

Inhaltsverzeichnis

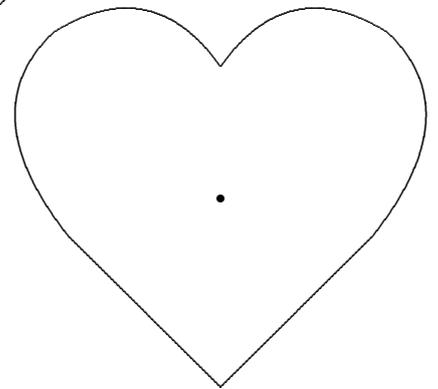
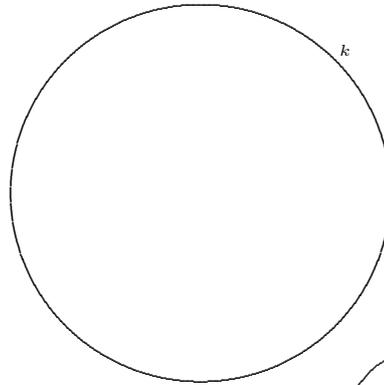
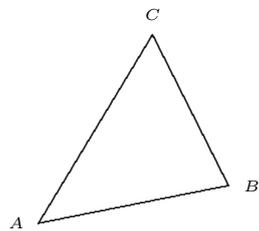
1	Wissen Sie's noch? Achsenspiegelungen!	2
2	Beobachtungen im ebenen Spiegel	3
3	Spiegeln	4
3.1	Was ist das Spiegelbild?	4
3.2	Das Reflexionsgesetz	4
3.3	Spiegelkabinett	4
3.4	Tripelspiegel	4
4	Eigenschaften der Vierecke	5
5	Eigenschaften der Vierecke — Lösung	6
6	Würfelnetze	7
7	Ein Würfel aus Papiermodulen	8
8	Ein Weihnachtsstern-Polyeder entsteht	9
9	Kopfgeometrie mit Quadern	10
10	Flächen in Würfelnetzen	11
11	Flächen in Würfelnetzen	12
12	Ecken in Würfelnetzen	13
13	Strecken in Würfelnetzen	14
14	Das Haus vom	15
15	Goldener Schnitt	16
16	Dynamische Geometrie	19
16.1	Einführung	19
16.2	Crash-Kurs zur Einführung	19
16.3	Basisobjekte	19
16.4	Elementare klassische Konstruktionen	19
16.5	Höhere klassische Konstruktionen	20
16.6	Gestaltung der Objekte	20
16.7	Bearbeiten durchgeführter Konstruktionen	21
16.8	Messen und Rechnen	21

1 Wissen Sie's noch? Achsenspiegelungen!

Q
+

+ R

P +



g

2 Beobachtungen im ebenen Spiegel

Stellen Sie den Spiegel schräg vor die Wasserflasche. Achten Sie darauf, dass der Spiegel nicht nach vorne wegrutschen kann. Stellen Sie vor dem Spiegel einen Stift mit der Spitze nach oben auf (Befestigung mit Spitzerdose, Federmäppchen o.ä.)

Kreuzen Sie die Eigenschaft des Spiegelbildes an, wenn's stimmt!

- (A) Es befindet sich auf der Spiegeloberfläche. Man kann es mit dem OH-Stift markieren.
- (B) Jeder, der in den Spiegel blickt, sieht das Spiegelbild an einer anderen Stelle.
- (C) Je nachdem, von wo aus man in den Spiegel blickt, befindet sich das Spiegelbild an verschiedenen Stellen auf der Spiegeloberfläche.
- (D) Das Spiegelbild befindet sich (ebenensymmetrisch) hinter dem Spiegel.
- (E) Da der Spiegel nicht lichtdurchlässig ist, kann sich das Spiegelbild nicht hinter dem Spiegel befinden.
- (F) Das Spiegelbild ist eine optische Täuschung bzw. Fiktion.
- (G) Das Spiegelbild befindet sich in gleichem Abstand auf der anderen Seite des Spiegels.
- (H) Wenn man zu schräg in den Spiegel blickt, gibt es kein Spiegelbild mehr.
- (J) Wenn man abwechselnd mit den beiden Augen schaut, „springt“ das Spiegelbild.

Betrachten Sie die Spiegelbilder der folgenden (gedanklichen) Situationen! Schlüpfen sie gedanklich in das Spiegelbild und überlegen Sie dabei, was mit den Orientierungsbegriffen „Links“ und „Rechts“ geschieht. Kreuzen Sie an, wenn Sie vertauscht werden!

- (A) An welchem Arm trägt Ihr Spiegelbild die Armbanduhr oder den Fingerring?
- (B) Mit welcher Hand schreibt oder isst Ihr Spiegelbild?
- (C) Wo befinden sich das Herz oder der Blinddarm Ihres Spiegelbildes?
- (D) Spitzen Sie einen Bleistift!
- (E) Drehen Sie einen Wasserhahn auf!
- (F) Ziehen Sie eine Schraube fest!
- (G) Spielen Sie ein Musikinstrument!
- (H) Halten Sie Ihr Handy ans Ohr!

3 Spiegeln

3.1 Was ist das Spiegelbild?

Ist P irgendein Punkt (oder Konstellation) in unserer Welt (= in unserem dreidimensionalen Raum), so bezeichnet man den geometrisch bzgl. eines ebenen Spiegel gespiegelten Punkt (Konstellation) als das „Spiegelbild“. Beim Spiegelbild handelt es sich also ...

- um einen mathematisch-geometrischen Begriff, das Spiegelbild ist unabhängig von einer optischen Realität,
- um einen objektiven Begriff, das Spiegelbild ist unabhängig von einer Beobachtungssituation (wer, wieviele, aus welcher Richtung, ...?) fassbar,
- nicht unbedingt um eine physikalische Realität: Der Spiegelpunkt befindet sich evtl. in einer Betonwand, an der der Spiegel aufgehängt ist,
- insofern um eine physikalische Realität, als vom Spiegelbild scheinbar Lichtstrahlen ausgesandt werden, die jeder Beobachter vor dem Spiegel wahrnehmen kann.

3.2 Das Reflexionsgesetz

Schauen Sie — einäugig — in den Spiegel!

- An welcher Stelle auf dem Spiegel (Markierung) sehen Sie Ihr eigenes offenes Auge?
- Wie stehen — geometrisch — Ihr Auge, die Markierung und der Spiegel zueinander?
- An welchen Stellen auf dem Spiegel (Markierung) sehen Sie jeweils das offene Auge Ihres Banknachbarn?
- Wie stehen — geometrisch — die beiden Augen, die Markierung und der Spiegel zueinander?

3.3 Spiegelkabinett

Betrachten Sie einen kleinen Gegenstand (Radiergummi, Kreide), der zwischen zwei parallel einander zugewandten Spiegeln aufgestellt wird, über die eine Spiegelkante hinweg. Es werden zahlreiche (scheinbar unendlich viele) Spiegelbilder sichtbar.

3.4 Tripelspiegel

Ein Tripelspiegel besteht aus drei paarweise senkrecht angeordneten ebenen Spiegeln (Fliesenspiegel stabil zusammenkleben!). Einfallendes Licht wird durch diese Anordnung immer — etwas versetzt — in die Richtung, aus der es kommt, reflektiert.

- Schauen Sie in den Tripelspiegel und bewege Sie sich oder den Spiegel!
- Im Spiegel kann man drei reale und drei gespiegelte Kanten in einer Sechs-Stern-Anordnung erkennen.
- Betrachten Sie ein Katzenauge: Man erkennt viele kleine Sechs-Sterne. Das Tripelspiegel-Prinzip wird im Katzenauge angewandt, da auftreffendes Scheinwerferlicht in die gleiche Richtung zurückgeworfen werden soll.
- In einer Ecke des Klassenzimmers wird eine starke Lampe aufgestellt, in der anderen werden Katzenaugen aufgestellt. Wenn man im Klassenzimmer umhergeht und in Richtung der Katzenaugen schaut, so leuchten diese nur auf, wenn man sich in der Nähe der Lampe befindet.
- Schottischer Adventskranz: Stellt man einen Kerze in den Tripelspiegel, so erscheint sie vervierfacht.
- Hochpräzise Tripelspiegel werden auf dem Mond (und Planeten) aufgestellt. Von der Erde eintreffende Lichtsignale werden in die gleiche Richtung reflektiert. Man kann über Laufzeitmessungen die Entfernung exakt bestimmen.
- Tripelspiegel werden auch bei der Landvermessung benutzt.

4 Eigenschaften der Vierecke

Eigenschaft	Quadrat	Raute	Rechteck	Drachen	Paralgr.	Trapez
Alle vier Seiten sind gleich lang						
Es gibt zwei mal zwei gleich lange benachbarte Seiten						
Je zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang						
Zwei benachbarte Seiten sind gleich lang						
Zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang						
Drei Seiten sind gleich lang						
Zwei Seiten sind gleich lang						
Alle vier Winkel gleich groß						
Es gibt zwei mal zwei gleich große benachbarte Winkel						
Je zwei gegenüberliegende Winkel sind gleich groß						
Zwei benachbarte Winkel sind gleich groß						
Zwei gegenüberliegende Winkel sind gleich groß						
Drei Winkel sind gleich groß						
Zwei Winkel sind gleich groß						
Zwei der Nachbarwinkel ergänzen sich zu 180°						
Die Summe der Innenwinkel ist 360°						
Die Diagonalen sind gleich lang						
Die Diagonalen halbieren einander						
Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander						
Beide Diagonalen halbieren die Winkel						
Eine Diagonale halbiert die Winkel						
Die Gegenseitenmittenverbindenden sind gleich lang						
Die Gegenseitenmittenverbindenden halbieren einander						
Die Gegenseitenmittenverbindenden stehen senkrecht aufeinander						
Das Viereck ist achsensymmetrisch						
Das Viereck ist punktsymmetrisch						
Das Viereck besitzt vier Symmetrieachsen						
Das Viereck besitzt zwei Symmetrieachsen						
Das Viereck besitzt eine Symmetrieachse						
Beide Diagonalen sind Symmetrieachsen						
Eine Diagonale ist Symmetrieachse						
Zwei Gegenseitenmittenverbindende sind Symmetrieachsen						
Eine Gegenseitenmittenverbindende ist Symmetrieachse						
Je zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel zueinander						
Zwei der Seiten sind parallel zueinander						
Das Viereck besitzt einen Umkreis (Sehnenviereck)						
Das Viereck besitzt einen Inkreis (Tangentenviereck)						

Eintragungen in der linken Seite eines Feldes: Die richtige Antwort!

- Bei dem Viereckstyp liegt die Eigenschaft vor.
 Bei dem Viereckstyp liegt die Eigenschaft nicht vor.

Eintragungen in der rechten Seite eines Feldes: Wie habe ich die Antwort ermittelt?

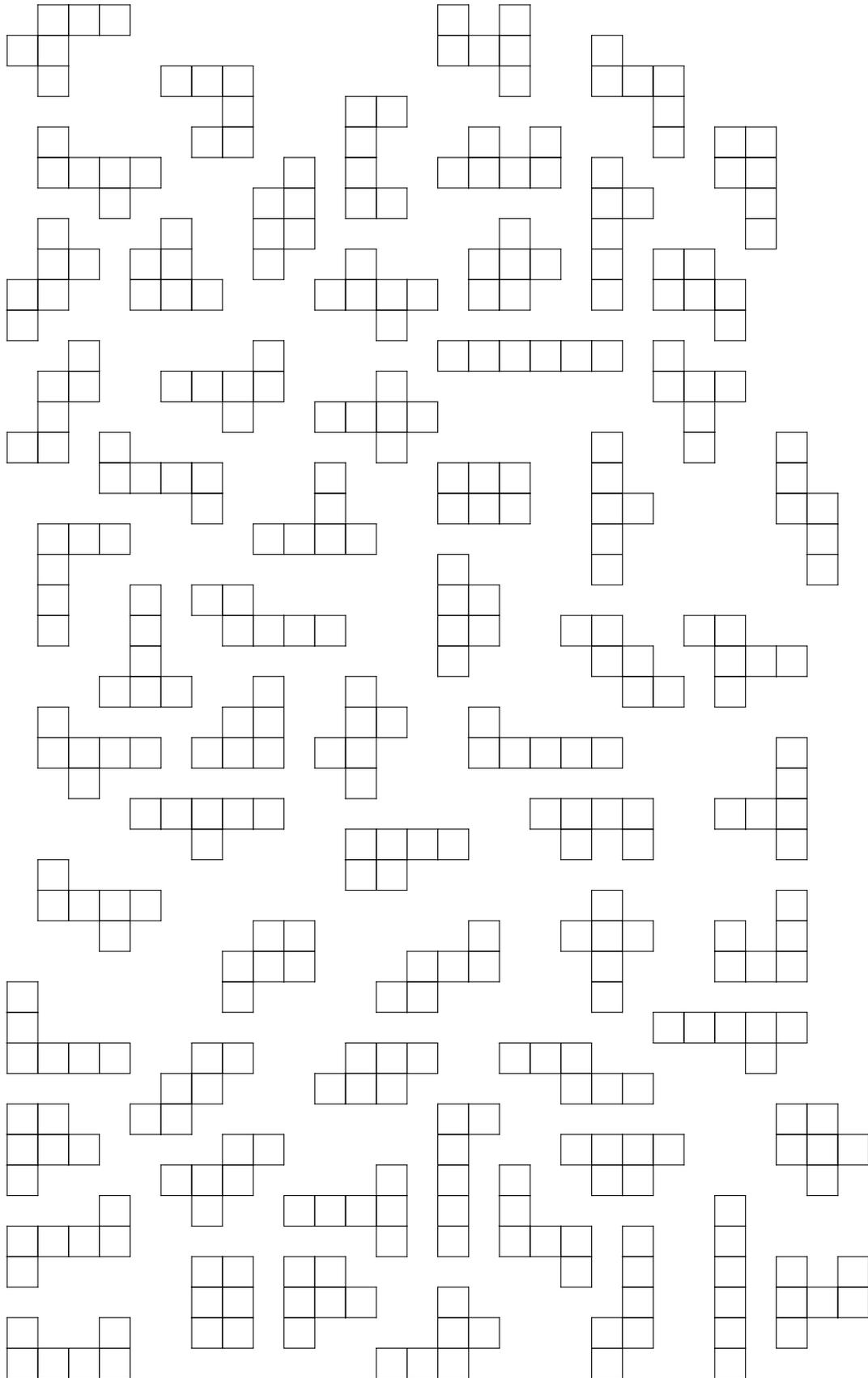
- (Wissen) Mir war die Antwort bekannt.
 (Zeichnen) Ich habe ein Beispiel des Viereckstyps gezeichnet und daraus die Antwort erschlossen.
 (Vorstellung) Ich habe mir den Viereckstyp vorgestellt und die Antwort daraus erschlossen.
 (Mathematik) Ich habe die Antwort durch geometrisches oder kombinierendes Schließen ermittelt.

5 Eigenschaften der Vierecke — Lösung

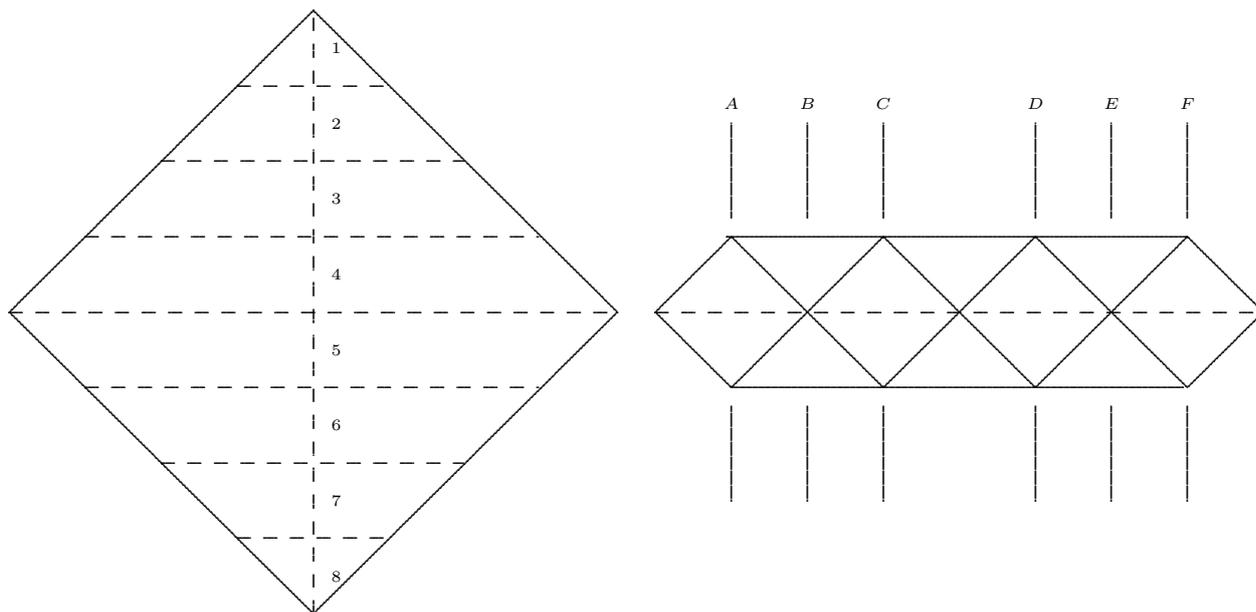
Eigenschaft	Quadrat	Raute	Rechteck	Drachen	Paralgr.	Trapez
Alle vier Seiten sind gleich lang	✓	✓	○	○	○	○
Es gibt zwei mal zwei gleich lange benachbarte Seiten	✓	✓	○	✓	○	○
Je zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang	✓	✓	✓	○	✓	○
Zwei benachbarte Seiten sind gleich lang	✓	✓	○	✓	○	○
Zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang	✓	✓	✓	○	✓	✓
Drei Seiten sind gleich lang	✓	✓	○	○	○	○
Zwei Seiten sind gleich lang	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Alle vier Winkel gleich groß	✓	○	✓	○	○	○
Es gibt zwei mal zwei gleich große benachbarte Winkel	✓	○	✓	○	○	✓
Je zwei gegenüberliegende Winkel sind gleich groß	✓	✓	✓	○	✓	○
Zwei benachbarte Winkel sind gleich groß	✓	○	✓	○	○	✓
Zwei gegenüberliegende Winkel sind gleich groß	✓	✓	✓	✓	✓	○
Drei Winkel sind gleich groß	✓	○	✓	○	○	○
Zwei Winkel sind gleich groß	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Zwei der Nachbarwinkel ergänzen sich zu 180°	✓	✓	✓	○	✓	✓
Die Summe der Innenwinkel ist 360°	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Die Diagonalen sind gleich lang	✓	○	✓	○	○	✓
Die Diagonalen halbieren einander	✓	✓	✓	○	✓	○
Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander	✓	✓	○	✓	○	○
Beide Diagonalen halbieren die Winkel	✓	✓	○	○	○	○
Eine Diagonale halbiert die Winkel	✓	✓	○	✓	○	○
Die Gegenseitenmittenverbindenden sind gleich lang	✓	✓	○	✓	○	○
Die Gegenseitenmittenverbindenden halbieren einander	✓	✓	✓	○	✓	✓
Die Gegenseitenmittenverbindenden stehen senkrecht aufeinander	✓	○	✓	○	○	✓
Das Viereck ist achsensymmetrisch	✓	✓	✓	✓	○	✓
Das Viereck ist punktsymmetrisch	✓	✓	○	○	✓	○
Das Viereck besitzt vier Symmetrieachsen	✓	○	○	○	○	○
Das Viereck besitzt zwei Symmetrieachsen	✓	✓	✓	○	○	○
Das Viereck besitzt eine Symmetrieachse	✓	✓	✓	✓	○	✓
Beide Diagonalen sind Symmetrieachsen	✓	✓	○	○	○	○
Eine Diagonale ist Symmetrieachse	✓	✓	○	✓	○	○
Zwei Gegenseitenmittenverbindende sind Symmetrieachsen	✓	○	✓	○	○	○
Eine Gegenseitenmittenverbindende ist Symmetrieachse	✓	○	✓	○	○	✓
Je zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel zueinander	✓	✓	✓	○	✓	○
Zwei der Seiten sind parallel zueinander	✓	✓	✓	○	✓	✓
Das Viereck besitzt einen Umkreis (Sehnenviereck)	✓	○	✓	○	○	✓
Das Viereck besitzt einen Inkreis (Tangentenviereck)	✓	✓	○	✓	○	○

6 Würfelnetze

Welche der 64 Quadrat-Sechslinge stellen Würfelnetze dar?



7 Ein Würfel aus Papiermodulen



Man benötigt sechs quadratische Papierblätter.

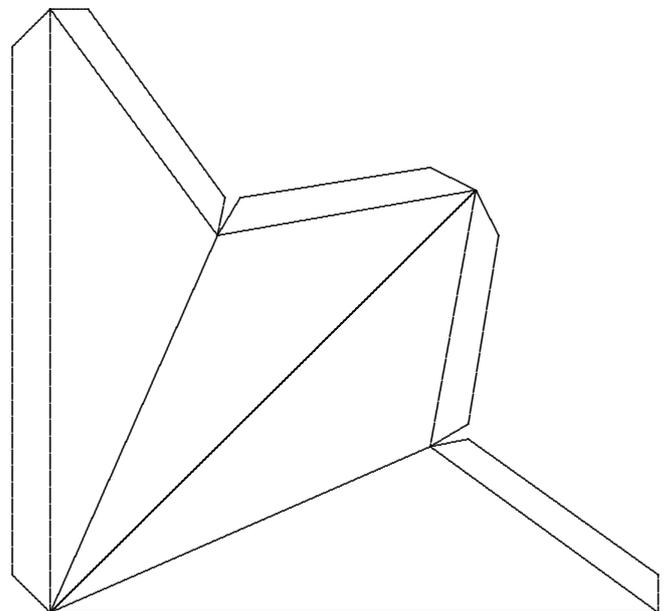
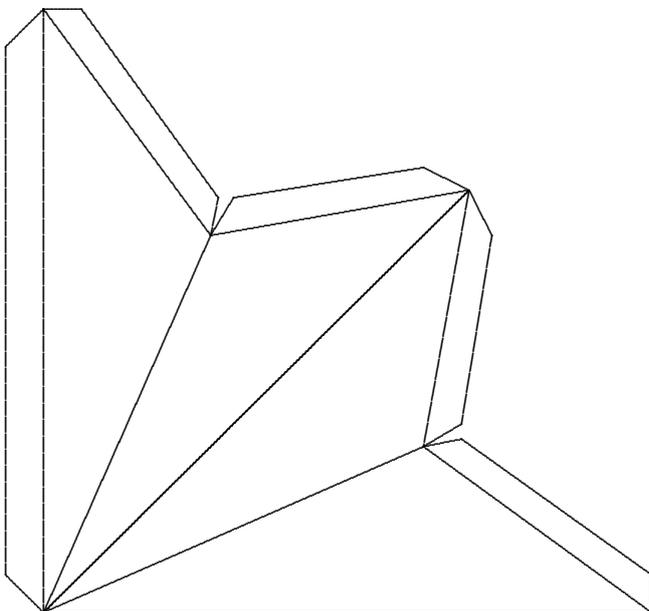
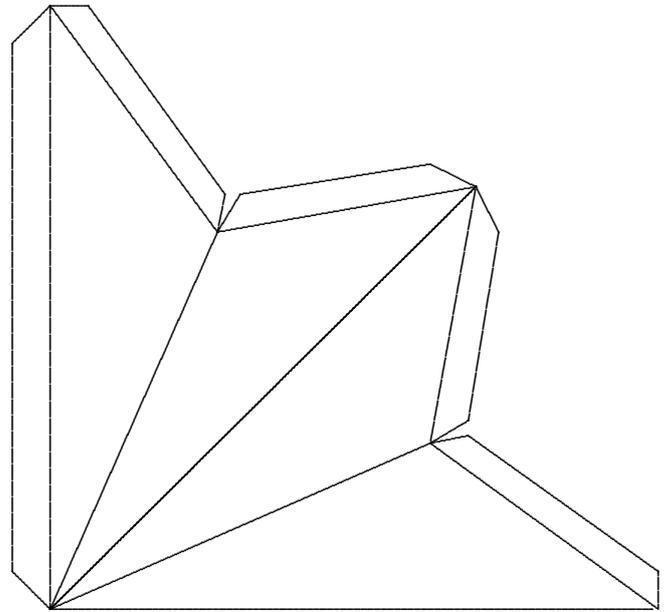
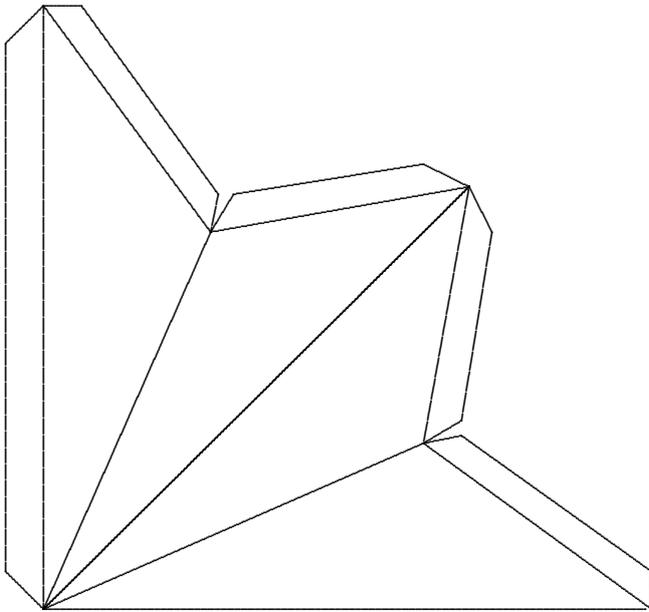
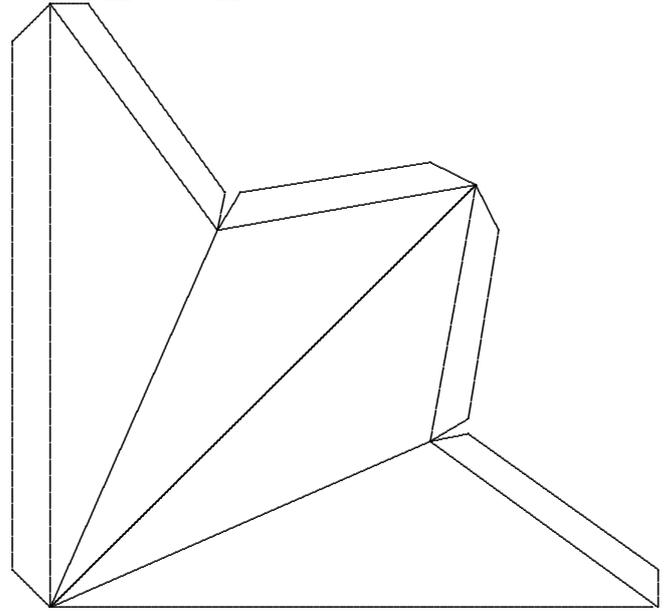
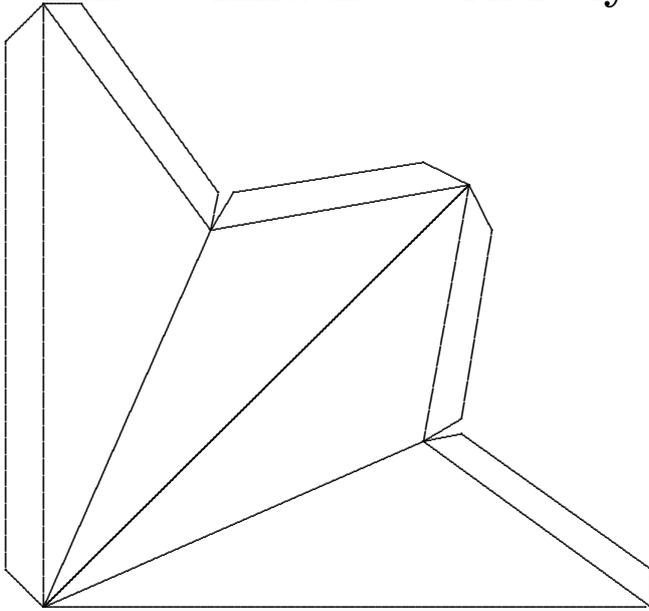
Mit jedem einzelnen Blatt werden die folgenden Faltungen durchgeführt. Durch Entlangstreifen mit dem Finger sollten die Faltachsen „scharf“ werden.

1. Bild links: Man verschaffe sich die beiden Diagonalen als Faltachsen und damit auch den Mittelpunkt des Quadrats.
2. Bild links: Durch Faltungen parallel zu einer Diagonalen wird das Quadrat in acht gleich breite Streifen unterteilt.
3. Bild links: Nacheinander werden die drei Streifen mit den Nummern 3, 2, 1 über den Streifen 4 gefaltet. Ebenso werden die drei Streifen mit den Nummern 6, 7, 8 über den Streifen 5 gefaltet. Es entsteht das ...
4. Bild rechts: Man falte die äußeren Dreiecke über die Faltachsen A bzw. F nach innen.
5. Bild rechts: Anschließend werden die beiden äußeren „Sechstel“-Rechtecke über die Faltachsen B bzw. E nach innen umgelegt.
6. Bild rechts: Zuletzt werden die — wiederum — äußeren Rechtecke über die Achsen C bzw. D senkrecht aufgerichtet.

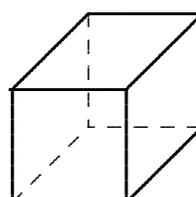
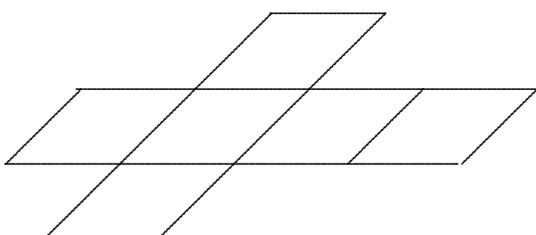
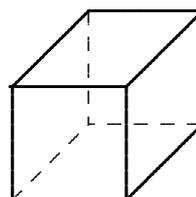
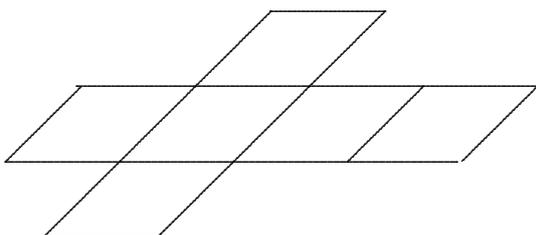
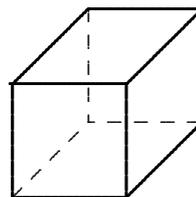
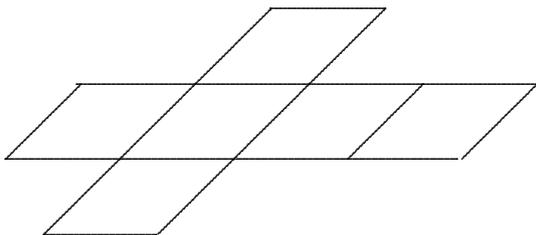
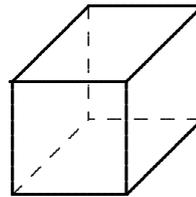
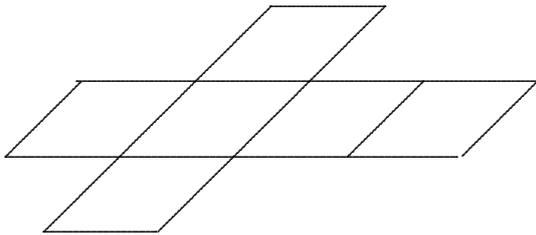
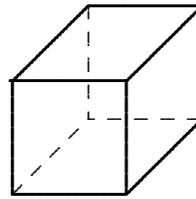
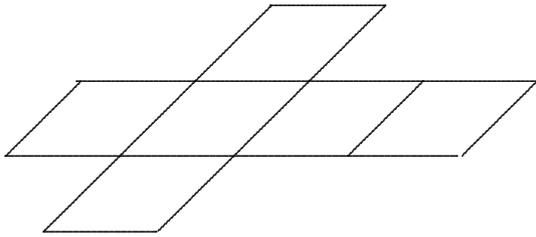
Es ist ein Papiermodul in Form einer „Wanne“ mit quadratischem Boden entstanden.

- Das „Bodenquadrat“ dieser Wanne wird zu einer Seitenfläche des Würfels,
- die beiden Seitrechtecke der Wanne dienen als Laschen zum Einstecken in die Tasche der benachbarten Seitenfläche des Würfels.

8 Ein Weihnachtsstern-Polyeder entsteht

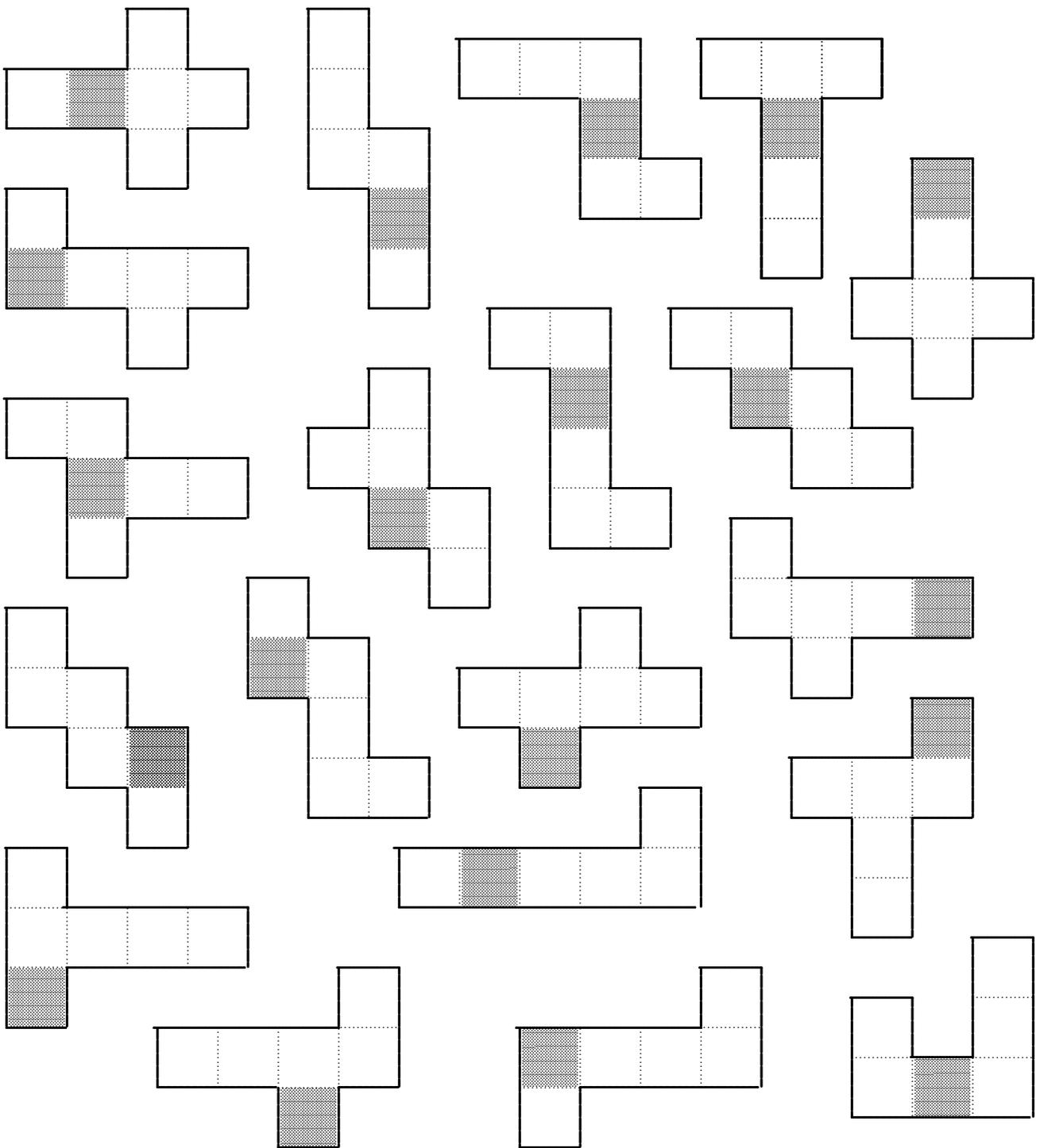


9 Kopfgeometrie mit Quadern



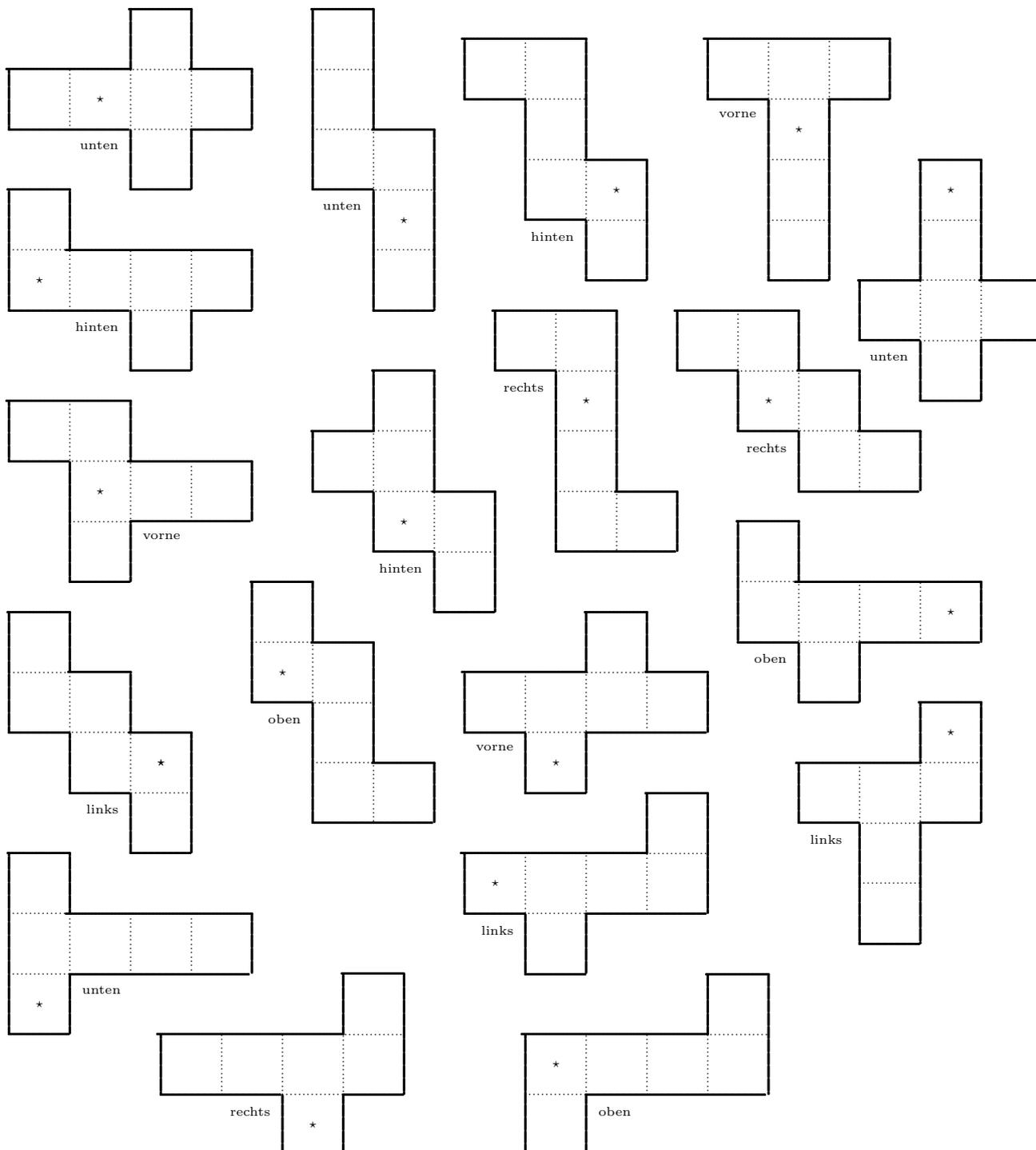
10 Flächen in Würfelnetzen

Färbe im Würfelnetz die Seitenflächen gemäß ihrer Lage im zusammengeklebten Würfel ein!



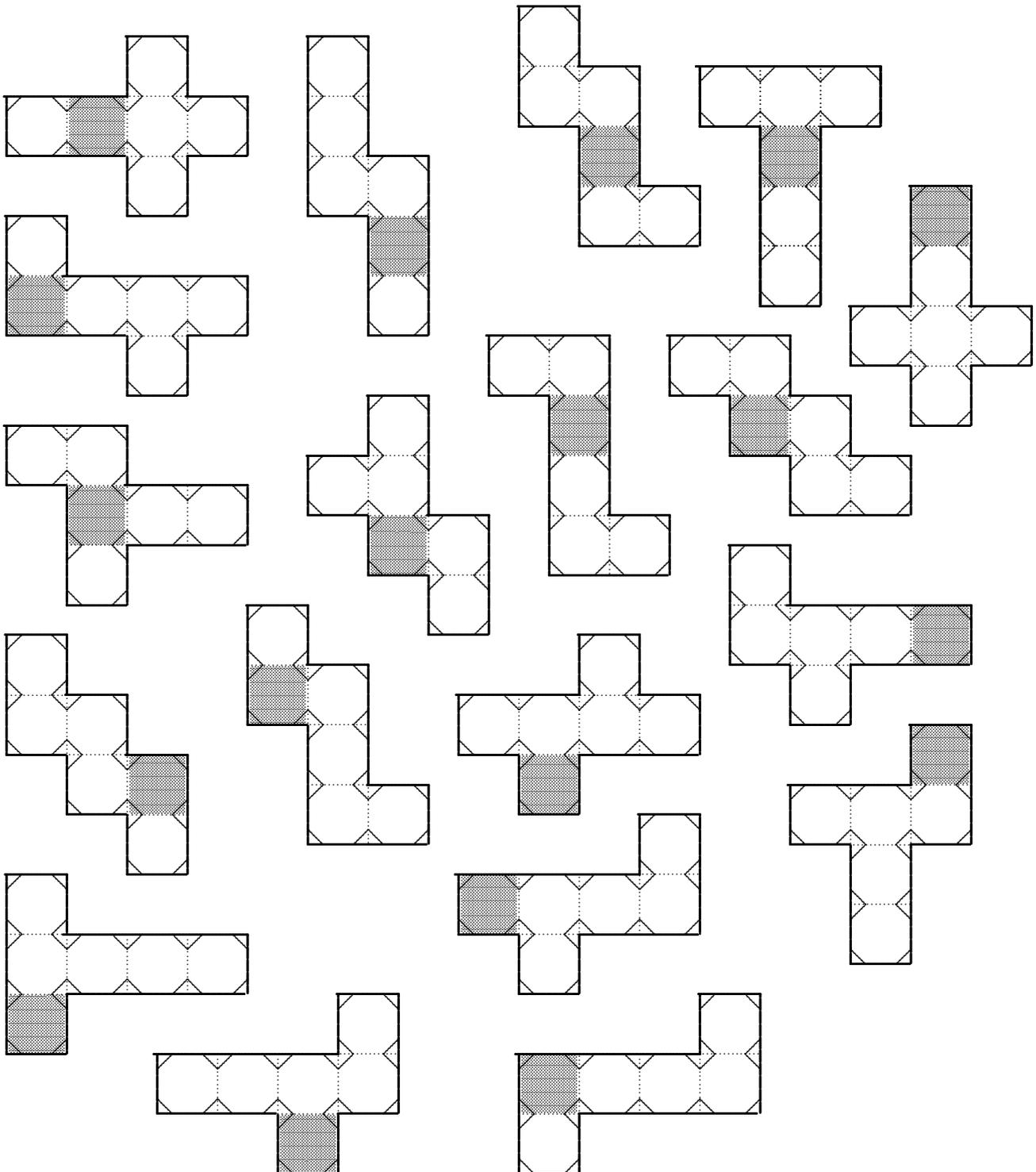
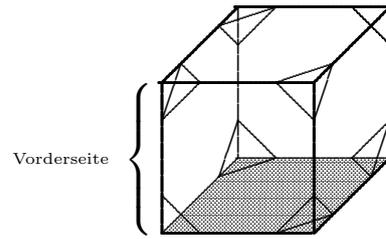
11 Flächen in Würfelnetzen

Die Hälfte (wie angegeben) eines Würfels wurde in Farbe getaucht. Färbe jeweils das Würfelnetz entsprechend ein! Die Grundfläche ist durch einen kleinen Stern markiert.



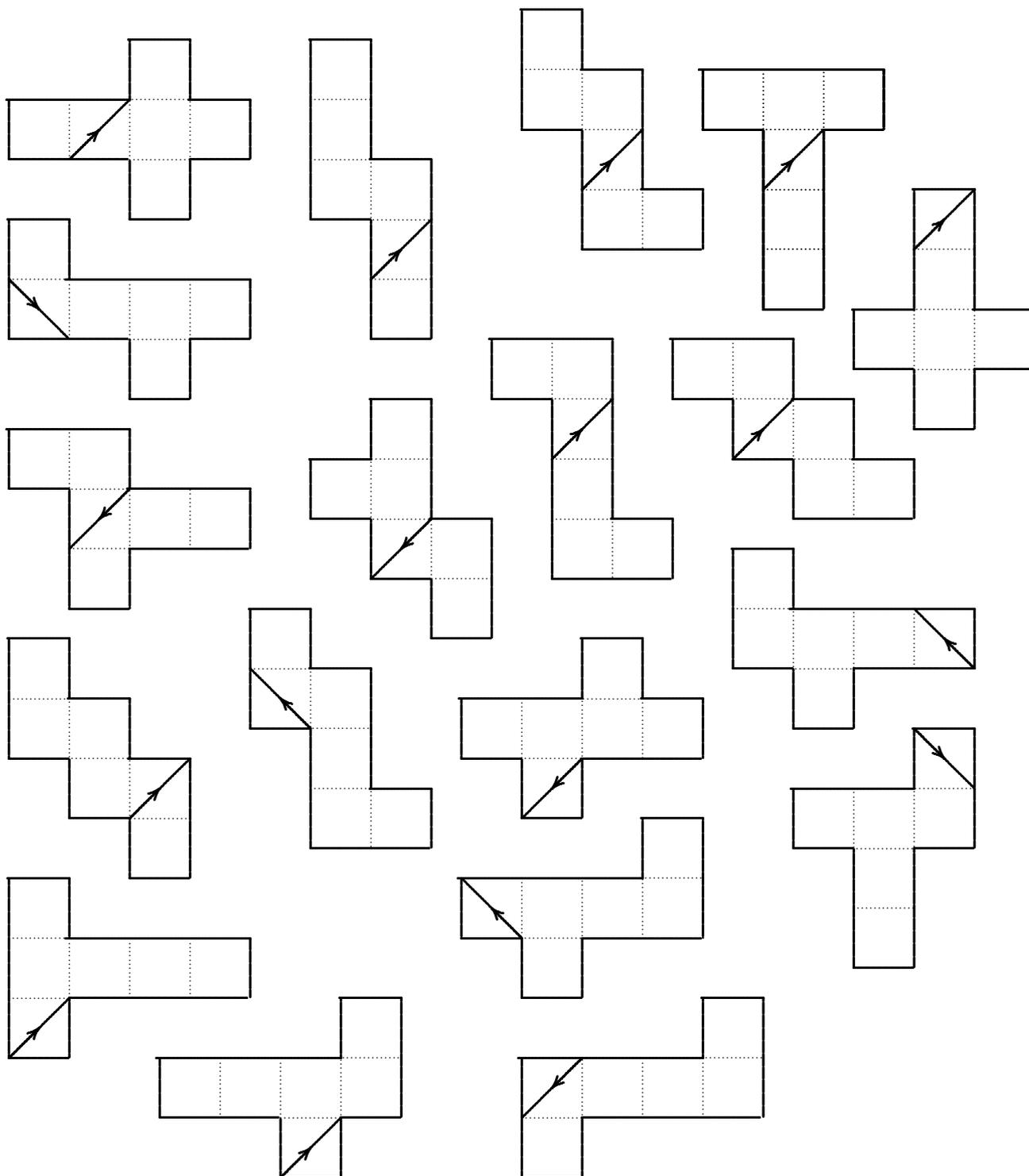
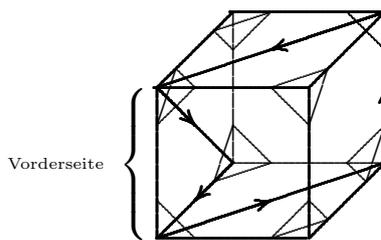
12 Ecken in Würfelnetzen

Färbe in den Würfelnetzen die Ecken gemäß ihrer Lage im zusammengeklebten Würfel ein!

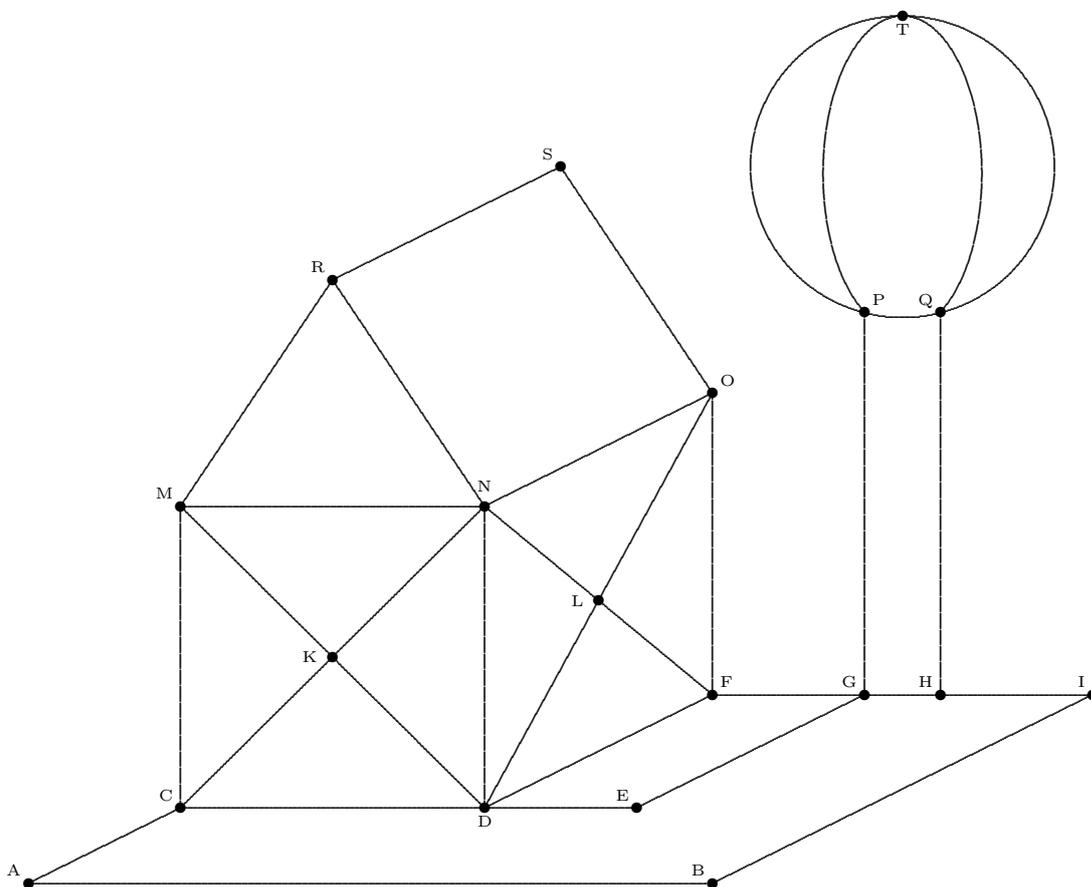
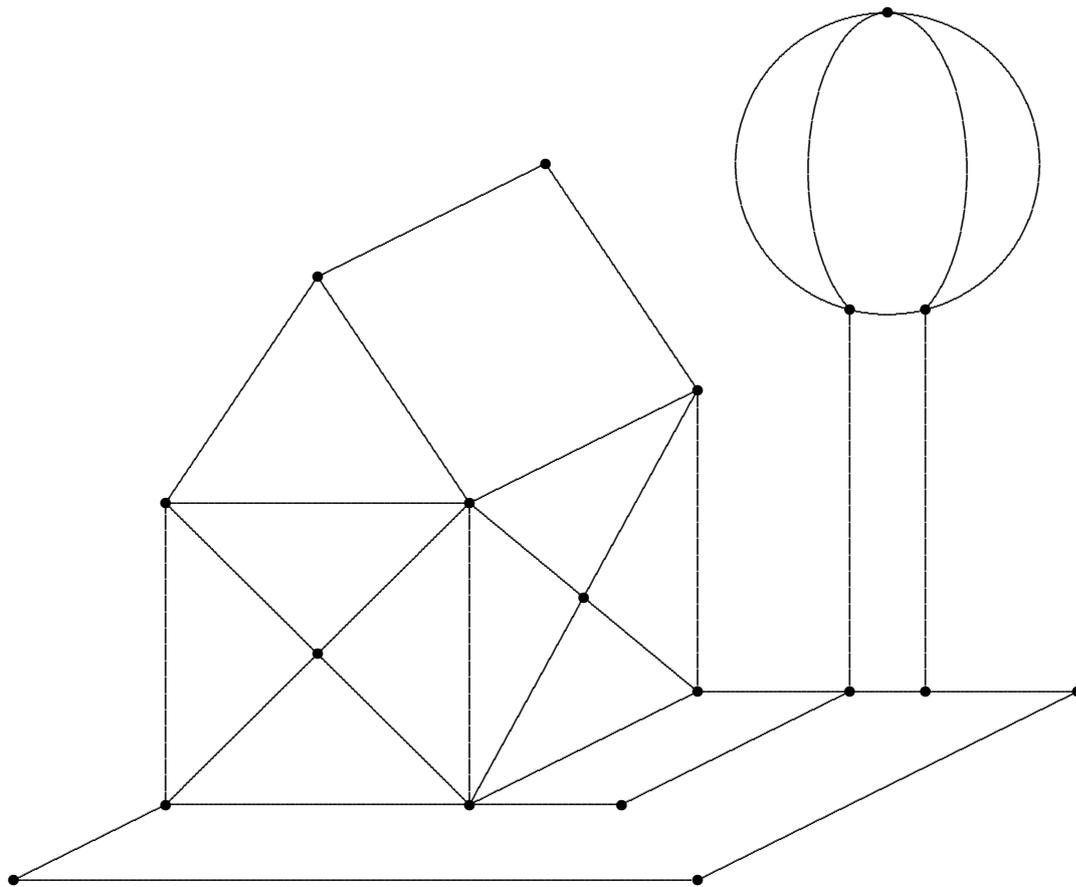


13 Strecken in Würfelnetzen

Zeichne in den Würfelnetzen jeweils den Pfeil-Streckenzug ein! Der Pfeil aus der Grundfläche ist bereits eingezeichnet.



14 Das Haus vom



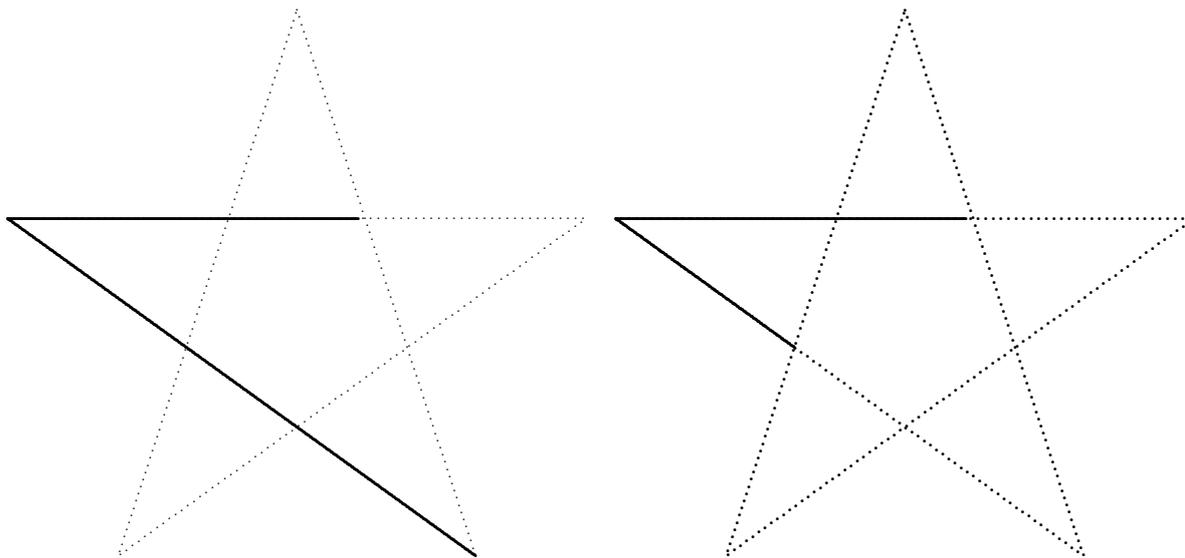
15 Goldener Schnitt

- ★ Bestimme unten das Längenverhältnis von kürzerer zu längerer Teilstrecke!

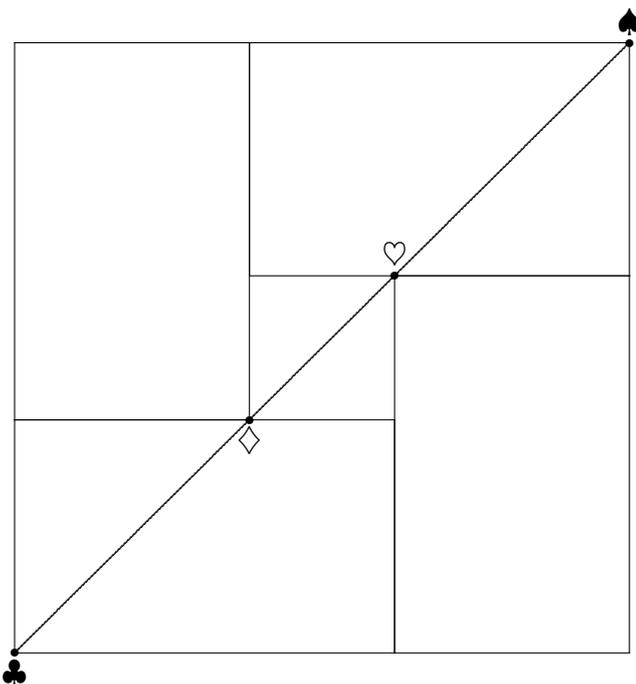


- ★ Bestimme oben das Längenverhältnis von längerer Teilstrecke zur Gesamtstrecke!

- ★ Bestimme im Pentagramm jeweils das Längenverhältnis von kürzerer Strecke zu längerer Strecke!



★ Das besondere an der Figur ist, dass die vier Rechtecke deckungsgleich sind.



Bestimme das Längenverhältnis der beiden Rechtecksseiten!

$$\Phi_5 =$$

Bestimme das Längenverhältnis der Strecken $[\diamond\heartsuit]$ und $[\clubsuit\diamond]$!

$$\Phi_6 =$$

Bestimme das Längenverhältnis der Strecken $[\clubsuit\diamond]$ und $[\clubsuit\heartsuit]$!

$$\Phi_7 =$$

Bestimme das Längenverhältnis der Strecken $[\clubsuit\heartsuit]$ und $[\clubsuit\spadesuit]$!

$$\Phi_8 =$$

★ Zu einer Zahl wird ihr Quadrat addiert und es kommt 1 heraus. Wie heißt die Zahl?

$$\Phi_9 =$$

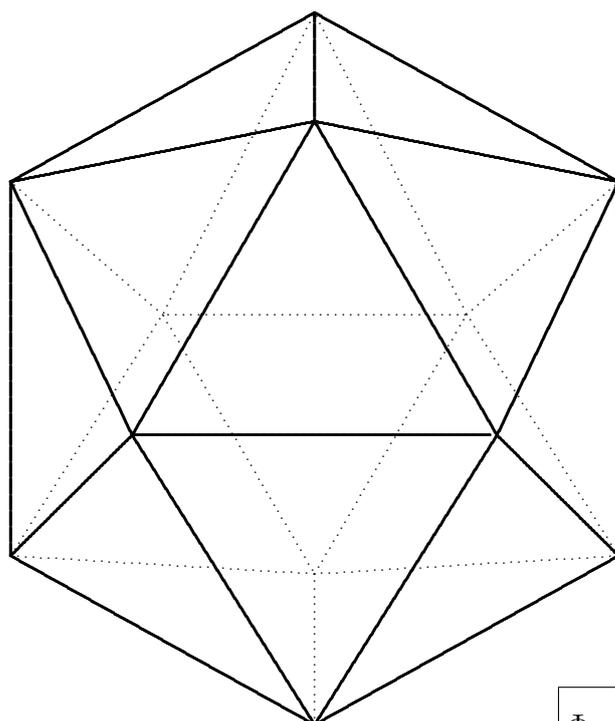
★ Eine Zahl wird von ihrem Kehrwert abgezogen und es kommt 1 heraus. Wie heißt die Zahl?

$$\Phi_{10} =$$

- ★ Die Folge der Fibonacci-Zahlen ist dadurch definiert, dass eine Zahl die Summe der beiden vorhergehenden Zahlen ist.
Berechne den Quotienten von je zwei benachbarten Fibonacci-Zahlen!

1	} Quotient →				
1				89	
2				144	
3				233	
5				377	
8				610	
13				987	
21				1597	
34				2584	
55				4181	
				6765	
		$\Phi_{11} =$			

- ★ Jeweils vier Ecken im Ikosaeder liegen in einer Ebene und bilden ein Rechteck. Bestimme das Verhältnis von Breite und Länge für das Rechteck in der Zeichenebene!



$\Phi_{12} =$

16 Dynamische Geometrie

16.1 Einführung

Programme aus dem Bereich der *Dynamischen Geometrie Software* (DGS) stellen die Zeichenebene der ebenen Geometrie auf dem Monitor zur Verfügung und ersetzen damit das herkömmliche Zeichenpapier. Die bekanntesten Vertreter solcher Programme sind:

- CABRI GEOMETRE (Das älteste \sim und Vorläufer aller anderen).
- THALES (Klett-Verlag, Klagenfurt)
- EUKLID (Roland Mechling, Karlsruhe)
- ZIRKEL UND LINEAL (ZuL, Rene Grothmann, Eichstätt)
- CINDERELLA (Jürgen Richter-Gebert/TUMünchen und Ulrich Kortenkamp/PHKarlsruhe)
- GEOGEBRA (Markus Hohenwarter. Es umfasst Geometrie, Algebra, Analysis).

Recherchieren Sie ein wenig in W

Die folgenden Beschreibungen orientieren sich im wesentlichen an ZuL.

Die Programmdateien sind in einem Verzeichnis namens JavaZuL innerhalb „Programme“ o.ä. abgelegt.

16.2 Crash-Kurs zur Einführung

Schalten Sie auf Einstellungen/Anfängermodus um!

16.3 Basisobjekte

Zeichnen Sie beliebige Basisobjekte!

- Punkte
- Geraden, Halbgeraden oder Strecken
- Kreise
- Dreiecke oder Vielecke

16.4 Elementare klassische Konstruktionen

Abhängig von den *Basisobjekten* werden *gebundene* Objekte („Kinder“) elementar konstruiert, beispielsweise

- Gerade (durch zwei Punkte),
- Kreislinie um Mittelpunkt und durch Kreispunkt,
- Punkt(e) als Schnittpunkt oder Schnittmenge von zwei Linien,
- Strecke zwischen zwei Punkten, Dreieck zwischen drei Punkten,
- Kreislinie (um Mittelpunkt mit abgegriffenem Radius).

16.5 Höhere klassische Konstruktionen

Durch Kombination der elementaren klassischen Konstruktionen können höhere klassische Konstruktionen aufgebaut werden. Sie sind innerhalb ZuL als Makros programmiert und in der (dritten) Makro-Zeile abrufbar.

- Achsenspiegelung (eines Punktes an einer Geraden)
 - Konstruktion mittels zweier Kreise
 - Konstruktion mittels Lot und Kreis
 - Konstruktion per „Achsenspiegelungstaste“
- Mittelpunkt (zweier Punkte bzw. einer Strecke)
- Lotgerade (von einem Punkt auf eine Gerade)
- Parallele (durch einen Punkt zu einer Geraden)
- Mittelsenkrechte (zu zwei Punkten bzw. einer Strecke)
- Winkelhalbierende (zu drei Punkten)

Alle diese Konstruktionen sind in den DGS-Programmen teilweise fest implementiert und abrufbar.

- Punktspiegelung (eines Punktes an einem Zentrumspunkt)
 - Konstruktion mittels Gerade und Kreis
 - Konstruktion per Drehung um 180°
- Thaleskreis zu einer Strecke
- Seitenhalbierende und Schwerpunkt eines Dreiecks
- Mittelsenkrechten und Umkreis eines Dreiecks (damit auch: Kreislinie durch drei Punkte)
- Winkelhalbierende und Inkreis eines Dreiecks
- Höhenschnittpunkt eines Dreiecks
- Tangente (durch einen Punkt einer Kreislinie)
- Besondere Dreiecke
- Besondere Vierecke
- Regelmäßiges n -Eck für $n = 3, 4, 6, 8, 5 \dots$
- Inkreis oder Umkreis eines Dreiecks

16.6 Gestaltung der Objekte

Nach kurzem Rechtsklicken auf ein Objekt können verschiedene Parameter zur Gestaltung dieses Objekts eingegeben werden.

- Größe, Farb- und Formgebung der Objekte
- Einblenden von benutzerdefinierbaren Objektnamen
- Einblenden von Objektwerten (Längen, Winkelmaße)
- Einblenden von Textboxen mit selbstgewählten Inhalten (Konstruktionsbeschreibungen, Kommentaren, Arbeitsaufträgen, Aufgabenstellungen)

16.7 Bearbeiten durchgeführter Konstruktionen

- Zugmodus: Es können mit Hilfe der Maus bereits vorgegebene Basisobjekte verzogen werden. Die davon abhängigen Konstruktionen werden entsprechend mit verzogen.
- Binden (und Lösen) von Basispunkten an Linien: Es kann die Bindung eines Basispunktes an eine bestehende Linie vereinbart werden. In der Objektverwaltung und im Zugmodus wird diese Bindung berücksichtigt.

16.8 Messen und Rechnen

Es können Abstände und Winkelmaße aus Konstruktionen bestimmt und rechnerisch weiterverarbeitet werden. Durch Anwendung des Zugmodus auf die Konstruktion werden so unter Umständen Gesetzmäßigkeiten offenbar:

- Winkelsumme im Dreieck, n -Eck, Winkel in regelmäßigen n -Ecken
- Stufen(F)-, Wechsel(Z)-, Nachbar(C)-Winkel an einer Doppelkreuzung
- Thaleskreis
- Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck, Winkel im gleichseitigen Dreieck
- Satzgruppe des Pythagoras
- Gesetzmäßigkeiten in speziellen Vierecken
- Vierstreckensatz.

Übung

- Laden Sie einige der im Programmpaket enthaltenen Dateien (*.GEO).