  - Dreh–Spielzeuge aller Art: Diskus, Frisbee, Jojo, Bumerang, Diabolo.
  - Kreiselkompaß.
  - Lasso.
  - $\boxed{\text{V}}$ Bewege die Achse eines sich drehenden Rades (B: Wellrad, Schwungrad-Auto)!
  - Sehnen–Trainingsgerät (für Kletterer).
  - $\boxed{\text{V}}$ Zauberkreisel, Kreisel.

- ,,Eine Katze fällt immer auf die Füße".
- Pirouette beim Eistanz: Verschränkt eine Eiskunstläuferin die anfangs ausgebreiteten Arme, so vergrößert sich die (Winkel–)Geschwindigkeit.
- Setzt sich ein schweres Rad in Bewegung, so gibt es eine Gegendrehung der Aufhängung
  - Anlassen eines Fahrzeugmotors (Traktor),
  - Geräte mit Elektromotor (Föhn, Staubsauger, Mixer).
- Dreht man den Suppenteller oder die Kaffeetasse um ihre Achse, so verharrt der ,,Inhalt". Diesen Effekt kann man auch beim Tragen eines Plattenspielers beobachten.
- Raucherringe.
- Das zweite Kepler'sche Gesetz.

5.4 Die Zentripetalkraft



Ein Körper der Masse m bewegt sich mit (betragsmäßig) konstanter Geschwindigkeit $v = \omega \cdot r$ auf einer Kreisbahn mit Radius r um Z.
Dies bedeutet aber, dass er ständig eine Beschleunigung $\overrightarrow{a}$ mit Betrag

$$|\overrightarrow{a}| = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}$$

und Richtung zum Zentrum Z erfährt.
Das Grundgesetz der Mechanik zeigt dann, dass dafür eine beschleunigende Kraft $\overrightarrow{F}$ als Ursache vorhanden sein muss. Diese Kraft hat den Betrag

$$|\overrightarrow{F}| = m \cdot |\vec{a}| = m \cdot \omega^2 \cdot r = \frac{m \cdot v^2}{r},$$

ihre Richtung ist immer zum Zentrum hin. Deshalb heißt sie *Zentripetalkraft.* Sie wird je nach Situation realisiert durch

- Zugkraft im Seil (Lasso),
- Zugkraft im Gestänge (Karussell),
- Gravitation (Mond, Planeten),
- Magnetfelder (Beschleuniger–Anlagen),
- Luft–Auftrieb (Flugzeug auf Kreisbahn, Warteschleife),
- Komponente der Gewichtskraft (Kurvenfahrt in Schräglage),
- Reibungskräfte (Auto fährt im Kreis).

Beachte den quadratischen Zusammenhang in der Formel für die Zentripetalkraft.

Der Begriff der Zentripetalkraft ist im Alltag nur wenig präsent, da bei einer ,,Kreisfahrt" die nach außen gerichtete Schein–Fliehkraft wahrgenommen wird. Die Tatsache, dass gerade eine nach innen gerichtete Kraft die Kreisfahrt ermöglicht, ist im Alltag – wiederum — schwer vermittelbar. Wie könnte dies doch geschehen?

- Drehe ein Kind (Bitte Vorsicht) kreisförmig um dich selbst, es muss eine große Kraft (nach innen) aufgebracht werden.
- Schleudere einen (schweren) Gegenstand an einer Schnur um dich selbst. Es muss mit einer großen Kraft an der Schnur ,,gezogen" werden.

5.5 Die Zentrifugalkraft

Die *Zentrifugalkraft* (oder *Fliehkraft*) ist ein im Alltag viel verwendeter Begriff, seine physikalische Grundlegung ist aber anspruchsvoller.
Die Zentrifugalkraft ist — genau so wie die Trägheitskraft bei der geradlinigen Beschleunigung — eine ,,Scheinkraft". Das heißt, sie ist

- nicht deutbar als eine der vier physikalischen Grundkräfte (Gravitation, Elektromagnetische Kraft,. . .),
- sondern allein durch die Tatsache hervorgerufen, dass das Bezugssystem sich beschleunigt bewegt (hier: rotiert).

Betrachte in dem rotierenden (beschleunigten) Bezugssystem einen Körper:

- Der Körper ist in Ruhe, also muss Kräftegleichgewicht herrschen.
- Wir messen eine physikalisch reale Kraft (die Zentripetalkraft), die — von der Drehachse aus — auf diesen Körper wirkt.

$\Longrightarrow$ Es muss eine Gegenkraft gleichen Betrages wirken, eben die Zentrifugalkraft:

$$|\vec{F}_{\mathrm{Zf}}| = |\vec{F}_{\mathrm{Zp}}| = m \cdot \omega^2 \cdot r = \frac{m \cdot v^2}{r}.$$

Beispiel: Für einen Körper, der ,,auf Meereshöhe um die Erde" kreist, ist die sogenannte *Erste Fluchtgeschwindigkeit* v_I dadurch definiert, dass sich Gewichtskraft und Zentrifugalkraft gerade aufheben:

$$\frac{m \cdot v_I^2}{R_E} = m \cdot g \quad \Longrightarrow \quad v_I = \sqrt{R_E \cdot g} = \sqrt{6,4 \cdot 10^6 \,\mathrm{m} \cdot 9,8 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 7,9 \,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

(R_E Erdradius) Beachte, dass bei der Berechnung der Geschwindigkeit gegenüber der Erdoberfläche noch die Erddrehung zu berücksichtigen ist.

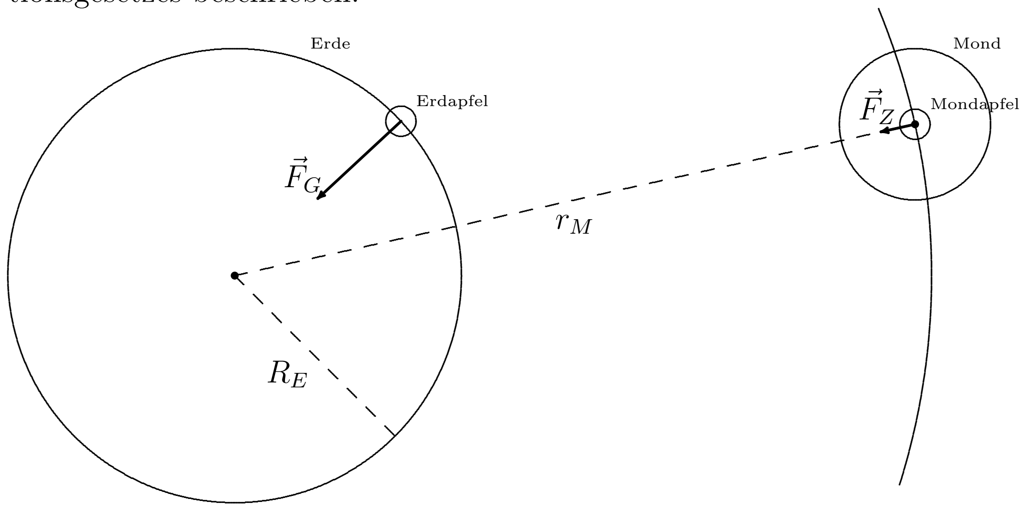
Eine weitere Trägheitskraft, die bei bewegten Körpern in rotierenden Bezugssystemen auftritt, ist die *Corioliskraft* (vgl. Simpsons–Episode 16: Bart vs. Australia, die Frage der Abfluss–Richtung persifliert).
Wegen der Zentrifugalkraft haben viele Menschen den Eindruck, dass ein Körper nach Wegbleiben der Zentripetalkraft (Beispiele: siehe oben) radial nach außen weggeschleudert würde. Dies ist jedoch nicht der Fall. Der Körper wird tangential weiter bewegt. Dies kann so einsichtig gemacht werden:

- Beobachtung von Funken beim Schleifen oder Flexen. Sie fliegen tangential weiter.

- Beobachtung beim Hammer– oder Diskus–Werfen.
- Ein Auto, dass in der Kurve die Haftung verliert, fährt „geradeaus", nicht „seitlich" in den Acker.
- Versuch (Vorsicht): Ein Körper wird an einer Schnur befestigt und dann kreisförmig bewegt. Wird die Schnur losgelassen (Vorsicht) oder durchtrennt (sehr scharfe Klinge, Flamme), so fliegt der Körper tangential weiter.
- Versuch (im Freien): Wasser in einem (genügend hohen) Glas wird am ausgestreckten Arm kreisförmig bewegt. Zieht man das Glas nach unten weg, so bewegt sich das Wasser tangential weiter.

5.6 Das Newton'sche Gravitationsgesetz

Im folgenden wird der Gedankengang Newtons zur induktiven Herleitung des Gravitationsgesetzes beschrieben.



Von zwei gleichen Äpfeln der Masse $m = 0,10\,\text{kg}$ ruhe der eine auf der Erde und der andere umkreise mit dem Mond die Erde.

Der Abstand zum Erdmittelpunkt Die Abständen der beiden Äpfel um Erdmittelpunkt stehen in folgenden Verhältnis:

$$r_M = 60 \cdot R_E$$

Die Kraft auf den „Erdapfel" Der auf der Erde ruhende Apfel erfährt die Gewichtskraft

$$F_G = m \cdot g = 0,10\,\text{kg} \cdot 9,81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 0,981\,\text{N}$$

Die Kraft auf den „Mondapfel" Der Mondapfel führt eine gleichförmige Kreisbewegung aus. Deshalb wirkt auf ihn eine Zentripetalkraft mit dem Betrag

$$F_Z = m\omega^2 \cdot r_M = \frac{4\pi^2 m \cdot r_M}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0,10\,\text{kg} \cdot 384 \cdot 10^6\,\text{m}}{(27,3 \cdot 24 \cdot 3600\,\text{s})^2} = 2,72 \cdot 10^{-4}\,\text{N}.$$

Vergleich dieser Kräfte Wir setzen auch diese Kräfte ins Verhältnis:

$$\begin{array}{ll} \text{(Erdapfel)} & \\ \text{(Mondapfel)} & \end{array} \quad \frac{F_G}{F_Z} = \frac{0,981\,\text{N}}{2,72 \cdot 10^{-4}\,\text{N}} \sim 3600 = 60^2.$$

Ergebnis: Der vom Erdmittelpunkt 60–mal weiter entfernte Mondapfel erfährt nur den 60^2–ten Teil der Kraft, die auf den Erdapfel wirkt.

Newtons geniale Idee war nun: Gewichtskraft auf der Erde und Zentripetalkraft auf den Mond haben dieselbe Ursache: Die Massenanziehungskraft oder Gravitationskraft F der Erde. Offenbar gilt ein indirekt quadratischer Zusammenhang:

$$F \sim \frac{1}{r^2} \qquad \text{(aus der Mondrechnung)}$$

und

$$F \sim m \qquad \text{(Gemäß Gesetzen für Gewichts- und Zentripetalkraft)}$$

Beide Proportionalitäten zusammengefasst:

$$F \sim \frac{m}{r^2}$$

Abhängigkeit von der Masse M des anziehenden Körpers Ein Körper mit doppelter bzw. dreifacher ... Masse würde auf den Apfel eine doppelte bzw. dreifache... Kraft ausüben. Deshalb muss gelten:

$$F \sim M \qquad \text{und} \qquad F \sim \frac{m \cdot M}{r^2}$$

Aufgrund des Wechselwirkungssatzes zieht auch der Apfel die Erde mit einer betragsgleichen Kraft an.

Das Gravitationsgesetz (Newton 1687) Alle (massebehafteten) Körper üben aufeinander Gravitationskräfte aus.
Zwei kugelförmige Körper der Massen m und M, deren Mittelpunkt den Abstand r haben, ziehen sich wechselseitig mit der Kraft

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

an. Die Gravitationskonstante f ist eine universelle Naturkonstante.

$$G = 6,670 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \ \mathrm{s}^2}.$$

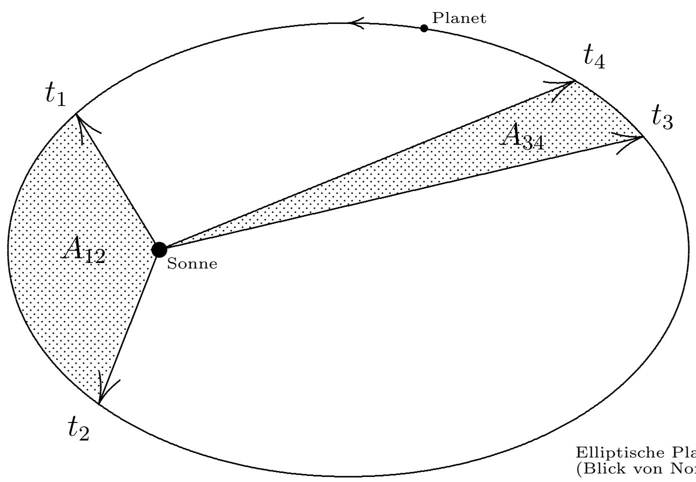
Sie wurde erst später von Cavendish (1731 – 1810) im Labor mit Hilfe einer speziellen Drehwaage ermittelt.

5.7 Die Kepler'schen Gesetze

Der Theologe und Mathematiker Johannes Kepler (1571 – 1630) analysiert die Daten der Marsbahn. Nach jahrelangen Berechnungen unter verschiedenen Hypothesen (Kreisbahnen, platonische Körper, Sphärenharmonien (Tonleiter)) findet er die heute nach ihm benannten Gesetze der Planetenbewegung:

1. (1609, ,,Astronomia nova") Alle Planeten beschreiben Ellipsenbahnen. In einem der beiden Brennpunkte steht die Sonne.

2. (1609, ,,Astronomia nova") Die Verbindungsstrecke von der Sonne zu einem Planeten überstreicht in gleichen Zeitspannen gleiche Flächen.



Elliptische Planetenbahn mit hoher Exzentrität (Blick von Norden)

Es gilt $\quad t_2 - t_1 = t_4 - t_3 \quad \Longleftrightarrow \quad A_{12} = A_{34}.$

3. (1619, ,,Harmonices mundi") Für je zwei Planetenbahnen verhalten sich die Quadrate der Umlaufzeiten T wie die Kuben der mittleren Bahnradien r:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}.$$

Das zweite Kepler–Gesetz ist letztlich eine geometrische Formulierung des Drehimpulserhaltungssatz (vgl. Abschnitt 5.3).

Später zeigte Newton, dass diese Gesetze aus seinem Gravitationsgesetz und der Grundgleichung der Mechanik hergeleitet werden können.

Ganz allgemein stellt sich dabei heraus, dass ein Körper unter dem Einfluss der Gravitation eines ,,Zentralgestirns" *Kegelschnittbahnen* beschreibt, das sind gerade Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln.

Beispiele:

- Mond um die Erde,
- künstliche Satelliten um die Erde,
- Planeten oder Kometen um die Sonne.

6 Mechanik der Flüssigkeiten und Gase $\oplus$

6.1 Dichte

Definition: Die *Dichte* ϱ eines Körpers ist gegeben durch den Quotienten aus seiner Masse m und seinem Volumen V.

$$\varrho := \frac{m}{V}$$

Beachte, dass man einem beliebigen Körper unabhängig von seiner inneren Zusammensetzung eine Dichte zuordnen kann.

Als abgeleitete Einheit ergibt sich:

$$[\varrho] = 1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

Bleibt bei einer Teilung des Körpers die Dichte immer gleich, so nennt man diesen Körper *homogen*. Es stellt sich heraus, dass die Dichte dann eine Eigenschaft des Stoffes ist, aus dem der Körper besteht.

Die folgende Tabelle zeigt die Werte einiger charakteristischer Dichten:

FESTKÖRPER	$\varrho\ /\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$	FLÜSSIGKEITEN	$\varrho\ /\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$
Aluminium	2,7	Äthylalkohol	0,79
Eisen	7,9	Olivenöl	0,91
Zink	7,1	Speiseöl	0,93
Zinn	7,3	Benzin	$\approx$ 0,75
Messing*	8,4	Terpentinöl	0,87
Kupfer	8,9	Wasser	0,998
Blei	11,4	Glycerin	1,26
Silber	10,5	Quecksilber	13,55
Gold	19,3		
Platin	21,5		
Glas	2,6	GASE (0 °C, 1013 hPa)	$\varrho\ /\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
Porzellan	2,3	Wasserstoff	0,09
Eis (0 °C)	0,92	Helium	0,18
Kork	0,3	Argon	0,32
Holz (Tanne)	0,5	Luft	1,29
Wachs	0,96		

* Messing ist eine Legierung aus Kupfer und Zink mit einem Verhältnis von etwa 2:1.

Beachte die Gleichheit zwischen den Einheiten

$$1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3} = 1\,\frac{\mathrm{kg}}{\ell} = 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 1\,\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}^3} \qquad \text{bzw.} \qquad 1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{dm}^3} = 1\,\frac{\mathrm{g}}{\ell}.$$

$\boxed{\text{V}}$ Bestimmen Sie die Dichte

- von Speiseöl,
- einiger Metalle,
- von Styropor,
- eines Jura–Steins.

- Die Dichte der Erde ist in etwa gleich $5\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$. Ein Vergleich dieses Werts mit dem für die Dichte von Gestein (etwa $2{,}5\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$) zeigt, dass im Erdinneren dichtere Stoffe als Gestein vorhanden sind: Man weiss heute, dass das Erdinnere vor allem aus Eisen besteht.

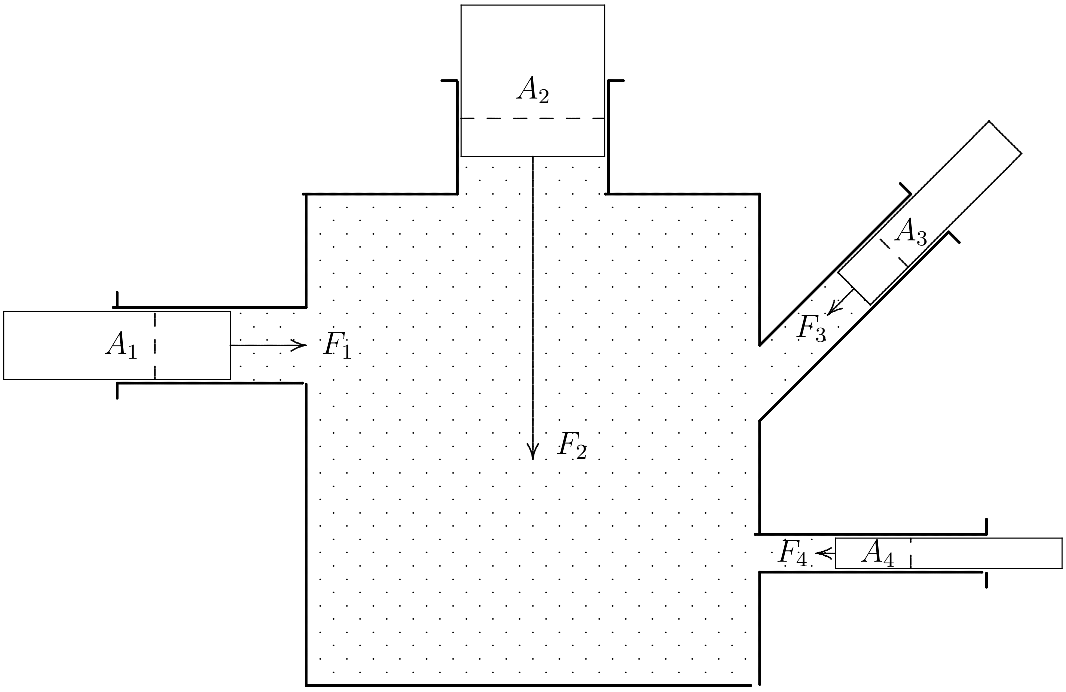
- Mit einem *Aräometer* kann man die Dichte von Flüssigkeiten bestimmen (vgl. Abschnitt 6.4.1).

- Die Dichte ist im allgemeinen von äußeren Bedingungen wie

  - Temperatur,
  - Druck (insbesondere bei Gasen),
  - Aggregatzustand

  abhängig (vgl. WLE).

6.2 Der hydrostatische (oder Stempel-) Druck



$\boxed{\text{V}}$ (Gedanklich) In einem Gefäß, das durch mehrere bewegliche Stempel verschlossen ist, befindet sich ein(e) ,,gewichtslose(s)" Flüssigkeit oder ein Gas. Befindet sich die Anordnung in Ruhe, so stellt man fest, dass die Quotienten

$$\frac{F_i}{A_i}$$

aus der auf den i–ten Stempel ausgeübten Kraft F_i und der Querschnittsfläche A_i alle gleich groß sind.
Dies ist Anlaß, diesen Quotienten als eigene Größe einzuführen:

Definition: Wirkt eine Kraft F (senkrecht) auf eine Fläche A, so wird ein *Druck* von

$$p = \frac{F}{A} \qquad \text{(pressure)}$$

ausgeübt. Die SI–Einheit ist

$$[p] = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 1\,\mathrm{Pa} \qquad \text{(Blaise Pascal, 1623 – 1662)}$$

Veranschaulichung: Auf einen Quadratmeter Fläche werden $0,1\,\ell$ Wasser (Bodenwischen) oder eine Tafel Schokolade verteilt.

Es gibt eine Reihe alternativer Einheiten:

- $1\,\mathrm{bar} \;:=\; 10^5\,\mathrm{Pa}, \qquad 1\,\mathrm{mbar} = 10^2\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{hPa}.$
- Die technische Atmosphäre ist der Druck, den ein Kilogramm auf der Erde auf einen Quadratzentimeter Fläche ausübt: $1\,\mathrm{at} \;:=\; \frac{1\,\mathrm{kg}\cdot 9,81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}}{1\,\mathrm{cm}^2} = 9,81 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa} \lesssim 1\,\mathrm{bar}.$

- Die Einheit Torr (Evangelista Torricelli, 1608 – 1674) gibt an, wie groß der durch eine 1 mm hohe Quecksilbersäule ausgeübte Druck ist. $1\,\text{Torr} := 133\,\text{Pa}$. (Begründung siehe unten).
- Die physikalische Atmosphäre: $1\,\text{atm} := 760\,\text{Torr} = 1,01080 \cdot 10^5\,\text{Pa}$ (Etwa Luftdruck).

Beispiele für Drucke:

	Druck in bar $= 10^5$ Pa
Luft auf Meereshöhe (gemittelt)	$\approx 1,013$
Fernsehröhre	$\approx 10^{-9}$
Stadtgas	$1,5$
Blutdruck*	$\approx 1,1$
Schnellkochtopf	$2 \ldots 3$
Autoreifen	$2,2 \ldots 2,7$
Mountainbike–Reifen	$6 \ldots 7$
Wasserleitung	$4 \ldots 6$
Autozylinder	$30 \ldots 40$
O_2–Gasflasche	150
Druckluftkompressor	1000
Erdinneres	$4 \cdot 10^6$
Sonnenkern ($\to$ Fusion)	$1,4 \cdot 10^9$

* In der Angabe 120 / 80 für den Blutdruck ist der ...

- erste Wert der „Systolische" Druck gegen den Gefäßquerschnitt. Er sollte in etwa gleich $110 + \frac{1}{2}\cdot$ Lebensalter sein.
- zweite Wert der „Diastolische" Druck gegen die Gefäßwand.

$\boxed{\text{V}}$ Wir messen den Blutdruck.

Die Werte verstehen sich als mit der Einheit Torr (mm Quecksilbersäule) versehen und bedeuten den Überdruck gegen den Luftdruck.

$$120\,\text{Torr} = 120 \cdot 133\,\text{Pa} = 1,6 \cdot 10^4\,\text{Pa} = 0,16\,\text{bar}.$$

Geräte zur Messung von Drucken heißen *Manometer*. *Barometer* sind speziell für die Messung des Luftdrucks bestimmt. Grundsätzlich erfolgt die Druckmessung mit Flüssigkeitssäulen oder Membranen.

6.2.1 Das Gesetz von Pascal

Die anfangs dargestellte Beobachtung kann jetzt als Gesetz formuliert werden:

> Grundgesetz der Hydrostatik (Blaise Pascal, 1659):
>
> Ein auf ein(e) schwerelose(s) Flüssigkeit oder Gas ausgeübter (Stempel–)Druck wirkt sich so aus, dass der Druck
>
> - überall
> - und unabhängig von der Richtung der Fläche
>
> gleich groß ist.

$\boxed{\text{V}}$

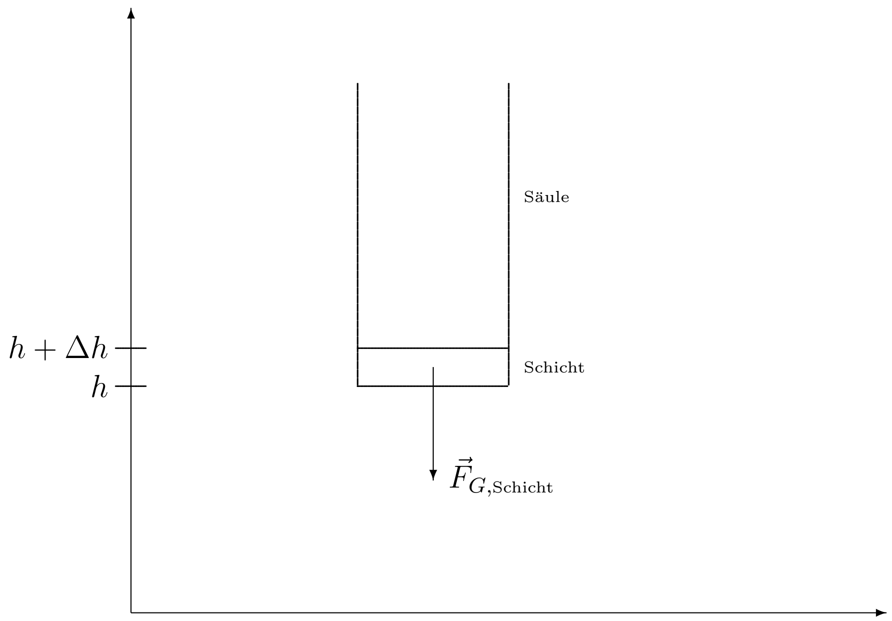
- Modell der hydraulischen Presse mit Kolbenprobern (Vgl. auch Kraftwandler).
- Wasser–Spritz–Kugel
- Cartesischer Taucher
- Manometer mit einem Luftballon als Membran.

6.3 Der Schweredruck

Der *Schweredruck* in einem Fluidum entsteht aufgrund des Eigengewichts des Fluidums. Weiter oben liegende Schichten eines Fluidums üben aufgrund ihrer Gewichtskraft Druck auf die weiter unten liegenden aus.

6.3.1 Der Schweredruck — mathematisch ⊖

Der allgemeine Zusammenhang zwischen Höhenzunahme und Druckabnahme. Wir stellen uns vor, über uns befindet sich das Fluidum (Wasser, Luft, Brennspiritus,...). Der Schweredruck in der Höhe h werde mit $p(h)$ bezeichnet.



$$\begin{aligned}\Delta p &:= p(h+\Delta h) - p(h)\\ &= \frac{1}{A}\cdot[-F_{G,\text{Schicht}}] = \frac{1}{A}\cdot[-m_{\text{Schicht}}\cdot g] =\\ &= -\frac{1}{A}\cdot\varrho\cdot V_{\text{Schicht}}\cdot g = -\varrho\cdot g\cdot\Delta h\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir eine *Differenzengleichung* für den Schweredruck hergeleitet:

$$\Delta p = -\varrho(p)\cdot g\cdot\Delta h$$

(In dieser Formulierung ist enthalten, dass die für die Druckabnahme maßgebliche Dichte ϱ ihrerseits i.a. druckabhängig ist.)
Man könnte die Textformulierung dieses Gesetzes bezeichnen als

Grundgesetz des Schweredrucks:

Steigt man in einem Fluidum um die (kleine) Höhe Δh, so verringert sich der Schweredruck $p(h)$ um $\varrho(p)\cdot g\cdot\Delta h$.

Läßt man in der Differenzengleichung Δh gegen Null gehen, so geht diese in eine Differentialgleichung über:

$$\boxed{\frac{dp}{dh} = -\varrho(p) \cdot g.} \qquad (*)$$

Es ist als Lösung eine Funktion $p(h)$ gesucht, deren Ableitung vorgegeben ist und von p abhängt.

Die mathematische Theorie sagt aus, dass eine solche Differenzen- bzw. Differentialgleichung genau eine Lösungsfunktion $p(h)$ besitzt, wenn zusätzlich noch der Wert des Drucks in irgendeiner festen Höhe vorgegeben ist.

6.3.2 Der Schweredruck in einer Flüssigkeit

Wir betrachten jetzt den Spezialfall, dass es sich bei dem Fluidum um eine (inkompressible) Flüssigkeit handelt. Das bedeutet, dass die Dichte druckunabhängig ist:

$$\varrho = \varrho_0$$

Damit lautet die obige Differentialgleichung $(*)$

$$\frac{dp}{dh} = -\varrho \cdot g. \qquad \varrho = \text{const}$$

Die Ableitung ist konstant. Die Lösung ist gegeben durch

$$p(h) = p_{\text{Boden}} - \varrho \cdot g \cdot h,$$

wobei p_{Boden} der Druck auf Höhe Null ist. Das heißt, der Druck nimmt **linear** mit der Höhe ab.
Ist H die Gesamthöhe der Flüssigkeit und p_{Ofl} (Oberfläche) der auf ihr lastende Druck, so kann man die Lösung auch anders ausdrücken. Es gilt:

$$p(H) = p_{\text{Ofl}} \quad \Longrightarrow \quad p_{\text{Boden}} - \varrho \cdot g \cdot H = p_{\text{Ofl}} \quad \Longrightarrow \quad p_{\text{Boden}} = p_{\text{Ofl}} + \varrho \cdot g \cdot H.$$

Damit kann die obige Lösung auch geschrieben werden als

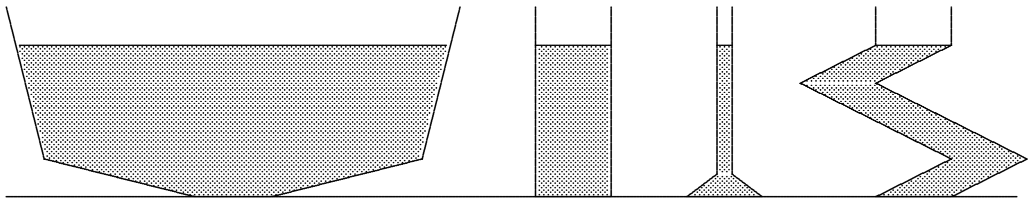
$$p(h) = p_{\text{Ofl}} + \varrho \cdot g \cdot H - \varrho \cdot g \cdot h = p_{\text{Ofl}} + \varrho \cdot g \cdot (H - h).$$

Setzt man jetzt $t = H - h$ (Wassertiefe), so gilt für die Wassertiefe–Schweredruck–Funktion:

$$\widetilde{p}(t) = p_{\text{Ofl}} + \varrho \cdot g \cdot t.$$

Der Schweredruck in einer Flüssigkeit hängt also nur von der Tiefe, nicht vom Gewicht oder der Form der Flüssigkeit als ganzer ab.

Diese im ersten Hinblick etwas seltsam anmutende Aussage wird auch als *Hydrostatisches Paradoxon* bezeichnet:



Am Boden der Gefäße sind die Schweredrucke gleich. Die Drucke auf die Gefäßunterlagen sind aber drastisch unterschiedlich. (Der Schlüssel zur Auflösung dieses Paradoxons liegt in der Tatsache, dass sich Kräfte in der Gefäßwand ,,ausbreiten").

Beispiel Wasser

$$\widetilde{p}(t) = \varrho_0 \cdot g \cdot t \approx 10^3 \, \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 10 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot t = 10^4 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot \frac{t}{1\,\mathrm{m}} = 1 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}^2} \cdot \frac{t}{1\,\mathrm{m}}.$$

Das heißt, pro Quadratzentimeter Fläche und Meter Tiefe nimmt die Kraft um etwa 1 N zu.

Beispiel Quecksilber

$$\widetilde{p}(t) = \varrho_0 \cdot g \cdot t = 13,55 \cdot 10^3 \, \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9,81 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot t = 133\,\mathrm{Pa} \cdot \frac{t}{\mathrm{mm}} = 1\,\mathrm{Torr} \frac{t}{\mathrm{mm}}.$$

Das bedeutet, pro Millimeter Tiefe nimmt der Druck um 1 Torr zu.

6.3.3 Der Schweredruck in einem Gas $\ominus$

Wir nehmen jetzt an, dass es sich bei dem Fluidum um ein ideales Gas handelt. Wir können dann das Gesetz von Boyle–Mariotte für den Zusammenhang von Druck und Volumen einer festen (gedanklich in einem Ballon eingeschlossenen) Ideal–Gas–Masse aufstellen:

$$p \cdot V = p_0 \cdot V_0$$

(Dabei wird vorausgesetzt, dass die Temperatur konstant ist). Wegen $V \sim \frac{1}{\varrho}$ gilt dann

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{p_0}{\varrho_0} \qquad \text{und dann} \qquad \varrho = \varrho_0 \cdot \frac{p}{p_0}.$$

Die Differentialgleichung $(*)$ für die Funktion $p(h)$ lautet jetzt also:

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{p(h)}{p_0} \cdot g \cdot \varrho_0.$$

Ist der Druck in der Höhe Null vorgegeben, d.h. $p(0) = p_{\text{Boden}}$, so ist die eindeutige Lösung gegeben durch

$$p(h) = p_{\text{Boden}} \cdot e^{-\frac{\varrho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h},$$

wie man durch Einsetzen nachprüfen kann Das heißt, der Druck nimmt **exponentiell** mit der Höhe ab. Diese Gleichung heißt *Barometrische Höhenformel.*

Beispiel: Luft der Erdatmosphäre Bei Normbedingungen gilt

$$p_{\text{Boden}} = 1{,}013\,\text{hPa}, \quad \varrho_0 = 1{,}29\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}, \quad g = 9{,}81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}.$$

Damit ergibt sich zunächst die sogenannte *Skalenhöhe*

$$\frac{p_0}{\varrho_0 \cdot g} \approx 8\,\text{km},$$

Eine Luftschicht konstanter Dichte ϱ_0 würde bei dieser Höhe den gleichen Bodendruck p_{Boden} erzeugen.
Wir setzen die Skalenhöhe in die barometrische Höhenformel ein und erhalten:

$$p(h) = p_{\text{Boden}} \cdot e^{-\frac{h}{8\,\text{km}}}.$$

Die Halbwertshöhe $h_{1/2}$ ist die Höhe, bei der der Druck auf die Hälfte des Bodendrucks abgesunken ist. Es gilt

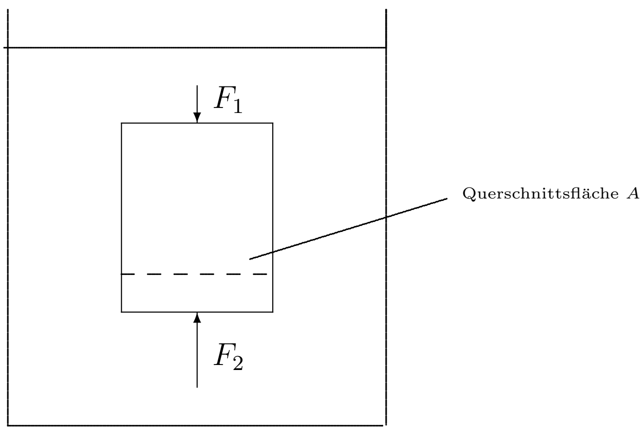
$$p(h_{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot p_0.$$

Daraus folgt:

$$e^{-0{,}125 \cdot \frac{h_{1/2}}{\text{m}}} = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad h_{1/2} = \ln 2 \cdot 8\,\text{km} = 5{,}5\,\text{km}.$$

Alle $5\,\frac{1}{2}$ km sinkt der Druck jeweils auf die Hälfte.

6.4 Der Auftrieb ⊕



Wir nehmen an, dass die Dichte des Fluidums in unmittelbarer Umgebung des eintauchenden Quaders konstant (gleich ϱ) ist.
Die reine Auftriebskraft ergibt sich zu

$$\begin{aligned} F_A &= F_2 - F_1 = A \cdot (p_2 - p_1) = \\ &= A \cdot (\varrho \cdot g \cdot t_2 - \varrho \cdot g \cdot t_1) = \varrho \cdot g \cdot A \cdot (t_2 - t_1) = \varrho \cdot g \cdot V \\ &= F_{\text{Gewicht, Flüssigkeit}} \end{aligned}$$

Einen beliebigen Körper kann man sich durch (unendlich) viele (unendlich) kleine Quader ausgefüllt denken.

Insgesamt gilt also das

Archimedische Prinzip

Die Auftriebskraft auf einen Körper in einer Flüssigkeit ist
gegengleich
der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit.

Die Gesamtkraft auf einen vollständig eingetauchten Körper ergibt sich dann zu:

$$F_{\text{ges}} = F_G - F_A = \varrho_{\text{K}} \cdot g \cdot V - \varrho_{\text{F}} \cdot g \cdot V = (\varrho_{\text{K}} - \varrho_{\text{F}}) \cdot g \cdot V.$$

(Koordinatenachse nach unten). Man könnte diese Kraft *scheinbare Gewichtskraft* nennen.

Als Folge ergibt sich das

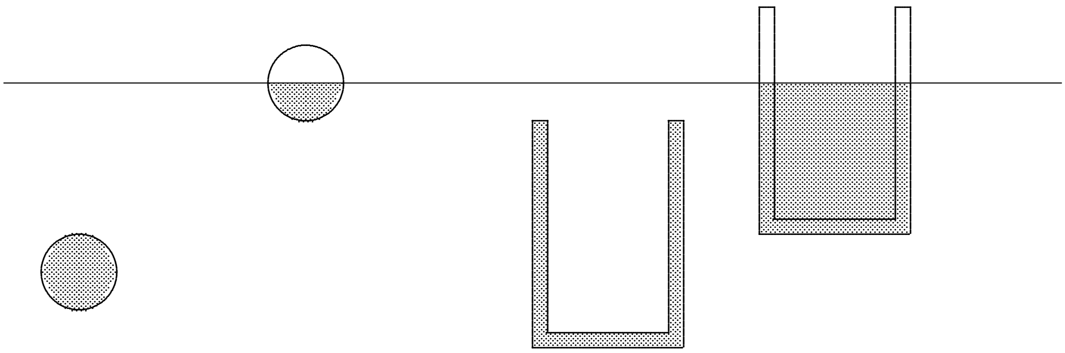
4S–Gesetz:

Ein Körper $\left\{\begin{array}{l}\text{sinkt ab}\\ \text{schwebt}\\ \text{steigt auf}\\ \text{schwimmt (ruhig),}\end{array}\right.$ wenn seine Gewichtskraft

$\left\{\begin{array}{l}\text{größer ist als}\\ \text{gleich groß ist wie}\\ \text{kleiner ist als}\\ \text{gleich groß ist wie}\end{array}\right.$ die Gewichtskraft

des von ihm *verdrängten* Wassers. Das *verdrängte* Wasser (schraffiert gezeichnet) ist genau das Wasser, das ,,da wäre, wenn der Körper nicht da wäre".

(Bei Vernachlässigung von Reibung erfolgen das Absinken und Aufsteigen dann beschleunigt.)



In den ersten drei Fällen kann dieses Gesetz viel leichter mit Hilfe der Dichte (= Masse pro Volumen) ausgedrückt werden:

Ein Körper unter Wasser sinkt/schwebt/steigt genau dann, wenn seine Dichte größer/gleich/kleiner ist als die Dichte des Wassers ($\approx 1 \frac{\text{kg}}{\ell}$).

Versuche:

- Archimedischer Zylinder.

- Überlaufgefäß auf Balkenwaage.
- Freihandexperimente: Welche Gegenstände sinken, schweben, steigen, schwimmen? (Vgl. PBG)
- Cartesischer Taucher („Flaschenteufel").

6.4.1 Schwimmen ⊖

Taucht ein Körper zum Teil in eine Flüssigkeit ein, so dass er weder nach oben steigt noch nach unten sinkt, so bezeichnet man dies als *Schwimmen.*

Schwimmt ein Körper, so ist — jeweils betragsmäßig — die

- Gewichtskraft des verdrängten Wassers

  (gemäß Prinzip des Archimedes) gleich der

- Auftriebskraft auf den schwimmenden Körper

  (gemäß Trägheitssatz) gleich der

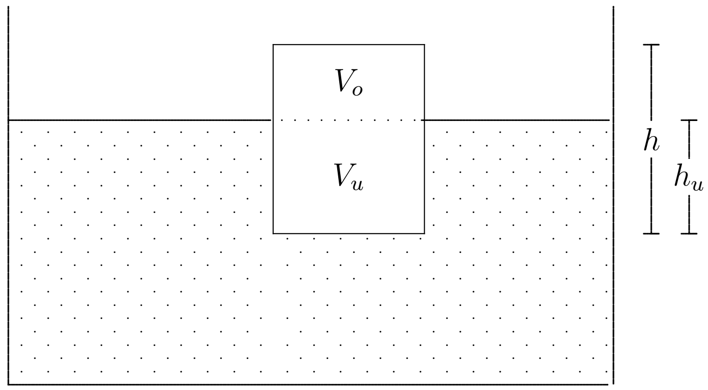
- Gewichtskraft des schwimmenden Körpers.

Ist der eintauchende Körper homogen, so gilt:

$$\varrho_{\mathrm{F}} \cdot V_u = F_{G,\mathrm{Fl}} = F_{G,\mathrm{K}} = \varrho_{\mathrm{K}} \cdot (V_o + V_u)$$

und deshalb

$$\frac{h_u}{h} = \frac{A \cdot h_u}{A \cdot h} = \frac{V_u}{V_o + V_u} = \frac{\varrho_{\mathrm{K}}}{\varrho_{\mathrm{F}}}.$$



Damit kann die Dichte der Flüssigkeit bestimmt werden als

$$\varrho_{\mathrm{F}} = \varrho_{\mathrm{K}} \cdot \frac{h}{h_u} = (\varrho_{\mathrm{K}} \cdot h) \cdot \frac{1}{h_u}.$$

Die Dichte der Flüssigkeit ist indirekt proportional zur Eintauchtiefe.

Diese Idee liegt dem *Aräometer* zugrunde. Es handelt sich dabei um ein Glasgefäß, an dem eine geeignete Skala angebracht ist. Unten sind zur Stabilisierung der Schwimmlage Bleikügelchen eingefüllt.

Da die Dichte einer Lösung von der Konzentration des gelösten Stoffes abhängt, kann man Aräometer auch zur Bestimmung der Konzentration benutzen. Beispiele sind:

- Säuretester für Akkumulatoren (Autobatterie),
- Mostwaage, Oechsle–Waage: Der Zuckergehalt von Most oder Wein wird bestimmt.