Skript zur Vorlesung

Mathematik in der Mittelschule 1 (Basismodul – MS)

WS 2018/19

Dieses Geheft enthält die wesentlichen Inhalte, wie sie in der Vorlesung ,,Mathematik in der Mittelschule 1" vorgestellt werden. Es wird laufend modifiziert, erweitert oder gekürzt. Das Skript ist zum Gebrauch neben der Vorlesung gedacht und erhebt nicht den Anspruch, ,,in sich selbst verständlich" oder vollständig zu sein.

S. Hilger

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlen und Zahlbereichserweiterungen$^{\ominus}$

1.1 Überblick

1.1.1 Überblick: Grundschule (Primarstufe)

Schüler/innen erleben im Laufe ihres mathematischen Werdegangs immer wieder Erweiterungen der ihnen vertrauten Zahlbereiche. Innerhalb der bayerischen Grundschule sind diese

Jgst.	1	2	3	4
GS	0..20	0..100	0..1 000	0..1 000 000

1.1.2 Überblick: Sekundarstufen

Jgst.	5		6		7	9	11_{MTG}
MS	$\mathbb{N}_0(\leq 10^{12})$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}_0^+$	$\mathbb{Q}$		$\sqrt{\mathbb{Q}}$	
RS	$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}_0^+$	$\mathbb{Q}$		$\mathbb{R}$	
GYM / gegenwärtig	$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}_0^+$	$\mathbb{Q}$		$\mathbb{R}$	
GYM / früher	$\mathbb{N}_0$		$\mathbb{Q}_0^+$		$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$

1.1.3 Übergang: $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{Q}$

Bezüglich des Übergangs vom Zahlbereich der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$ zum Zahlbereich der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ gibt es grundsätzlich zwei alternative Wege, die in dem folgenden Diagramm angegeben sind:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Q}_0^+ \arrow[dr] & \\
\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbb{Q} \\
& \mathbb{Z} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Für die obere Reihenfolge spricht:

- Bruchzahlen sind lebensnäher, anschaulicher (Pestalozzi) und konkreter (Piaget) als negative Zahlen. Beispielsweise lässt sich das Rechengesetz

  $$(-1) \cdot (-1) \quad = \quad +1$$

  kaum mit Alltagserfahrungen oder konkreten geometrischen

- Der Zahlbegriff ist eng an die Vorstellung von Größen (Maßzahlaspekt) geknüpft. Hier treten vor allem Bruchteile und nicht so sehr negative Zahlen in Erscheinung.

- Die geometrisch orientierte griechische Mathematik kannte — sehr fein ausgearbeitet — den Bruchzahlbegriff. Negative Zahlen sind eine viel jüngere Erfindung.

- Bereits in der Grundschule werden einfachste Bruchteile thematisiert, bis vor kurzem kannte der HS–Lehrplan nicht den Begriff der negativen Zahl.

- Nicht zuletzt spricht eine gut akzeptierte Unterrichtstradition für den oberen Weg.

In Bezug auf die untere derzeit realisierte Reihenfolge ist zu sagen:

- Für das alles dominierende Wirtschaftsleben sind in Bezug auf Geld- und Warenaustausch, Bilanzierung und Kreditvergabe grundlegenden Einsichten und Fertigkeiten über negative Zahlen von höchster Relevanz. Dies kann angesichts von Ratenkauf, Handyverträgen, ,,Geld pumpen" auch für Schüler/innen sehr konkret werden.

- Sie ist fachmathematisch natürlicher und besser verankert, da sie die in der Algebra vorgegebenen kanonischen Strukturerweiterungen

  $$\text{Halbring} \;\to\; \text{Ring} \;\to\; \text{Körper}$$

  widerspiegelt.

1.1.4 Äußere Kontextfelder für Zahlbereichserweitungen

Das Umfeld für die Zahlbereichserweitungen (hinsichtlich Motivation für die Einführung, Verständnis, Veranschaulichung, Übung) bilden die folgenden Kontextfelder:

- Sachwelt. Mathematisierung von Situationen aus Natur, Alltag, Technik, Freizeit oder anderen Schulfächern wie Physik, Informatik, Geographie, Musik, Biologie, Chemie, Werken, Sport.
- Geometrie. Zahlbereiche und das Rechnen mit Zahlen treten bei der Verwendung des Zahlenstrahls und von Koordinatensystemen auf.
- Rechnen mit Längen, Flächen, Volumina, Winkeln.
- Kombinatorik, elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1.1.5 Innere Kontextfelder bei Zahlbereichserweitungen

Die Zahlbereichserweiterungen sind jeweils begleitet von der Einführung der entsprechend möglichen mathematischen Strukturen:

- lineare Ordnungen: Kleiner $<$, größer $>$, kleiner-oder-gleich $\leq$, größer-oder-gleich $\geq$,
- rechnerischen Strukturen: Addition $+$, Subtraktion $-$, Multiplikation $\cdot$, Division $:$.
- mengen–topologischen Eigenschaften: Grenzwertbildung, Dichtheit, Ableitung, Integral (Selbstverständlich nicht in MS).

1.1.6 Das Hankel'sche Permanenzprinzip

Ausgangspunkt für Zahlbereichserweiterungen ist, dass neue Zahlen und Rechenarten für ,,vermeintlich unlösbare" Probleme (Gleichungen) gefunden werden müssen.

Wissenschaftlich steckt hier das (Hermann Hankel, 1839 – 1873) dahinter, das — in heutige Sprechweise übersetzt — etwa das folgende zum Inhalt hat:

> Bei einer Zahlbereichserweiterung muss der alte Zahlbereich (kanonisch) in dem neuen enthalten sein. Die Rechen- und Ordnungs-Strukturen des alten Zahlbereichs **sollen** mit denen im neuen verträglich sein.

Beispiele:

- Bei der Erweiterung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$ soll die Ordnungsstruktur weiter mit der Addition ,,verträglich" sein: Dies führt auf das Gesetz

$$-m < -n \quad \text{falls} \quad m, n \in \mathbb{N}, m > n.$$

- Bei der Erweiterung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$ soll das Distributivgesetz gewahrt bleiben. Dies führt — unausweichlich — auf das Gesetz ,,minus mal minus gleich plus".
- Bei der Erweiterung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Q}$ sollen die Potenzgesetze weiter gelten. Deshalb muss

$$a^0 = 1 \quad \text{oder } a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

  sein.
- Bei der Erweiterung von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ kann die mit Addition und Multiplikation verträgliche Ordnungsstruktur nicht bewahrt werden. Deshalb wäre eine Ersetzung des Wortes ,,sollen" durch ,,müssen" in der obigen Formulierung zu stark einengend.

Dieses Prinzip ist kein innermathematisches oder gar beweisbares Prinzip, es stellt vielmehr eine meta–mathematische Vorgehens–Empfehlung für die Erweiterung von Strukturen bereit. Man kann hier auch von einem heuristischen oder einem induktiven Vorgehen sprechen.

2 Natürliche Zahlen

M5 1.1

2.1 Der Begriff der natürlichen Zahl$^{\ominus}$

2.1.1 Fachmathematische Grundlegung

Die unendliche *Menge* $\mathbb{N}$ *der natürlichen Zahlen* wird

- konstruktiv, im Rahmen der Mengenlehre oder
- deskriptiv, mit Hilfe der sogenannten *Peano–Axiome* (nach Guiseppe Peano, 1858 –1932)

grundgelegt.

2.2 Überblick über die Zahlaspekte

Mathematisch gesehen ist eine natürliche Zahl ein klar und eindeutig festgelegtes Objekt. Werden Zahlen in der Alltagswelt (= Realität, Sachwelt) angewandt, so treten verschiedene Zahlaspekte in Erscheinung.

2.2.1 Tabelle

In der Alltagswelt werden Zahlen in den verschiedensten Kontexten verwendet. Man spricht hier von Aspekten des Zahlbegriffs. Es lässt sich beispielsweise folgende Übersicht erstellen:

Zahlaspekt	Beschreibung	Beispiele
Kardinalzahl	Mächtigkeit, Anzahl der Elemente einer Menge	Beim Hochsprung gab es **acht** Teilnehmer.
Ordinalzahl	Rangplatz in einer (linear) geordneten Menge.	Der Athlet aus Bulgarien wurde **Dritter**.
Zählzahl	Durch Zuordnung eines Rangplatzes wird die Anzahl bestimmt.	Eine Zählung ergab, dass aus Kamerun nur **12** Teilnehmer angereist waren.
Rechenzahl statisch	unterliegt Verknüpfungen und ihren Regeln.	Es traten **13** Teams beim Staffellauf an, insgesamt also **52** Sportler.
Rechenzahl operativ (Operator)	zur Beschreibung einer regelgemäßen Veränderung von Zahlen.	Am dritten Wettkampftag wehte der Wind **dreimal** so stark wie am ersten.
Maßzahl	zur Angabe von Größenwerten	Der Rekord im Dreisprung liegt bei **18,53** m.
Kodierungszahl	Ziffern werden als Symbole (ohne besonderen Bedeutungsgehalt) benutzt.	Der Sieger im Stabhochsprung trägt die Startnummer **527**.

Die didaktische Bedeutung dieser Tabelle liegt darin, dass alle Aspekte und ihre Wechselbeziehungen den Erwerb und den Umgang mit Zahlen variationsreich durchdringen. Dafür sprechen vielerlei Gründe:

- Der Zahlbegriff wird gerade dadurch als abstrakt, d.h. losgelöst von konkreten Vorstellungen, wahrgenommen, dass seine vielfältigen Aspekte beleuchtet werden.

- All diese Aspekte sind relevant im Alltagsleben.

- Die Einbeziehung aller Aspekte läßt sich lernpsychologisch untermauern, beispielsweise durch

  - das operative Prinzip: Die Erarbeitung mathematischer Fertigkeiten und Fähigkeiten vollzieht sich durch Handlungen (Operationen). Beim operativen Durcharbeiten wird ein System vielfältigster Kontexte einbezogen. Dieses Prinzip wurde von Hans Aebli (1923 – 1990), einem Schüler Jean Piagets, im Kontext von Entwicklungspsychologie und Unterrichtsdidaktik entwickelt.
  - das Prinzip der Variation der Veranschaulichung nach Zoltan Dienes (1916 – 2014)

- Die Auswahl unter verschiedenen Zahlaspekten erweitert und erleichtert den Spielraum bei methodischen Überlegungen.

2.2.2 Beispiele

Welche Zahlaspekte treten in den folgenden Sätzen auf?

- Schalte bitte in das 11. Programm um!

- Sie hat die Telefonnummer 73 29 54.

- Die Spannung im öffentlichen Stromnetz beträgt 230 V.

- Die Heizanlage befindet sich auf Ebene -2.

- Der Notendurchschnitt seines Examens ist $2,37$.

2.2.3 Zahl und Ziffer

LP+ GS S. 319

Unterscheide die Begriffe ,,Zahl" und ,,Ziffer". *Zahlen* sind mathematische Objekte gemäß dieser Zahlaspekte. *Ziffern* sind die zehn Schreibsymbole

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9,$$

mit deren Hilfe Zahlen geschrieben, diktiert oder informationstechnisch verarbeitet werden können.

Also sind die folgenden Beispiel–Sprechweisen korrekt:

- Einstellige Zahlen können als eine Ziffer geschrieben werden.
- Nenne mir eine Zahl zwischen eins und neun!
- Der Erwerb der Zahlen von 1 bis 10.
- Wie lautet die Ziffer nach dem Komma in $24,984$?
- Wie heißt die erste Ziffer in der Telefonnummer von Konrad?
- Die Lottozahlen!
- Diese geschriebene Zahl kann ich nicht entziffern!

2.3 Kardinalzahlaspekt und Gleichmächtigkeit

2.3.1 Der Kardinalzahlaspekt

Er ist historisch, entwicklungspsychologisch und bzgl. Alltagsauffassungen der vorherrschende Aspekt von Zahlen.

Eine *Kardinalzahl* (beispielsweise 5) ist eine Abstraktion der gemeinsamen Eigenschaft von Mengen, 5 Elemente zu besitzen:

> ,,Die Zahl 5 ist die Gesamtheit aller 5–elementigen denkbaren Mengen".

Es gibt Völker (auch Sprachen), die für ein und dieselbe Zahl verschiedene Wörter verwenden, wenn es sich um verschiedene Dinge (beispielsweise fünf Töpfe, fünf Hühner oder fünf Kinder) handelt.

> Eine bestimmte Zahl ist nicht identisch mit einer Kollektion von so viel Elementen, wie diese Zahl beträgt. Die Zahl 3 ist nicht identisch mit dem Trio Brown, Jones und Robinson. Die Zahl 3 ist etwas, das alle Trios gemeinsam haben und sie von anderen Kollektionen unterscheidet.
>
> Bertrand Russell (1872 – 1970), 1930.

2.3.2 Definition: Gleichmächtigkeit

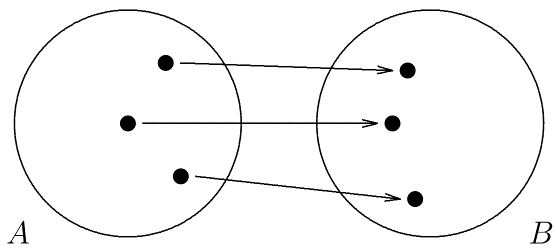
Zwei Mengen A und B heißen dann *gleichmächtig* (sie haben die *gleiche Anzahl*), wenn

(♣) jedem Element von A (♠) genau ein Element von B

und dabei — umgekehrt —

(♡) jedem Element von B (♢) genau ein Element von A

zugeordnet werden kann. Man spricht dann auch von einer 1 : 1–*Zuordnung* oder einer *ein–eindeutigen Zuordnung.*



2.3.3 Gleichmächtigkeit — Erfahrungen im Alltag

Die ein–eindeutige Zuordnung (= 1:1 Zuordnung) tritt — unmerklich — beispielsweise bei folgenden Alltagssituationen oder mathematischen Situationen in Erscheinung:

- In einem Tanzsaal tanzt jede Frau mit (genau) einem Mann und jeder Mann mit (genau) einer Frau.
- In einer Kiste liegen Schrauben und Muttern. Auf jede Schraube ist (genau) eine Mutter gedreht. Umgekehrt steckt in jeder Mutter (genau) eine Schraube.

- Auf einem gedeckten Tisch steht bei jedem Teller (genau) ein Trinkglas. Umgekehrt gehört zu jedem Glas ein Teller.

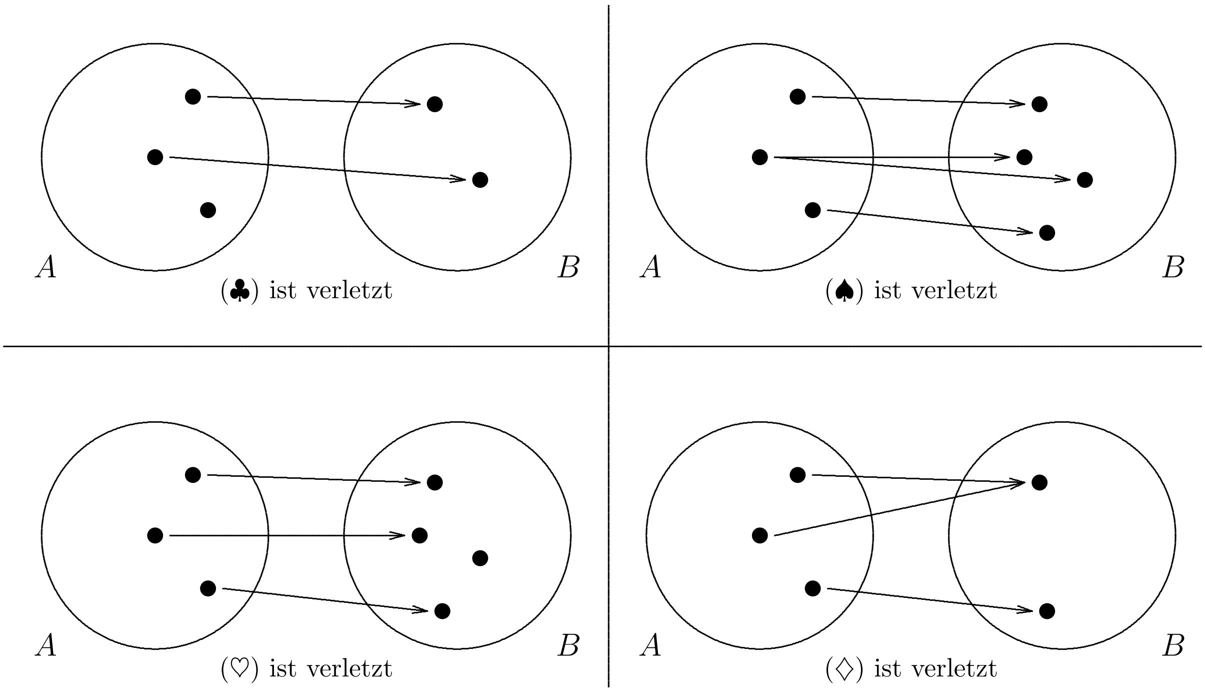
Allein daraus kann man — ohne zu zählen — schließen, dass ...

- im Saal gleich viele Männer und Frauen sind,
- in der Kiste gleich viele Schrauben und Muttern sind,
- auf dem Tische gleich viele Teller und Trinkgläser stehen.

Gelegentlich entsteht Verwirrung bei vermeintlichen 1 : 1 Zuordnungen:

- Wie viele Geburtstage habe ich schon erlebt?
- Wie viele Namenstage habe ich schon erlebt?
- Wie viele Felder muss ich weiterrücken, um auf LOS zu kommen?
- Wieviele Jahre umfasst der Zeitraum von 2010 bis 2020?
- ,,Wie viel mal muss ich bis Weihnachten noch schlafen?"
- Ein 23 m breites Grundstück soll entlang der Straße mit einem Zaun eingegrenzt werden. Wieviel Pfähle werden benötigt, wenn sie in einem Abstand von 1 m stehen?

2.3.4 Beispiele für NICHT-Gleichmächtigkeit



2.3.5 Gleichmächtigkeit bei unendlichen Mengen$^{\ominus}$

Die immense Bedeutung des Gleichmächtigkeitsbegriffs kommt eigentlich erst bei seiner Anwendung auf nicht–endliche Mengen zum Ausdruck. So kann man beispielsweise folgendes beweisen:

- Zu jeder natürlichen Zahl gibt es (genau) eine gerade Zahl, nämlich die doppelte. Umgekehrt lässt sich jeder geraden Zahl eine natürliche Zahl zuordnen, nämlich die Hälfte. Die Menge der natürlichen Zahlen ist also zur Menge der geraden natürlichen Zahlen gleichmächtig, obwohl letztere eine Teilmenge der ersteren ist.

- Die Menge der reellen Zahlen ist mächtiger als die der rationalen Zahlen.

- Zu jeder natürlichen Zahl gibt es (genau) eine Quadratzahl. Umgekehrt lässt sich jeder Quadratzahl eine natürliche Zahl zuordnen, nämlich ihre Quadratwurzel. Diese Beobachtung führt auf die etwas paradox anmutende Aussage, dass es ,,genau so viele" Zahlen wie Quadratzahlen gibt. Diese Facetten des mathematischen Unendlichkeitsbegriffs werden in der wissenschaftlichen Mengenlehre analysiert. Sie eröffnen eigentlich erst die Reichhaltigkeit des mathematischen Denkgebäudes.

- ,,Hilberts Hotel" ist ein von dem Mathematiker David Hilbert (1862 – 1943) entwickeltes ,,mathematisches Gleichnis", das den wesentlichen Gehalt des Gleichmächtigkeitsbegriffs bei unendlichen Mengen herausarbeitet. Es beschreibt eine tiefliegende mathematische Einsicht, die bei Anwendung auf die reale Welt paradox wirkt. $\boxed{\text{W}}$

2.4 Ordinalzahlaspekt und Zahlenstrahl

2.4.1 Der Ordinalzahlaspekt

Werden (natürliche) Zahlen gemäß der ihnen innewohnenden Eigenschaft verwendet, dass sie verglichen — und dann als kleiner, gleich oder größer als andre Zahlen bestimmt — werden können, so spricht man vom Ordinalzahlaspekt.

Im Alltagsgeschehen wird eine Zahl in diesem Zusammenhang auch als *Rang*, *Nummer* oder *Platz* bezeichnet. Der Ordinalzahlaspekt schlägt sich sogar direkt in der Wortformulierung mit dem angehängten ,,-ter, -te, -tes, -ten” nieder.

Zum dritten Mal ist der Fürther Fünfter in Sexten geworden.

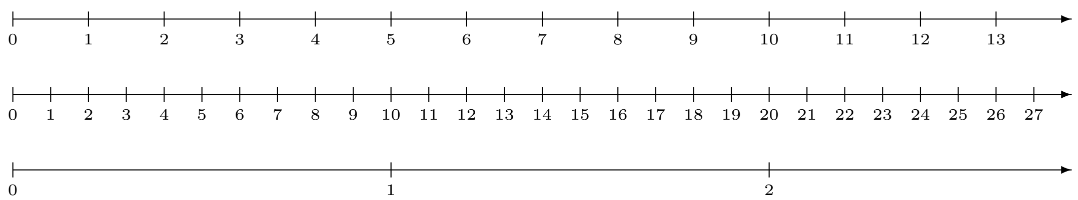
Die beiden Wörter ,,Ordinalzahl” und ,,Ordnungszahl” werden synonym verwendet.

Zusätzliche Begriffe aus dem Umfeld der Ordnungsstruktur:

- *Nachbarzahlen*: 4 und 6 sind die Nachbarzahlen von 5.
- *Vorgänger*: 4 ist der Vorgänger von 5.
- *Nachfolger*: 6 ist der Nachfolger von 5.

2.4.2 Zahlenstrahl

Eng verknüpft mit dem Ordinalzahlaspekt ist die Idee, Zahlen auf dem *Zahlenstrahl* darzustellen. Das ist eine graphische Darstellung einer Halbgerade oder eines rechtsweisenden Pfeiles, an dem Markierungen und Zahlnamen angetragen sind.



- Die Zahlen werden *äquidistant* (= jeweils in gleichem Abstand) angeordnet.
- Die Länge zwischen zwei benachbarten natürlichen Zahlen wird als *Einheit* bezeichnet. In den Beispielen oben sind die Einheiten also 1 cm, 0, 5 cm bzw. 5 cm.
- Der *Maßstab* ist

  Einheit : 1

  Beim obersten Beispiel ist also der Maßstab 1 cm : 1.

- Eine natürliche Zahl n ist *kleiner* als eine andere m,

  symbolisch $\quad n < m$,

  wenn n auf dem Zahlenstrahl links von m (nicht so gut: ,,vor m") angeordnet ist. Umgekehrt sagt man, dass m *größer* als n ist.

- Auch Zahlenstrahlen mit vertikaler Richtung (von unten nach oben) können benutzt werden. Hier ist eine Voraus-Einsicht in den Begriff des Gitternetzes (= Koordinatensystems, ab JGS 5) angelegt.

- Gelegentlich ist auch vom *Zahlenband*, der *Zahlenleiste* oder einem *Rechenstrich* und ähnlichem die Rede. Abhängig von mathematikdidaktischer Normierung, schulischer Konvention oder individueller Neigung sind diese Begriffe mehr oder weniger genau definiert und gegeneinander abgegrenzt.

  Werden auch negative Zahlen (links von der Null) eingetragen, so spricht man von der *Zahlengeraden*.

- Ein Zahlenstrahl kann auf vielfältige Weise konkretisiert bzw. materialisiert werden:
  - Graphische Darstellung in Buch, Heft oder Arbeitsblatt (30 cm lang)
  - Graphische Darstellung an der Tafel (1 m lang)
  - Graphische Darstellung an der Seitenwand des Klassenzimmers (10 m lang)
  - Das Maßband neben der Hundertmeterbahn.
  - Markierte Wegstrecken: Entfernungen entlang von Straßen, Bahngleisen, Flüssen.

- Veränderungen am Zahlenstrahl:
  - Ausschneiden eines Abschnitts (B: von $72 \ldots 82$),
  - Verschiedene Einheiten, (B: $0 \ldots 1000$ auf 10 cm),
  - Herauszoomen eines Abschnittes ($72\,000 \ldots 82\,000$ auf 10 cm).

2.4.3 Der Zählzahlaspekt

Der Zählzahlaspekt nimmt eine Zwitter- oder Übergangsstellung zwischen dem Kardinalzahlaspekt und dem Ordinalzahlaspekt ein.

Man zählt nach einer gewählten Reihenfolge (Ordinal) die Elemente einer Menge ab, um ihre Anzahl (Kardinal) zu bestimmen.

Besondere Übungsformen zum Zählzahlaspekt sind das Zählen und Rückwärtszählen.

Etwas verengt aufgefasst, beinhaltet der Begriff des Zählens die akustische Abfolge der Zahlwörter bei der Bestimmung der Mächtigkeit einer Menge.

Ein möglicher Fehler, der hier beobachtet werden könnte, ist die ,,Silbenzählung". Beim Aufsagen des Wortes Sie–ben werden zwei Elemente statt eines erfasst. Beispielsweise werden 11 Dinge als 10 gezählt:

Eins – Zwei – Drei – Vier – Fünf – Sechs – Sie – Ben – Acht – Neun – Zehn.

2.5 Der Rechenzahlaspekt

Er beinhaltet die Tatsache, dass Zahlen Verwendung beim Rechnen finden.

2.5.1 Aspekt der statischen Rechenzahl

Er beschreibt den Vorgang, dass zwei gegebene Zahlen verknüpft werden und so eine dritte Zahl als Ergebnis hervorbringen.

Beispiel

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \cdot & 37 & = & 111 \\ \text{Erste Zahl} & * & \text{Zweite Zahl} & = & \text{Ergebnis} \end{array}$$

Die beiden gegebenen Zahlen treten dabei gleichrangig nebeneinander auf.

Innerhalb der elementaren Schulmathematik werden als Verknüpfungen die vier Grundrechenarten eingeführt. Die weitere Schulmathematik kennt noch Verknüpfungen wie

Potenz ggT kgV Mittelwertbildung

2.5.2 Aspekt der operativen Rechenzahl — Operatoraspekt

Er hängt eng mit dem vorhergehenden Aspekt zusammen, hier wird aber die Auffassung betont, dass die erste der beiden Zahlen als Ausgangspunkt vorhanden ist, die andere Zahl dann die erste verändert.

Dies wird besonders deutlich bei Verwendung der folgenden graphischen Darstellung mit einem Pfeil

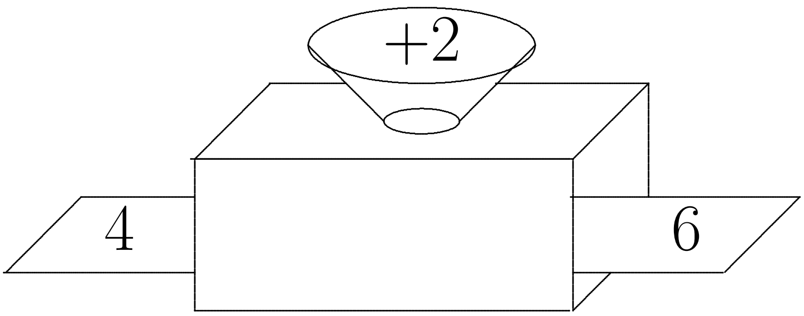
$$\begin{array}{ccc} 42 & \xrightarrow{+18} & 60 \\ \text{Operand} & \text{Operator} & \text{Ergebnis} \end{array}$$

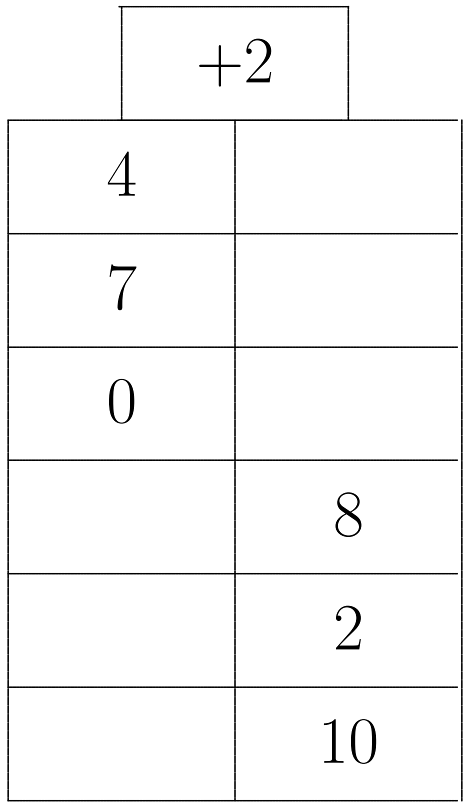
Die beiden gegebenen Zahlen treten in zwei verschiedenen Funktionen in Erscheinung.

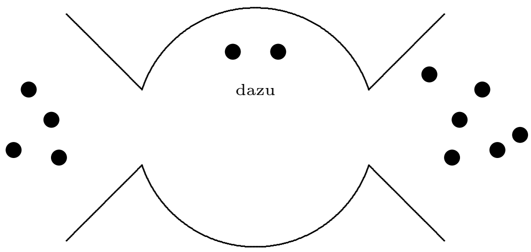
2.5.3 Graphische Realisierungen des Operatoraspekts

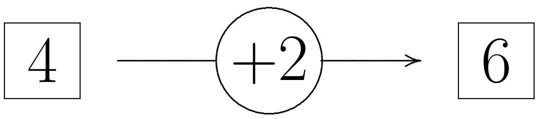
Hier sind beispielhaft verschiedene Möglichkeiten dargestellt, wie der Operatoraspekt graphisch realisiert werden kann.

Der Operator +2 wird auf den Operanden 4 angewandt.









$$4 \xrightarrow{+2} 6$$

2.6 Der Maßzahlaspekt

Vom Maßzahlaspekt spricht man, wenn Zahlen zur Angabe von Größenwerten verwendet werden. Bei genauerem Hinsehen lassen sich zwei Spielarten wie folgt unterscheiden:

- Zahlen treten als *Vervielfacher* von Einheiten eines Größenbereichs auf:

$$\begin{array}{rcccc} \text{Größenwert} & = & \text{Maßzahl} & \cdot & \text{Einheit} \\ m & = & 13 & & \text{kg} \end{array}$$

- Zahlen treten als *Skalenmarker* eines Größenbereichs auf:

$$\begin{array}{rcccc} \text{Größenwert} & = & \text{Maßzahl} & \text{mit} & \text{Einheit} \\ T & = & -7 & & {}^\circ\text{C} \end{array}$$

In der Schulpraxis und im Alltag spricht man gelegentlich von *Zahlen mit Benennung*.

Beachte, dass nicht jede mathematisch sinnvolle Operation mit Zahlen auch sinnvoll im Kontext des Maßzahlaspekts ist.

3 Zahldarstellung für natürliche Zahlen

3.1 Einführung $^{\ominus}$

3.1.1 Für jede Zahl ein Symbol?

Einen naiven Zugang zur Zahldarstellung bildet die Idee, für unterschiedliche natürliche Zahlen jeweils unterschiedliche Symbole einzuführen, beispielsweise durch

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	α	β
γ	δ	ε	ζ	η	ϑ	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	π	ϱ	σ	τ
φ	χ	ψ	ω	Δ	$\Box$	$\aleph$	$\maltese$	$\surd$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\S$	$\yen$	$\bigstar$
$\varnothing$	$\therefore$	$\boxtimes$	$\divideontimes$	$\blacktriangledown$	$\circledS$	$\$$	$\mho$	$\uplus$	$\flat$	$\sharp$	$\natural$	$\pounds$	$\ast$	$\dagger$	$\perp$

$\vdots$

ASCII–Zeichen

$\vdots$

Chinesische Schriftzeichen

$\vdots$

Beispielaufgaben

$\divideontimes < \nu\,?$ $\qquad \boxtimes + Q$ $\qquad \maltese - \aleph$ $\qquad \delta \cdot \heartsuit$ $\qquad \dagger : s$ $\qquad \yen^{\$}$

3.1.2 Für die Zahl 1 ein Symbol?

Wie viele Grillwürste müssen für das Sommerfest eingekauft werden? Kauf bitte einfach so viele:

Beispielaufgaben

||||||||||||||||||||||||||||||||||| + ||||||||||||||||||||||| $\qquad$ |||||||| $\cdot$ ||||||||||||||||||||||

3.1.3 Frage

Halten Sie diese Arten von Zahldarstellung — auch angesichts der Notwendigkeit, mit Zahlen zu operieren oder sie zu vergleichen für eine glückliche Lösung?

Angesichts einer viel zu großen ,,Unhandlichkeit" und ,,Undenkbarkeit" einer solchen Zahldarstellung haben Menschen im Verlauf der Mathematik–Kulturgeschichte andere Systeme der Zahldarstellung ersonnen.

3.1.4 Additionssysteme

Kleine Zahlen werden mit Symbolen versehen, größere Zahlen werden daraus additiv (und subtraktiv) aufgebaut:

- Griechische Zahldarstellung: Kleine Zahlen und reine Zahlen (= Vielfache von Zehner–Stufenzahlen) werden durch die Buchstaben des Alphabets dargestellt.
- Römische Zahldarstellung, veränderlich im Laufe der Geschichte des römischen Reiches.

  a) Einzelzeichen:

$$\begin{array}{rcrrcrrcr} I & = & 1 & V & = & 5 & X & = & 10 \\ L & = & 50 & C & = & 100 & & & \\ D & = & 500 & M & = & 1000 & & & \end{array}$$

  b) Doppelzeichen (Idee der Subtraktivität, erst später):

$$\begin{array}{rcrrcrrcr} IV & = & 4 & XL & = & 40 & CD & = & 400 \\ IX & = & 9 & XC & = & 90 & CM & = & 900 \\ IL & = & 49 & XD & = & 490 & & & \\ IC & = & 99 & XM & = & 990 & & & \\ ID & = & 499 & IM & = & 999 & & & \end{array}$$

  c) Regel: Es werden Zeichen und Doppelzeichen — der Größe nach — nebeneinander geschrieben, bis der Zahlenwert erreicht ist.

  d) Beispiele:

$$\begin{array}{rcrrcr} 7 & = & VII & 1001 & = & MI \\ 29 & = & XXIX & 4059 & = & MMMMLIX \\ 43 & = & XLIII & 2008 & = & MMVIII \\ 138 & = & CXXXVIII & 9000 & = & MMMMMMMMM \\ 450 & = & CDL & & & \end{array}$$

3.2 Stellenwertsystem zu einer Basis b $\ominus$

3.2.1 Erfindung der Zahl (und Ziffer) Null

Historischer Weg (mit $b = 10$) $\boxed{\text{W}}$:

$$\text{Alt-Babylonien} \longrightarrow \text{Indien} \xrightarrow{\text{Orient–Handel}} \text{Arabien} \xrightarrow{\text{Renaissance}} \text{Europa.}$$

Zunächst wurde die Null als Leerstelle (= Zwischenraum) geschrieben, erst später entwickelte sich ein Zahlzeichen.

3.2.2 Abstrakte Idee — Vorbereitung

1. Es sei b eine fest ausgewählte natürliche Zahl ≥ 2. Wir nennen sie *Basis* des Stellenwertsystems.
2. Die Zahlen

$$\begin{aligned} b^0 &= 1 \\ b^1 &= b \\ b^2 &= b \cdot b \\ b^3 &= b \cdot b \cdot b \\ &\vdots \\ b^i &= \underbrace{b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{i \text{ Faktoren}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

   heißen *Stufenzahlen* des Stellenwertsystems.
3. Man benötigt dann *Ziffern*, das sind irgendwelche b Symbole

$$0 \quad 1 \quad \ldots\ldots\ldots ,$$

   die man nebeneinander anordnen kann.

   Diese Ziffern sind den Zahlen von 0 bis $b - 1$ eineindeutig zugeordnet.

3.2.3 Satz: b–adische Zahldarstellung

Es sei b eine fest ausgewählte natürliche Zahl mit $b \geq 2$.

Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es — **umkehrbar eindeutig** — eine (endliche) Zahlenfolge

$$a_{s-1}, a_{s-2}, \ldots, a_i, \ldots, a_2, a_1, a_0$$

mit den Eigenschaften

- $0 \leq a_i \leq b - 1$ für alle $i = 0, 1, \ldots, s - 1$ und

- $a_{s-1} \neq 0$,

so dass

$$n = a_{s-1} \cdot b^{s-1} + a_{s-2} \cdot b^{s-2} + \ldots + a_i \cdot b^i + \ldots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0. \tag{1}$$

Der Ausdruck (3) ist lang und umständlich handzuhaben. Deshalb schreibt man kürzer

$$n = a_{s-1}\, a_{s-2}\, \ldots\, a_i\, \ldots\, a_2\, a_1\, a_0\,{}_b \tag{2}$$

einfach nur die Ziffern a_i in ihrer Reihenfolge auf und kennzeichnet diese Zahl noch durch Angabe der Basis b als Subskript (Index).

3.2.4 Weitere Begriffe

Im Zusammenhang mit diesem Satz über die b–adische Zahldarstellung gibt es die folgenden Fachbegriffe:

- Der Ausdruck auf der rechten Seite von (3) heißt *Stufenzahldarstellung* von n.
- Der Ausdruck auf der rechten Seite von (3) heißt (b–adische) *Zifferndarstellung* von n. Es handelt sich um eine *s–stellige* Zahl.
- Für die b Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots, b-1$, die in den b–adischen Darstellungen (3) oder (3) auftreten können, müssen unterschiedliche Symbole, die *Ziffern des b–adischen Systems*, vorhanden sein.
- Man sagt, dass die Zahl n an der b^i*–Stelle* (oder *Position*) die Ziffer a_i aufweist.

Der Beweis dieses Satzes erfolgt im Rahmen bzw. auf der Grundlage der Peano–Axiome (vgl. 2.1.1) über die natürlichen Zahlen.

3.2.5 Beispiele

Der Windows–Taschenrechner (Programme/Zubehör/Rechner, auf Ansicht „Programmierer" umstellen) ermöglicht ein leichtes Umwandeln der Zahldarstellungen zu den Basen 2,8,10,16.

Ein b–System–Umwandel–Rechner ist unter

`http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/Zahlensysteme.htm`

zu finden.

$b = 10$ Die Basis 10 führt auf die indisch–arabisch–abendländisch–weltweite *Dekadische* Zahldarstellung, man spricht auch vom *Dezimalsystem*. Der Ursprung für die Herausbildung der Zahl „Zehn" als Basis „unserer" Zahldarstellung liegt vermutlich darin begründet, dass wir an beiden Händen insgesamt zehn Finger haben. Genaueres zum Dezimalsystem erfahren Sie in der gesamten Vorlesung MGS1 (und MGS2).

Beispiel: $\spadesuit = 91_{10}$.

$b = 2$ Das System der 2–adischen Zahldarstellung heißt auch *Dualsystem*. Dieses System liegt der elektronischen Informationsverarbeitung aller Art (TR, PC, Großrechner) zugrunde, da sich die beiden Ziffern 0 und 1 als Strom aus/ein (genauer: Spannung niedrig/hoch) physikalisch repräsentieren lassen.

Im Dualsystem hat die Zahl 167 die Darstellung

$$167 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 10\,100\,111_2.$$

Das bedeutet, dass die elektronische Repräsentation der Zahl 167 in der Abfolge von Impulsen mit Spannung hoch/niedrig/hoch/niedrig/niedrig/hoch/hoch/hoch besteht.

In einer achtstelligen Dualzahl kann gerade die Information über eine Zahl zwischen $0 = 0_2$ und $255 = 11111111_2$ gespeichert werden.

Der Informationsgehalt, der in der Kenntnis einer Ziffer an einer bestimmten Stelle enthalten ist, wird als 1 *Bit* bezeichnet.

Die Kenntnis einer achtstelligen Dualzahl hat einen Informationsgehalt von 1 *Byte*:

$$1\,\text{Byte} = 8\,\text{Bit}.$$

$b = 16$ Für die Darstellung von Zahlen im *Hexadezimalsystem* benötigt man 16 Ziffern, diese sind

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.$$

Der sogenannte erweiterte ASCII–Zeichensatz umfasst 256 Zeichen. Sie lassen sich durch die Zahlen (dezimal) 0 bis 255 kodieren. In vielen Programmen und Programmiersprachen werden diese 256 Zahlen $0, 1, \ldots 255$ zweistellig hexadezimal dargestellt, beispielsweise

$$167 = 10 \cdot 16 + 7 = A7_{16}.$$

Die Kenntnis eines ASCII–Zeichens bedeutet also den Informationsgehalt 1 Byte.

Eine auf dem Bildschirm darstellbare Farbe wird — für gewöhnlich — durch drei zweistellige Hexadezimalzahlen (Informationsgehalt 3 Byte) kodiert, beispielsweise wird die Farbe „hell–ocker" durch die Gewichtung der Farbpixel

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Rot–Anteil} & 217 = 13 \cdot 16 + 9 \;\; = \text{D9}_{16} \\ \text{Grün–Anteil} & 205 = 12 \cdot 16 + 13 = \text{CD}_{16} \\ \text{Blau–Anteil} & \;\;60 = 3 \cdot 16 + 12 \;\; = \text{3C}_{16} \end{array}\right\}$$

erzeugt. Mit dem Befehl

```
bgcolor = "#D9CD3C"
```

innerhalb des `<body>`–tags wird in der „homepage"–Programmier–Sprache HTML der Farbhintergrund „hell–ocker" kodiert. Der Server–Rechner übermittelt lediglich den obigen Befehl an den Client/Browser–Computer.

$b = 3$ Beispiel: $\spadesuit = 3101_3$.

3.2.6 Nicht–Dekadisches Bündeln in der Praxis

In der Schulpraxis ist es grundsätzlich möglich, auch andere Basen als die Basis Zehn zur Erfassung des Stellenwertsystems heranzuziehen, beispielsweise sind die Basen $b = 3$, $b = 4$ oder $b = 5$ gelegentlich üblich.

Dafür lassen sich folgende Gründe anführen:

- Innerhalb der enaktiven bzw. ikonischen Ebene ist ein Bündeln bei deutlich kleineren Basen praktisch viel leichter durchführbar und überschaubar.
- Es wird eine erste Vertrautheit für die Division mit Rest geschaffen.
- Weiter wird in Grenzen ein Bewusstsein um die Möglichkeit anderer Basen als der Basis Zehn geschaffen. Dies fördert wiederum das Verständnis und die Einsicht in das Dezimalsystem und bedeutet eine Denkschulung allgemein.

In der strukturorientierten Mathematik–Didaktik der 60er/70er Jahre wurden nicht–dekadische Stellenwertsysteme — auf geeignet elementarisierte Weise — durchaus in den Grundschulunterricht einbezogen, beispielsweise auf enaktiver oder ikonischer Ebene. Gegenwärtig rückt der Gedanke, dass das Dezimalsystem das allein wichtige Stellenwertsystem ist, wieder stark in den Vordergrund.

3.3 Das dekadische Stellenwertsystem

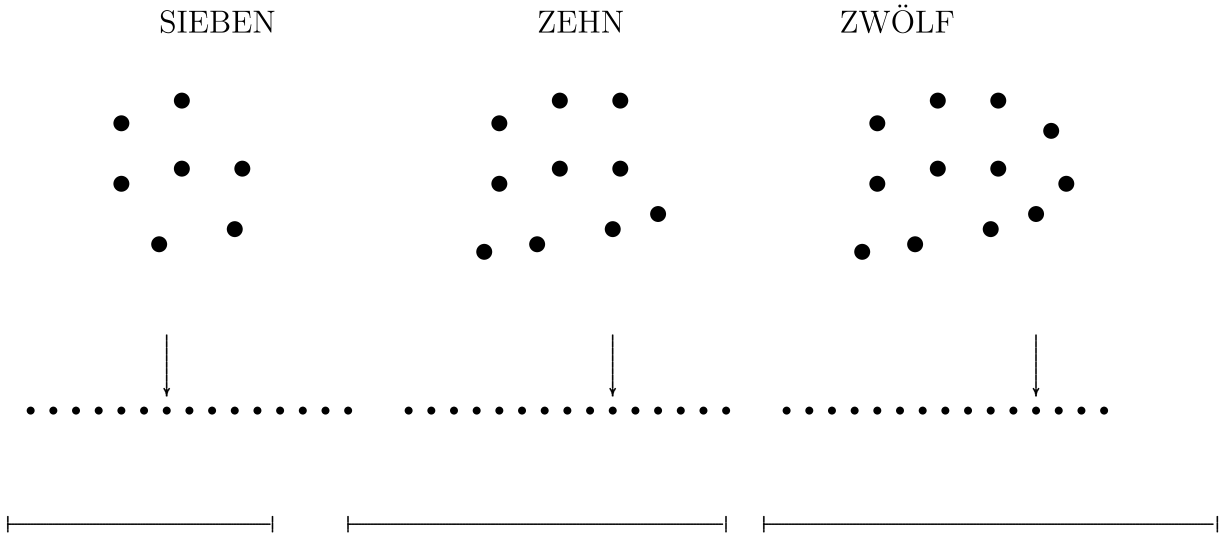
LP 5.1

F14 T2

H11 T3

3.3.1 Die Bedeutung der Zahl Zehn

Betrachten Sie die folgenden Darstellungen von drei Zahlen als Wort, Kardinalzahl, Ordnungszahl, Maßzahl



Hat die Zahl Zehn gegenüber anderen Zahlen eine besondere Bedeutung?

NEIN

- Fachlich–Mathematisch kann keine herausragende Stellung von Zehn entdeckt werden.
- In der Natur oder bei technischen Abläufen kann man ebenfalls keine besondere Rolle der Zehn erkennen.
- Auch kulturgeschichtlich ist die Zahl Zehn nicht — im Vergleich zu anderen Zahlen — in besonderer Weise hervorgetreten.
- Eine genauere Analyse menschlicher Denkprozesse lässt auch keine Sonderstellung der Zahl Zehn erkennen.

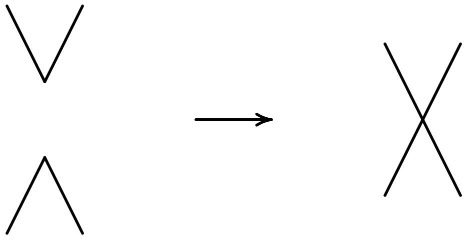
JA, EIN WENIG

- Zehn ist eine gerade Zahl und hat deshalb einige Teiler. (Vergleiche mit 7 und 12).
- Wir Menschen haben Zehn Finger an den beiden Händen und Zehn Zehen an den beiden Füßen.

Nur aufgrund der letzten Besonderheit hat sich die Menschheit die Zahl Zehn angeeignet

- als additive Gesamtheit (= Bündel) und
- als Basis bei der Zahlschreibweise mit Hilfe des Stellenwertsystems.

Die beiden Gesichtspunkte sind unabhängig voneinander: Die römische Zahldarstellung mit Buchstaben-Symbolen kannte die Idee des Zehnerbündels. Das Stellenwertsystem war unbekannt.



Ob diese Graphik tatsächlich die ursprüngliche Idee für die Zahlzeichen V und X liefert, sei dahingestellt.

3.3.2 Einstieg

Das im folgenden erklärte System zur Darstellung von Zahlen heißt *dezimales* oder *dekadisches* Stellenwertsystem.

Wir wiederholen die Ausführungen aus Abschnitt 3.2 für diesen konkreten — und vermeintlich einzigen interessanten — Fall.

3.3.3 Idee

1. Die Zahl $b = 10$ ist die Basis des *dekadischen Stellenwertsystems*.

2. Die Zahlen

$$\begin{array}{rcl} 10^0 & = & 1 \\ 10^1 & = & 10 \\ 10^2 & = & 10 \cdot 10 \\ 10^3 & = & 10 \cdot 10 \cdot 10 \\ & \vdots & \\ 10^i & = & \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \cdots \cdot 10}_{i \text{ Faktoren}} \\ & \vdots & \end{array}$$

   heißen *Stufenzahlen* des dekadischen Stellenwertsystems.

3. Man benötigt dann zehn *Ziffern*, die den Zahlen von 0 bis 9 ein-eindeutig zugeordnet sind:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9.$$

3.3.4 Satz über die Bündel-Darstellung im dekadischen Stellenwertsystem

Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es — umkehrbar eindeutig — eine *dekadische Bündel-Darstellung*. Das ist ein Rechenausdruck aus s Ziffern a_i und s Stufenzahlen 10^i

$$n \quad = \quad a_{s-1} \cdot 10^{s-1} + a_{s-2} \cdot 10^{s-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \qquad (*)$$

Da dieser Rechenausdruck lang und umständlich handzuhaben ist, schreibt man nur die Ziffern nebeneinander hin:

$$n \quad = \quad a_{s-1}\, a_{s-2}\, \ldots\, a_2\, a_1\, a_0 \qquad (**)$$

Beispiel mit $s = 6$:

$$572\,391 \quad = \quad 5 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0.$$

3.3.5 Fachbegriffe

Im Zusammenhang mit diesem Satz gibt es noch die folgenden Fachbegriffe:

- Der Ausdruck auf der rechten Seite von $(*)$ heißt *Stufenzahldarstellung* von n.
- Der Ausdruck auf der rechten Seite von $(**)$ heißt (dekadische) *Zifferndarstellung* von n. Es handelt sich um eine *s–stellige* Zahl.
- Man sagt, dass die Zahl n an der 10^i–*Stelle* (oder *Position*) die Ziffer a_i hat.
- Damit längere Ziffernfolgen ($\sim$ größere Zahlen) besser erkannt werden können, bieten sich verschiedene optische Unterstützungen an:
  - Von-Rechts-Dreier-Gruppierung: Das bringt evtl. Schwierigkeiten hervor wegen der Links-Rechts-Schreibrichtung und wegen des Kästchenpapiers.
  - Punkte-Setzung: Hier tritt eine Schwierigkeit auf, da bei der amerikanischen (= elektronischen) Schreibweise von Dezimalbrüchen Punkt und Komma vertauscht sind.

$$206\,572\,391,384 \quad = \quad 206.572.391,384 \quad = \quad 206,572,391.384$$

3.3.6 Repräsentation der dekadischen Stufenzahlen

Dafür gibt es auf den verschiedenen Repräsentationsebenen zahlreiche Alternativen, die bei der Erarbeitung und Durcharbeitung der Zahlenräume zum Einsatz kommen.

JGS	$\geq$ 3/4		1/2	
$\mathcal{E}$		(Karton)	Eierwabe	Ei, TT–Ball
$\mathcal{E}$		Packung	Päckchen	Papiertaschentuch
$\mathcal{E}$			Kette	Perle
$\mathcal{E}$			Turm	Steckwürfel
$\mathcal{E}$			Rechenstreifen	
$\mathcal{E}$			Cuisenaire–Stäbe	
$\mathcal{E}$			10 Ct–Münzen	1 Ct–Münze
$\mathcal{E}$			10 ∈–Schein	1 ∈–Münze
$\mathcal{E}$	Block	Platte*	Stange (Stab)	Würfel
			Klang	Ton
$\mathcal{I}$		$\square$	$\vert$	$\bullet$
$\mathcal{I}$		$\boxed{100}$	$\boxed{10}$	1
$\mathcal{I}$				
$\mathcal{S}$ Wort	Tausend(er)	Hundert(er)	Zehn(er)	Ein(s/er)
$\mathcal{S}$ Kürzel	T	H	Z	E
$\mathcal{S}$	$1\,000 = 10^3$	$100 = 10^2$	$10 = 10^1$	$1 = 10^0$

4 Dekadisches Zahlsystem — Große Zahlen

F14 T2

4.1 Beispiele

Zunächst gilt es, Beispiele für das Auftreten großer Zahlen im Alltagsleben aufzufinden.

4.1.1 Kardinalzahlaspekt

- Menschen in einem Dorf, Schule, Kleinstadt, Stadion, Großstadt, Land, Welt.
- Reiskörner, Erbsen, Linsen, Konfetti, Puzzleteile.
- Etwa 100 000 Haare auf dem Kopf.
- Halme in einem Stück Wiese, Bäume in einem Waldstück, Lebewesen in einem Gartenbeet,
- Buchstaben auf einer Seite, in einem Buch
- Kettenbriefe
- Ein Kind hat etwa 400 Wimpern, wie viele Wimpern gibt es im Klassenzimmer?
- Beispiele:
  - Astronomie: Die Milchstrasse enthält in etwa 100 000 000 000 Sterne.
  - Ein Kubikzentimeter Eisen besteht aus 10^{21} (1 Trilliarde) Eisenatomen.
  - Ein Glas Wasser $(0,3\,\text{kg})$ enthält in etwa 10^{25} (10 Quadrillionen) Wassermoleküle der Masse $18\text{u} \approx 3,0 \cdot 10^{-26}\,\text{kg}$.
- Klassische Geschichte von den Reiskörnern auf dem Schachbrett: Auf das erste Feld eines Schachbretts wird ein Reiskorn gelegt, auf das zweite Feld zwei, auf das dritte vier usw. Wieviele Reiskörner sind zum Schluß auf dem Schachbrett?

  Es sind: $2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$, also etwa $18\,\frac{1}{2}$ Trillionen Stück.

4.1.2 Maßzahlaspekt, Längen

- Entfernungen zweier Städte in Metern.
- Klassenzimmerlänge in Millimetern,
- Astronomische Entfernungen (in Kilometern)
- Beispiele:
  - Das Licht legt in einem Jahr $9,461$ Billionen km zurück.
  - Ein parsec $\approx 3,1 \cdot 10^{13}\,\text{km}$ (31 Billionen km = 31 Billiarden m)

4.1.3 Maßzahlaspekt, Geldwerte

- Preise von größeren Geräten, eines Computers, eines Autos, eines Hauses.
- Gehalt einer Erzieherin, einer Lehrerin, eines Fußballstars,...
- „Zahlen" aus dem Haushalt einer Gemeinde, Staatshaushalt, Bankenbilanz.
- Gewinne bei Glücksspielen, Lotto.

4.1.4 Maßzahlaspekt, Zeitspannen

- Lebensalter in Tagen: Ein Kind der 5. JGS ist in etwa 4 000 Tage alt. Das Alter der Lehrerin ist vielleicht 15 000 Tage.
- Dauer eines Tages in Sekunden: $1\,\mathrm{d} = 86\,400\,\mathrm{s}$.
- Wie viele Stunden hat ein Jahr? Wieviele Stunden im Jahr gehst Du zur Schule?
- Geschichte in Jahren: Karl der Große, Jesu Geburt, letzte Eiszeit, Auftreten der ersten Menschen, Entstehung der Alpen, Aussterben der Dinosaurier, ...

4.1.5 Maßzahlaspekt, Gewichte

- Gewicht eines Autos in kg.
- Gewichte von Menschen in g.
- Gewicht eines Schiffes in Tonnen.

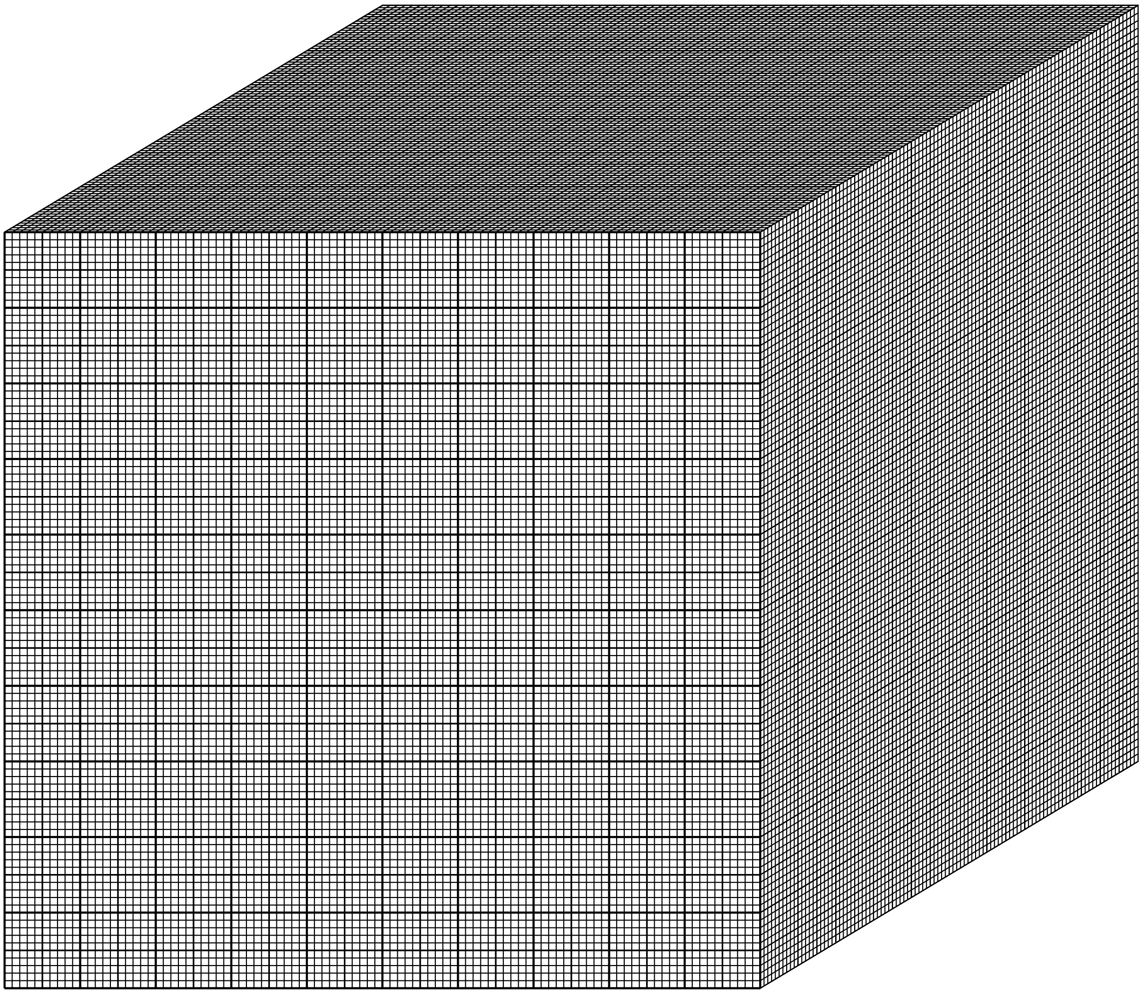
4.1.6 Maßzahlaspekt, Flächen

- Fläche des Klassenzimmers in cm–Quadraten.
- Fläche eines Parks, einer Stadt in m–Quadraten.
- Wieviele Kästchen befinden sich auf einem karierten DIN A4–Blatt? ($\approx 2\,436$).
- Ein $10\,\mathrm{cm} \times 10\,\mathrm{cm}$–Stück mm–Papier: Es enthält 10.000 $1\,\mathrm{mm} \times 1\,\mathrm{mm}$-Kästchen. Übungen: Es werden Kästchen in einem gegebenen Flächenstück gezählt;

  Fläche eines Papierblatts in mm–Quadraten.

4.1.7 Maßzahlaspekt, Volumina

- Ein Kubikdezimeterwürfel (1 Liter) hat den gleichen Inhalt wie 1 000 000 Kubikmillimeter.



4.1.8 Kodierungszahlaspekt

- Telefonnummern: Die gruppierte Schreibweise stimmt nicht mit der Standard–Dreiergruppierung für große Zahlen überein.

4.2 Methodische Hinweise

4.2.1 Zunächst

Bei einer Erweiterung des Zahlenraums über die Tausendergrenze hinaus werden auch ikonische Vorstellungen von den auftretenden Zahlen immer schwieriger.
Eine Hilfestellung bilden beispielsweise (wieder)

- der Zahlenstrahl: Teile werden ,,herausgezoomt".
- Flächen: Ein $10\,\mathrm{cm} \times 10\,\mathrm{cm}$–Stück mm-Papier: Es enthält 10.000 $1\,\mathrm{mm} \times 1\,\mathrm{mm}$-Kästchen. Übungen: Es werden Kästchen in einem gegebenen Flächenstück gezählt; es wird zu einer gegebenen Zahl unter 10.000 ein Flächenstück eingefärbt oder umrandet.

4.2.2 Symbolische Ebene

Bei der Durchdringung auf symbolischer Ebene: Den Schlüsselbegriff zur Er- und Durcharbeitung der größeren Zahlenräumen bildet aber — wie gehabt — das Stellenwertsystem. Dabei treten neue Buchstaben–Bezeichnungen für Stufenzahlen auf

HT ZT T H Z E.

(Beachte, dass Kleinbuchstaben für die Nachkommastellen (Zehntel, Hundertstel,... ab JGS. 6) vorgesehen sind.

- Stellenwertordner — Bündelhaus
- Hören und Sprechen: Wort, Ziffernfolge, Stellenwertangabe.
- Lesen und Schreiben: Das Lesen und das fehlerfreie Schreiben von großen Zahlen wird wesentlich dadurch erleichtert, dass die Stellen in Dreier–Gruppen abgesetzt werden. Diese Absetzung kann durch
  - Punkte (Verwechslung mit dem amerikanischen Dezimalpunkt),
  - durch dezente senkrechte Striche oder
  - durch kleine Lücken (sie können nicht nachträglich angebracht werden).

  erfolgen.

Ordinalzahlaspekt: Größenvergleich, Nachbarschaftszahlen, Vorgänger und Nachfolger (auch bzgl. höherer Stufenzahlen).
Ideen zu Medien:

- Tageszeitung oder Zeitschriften.
- Statistiken.
- Quartett–Spiele.

4.3 Große Stufenzahlen

4.3.1 Namen

Für die immer größeren Stufenzahlen gibt es spezielle Namen:

	1	$=$	10^0	Eins	
	10	$=$	10^1	Zehn	
	100	$=$	10^2	Hundert	
	$1\,000$	$=$	10^3	Tausend	
	$1\,000\,000$	$=$	10^6	Million	
	$1\,000\,000\,000$	$=$	10^9	Milliarde	(= billion, engl.)
↑ mittelschulrelevant	$1\,000\,000\,000\,000$	$=$	10^{12}	Billion	
↓ nicht relevant ⊖	$1\,000\,000\,000\,000\,000$	$=$	10^{15}	Billiarde	
	$1\,000\,000\,000\,000\,000\,000$	$=$	10^{18}	Trillion	
	$1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$	$=$	10^{21}	Trilliarde	
		$=$	10^{24}	Quadrillion	
		$=$	10^{27}	Quadrilliarde	
		$=$	10^{30}	Quintillion	
		$=$	10^{100}	Gogol → Google	
		$=$	10^{600}	Zentillion	

4.3.2 Beispiel

$$\underbrace{5\,0\,5}_{\text{Trilliarden}}\ \underbrace{8\,7\,5}_{\text{Trillionnen}}\ \underbrace{3\,0\,2}_{\text{Billiarden}}\ \underbrace{4\,8\,6}_{\text{Billionen}}\ \underbrace{0\,1\,0}_{\text{Milliarden}}\ \underbrace{9\,2\,2}_{\text{Millionen}}\ \underbrace{7\,7\,4}_{\text{Tausend}}\ \underbrace{1\,3\,5}_{\text{Einer}}$$

Lesen großer Zahlen: Teile die Zahlen von rechts in Dreiergruppen und lies sie dann von links.

Schreiben großer Zahlen: Beginne von links, bei fehlenden Stufenzahlen müssen Nullen gesetzt werden.

4.3.3 Exkurs: Zehnerpotenzen, Stufenzahlen und Vorsatzzeichen ⊖

Potenz =	Faktor	gelesen als	Vorsatz-zeichen	gelesen als
$10^{12} =$	$1.000.000.000.000$	Billion	T	Tera
$10^{9} =$	$1.000.000.000$	Milliarde (engl: billion)	G	Giga
$10^{6} =$	$1.000.000$	Million	M	Mega
$10^{3} =$	1.000	Tausend	k	Kilo
$10^{2} =$	100	Hundert	h	Hekto
$10^{1} =$	10	Zehn	da	Deka
$10^{0} =$	1	(Ein)		
$10^{-1} = \frac{1}{10} =$	$0,1$	Zehntel	d	Dezi
$10^{-2} = \frac{1}{100} =$	$0,01$	Hundertstel	c	Zenti
$10^{-3} = \frac{1}{1.000} =$	$0,001$	Tausendstel	m	Milli
$10^{-6} = \frac{1}{1.000.000} =$	$0,000\,001$	Millionstel	μ	Mikro
$10^{-9} = \frac{1}{1.000.000.000} =$	$0,000\,000\,001$	Milliardstel	n	Nano
$10^{-12} = \frac{1}{1.000.000.000.000} =$	$0,000\,000\,000\,001$	Billionstel	p	Piko

- Der Exponent in der Zehnerpotenz gibt die Position der 1 in der Dezimalbruchentwicklung an, wenn man der Einerstelle die Position 1 zuweist.
- Die Einsicht, dass das Wort ,,Kilo" immer einen Vervielfachungsfaktor von Tausend bedeutet, sollte gefördert werden.

  Kilogramm, Kilometer, Kilobyte, Kilowatt, Kilovolt, Kilokalorie, Kilojoule.

- Auch das Kürzel $Y2K$ stellt eine (typisch amerikanische) Verwendung dieser Vorsilbe dar: ,,Year 2 Kilo" = Jahr Zweitausend.
- Vorsilben wie ,,Giga" oder ,,Mega" treten zur Zeit in die Alltagssprache ein, da viele Kenndaten von Computerkomponenten mit diesen Vorsilben beschrieben werden.
- Die unterschiedliche Verwendung des Wortes billion in verschiedenen Sprachen

  $$\text{Eine Billion} \quad = \quad 10^{12} \neq 10^{9} \quad = \quad \text{one billion}$$

  hat historische Wurzeln. Vgl. Wikipedia ,,Billion".

4.4 Runden

LP 5.1

F14 T2

H11 T3

H93 T3

4.4.1 Einstieg (in die Unterrichtseinheit)

Herr Haar nimmt alles ganz genau:

- Sein Auto wiegt 1 288 365 g
- Er ist 1763 mm groß.
- Er verdient im Jahr 4 102 586 Ct.
- Er arbeitet in einer Woche 135 278 s.
- In seinem Garten pflückt er 8 736 Johannisbeeren.

Oft ist es sinnlos oder unmöglich, Zahlen oder Größen ganz präzise anzugeben. Man muss auf– oder abrunden.

4.4.2 Die 5/4–Rundungsregel

Eine Zahl wird bzgl. der X–Stelle (X = Z,H,T,ZT,HT,...) auf die nächst–benachbarte reine X–Zahl $\begin{cases}\text{aufgerundet}\\ \text{abgerundet}\end{cases}$, wenn an der $\frac{X}{10}$–Stellenposition (d.h. rechts von der X–Stellenposition) eine der Ziffern $\begin{cases}9,8,7,6,\mathbf{5}\\ 0,1,2,3,\mathbf{4}\end{cases}$ auftritt.

4.4.3 Hinweise

- Der mathematische Gehalt eines Rundungsergebnisses besteht darin, dass es eine bestimmte Schreibweise für ein Intervall darstellt. So steht beispielsweise die nach einer T–Rundung auftretende Zahl 7 000 für das Zahlenintervall $[6\,500, 7\,499[$.
- Um die Tatsache, dass es sich bei einer Zahl (z.B. 7 000) um ein Rundungsergebnis handelt, werden andere Arten der Darstellung benutzt:
  - Ausschreiben der Stufenzahl: 7 Tausend
  - Abkürzung der Stufenzahl: 7 T, 7 Tsd.
  - Wissenschaftiche Zahldarstellung $7 \cdot 10^3$
  - Bei Größen: 7 000 € = 7 TEU, 7 000 g = 7 kg, 7 000 kg = 7 t.
- Dem Runden kommt in der weiteren Schullaufbahn (bei der Benutzung von Dezimalbrüchen und beim Rechnen in den Naturwissenschaften) eine zunehmend wichtige Bedeutung zu.

4.4.4 Warum Runden?

- Wenn Zahlen zur Beschreibung der „Welt” verwendet werden, ist man an dem geeigneten Informationsgehalt interessiert.
- Gerundete Zahlen kann man leichter im Gedächtnis behalten, sie leichter anderen mitteilen.
- Gerundete Zahlen liegen dem Überschlagsrechnen zugrunde.
- Das alte Paradigma über die Mathematik als die „exakteste” Wissenschaft begünstigt Negativ-Einstellungen. Der freie, flexible und kreative Umgang mit Zahlen sollte angestrebt werden.
- Messergebnisse (Naturwissenschaften, Volkswirtschaft, Empirische Forschung) sind prinzipiell gar nicht durch exakte (reelle) Zahlen angebbar.
- Kann man die Bildungsstandards mit diesen Gesichtspunkten verbinden?
- Im Geschäftsleben und im betriebswirtschaftlichen Rechnungswesen ist es kontraproduktiv, zu viel zu runden.
- Runden bei der Notenbildung?

4.4.5 Beispiele

- Infolge internationaler Festlegungen von Entfernungs- und Zeitmessung hat die Lichtgeschwindigkeit den exakten Wert

$$c = 299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

- Da die Kreiszahl π unendlich viele Nachkommastellen ohne Wiederholung hat, kann sie prinzipiell nur als gerundeter Wert angegeben werden.

$$\pi \approx 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211 7\ldots$$

- Meine auf ganze Milliarden gerundete Handy-Nummer ist 015 000 000 000.

4.4.6 Besonderheiten beim Rechnen mit Rundungsergebnissen

- Ein zweimaliges Runden bzgl. verschiedener Stufen führt zu einem anderen Ergebnis, als wenn man gleich bzgl. der größeren dieser Stufenzahlen rundet.

$$\begin{aligned} 24\,758 &\overset{\mathrm{T}}{\rightsquigarrow} 25\,000 \overset{\mathrm{ZT}}{\rightsquigarrow} 30\,000. \\ 24\,758 &\phantom{\overset{\mathrm{T}}{\rightsquigarrow} 25\,000} \overset{\mathrm{ZT}}{\rightsquigarrow} 20\,000. \end{aligned}$$

- Das Rechnen mit Rundungsergebnissen unterliegt ganz eigenen Gesetzen. Wie die Beispiele

$$\begin{aligned} 6\,382 + 2\,453 &= 8\,835 \overset{\text{T}}{\rightsquigarrow} 9\,000 \\ 6\,382 + 2\,453 &\overset{\text{T}}{\rightsquigarrow} 6\,000 + 2\,000 = 8\,000, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 150 \cdot 150 &= 22\,500 \overset{\text{H}}{\rightsquigarrow} 22\,500, \\ 150 \cdot 150 &\overset{\text{H}}{\rightsquigarrow} 200 \cdot 200 = 40\,000 \end{aligned}$$

  zeigen, sind Rundungs- und Rechenoperationen nicht einfach vertauschbar.

4.5 Überschlagsrechnen

- Angesichts der zunehmenden Bedeutung des Taschenrechners kommt dem begleitend–reflektierten Überschlagsrechnen eine größere Bedeutung zu. Die Notwendigkeit dazu ist für Schüler schwer einsichtig: Der Taschenrechner ist exakt, das Überschlagsrechnen ist ,,grob bis fehlerhaft".

- Das obige Beispiel der Rundung und Multiplikation zeigt, dass das Überschlagsrechnen auch Tücken hat. Insbesondere beim überschlagsmäßigen Multiplizieren kann man nicht erwarten, das (richtige) gerundete Ergebnis zu erhalten. Man erhält im allgemeinen nur die richtige Größenordnung.

- Grundsätzlich sollten die Operanden bei einer Addition oder Multiplikation gegensinnig, bei einer Subtraktion oder Division gleichsinnig gerundet werden. In dem Beispiel oben also:

$$150 \cdot 150 \overset{\text{H}}{\rightsquigarrow} 100 \cdot 200 = 20\,000.$$

- Das Überschlagsrechnen erfordert insbesondere ein Beherrschen des Rechnens mit Stufenzahlen ($100 \cdot 100 = 10\,000$), das heißt ein Rechnen mit den Endnull–Anzahlen. Hier treten typische Fehler auf:

$$6 \cdot 7 = 42 \quad \Longrightarrow \quad 60 \cdot 70 = 420, \qquad\qquad 125\,000 : 5\,000 = 25\,000.$$

- Das Überschlagsrechnen entspricht grundsätzlich nicht der sonst stark strapazierten Attribuierung der Mathematik als exakt. Dies führt auch dazu, dass Schüler und Schülerinnen das Runden eher zu vorsichtig handhaben oder als ,,unmathematisch" ansehen.

- Das Überschlagsrechnen ist bei der Division durch mehrstellige Divisoren hilfreich.

4.6 Schätzen

In Abschnitt 2.2 wurde dargelegt, dass Zahlen in der Wirklichkeit unter verschiedensten Aspekten auftreten.

4.6.1 Zahlerfassung

Die Erfassung einer in der Wirklichkeit auftretenden Zahl durch eine mathematische Zahl

$$\begin{array}{c}\text{Zahl}\\ \text{in der Wirklichkeit}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{c}\text{Zahl}\\ \text{in der Mathematik}\end{array}$$

geschieht mittels

- Zählen (Kardinal-/Ordinal-/Zählzahlaspekt)
- Messen (Maßzahlaspekt) oder
- überschlagsmäßigem Bestimmen (Rechenzahlaspekt).

4.6.2 Problem

Diese Erfassung könnte sehr aufwändig oder unmöglich werden, da

- die Zahlen groß werden,
- genügend genaue Messgeräte nicht zur Verfügung stehen oder
- die Zahl gar nicht zugänglich ist.

4.6.3 Lösung

Man behilft sich mit dem Schätzen: Es wird nicht die exakte Zahl erfasst, sondern ihre relevanten Eigenschaften:

- ein Zahlenintervall, in dem sie enthalten ist,
- die Größenordnung

Die Tatsache, dass geschätzt wurde, wird dann sprachlich durch Worte wie

etwa, ungefähr, circa, bis auf XY genau, schätzungsweise, um

zum Ausdruck gebracht.

4.6.4 Beispiele

- Im Maßkrug ist ungefähr 1 Liter Bier drin.
- Für die Renovierung der $87\,\mathrm{m}^2$-Wohnung werden so um $3\,\frac{1}{2}$ Eimer Silikatfarbe gebraucht.
- In unserer Heimatgalaxie, der Milchstraße, gibt es etwa hundert Milliarden Sterne.
- Ich habe neulich mein Handy gewogen. Nachdem ich 30 Apps heruntergeladen hatte, war es ein Gramm schwerer.

- Mein Koffer für die USA-Reise hat um die 20 kg.
- In der Herde, in der ich neulich mit meinem Mini feststeckte, waren bestimmt 150 Schafe.
- Haben Sie schon eine Milliarde $\heartsuit$-Schläge erlebt?
- Wenn im Backrezept 200 g Zucker steht, dann schütt' ich den halt gefühlsmäßig einige Sekunden aus der Packung.

4.7 Schaubilder

LP 5.1

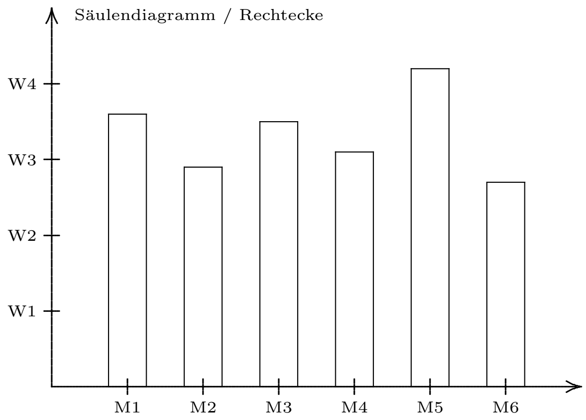
Zahlen, vor allem große Zahlen, kann man überblickartig in Schaubildern darstellen.

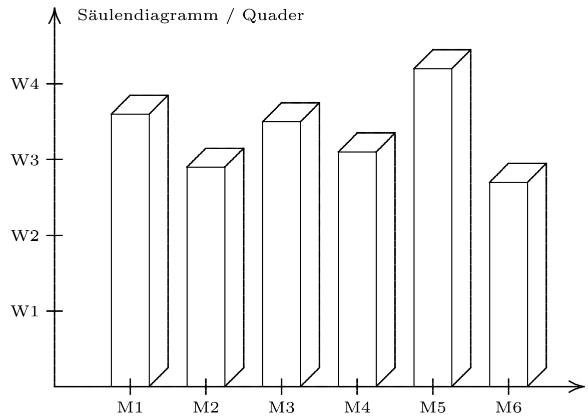
- Säulendiagramm
  - Die Daten werden durch vertikal stehende Rechtecke dargestellt. Auf der Rechtswertachse sind die Merkmale aufgelistet, auf der Hochwertachse sind die Werte gekennzeichnet.
  - Anstelle der Rechtecke können auch Linien, Quader bzw. Zylinder in perspektivischer Darstellung benutzt werden.
- Balkendiagramm
  - Die Daten werden durch horizontal liegende Rechtecke dargestellt. Auf der Hochwertachse sind die Merkmale gekennzeichnet, auf der Rechtswertachse sind die Werte angetragen.
  - Anstelle der Rechtecke können auch Strecken (Striche) oder Quader bzw. Zylinder in perspektivischer Darstellung benutzt werden.
- Kreisdiagramm oder Tortendiagramm. Die Merkmale werden verschiedenen Sektoren eines Kreises oder (perspektivisch) den Stücken einer stilisierten Torte zugeordnet. Die Winkel am Mittelpunkt entsprechen den Werten.
- Liniendiagramm: Die den Merkmalen und Werten zugeordneten Punkte werden durch geradlinige oder geeignet krummlinige Kurven verbunden.
- Zusätzlich: Die Diagramme werden durch bildhafte Elemente (Icons, Piktogramme) angereichert.

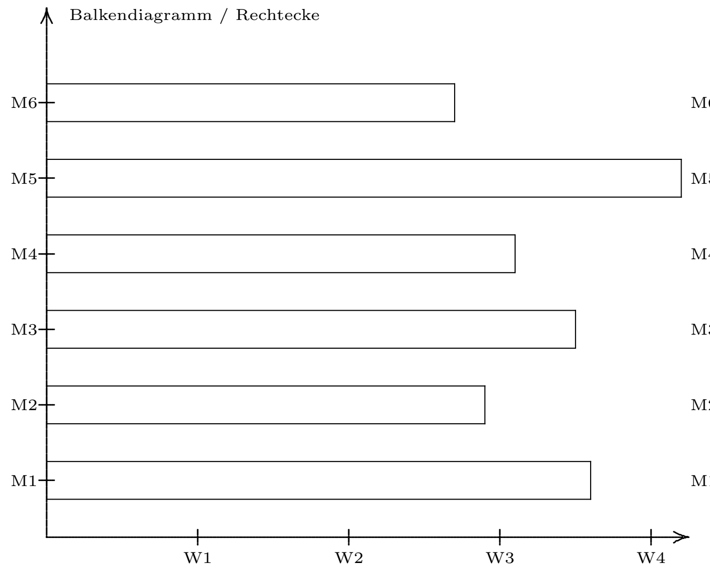
4.7.1 Beispiel

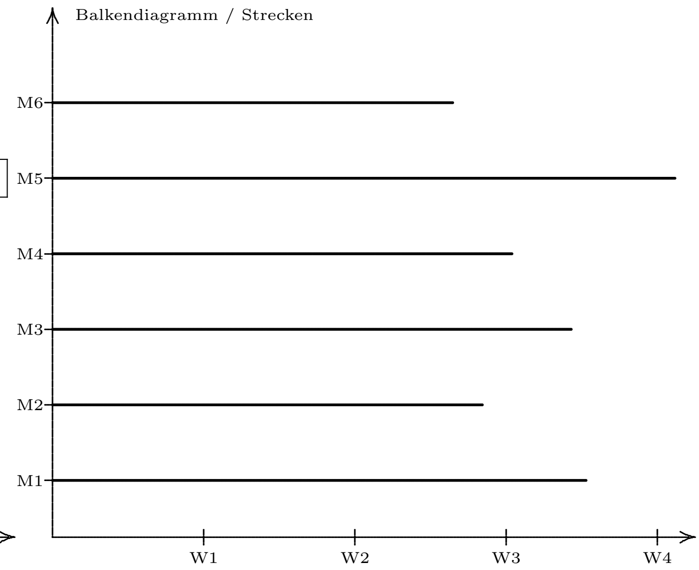
Ein primitives Beispiel, das den Schaubildern auf der nächsten Seite zugrundeliegen könnte, ist eine Umfrage über Lieblingszahlen.

- Das Merkmal M1 bedeutet ,,Lieblingszahl 1".
- Der Wert W1 gibt an, wie viele mit dem Merkmal 1, also ,,Lieblingszahl 1" geantwortet haben.
- entsprechend für die anderen Zahlen $2 \ldots 6$.

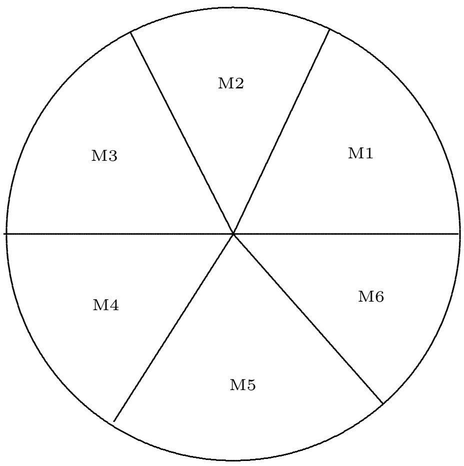




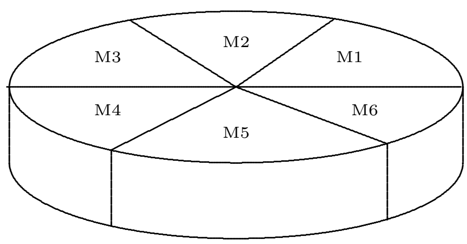


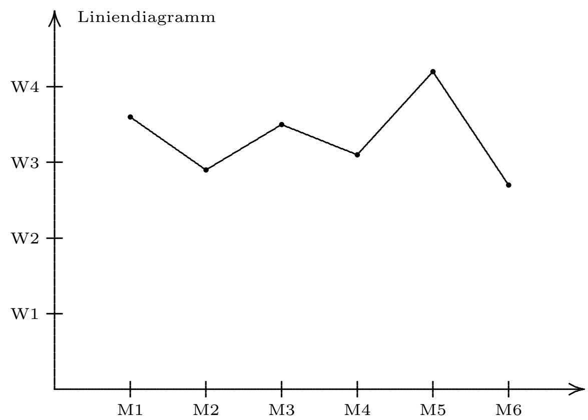


Kreisdiagramm



Tortendiagramm





M? : Abgefragtes Merkmal

W? : Ermittelter Wert

5 Rechnen mit natürlichen Zahlen

M5 1.2

Den Grundrechenarten können bzgl. der Zahlaspekte verschiedene Grundauffassungen zugrundegelegt werden, die dann durch verschiedenste Sachsituationen repräsentiert werden.

5.1 Repräsentationen der Addition

5.1.1 Repräsentationen zur Addition

- Kardinalzahlaspekt: Man vereinigt *disjunkte (elementfremde)* Mengen und legt das Augenmerk auf die Anzahl der Elemente.
- Zählzahlaspekt: Ausgehend von einer Zahl n wird um m Schritte weiter gezählt.
- Operatoraspekt: Eine Zahl ist gegeben, es wird dann eine weitere „dazugezählt".
- Längenaspekt: Aneinanderlegen von Objekten „mit Länge".
- Gewichte: Zusammenfügen von Objekten „mit Gewicht".
- Zeitspannen: Nacheinander-Ablaufen von „Vorgängen mit Zeitdauer".

5.2 Repräsentationen der Subtraktion

5.2.1 Grundauffassungen zur Subtraktion

- Kardinalzahlaspekt/Abziehauffassung: Von einer Menge wird eine Teilmenge herausgenommen. Wieviele Elemente enthält die Restmenge?

  In Alltagssituationen wird diese Repräsentation beschrieben mit Verben wie:

  > Wegnehmen oder Abziehen, Aussteigen, Wegfliegen bzw. -fahren, Umwerfen, Verkleinern bzw. Vermindern, Aufessen.

- Kardinalzahlaspekt/Ergänzungsauffassung: Eine Menge wird zu einer Obermenge ergänzt. Wieviele Elemente müssen hinzugefügt werden?

  In Alltagssituationen wird diese Repräsentation beschrieben mit Verben wie:

  > Ergänzen, Auffüllen, Noch-Fehlen, Zurückgeben, Ausgleichen.

- Operatoraspekt: Die Subtraktion wird als Umkehroperation der Addition gesehen. Das Wegnehmen macht das Dazugeben wieder rückgängig.

5.2.2 Repräsentationen der Subtraktion

- Zählzahlaspekt: Ausgehend von einer Zahl n wird um m Schritte rückwärts gezählt.
- Längenaspekt: Aneinanderlegen von Objekten „mit Länge". Um wie viel überragt das eine Objekt das andere?
- Zeitspannen: Nebeneinander-Ablaufen von „Vorgängen mit Zeitdauer". Es ergibt sich ein Zeitunterschied.

- Maßzahlaspekt/Skalenwerte: Bestimmung von Unterschieden (Temperaturen, Pegelstände).

5.3 Repräsentationen der Multiplikation

5.3.1 Grundauffassungen zur Multiplikation

- Zeitlich–sukzessives wiederholtes Addieren. Es werden zeitlich nacheinander jeweils gleichviele Dinge bereitgestellt.
  - Der Opa nimmt früh, mittags und abends je zwei Tabletten.
  - Die Oma bringt am Sonntag und Mittwoch je drei Überraschungseier mit.
  - Der Hausmeister transportiert viermal je drei Tische in die Aula, wo sie beim Projekttag gebraucht werden.
  - Clara bringt dreimal nacheinander vier Vergissmeinnicht–Pflanzen in den Garten, wo sie von ihrer Mutter in das neue Beet gesetzt werden.
- Räumlich–simultanes wiederholtes Addieren. Es werden gleichzeitig nebeneinander jeweils gleichviele Dinge bereitgestellt.
  - Opa legt in die drei Fächer (für morgens, mittags und abends) eines Medikamenten–Kästchens jeweils zwei Tabletten, die er am nächsten Tag einnehmen muss.
  - Die Oma bringt für jedes der zwei Geschwister drei Ü–Eier mit.
  - Der Hausmeister ordnet die Tische in drei Reihen zu je vier Tischen an.
  - Claras Mutter setzt die Vergissmeinnicht–Pflanzen in Vierergruppen an drei Stellen im Blumenbeet ein.
- Kombinatorischer Aspekt. Wird im nächsten Abschnitt 5.3.2 erläutert.
- Operatoraspekt: Wird im übernächsten Abschnitt 5.3.3 erläutert.

5.3.2 Kombinatorischer Aspekt

Problem: Stellen Sie sich zwei Mengen der Mächtigkeit a bzw. b vor. Wie erhält man daraus eine Menge der Mächtigkeit $a \cdot b$?

Antwort: Sind zwei Mengen A und B gegeben, so bezeichnet man die Menge der geordneten Paare

$$A \times B \ := \ \left\{ (a,b) \middle| a \in A, \, b \in B \right\}$$

als *kartesisches* Produkt der Mengen A und B.

Ist a die Mächtigkeit der Menge A und b die der Menge B, so hat $A \times B$ die Mächtigkeit $a \cdot b$.

- René hat Hosen in den Farben R, G, B und Pullis in den Farben r, g, b, w. Wieviele Möglichkeiten (Kombinationen) gibt es für ihn, sich anzuziehen?
  Antwort: Das kartesische Produkt der Menge der Hosenfarben $\mathcal{H} = \{R; G; B\}$ und der der Pullifarben $\mathcal{P} = \{r; g; b; w\}$ ist

$$\mathcal{H} \times \mathcal{P} = \Big\{(R,r); (R,g); (R,b); (R,w); (G,r); (G,g); (G,b); (G,w); \\ (B,r); (B,g); (B,b); (B,w)\Big\}.$$

  Es enthält $3 \cdot 4 = 12$ Elemente.

- Tanznachmittag: Wieviele verschiedene Tanzpaare können bei Anwesenheit von 14 Herren und 12 Damen gebildet werden?

- Ein Satz ,,Logische Blöcke" enthält Plättchen mit den Eigenschaften ,,rot, grün, blau, gelb" bzw. ,,quadratisch, dreieckig, kreisrund". Wieviele verschiedene Plättchen kann es geben?

- Beim Schul–Sommerfest kann man zwischen 13 verschiedenen Kuchensorten und 6 verschiedenen Getränken wählen. Wieviele verschiedene Bestellungen sind möglich?

Für die Unterrichtspraxis ist der kombinatorische Aspekt weniger geeignet, da er nicht den Alltagsauffassungen von Multiplikation entgegenkommt.

Er ist außerdem zu abstrakt, da im allgemeinen nicht alle Kombinationen gleichzeitig realisiert, sondern nur simultan gedacht werden können.

5.3.3 Operatoraspekt

Es wird der Aspekt des ,,Vervielfachens" betont: Eine gegebene Zahl (= Multiplikand) wird mit einem Faktor (Multiplikator) vervielfacht.

$$\begin{array}{ccc} 13 & \xrightarrow{\quad \cdot 7 \quad} & 91 \\ \text{Multiplikand} & \text{Multiplikator} & \text{Ergebnis} \end{array}$$

Die Multiplikation von negativen Zahlen (5./6. JGS) oder Bruchzahlen (6. JGS), aber auch schon die Multiplikation mit Null (2. JGS), lässt sich nicht auf die wiederholte Addition oder auf den kombinatorischen Aspekt gründen. Der Operatoraspekt wird wichtig.

5.4 Repräsentationen der Division

5.4.1 Grundauffassungen zur Division

Den Repräsentationen der Division liegen die folgenden Grundauffassungen zugrunde. H17 T2 A2

- Aufteilen und Verteilen
- Messen und Teilen
- Sukzessives Wegnehmen
- Operatoraspekt

5.4.2 Aufteilen und Verteilen

AUFTEILEN	VERTEILEN

Es liegt folgende allgemein formulierte Situation zugrunde ($\mathcal{E}$):

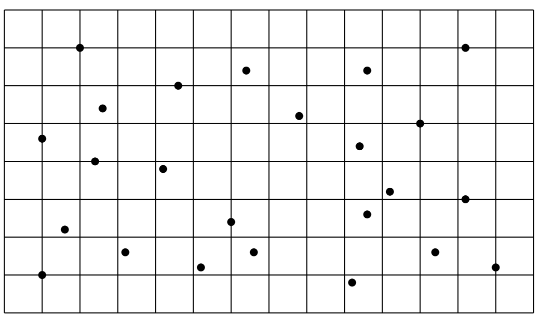
Es werden	Es werden
n Dinge in m Dinge umfassende Portionen	n Dinge in m Portionen
aufgeteilt. Wie viele	(gerecht) **verteilt**. Wie viele
x Portionen	x Dinge
entstehen dabei?	umfasst eine Portion?

Beispiele für Dinge: Datteln, Dickmanns, DM–Münzen,...
Beispiele für Portionen: Päckchen, Pakete, Packungen, Personen,...

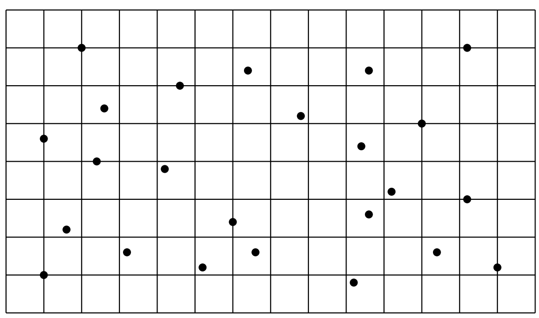
Als konkrete Beispielaufgabe sei genannt:

Es werden 24 Mandarinen in Netze zu je 6 Mandarinen aufgeteilt. Wie viele Netze erhält man?	Es werden 24 Mandarinen an 6 Kinder verteilt? Wie viele Mandarinen erhält jedes der Kinder?

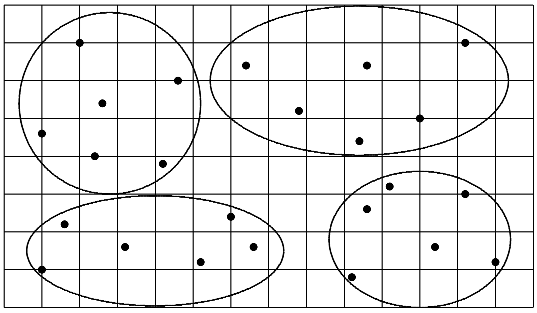
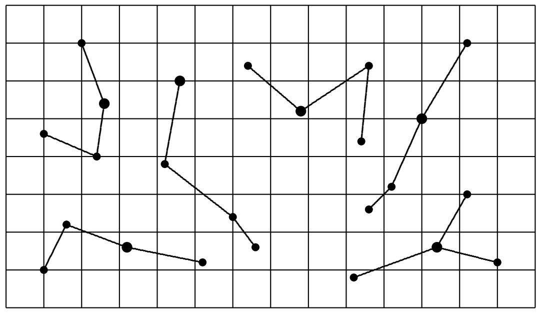
Graphisch ($\mathcal{I}$) lässt sich diese Situation beispielsweise so im *Venn–Diagramm* repräsentieren:



Kreise jeweils 6 Dinge ein!
Wie viele Kreise entstehen?



Zeichne 6 gleich große Sternbilder!
Wie viele Sterne sind jeweils verbunden?

	
Es entstehen 4 Kreise! (Hier eigentlich Ellipsen!)	Es sind immer 4 Sterne verbunden!

Mathematisch korrekt ($\mathcal{S}$) lässt sich diese Sachsituation mit Hilfe eines ,,Bezeichnungs–Bruchrechnens" wie folgt fassen:

n Dinge $:$ $m \dfrac{\text{Dinge}}{\text{Portion}}$ $=$ x Portionen	n Dinge $:$ m Portionen $=$ $x \dfrac{\text{Dinge}}{\text{Portion}}$

Beim Weglassen der Bezeichnung ,,Portion(en)" entsteht die stärker grundschulgemäße Aussage

n Dinge $:$ m Dinge $=$ x	n Dinge $:$ m $=$ x Dinge

Diese Verkürzung führt gelegentlich zu einer Verwirrung bzw. Begründungsnot angesichts der Frage, warum beim Aufteilen in 6er Portionen bzw. bei der Verteilung von 24 Dingen an 6 Kinder nicht

24 Dinge : 6 Dinge = 4 Portionen	24 Dinge : 6 Kinder = 4 Dinge

geschrieben werden darf. (Dieses Problem werden wir beim Sachrechnen, wo die Dinge durch Einheiten (€, m, kg) ersetzt sind, noch einmal diskutieren.)

Lässt man auch die Angabe über die Dinge weg, so entsteht die Gleichung

$24 : 6 = 4$	$24 : 6 = 4,$

aus der die Sachsituation nicht mehr ablesbar ist.

5.4.3 Messen und Teilen

Das Dividieren von Größen weist eine Analogie zu der Aufteil-Verteil-Paarung auf. Man spricht vom

Messen	Teilen
$24\,\text{m} : 6\,\text{m} = 4$	$24\,\text{m} : 6 = 4\,\text{m}$
Größe : Größe = Zahl	Größe : Zahl = Größe.

Es liegt also ein Bezugnahme zum Maßzahlaspekt vor.

5.4.4 Sukzessives Wegnehmen

Der Aspekt des sukzessiven Wegnehmens greift die Idee auf, eine Aufteil-Sachsituation bzw. die ihr zugeordnete Divisions-Aufgabe durch wiederholte Subtraktion zu bearbeiten.

Anhand des obigen Beispiels des Aufteilens von 24 Mandarinen auf 6er-Portionen geschieht dies so:

$$\begin{array}{llllllll} 24-6 & = & 18 & & & & & \\ & & 18-6 & = & 12 & & & \\ & & & & 12-6 & = & 6 & \\ & & & & & & 6-6 & = \quad 0 \end{array}$$

Es wurde viermal jeweils eine 6er-Portion weggenommen. Also ist $24 : 6 = 4$

5.4.5 Operatoraspekt

Er greift die fachliche Definition der Division als Umkehr-Operation der Multiplikation auf. Bei der Division wird der Platzhalter in der Umkehr-Multiplikation ermittelt:

$$91 \xrightarrow{\;:7\;} \square \qquad \text{ist gleichbedeutend mit} \qquad \square \xrightarrow{\;\cdot 7\;} 91$$

5.5 Fachwörter bei den Grundrechenarten

- Addition — Addieren zu (Zusammenzählen)

$$\underbrace{\overbrace{12}^{\text{1. Summand}} + \overbrace{4}^{\text{2. Summand}}}_{\text{Summe}} = \overbrace{16}^{\text{Summenwert}}$$

- Subtraktion — Subtrahieren (Abziehen, Wegnehmen) von

$$\underbrace{\overbrace{12}^{\text{Minuend}} - \overbrace{4}^{\text{Subtrahend}}}_{\text{Differenz}} = \overbrace{8}^{\text{Differenzwert}}$$

- Multiplikation — Multiplizieren (Malnehmen) mit

$$\underbrace{\overbrace{12}^{\text{1. Faktor}} \cdot \overbrace{4}^{\text{2. Faktor}}}_{\text{Produkt}} = \overbrace{48}^{\text{Produktwert}}$$

- Division — Dividieren (Teilen) durch

$$\underbrace{\overbrace{12}^{\text{Dividend}} : \overbrace{4}^{\text{Divisor}}}_{\text{Quotient}} = \overbrace{3}^{\text{Quotientenwert}}$$

- Potenz — Potenzieren („Hochnehmen") mit

$$\underbrace{\overbrace{12}^{\text{Basis/Grundzahl}} \uparrow \overbrace{4}^{\text{Exponent/Hochzahl}}}_{\text{Potenz}} = \overbrace{20736}^{\text{Potenzwert}}$$

5.6 Rechengesetze

5.6.1 Verknüpfung

Es sei M eine Menge, beispielsweise einer der Zahlbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Eine Abbildung, die zwei gegebenen Zahlen eine neue dritte Zahl zuordnet, heißt *Verknüpfung* auf M.

Mathematisch kann man dies ausdrücken als Funktion, die auf einem kartesischen Produkt der Menge M mit sich selbst definiert ist.

$$v : \begin{cases} M \times M & \to & M \\ (a, b) & \mapsto & c = a * b \end{cases}$$

5.6.2 Beispiele

Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzierung, ggT, kgV, min, max, Mittelwert, Schnitt- oder Vereinigungsmenge, logische Verknüpfungen.

5.6.3 Einführung

Das Rechnen in den verschiedenen Zahlbereichen unterliegt gewissen Regeln, die unter dem didaktischen Schlagwort *Rechengesetze* zusammengestellt sind.

Man unterscheidet:

- Rechengesetze als *Axiome*: Sie bilden das Fundament des Rechnens in dem aktuellen Zahlbereich. Die Axiome sollten ...
  - einerseits das gesamte Rechnen im Zahlbereich vollständig beinhalten und beschreiben,
  - andererseits voneinander unabhängig sein.

  Axiome können nicht innermathematisch bewiesen werden, in der Schule werden sie durch geometrische oder Sachsituationen plausibel gemacht.

  Die Axiome für das Rechnen in $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ sind in den folgenden Abschnitten zusammengestellt.

- Rechengesetze als *abgeleitete Regeln*: Sie sind aus den Axiomen heraus ableitbar. Das heißt, sie sind — bei vorausgesetzten Axiomen — mit Mitteln der Logik und Mengenlehre beweisbar.

- Formeln sind Rechengesetze, die vergleichsweise speziellere oder komplexere rechnerische Zusammenhänge erfassen. Der Begriff lässt sich fachmathematisch gar nicht und fachdidaktisch kaum von dem allgemeineren des „Rechengesetzes" abgrenzen.

In der Schulmathematik sind diese Gesichtspunkte nicht thematisierbar, da sie logisch–abstrakt sind. Rechengesetze sollen im Rahmen eines vorteilhaften Rechnens als praktisch erkannt werden. Man spricht dann auch von *Rechenvorteilen*.

5.6.4 Aufstellung von Rechengesetzen

Es sei M eine Menge, deren Elemente in diesem Zusammenhang Zahlen heißen.

Auf M sind zwei Operationen (= Verknüpfungen) definiert:

Die Addition $+ : M \times M \to M$

Die Multiplikation $\cdot : M \times M \to M$

5.6.5 Eigenschaften der Addition

$\boxed{\text{AG/A}}$ Assoziativgesetz der Addition
Für alle $a, b, c \in M$ gilt: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

$\boxed{\text{KG/A}}$ Kommutativgesetz der Addition
Für alle $a, b \in M$ gilt: $a + b = b + a$.

$\boxed{\text{NE/A}}$ Neutrales Element der Addition
Es gibt ein Element $0 \in M$, so dass für alle $a \in M$ gilt: $a + 0 = 0 + a = a$.

$\boxed{\text{EiL/A}}$ Eindeutigkeit „der Lösung" (EiL/A)
Zu beliebigen $a, b \in M$ gibt es **höchstens** ein Element $c \in M$, so dass gilt: $a + c = b$.

$\boxed{\text{ExL/A}}$ Existenz „der Lösung"
Zu beliebigen $a, b \in M$ gibt es **mindestens** ein Element $c \in M$, so dass gilt: $a + c = b$.

5.6.6 Eigenschaften der Multiplikation

$\boxed{\text{AG/M}}$ Assoziativgesetz der Multiplikation
Für alle $a, b, c \in M$ gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

$\boxed{\text{KG/M}}$ Kommutativgesetz der Multiplikation
Für alle $a, b \in M$ gilt: $a \cdot b = b \cdot a$.

$\boxed{\text{NE/M}}$ Neutrales Element der Multiplikation
Es gibt ein Element $1 \in M$, so dass für alle $a \in M$ gilt: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

$\boxed{\text{EiL/M}}$ Eindeutigkeit „der Lösung"
Zu beliebigen $a, b \in M$, $b \neq 0$, gibt es **höchstens** ein $c \in M$, so dass gilt: $a \cdot c = b$.

$\boxed{\text{ExL/M}}$ Existenz „der Lösung"
Zu beliebigen $a, b \in M$, $b \neq 0$, gibt es **mindestens** ein $c \in M$, so dass gilt: $a \cdot c = b$.

5.6.7 Eine Eigenschaft zu Addition und Multiplikation

$\boxed{\text{DG}}$ Distributivgesetz
Für alle $a, b, c \in M$ gilt: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

5.6.8 Bemerkungen

- Es gibt die alternativen Wörter

  Assoziativgesetz = Verbindungsgesetz = Verknüpfungsgesetz

  Kommutativgesetz = Vertauschungsgesetz

  Distributivgesetz = Verteilungsgesetz

- Die Assoziativgesetze ermöglichen es, dass man bei wiederholter Addition oder Multiplikation die Klammern einfach weglässt. Die Ausdrücke

  $$a + b + c, \qquad a \cdot b \cdot c$$

  sind auch ohne Klammersetzung sinnvoll.

- Es gibt keine extra Rechengesetze für Subtraktion oder Division, da diese Operationen einfach als zu Addition bzw. Multiplikation inverse Operationen definiert werden. Deshalb können alle für sie geltenden Rechengesetze aus den oben angegebenen hergeleitet werden.

- Das Distributivgesetz kann auch kompakter in der Form

  $$a \cdot (b + c) \quad = \quad a \cdot b + a \cdot c$$

  geschrieben werden. Vereinbart man die Punkt–vor–Strich–Konvention, so kann man sich viele Distributiv-Klammern sparen.

5.6.9 Nicht-Geltung

Die Bedeutung der Rechengesetze wird einsichtiger, wenn man sie im Hinblick auf Verknüpfungen diskutiert, bei denen sie eben nicht gelten.

- Bezeichnet man die Mittelwertbildung von zwei Zahlen a, b mit $a \perp b$, so gilt

  $$\begin{aligned} (4 \perp 8) \perp 16 &= 6 \perp 16 = 11 \\ 4 \perp (8 \perp 16) &= 4 \perp 12 = 8 \end{aligned}$$

  Es gibt also kein Assoziativgesetz bei der Zweier-Mittelwertbildung.

- Beim Potenzieren zweier Zahlen gilt

  $$\begin{aligned} (3^3)^3 &= 27^3 = 19\,683 \\ 3^{(3^3)} &= 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987 \end{aligned}$$

  Die Ergebnisse sind verschieden, obwohl sogar die beteiligten Zahlen übereinstimmen. Es gibt also kein Assoziativgesetz bei der Potenzierung.

- Wenn Sie einen Würfel aus der gleichen Stellung

  - erst nach vorne, dann nach rechts
  - erst nach rechts, dann nach vorne

  drehen, erhalten Sie verschiedene Endstellungen.

  Es gibt kein Kommutativgesetz in der ,,Menge der Würfeldrehungen".

- Das ,,umgekehrte" Distributivgesetz

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

  gilt nicht beim Rechnen mit Zahlen, wie man schon am Beispiel $a = b = c = 1$ sehen kann.

  Es gibt Verknüpfungen, bei denen das Distributivgesetz in beiden Versionen gilt.

6 Die Normalverfahren

6.1 Grundsätzliche Überlegungen

6.1.1 Einführung

Die Beispiele

276	+	83	432	−	79	12	·	19	504	:	6
419	+	352	874	−	587	53	·	84	2526	:	3
4082	+	1959	7653	−	3885	609	·	427	4233	:	17

zeigen, dass wegen der

- zunehmend großen Zahlenräume und des
- zunehmenden Schwierigkeitsgrads

die kognitiven Leistungen wie Gedächtnis, Konzentration oder lebendiger Gebrauch der elementaren Rechenfertigkeiten im allgemeinen nicht mehr ausreichen, Grundrechenarten allein ,,im Kopf" auszuführen.

6.1.2 Hilfsmittel

Es müssen Hilfsmittel hinzugezogen werden, die

- das Gedächtnis entlasten (Speicher–Notiz–Funktion): Auf dem Papier oder an der Tafel werden die Aufgabenstellung, Zwischenergebnisse, Merkzahlen notiert.
- eine Reduktion der Schwierigkeit erlauben (Vereinfachungs–Funktion): Eine tabellarische Darstellung der Aufgabe ermöglicht den Rückgriff auf
  - das Stellenwertsystem und
  - Rechengesetze

  und damit letztlich eine
  - Rückführung auf das Kopfrechnen innerhalb des kleinen Eins–Plus–Eins bzw. des kleinen Ein–Mal–Eins.
- Zugleich soll das Rechnen als Algorithmus ausgelegt sein, so dass es
  - schnell–ökonomisch,
  - sicher und wenig fehleranfällig wird,
  - dokumentiert ist und
  - alle Fälle erfasst.

6.1.3 Normalverfahren

H13 T1 A2

Diesem Ziel dienen die standardisierten „schriftlichen Rechenverfahren". Sie heißen im didaktischen Fachjargon *Normalverfahren* der Addition, Subtraktion, Multiplikation bzw. Division.

Die Normalverfahren sollen nicht als Höhepunkt oder Abschluss der Schularithmetik angesehen werden, vielmehr ist eine grundsätzliche Haltung

> „Soweit wie möglich im Kopf — sobald nötig schriftlich!"

— natürlich auch differenziert bezüglich der Schülerleistungsfähigkeit — eingenommen werden.

Die Tendenz, ein rechnerisches Problem zunächst daraufhin zu testen, ob es nicht auch im Kopf bearbeitet werden kann, ist stark zu fördern.

Es sollte nicht das schriftliche Rechnen (beispielsweise im Rahmen der Bearbeitung einer Sachaufgabe) erzwungen werden.

6.1.4 Flexibles Kopfrechnen

Sehen auch Sie selbst das flexible Kopfrechnen als Bestandteil einer grundschulmathematischen Ausbildung an! Vgl. Tutorium. Elementare Aufgaben, die Sie m.E. im Kopf bearbeiten können sollten oder deren Ergebnisse Sie auswendig wissen sollten, sind:

- Alle Grundrechenarten im Hunderterraum.
- Verdoppeln und Halbieren im Tausenderraum.
- Großes Ein–Mal–Eins: $1 \cdot 1$ bis $9 \cdot 19$.
- Multiplikation mit 5: Ersetze diese Operation durch die Multiplikation mit 10 und anschließendes Halbieren.
- Division durch 5: Verdoppeln und dann Zehnteln.
- Quadratzahlen bis 20 (besser noch: 32).
- Kubikzahlen bis 10.
- Hoch–Vier–Potenzen bis 5.
- Zweier–Potenzen bis 2^{10}.
- Primzahlzerlegungen bis 100.

6.1.5 Legitimation heute

Angesichts der Präsenz von Rechenelektronik (TR, PC, Schlau–Telefone,...) stellt sich insgesamt die Frage nach der Legitimation der schriftlichen Rechenverfahren. In jedem Fall tritt die Zielsetzung der Einschleifung (des Drills), wie sie früher wichtig und nachvollziehbar war, in den Hintergrund. Das Erlernen der schriftlichen Rechenverfahren wird zunehmend als zusätzliche Möglichkeit gesehen, die Einsicht in den Sinngehalt des Stellenwertsystems zu fördern.

6.1.6 Halbschriftliche Verfahren

Eine Zwischenstellung zwischen Kopfrechnen und schriftlichen Rechenverfahren nimmt das sogenannte *halbschriftliche Rechnen* ein.

Hier werden Rechenschritte und Teilaufgaben, wie sie sich aufgrund der „Stellenwertsystem–Rückführung" ergeben, sehr ausführlich und genau notiert.

Dem halbschriftlichen Rechnen kommt eine erhebliche didaktische Bedeutung insofern zu, als es einer auf das Stellenwertsystem und die Rechengesetze gegründete Einsicht in die Struktur der endgültigen schriftlichen Rechenverfahren den Weg bereitet.

Ein grundlegendes Leitmotiv beim Übergang vom halbschriftlichen zum (voll)schriftlichen Rechnen besteht darin, alle redundanten (d.h. wiederholten, überflüssigen) Informationen beim Notieren wegzulassen und damit soweit wie möglich

- die Schreibarbeit zu mindern und
- die Übersichtlichkeit zu steigern.

6.1.7 Erarbeitungsstränge $^{\ominus}$

Die Erarbeitung geschieht jeweils kleinschrittig über mehrere Stadien. Der Sinn besteht darin, dass die Schüler diese Verfahren nicht nur formalisiert eingeschliffen, sondern auch begleitet durch eine gewisse Einsicht, erlernen sollen.

Die Erarbeitung ist gekennzeichnet durch das Ineinanderspielen von mehreren Strängen, die im folgenden stichwortartig beschrieben werden:

- Bruner'sche Repräsentationsebenen — Intermodaler Transfer.

  $\mathcal{E}$ Arbeiten mit Münzen und Geldscheinen oder Systemblöcken.
  $\mathcal{I}$ Bündelhaus: Einträge mit Geld–Symbolen oder Punkt–Strich–Quadrat.
  $\mathcal{S}$ Tabelle mit Ziffern.

- Dekadisch oder Nicht–dekadisch: Nicht auf symbolischer Ebene.

- Komplexität der Aufgabe:

  – Zahlenraum:
    Hunderter $\longrightarrow$ Tausender $\longrightarrow$ Zehntausender $\longrightarrow$ Million
  – Anzahl der Zehnerübergänge:
    Keiner $\longrightarrow$ Einer $\longrightarrow$ Mehrere.
  – Anzahl der beteiligten Zahlen:
    Zwei $\longrightarrow$ Mehrere.

- Ausführlichkeit der schriftlichen Darstellung:

  Gar nicht $\longrightarrow$ Halbschriftlich $\longrightarrow$ Halbschriftlich reduziert $\rightarrow$ Schriftlich.

- Begleitendes Sprechen: Am Anfang ausführlich mit Stellenwerten, Operationswörtern und aufzuschreibenden Ziffern. Wegfallen des Sprechens von

Stellenwerten — Operationswörtern — Merkziffern — Ziffern aus Zwischenergebnissen.

Dabei wird auch vom Lautsprechen zum inneren Sprechen übergegangen.

7 Das Normalverfahren der Addition

7.1 Einführung

7.1.1 Addition stellenweise

Die grundlegende Idee besteht darin, dass letztlich eine Addition der Stellenwerte erfolgt. An dem Beispiel $257 + 326$ werden die grundlegenden Ideen aufgezeigt. Diese kann übersichtlich und für den Schüler zugänglich wie folgt — halbschriftlich — aufgeschrieben werden:

```
257 + 326 =                 257 + 326 =
------------------          ------------------
200 + 300 =                   7 +   6 =
 50 +  20 =                  50 +  20 =
  7 +   6 =                 200 + 300 =
------------------          ------------------
257 + 326 =                 257 + 326 =
```

Ein natürliches Bestreben bei dieser Zerlegung ist es, die Reihenfolge $H \to Z \to E$ zu wählen, aufgrund des Endalgorithmus ist es aber evtl. hier schon sinnvoll, diese Reihenfolge zu invertieren.

An diesem Beispiel ist bereits zu sehen, dass die Einzelsummanden eben nicht mehr einstellige Vielfache der Zehnerpotenzen sind, es muss also umgebündelt werden.

7.1.2 Der mathematische Gehalt

des Additionsverfahren ist der folgenden Gleichungskette zu entnehmen:

$$
\begin{array}{lrl}
 & & 257 + 326 \\
\text{(Entbündeln)} & = & (200 + 50 + 7) + (300 + 20 + 6) \\
\text{(Assoziativgesetz, Kommutativgesetz)} & = & (200 + 300) + (50 + 20) + (7 + 6) \\
\text{(Distributivgesetz: Ausklammern)} & = & (2 + 3) \cdot 100 + (5 + 2) \cdot 10 + (7 + 6) \\
\text{(Rechnen im Zwanzigerraum)} & = & 5 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 13 \\
\text{(Umbündeln, Gegensinniges Verändern)} & = & 5 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 3 \\
\text{(Bündeln)} & = & 583
\end{array}
$$

7.2 Konkrete Erarbeitung

Nach Vorarbeiten auf der enaktiven ($\mathcal{E}$) Ebene geschieht eine Darstellung auf ikonischer ($\mathcal{I}$) Ebene mit Geldsymbolen (€ besser als Ct) etwa so:

Bereitstellen:

100 €	10 €	1 €
□□	□□□□□	⊚⊚⊚⊚⊚⊚⊚
□□□	□□	⊚⊚⊚⊚⊚⊚

Zusammenlegen:

□□□□□	□□□□□□□	⊚⊚⊚⊚⊚⊚⊚⊚⊚⊚⊚⊚⊚

Umbündeln:

□□□□□	□□□□□□□□	⊚⊚⊚

Auf symbolischer Ebene ($\mathcal{S}$) in der Bündeltabelle schaut dies dann so aus:

Bereitstellen:

100 €	10 €	1 €
2	5	7
3	2	6

Stellenweise Addition:

5	7	13

Umbündeln:

5	8	3

Die Endform der schriftlichen Addition wird nun so eingerichtet, dass dieses Vorgehen durch ein Aufschreiben von Ziffern allein realisiert werden kann:

		2	5	7
+		3	2	6
			1	
		5	8	3

Als (innere) Sprechweise sind dabei möglich:

- 7 plus 6 ist 13 3 an 1 gemerkt.
- 5 plus 2 ist 7
- 2 plus 3 ist 5

7.2.1 Erläuterungen

- Wegen des Umbündelns ist es notwendig, die Reihenfolge $E \to Z \to H$, d.h. von rechts nach links, bei der Abarbeitung der Ziffernspalten einzuhalten.

- Größe und genaue Position der Übertragsziffern und die Frage, ob sie überhaupt angeschrieben werden sollen, unterliegen individuellen Vorlieben.

- Zur Sprechweise: Die zu notierenden Ziffern werden — sowohl beim tatsächlichen als auch beim inneren Sprechen — deutlich hervorgehoben.

- Für die Auswahl der vertikalen Richtung („von oben nach unten" oder „von unten nach oben") der Rechen- und Sprechweise gibt es keine entscheidenden inhaltlichen oder didaktischen Gründe.

  Sinnvoll ist es, die gleiche Richtung wie bei der Subtraktion zu wählen, also — wegen des jetzt gültigen Abziehverfahrens — die von oben nach unten.

7.2.2 Übungsphase

Es folgt eine Übungsphase, die sowohl

- das Einschleifen und damit das Bewusstsein um die Effizienz eines Algorithmus als auch

- die zunehmende Einsicht in die Struktur und Funktionsweise des Verfahrens

zum Ziel hat. Dabei wird auch das Additionsverfahren für mehr als zwei Summanden thematisiert und geübt.

Die Bedeutung des Kopfrechnens als Alternative bei entsprechend geeigneten Aufgaben aber auch als Überschlags–Begleitrechnen zum Testen von Ergebnissen ist dabei stark zu betonen.

Typische Fehler und Schwierigkeiten beim Normalverfahren der Addition werden in Abschnitt 8.4 angesprochen.

8 Die Normalverfahren der Subtraktion

H 2013 T1

8.1 Alternativen

Für das schriftliche Subtrahieren gibt es verschiedene Alternativen, die im wesentlichen durch die vier Felder in der folgenden Tabelle charakterisiert sind:

↓ ZÜ-Methode \ Grundauffassung →	Abziehen/Vermindern	Ergänzen
Gleichsinniges Verändern von Minuend und Subtrahend (Erweitern)		(Süddeutsches) Ergänzungsverfahren
Umbündeln innerhalb des Minuenden (Borgen)	(Norddeutsches) Abziehverfahren	

ZÜ–Methode = Methode zur Bewältigung eines evtl. auftretenden Zehnerübergangs.

An dem Beispiel $372 - 125$ beschreiben wir die beiden in der Tabelle benannten und im derzeitigen Lehrplan erwähnten Verfahren.

8.1.1 Gegenüberstellung der beiden Verfahren

Name	Abziehverfahren	Ergänzungsverfahren (Erweiterungstechnik)
,,Heimatregion"	norddeutsch	süddeutsch (Österreich)
Auffassung von Subtraktion als ...	Verminderung (Standardauffassung bei der Subtraktion, Repräsentation mit konkretem Material möglich)	Ergänzung (Präsent im Alltag beim Zahlvorgang: Rückgeld)
Behandlung des Zehnerüberschreitung	Umbündelung im Minuenden	Gleichsinnige Veränderung von Minuend und Subtrahend
Einsicht:	leichter	schwerer
Handhabung:	schwerer	leichter
Problemsituationen:	Fortschreitende Umbündelung, Mehrere Subtrahenden, Die Merkziffer tritt zu Beginn, nicht am Ende der gedanklichen Subtraktion auf. Schwierigkeiten später bei der schriftlichen Division. Verwechslung mit Korrektur–Durchstreichen	Eine Verwechslung von Addition und Subtraktion tritt eher auf
Aktueller Stand	Im neuen BayLP festgelegt.	

8.2 Das Abziehverfahren

Es geschieht eine fortschreitende Entbündelung im Minuenden.

8.2.1 Der mathematische Gehalt

des Abziehverfahrens und die zugrundeliegenden Rechengesetze sind der folgenden Gleichungskette zu entnehmen:

$$\begin{array}{lll} & & 372 - 125 \\ \text{(Entbündeln)} & = & (300 + 70 + 2) - (100 + 20 + 5) \\ \text{(Assoziativgesetz, Kommutativgesetz)} & = & (300 - 100) + (70 - 20) + (2 - 5) \\ \text{(Distributivgesetz: Ausklammern)} & = & (3 - 1) \cdot 100 + (7 - 2) \cdot 10 + (2 - 5) \\ \text{(Umbündeln, ,,Borgen")} & = & (3 - 1) \cdot 100 + (6 - 2) \cdot 10 + (12 - 5) \\ \text{(Rechnen im Zwanzigerraum)} & = & 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 7 \\ \text{(Bündeln)} & = & 247 \end{array}$$

8.2.2 Konkrete Erarbeitung

Die Repräsentation dieser Aufgabe auf ikonischer ($\mathcal{I}$) bzw. enaktiver ($\mathcal{E}$) Ebene mit Geld geschieht in etwa so:

Bereitstellen von Minuend und Subtrahend:

100 ∈	10 ∈	1 ∈
□□□	□□□□□□□	⊚⊚
□	□□	⊚⊚⊚⊚⊚

Umbündeln im Minuend:

□□□	□□□□□□	⊚⊚⊚⊚⊚⊚⊚⊚⊚⊚⊚⊚
□	□□	⊚⊚⊚⊚⊚

Stellenweise Subtraktion:

□□	□□□□	⊚⊚⊚⊚⊚⊚⊚

Symbolisch ($\mathcal{S}$) in der Bündeltabelle ist dies:

100 ∈	10 ∈	1 ∈
3	7	2
1	2	5

Umbündeln („Borgen"):

3	6	12
1	2	5

Stellenweises Abziehen:

2	4	7

Für die Endform des Abziehverfahrens gibt es mehrere Möglichkeiten:

		3	7	2
			|	
−		1	2	5
		2	4	7

			6	
		3	~~7~~	2
−		1	2	5
		2	4	7

			1	
		3	7	2
−		1	2	5
		2	4	7

			•	
		3	7	2
−		1	2	5
		2	4	7

8.2.3 Erläuterungen

LP+ GS, S. 333

Im Lehrplan+ der Grundschule wird die Version ganz links vorgeschlagen. Die umgebündelten dezimalen Einheiten werden als senkrechte Striche in der Zeile zwischen Minuend und Subtrahend notiert.

LP01 3.3.1

Der Lehrplan 2001 der Grundschule sieht die zweite Version vor. Dies ist von Vorteil bei mehrfachem Entbündeln (siehe unten), ein Nachteil bildet die Tatsache, dass das Durchstreichen auch bei der Fehlerkorrektur angewandt wird oder dass die durchgestrichene Ziffer nicht mehr erkennbar ist, was bei einer Kontrolle der Daten oder der Rechnung ungünstig ist.

Anstelle eines Ersetzens der Ziffern könnte man auch die abzuziehende `1` — eventuell auch nur durch einen Punkt symbolisiert — angeben. Die Position der Eins bzw. des Punktes unterhalb wäre sinnvoll, führt aber zu Notationsschwierigkeiten.

8.2.4 Problematik 1: Nullen im Minuenden

Ein gewichtiges Problem tritt auf, wenn an einer Stelle X (=E,Z,H.. . .) ein Zehnerübergang auftritt und in der nächsthöheren Stelle $10X$ die Ziffer Null auftritt. Es stehen dann keine ,,Portionen" für die Umbündelung zur Verfügung.

Beispiel:

```
                       69
   705                 705
 - 417               - 417
 ------              ------
   288                 288
```

Innerhalb des Abziehverfahrens wird dies dadurch bewältigt, dass ein Zehner nicht aus der Z-Stelle, sondern aus der H-Stelle umgebündelt wird. Von den 70 Zehnern = 7 Hundertern bleiben 69 Zehner übrig. In der schriftlichen Darstellung bedeutet das, dass die ,,Zahl" `70` durchgestrichen und darüber durch `69` ersetzt wird.

Die Idee eines Algorithmus als eines schnellen universell einsetzbaren ,,automatisierten" Verfahrens ist aber durch diese Problematik in Frage gestellt.

8.2.5 Problematik 2: Mehrere Subtrahenden

Ein weiteres Problem tritt auf, wenn mehrere Subtrahenden vorhanden sind

Beispiel:

```
   3741
 -  118
 -  259
 -  607
 ------
   2757
```

Beim Abziehen in der Einerspalte kann schon die erste Subtraktion nicht durchgeführt werden. Ein erstes Umbündeln aus der Z-Spalte löst das Problem, beim anschließenden

Abziehen von 9 und dann nochmal 7 tritt aber jeweils das Problem auf, das erneut umgebündelt werden muss.

Bei Anwendung des (modifizierten) Ergänzungsverfahrens lässt sich diese Subtraktion mit der üblichen Geschmeidigkeit durchführen.

Innerhalb der Didaktik und Schulpraxis begegnet man dieser Problematik mit dem Hinweis, dass schriftliches Subtrahieren bei „mehreren Subtrahenden" nun wirklich nicht mehr für die Alltagsmathematik relevant ist.

8.2.6 Problematik 3: Platzbedarf bei der schriftlichen Division

Beim Normalverfahren der schriftlichen Division durch mehrstellige Divisoren ist die schriftliche Subtraktion ein Bestandteil. Es stellt sich dabei die Frage, wo die „Übrig-Ziffern" notiert werden sollen.

```
  13136688 : 18 = 729816
- 126
  ---
    53
  - 36
   ---
    176
   -162
    ---
     146
    -144
     ---
       28
     - 18
      ---
       108
     - 108
       ---
```

Es stellt sich auch hier die Frage, ob die Division mit mehrstelligen Divisoren eine „zu erwerbende Kompetenz" darstellt.

8.3 Ergänzungsverfahren

Das Ergänzungsverfahren war seit 25.3.1958 gemäß Beschluss der Kultusministerkonferenz (KMK) in ganz Deutschland verbindlich vorgeschrieben.

8.3.1 Der mathematische Gehalt

des Ergänzungsverfahrens und die zugrundeliegenden Rechengesetze sind der folgenden Gleichungskette zu entnehmen:

$$\begin{aligned}
& & & 372 - 125 \\
&\text{(Entbündeln)} & = & \; (300+70+2)-(100+20+5) \\
&\text{(Assoziativgesetz, Kommutativgesetz)} & = & \; (300-100)+(70-20)+(2-5) \\
&\text{(Distributivgesetz: Ausklammern)} & = & \; (3-1)\cdot 100+(7-2)\cdot 10+(2-5) \\
&\text{(Umbündeln, Gleichsinniges Verändern)} & = & \; (3-1)\cdot 100+(7-3)\cdot 10+(12-5) \\
&\text{(Rechnen im Zwanzigerraum)} & = & \; 2\cdot 100+4\cdot 10+7 \\
&\text{(Bündeln)} & = & \; 247
\end{aligned}$$

8.3.2 Konkrete Erarbeitung

Die Repräsentation dieser Aufgabe auf ikonischer ($\mathcal{I}$) bzw. enaktiver ($\mathcal{E}$) Ebene mit Geld geschieht in etwa so:

Bereitstellen von Minuend und Subtrahend:

100 €	10 €	1 €
□□□	□□□□□□□	◎◎
□	□□	◎◎◎◎◎

Gleichsinniges Verändern von Minuend und Subtrahend:

□□□	□□□□□□□	◎◎◎◎◎◎◎◎◎◎◎◎
□	□□□	◎◎◎◎◎

Stellenweise Subtraktion:

□□	□□□□	◎◎◎◎◎◎◎

Symbolisch ($\mathcal{S}$) in der Bündeltabelle ist dies:

100 €	10 €	1 €
3	7	2
1	2	5

Gleichsinniges Verändern:

3	7	12
1	3	5

Stellenweise Subtraktion:

2	4	7

Die Endform des Ergänzungsverfahrens ist:

		3	7	2
−		1	2	5
			1	
		2	4	7

Als (innere) Sprechweise sind dabei möglich:

- 5 plus wieviel ist 12 ?   5 plus 7 ist 12 !
- 5 auf 12 ist 7.

8.4 Typische Fehler und Schwierigkeiten

Das Wesen eines Algorithmus besteht darin, dass er automatisiert ausgeführt wird. Deshalb stehen auch nicht so sehr Schwierigkeiten im Zusammenhang mit dem Verständnis oder grundlegenden Rechenfertigkeiten im Vordergrund, sondern eher solche, die einer mangelnden Sorgfalt, Flüchtigkeit oder Irrtum zugeordnet werden können.

Selbstverständlich erzeugt auch eine mangelnde Einsicht grundlegende Schwierigkeiten bei der automatisierten Anwendung des Algorithmus.

- Fehler beim Rechnen im kleinen Eins–Plus–Eins bzw. Eins–Minus–Eins.

	1	3	5	9
+	2	4	6	0
		1		
	3	8	3	9

$5 + 6 \stackrel{\leadsto}{=} 13$

		7		
	3	~~8~~	1	9
−	1	3	5	9
	2	4	7	0

$11 - 5 \stackrel{\leadsto}{=} 7$

	3	8	1	9
−	1	3	5	9
		1		
	2	4	7	0

$5 + 7 \stackrel{\leadsto}{=} 11$

- Die Operationen Addition und Subtraktion werden verwechselt.

	1	6	5	9
+		4	1	2
	1	2	4	7

Die große Differenz fordert zur Subtraktion auf.

		3	4	7
−			6	8
		1	1	
		4	1	5

Die stellenweise negative Differenz fordert zur Addition auf.

  Auch der vermeintlich additive Charakter des Ergänzungsverfahrens führt zu Verwechslungen.

- Bei (beiden Verfahren) der Subtraktion werden wegen einer ,,Übertragsmüdigkeit" Minuend und Subtrahend vertauscht:

	1	2	5	7
−		7	6	2
	1	5	1	5

- Notieren der Übertrags- bzw. Merkziffern:
  - gar nicht
  - falsch, beispielsweise wegen Verwechslung mit Ergebnisziffer
  - an einer falschen Stellenposition
  - in der Ergebniszeile
- Berücksichtigung der (richtig notierten) Übertrags- bzw. Merkziffern:
  - gar nicht
  - falsch, beispielsweise wegen Verwechslung mit Ergebnisziffer
  - an einer falschen Stellenposition
  - im Ergebnis

	1	3	5	9
+	2	4	6	0
		1		
	3	7	1	9

$1 + 4 + 3 \rightsquigarrow 4 + 3$

		7		
	3	8	1	9
−	1	3	5	9
	2	5	6	0

$7 - 3 \rightsquigarrow 8 - 3$

	3	8	1	9
−	1	3	5	9
		1		
	2	6	6	0

$3 + 1 \rightsquigarrow 3 - 1$

- Falsche, beispielsweise linksbündige, Stellenzuordnung beim (tabellarischen) Notieren der Aufgabe. Leerstellen werden dann falsch berücksichtigt oder als Null interpretiert.

	1	3	5	9
+	2	6	4	
	3	9	9	9

		4		
	3	$\cancel{5}$	7	6
−	2	4	9	
	1	0	8	6

	3	5	7	6
−	2	4	9	
		1		
	1	0	8	6

- Es wird entsprechend der Schreibrichtung von links nach rechts gerechnet. Wegen der fehlenden Übertragsmöglichkeit wird die vollständige Ergebniszahl im Ergebnis notiert oder das Verfahren nicht beendet.

	1	3	9	5	
+	2	4	0	6	
	3	7	9	1	1

	2	4	6	0
−	1	3	5	9
	1	1	1	

- Der Algorithmus wird nicht abgeschlossen.

		4	6	3
+		7	1	2
	1			
		1	7	5

- Probleme bei einer Wiederholung der Verfahrens: Bereits notierte Merkziffern werden zum Bestandteil der Aufgabenstellung.

  Unter Umständen kann ein Durchstreichen aufgrund des Umbündelns beim Abziehverfahren von einem Durchstreichen aufgrund eines Fehlers nicht unterschieden werden.

9 Das Normalverfahren der Multiplikation

9.1 Rechengesetze

Den Normalverfahren zur Multiplikation und Division liegen entscheidend die folgenden beiden Rechengesetze zugrunde:

- Das Assoziativgesetz der Multiplikation:

$$3 \cdot 600 \quad = \quad 3 \cdot (6 \cdot 100) \quad \overset{\text{AG/M}}{=} \quad (3 \cdot 6) \cdot 100 \quad = \quad 18 \cdot 100 \quad = \quad 1800.$$

  Dies Einsicht kann auch zur a-priori-Vereinfachung von Multiplikations-Aufgaben herangezogen werden: Endnullen werden zunächst weggelassen, später dem Ergebnis wieder angefügt.

- Das Distributivgesetz:

$$7 \cdot 23 \quad = \quad 7 \cdot (20 + 3) \quad \overset{(*)}{=} \quad (7 \cdot 20) + (7 \cdot 3) \quad = \quad 140 + 21 \quad = \quad 161.$$

  Bei Anwendung in der Richtung links → rechts spricht man auch von ,,Ausmultiplizieren", in der umgekehrten Richtung von ,,Ausklammern". In dem Ausdruck rechts von (∗) wurden hier bewusst die Klammern gesetzt; aufgrund der (internationalen) Konvention (nicht Rechengesetz!) ,,Punkt vor Strich" könnten sie auch fortgelassen werden.

- Das Kommutativgesetz der Multiplikation gehört nicht zum Begründungsrahmen für das schriftliche Verfahren der Multiplikation. Es wird lediglich zur a priori–Vereinfachung einer Aufgabe herangezogen.

$$\underbrace{205 \cdot 7}_{\text{schr.}} \quad = \quad \underbrace{7 \cdot 205}_{\text{gdkl.}} \quad = \quad 1435.$$

  Eine Multiplikation ist im allgemeinen im Kopf (gedanklich) leichter und geschmeidiger auszuführen, wenn der erste Faktor kleiner ist als der zweite. Für die schriftliche Multiplikation ist es dagegen, wie wir sehen werden, günstiger, wenn der zweite Faktor eine geringere Stellenzahl aufweist als der erste.

Die ersten beiden Rechengesetze ermöglichen es in Verbindung mit dem Stellenwertsystem wieder, das Multiplizieren mehrstelliger Zahlen auf das Multiplizieren einstelliger Zahlen, eben auf das kleine Ein–Mal–Eins zurückzuführen.

9.2 Die Ein-Zeilen-Multiplikation

9.2.1 Vorbemerkung

Die Erarbeitung der Multiplikation erfolgt in einer Vielzahl von kleinen aufeinander aufbauenden Schritten. Die ständige Einbettung dieser Erarbeitung in eine Abfolge von …

- zunehmender Komplexität (kein, ein oder mehrere Zehnerübergange),
- Repräsentationsebenen,
- wechselnden Sachbezug,
- Einschleifen und Einsicht,
- Ausnutzung von Rechenvorteilen,
- unterschiedlichen Spielformen,
- Zuhilfenahme von Überschlagsrechnungen

wird im folgenden nicht ständig (schon wieder) kommentiert.

9.2.2 Vorbereitung

Schritt A1 Vorübungen bestehen darin, Multiplikationen mit einem einstelligen Faktor im Kopf auszuführen

$$3 \cdot 81 \qquad 5 \cdot 27 \qquad 43 \cdot 6$$

Schritt A2 Multiplikation einer Zahl mit 10 bzw. 100:

$$12 \cdot 10 = 120 \qquad 45 \cdot 100 = 4500.$$

Diese Operation muss mit Hilfe von Übungen zum Stellenwertsystem einsichtig gemacht werden. Mit der Zeit kann man dazu übergehen, diese Multiplikationen als ein ,,Anhängen entsprechend vieler Nullen" anzusehen. Diese verkürzte Sichtweise mag zwar ein schnelles Ausführen dieser Rechenoperationen ermöglichen, verblaßt aber die Vorstellung von der unterliegenden Struktur des Dezimal–Stellenwertsystems, so können mittel- oder langfristig viele Schwierigkeiten oder Fehleranfälligkeiten hervorgerufen werden.

Schritt A3 Multiplikation einer Zahl mit Z bzw. H:
Es liegt das Assoziativgesetz der Multiplikation zugrunde.

$$9 \cdot 70 = 9 \cdot (7 \cdot 10) \overset{\text{AG}}{=} (9 \cdot 7) \cdot 10 = 63 \cdot 10 = 630.$$

Schritt A4 Multiplikation einer Zahl ZE oder HZE mit E:
Hier kommt das Distributivgesetz zur Geltung: Im Beispiel:

$$27 \cdot 4 = (20 + 7) \cdot 4 \overset{\text{DG}}{=} 20 \cdot 4 + 7 \cdot 4 = 80 + 28 = 108.$$

9.2.3 Schrittweise Erarbeitung

Insbesondere bei der Multiplikation einer HZE–Zahl mit E dürfte die Bewältigung dieses Verfahrens per Kopfrechnen (eventuell gestützt durch Sprechen) vielen Schülern schwerfallen. Dies liegt vor allem an der notwendigen ,,Speicherung" von Zwischenergebnissen. Deshalb muss zu einer schriftlichen Fixierung — zunächst im sogenannten halbschriftlichen Verfahren — übergegangen werden.

Schritt B1: Multiplikation einer Zahl HZE mit E

Dies wird zunächst ausführlich (zur Einsicht!), dann unter schrittweiser Reduzierung auf das Notwendigste (d.h. unter Fortlassung redundanter Daten), durchgeführt. An Beispiel der Aufgabe `235 * 7` erläutert, schaut das so aus (Im folgenden steht anstelle des Malpunkts · aus schreibtechnischen Gründen ein Stern `*`):

```
235 * 7 =                  235 * 7            235 * 7
---------------            -------            -------
200 * 7 =  1400               1400                 35
 30 * 7 =   210                210                210
  5 * 7 =    35                 35               1400
---------------            -------            -------
235 * 7 =  1645               1645               1645
```

Die nach der Zerlegung nach dem Distributivgesetz auftretenden Einzelmultiplikationen werden zunächst ausführlich notiert. Die Beachtung der Stellenwerte durch rechtsbündiges Anschreiben erleichtert die anschließende Addition der Einzelprodukte.

Schritt B2 Die Produktterme werden nicht mehr notiert, da diese Informationen in der Kopfzeile vorhanden sind.

Schritt B3 Die Reihenfolge bzgl. der Ziffern des ersten Faktors wird — im Hinblick auf das später notwendige rechtsbündige (siehe weitere Bezugnahme durch Ⓡ) Anschreiben des Produktwerts — vertauscht, das heißt, die einzelnen Multiplikationen werden bzgl. des ersten Faktors von rechts nach links ausgeführt.

Schritt B4 In jeder der Additionsspalten treten immer nur zwei Ziffern ungleich Null auf. Dies wird noch besser deutlich, wenn man die Nullen weglässt

```
235 * 7          542769 * 7
-------          ----------
     35                  63
    21                  42
   14                  49
-------               14
   1645              28
                    35
                 ----------
                    3799383
```

Dies bedeutet aber, dass die abschließende Addition — im Wechsel mit den Kleines-Ein-Mal-Eins-Aufgaben — im Kopf durchgeführt werden kann.

9.2.4 Ergebnis: Ein-Zeilen-Multiplikation

Die Ein-Zeilen-Multiplikation besteht aus dem fortlaufenden Multiplizieren des zweiten Faktors mit den Ziffern des ersten Faktors in der Reihenfolge von rechts nach links.

Genauer ist dabei für jede Ziffer des ersten Faktors diese Abfolge von Teilschritten auszuführen:

- Man multipliziert den zweiten Faktor mit der aktuellen Ziffer des ersten Faktors und erhält als Ergebnis eine zweistellige Zahl.
- Dazu addiert man — gegebenenfalls — die Merkziffer aus der vorangegangenen Multiplikation,
- notiert die Einerziffer des neuen Ergebnisses und
- merkt die Zehnerziffer.

```
235 * 7              542769 * 7
-------              ----------
   1645                 3799383
```

9.2.5 Kommentare

- ® Die Richtung von rechts nach links bzgl. des ersten Faktors ermöglicht ein Notieren des Ein-Zeilen-Produkts rechtsbündig genau unter der Ziffer des zweiten Faktors. Dies ist für den Ausbau des Verfahrens zum Multiplizieren von zwei mehrstelligen Faktoren zwingend notwendig.
- Sprechweise:

  7 mal 5 gleich 35 / 5 an 3 gemerkt /
  7 mal 3 gleich 21 / plus 3 gleich 24 / 4 an 2 gemerkt /
  7 mal 2 gleich 14 / plus 2 gleich 16 / 16 an.
- Es besteht die Möglichkeit, die Merkziffern — klein — zwischen den Hauptziffern zu notieren (in den Beispielen: 16_24_35 bzw. $37_29_19_53_48_63$). Damit entledigt man sich zwar der Zwischenspeicherung der Merkziffern, die Darstellung wird aber — insbesondere bei der nachfolgenden Multiplikation zweier mehrstelliger Faktoren — sehr unübersichtlich und damit fehleranfällig.

Auf diesem Zwischenniveau (der zweite Faktor ist einstellig) muss eine Einschleifung durch längerfristige Übung erfolgen.

9.3 Die Mehr-Zeilen-Multiplikation

Hat der zweite Faktor zwei oder mehr Stellen, so müssen mehrere Ein-Zeilen-Multiplikationen nacheinander ausgeführt werden.

9.3.1 Schrittweise Erarbeitung

Schritt C1 Multiplikation einer Zahl HZE mit Z bzw. H:
Hier kommt wieder das Assoziativgesetz zum Tragen:

$$253 \cdot 600 \;=\; 253 \cdot (6 \cdot 100) \;=\; (253 \cdot 6) \cdot 100 \;=\; 1518 \cdot 100 \;=\; 151\,800.$$

Bei der schriftlichen Bearbeitung dieses Typs von Aufgaben kann bereits die Notwendigkeit der genauen Beachtung der Stellenwerte (das exakte Untereinanderschreiben) herausgearbeitet werden.

Schritt C2 Multiplikation einer Zahl HZE mit HZE:
Dies wird mit Hilfe einer stellenweise Zerlegung des 2. Faktors auf die bereits erlernten Techniken zurückgeführt. Anschließend erfolgt wieder eine geeignete Reduzierung des Schreibumfangs.

Schritt C3

```
431 * 243   =   431 * (200 + 40 + 3)

431 * 200        431 * 40        431 * 3             86200
---------        --------        -------          +  17240
    86200           17240           1293          +   1293
                                                  --------
                                                    104733
```

Schritt C4 Die Schreibarbeit wird erheblich verringert, wenn man die Summanden für die abschließende Addition gleich untereinander angibt:

```
431 * 243                  431 * 243                  431 * 243
---------                  ---------                  ---------
    86200                      862                        862..
+   17240                  +   1724                   +   1724.
+    1293                  +    1293                  +    1293
---------                  ---------                  ---------
   104733                     104733                     104733
```

Ⓡ Hier ist — unausweichlich — auf eine genaue Stellenzuordnung der Summanden zu achten. Die Ein-Zeilen-Produkte müssen genau rechtsbündig unter die zugehörigen Ziffern des zweiten Faktors geschrieben werden.

Schritt C5 In der Endform (Mitte) wurden noch die Endnullen weggelassen, was die Übersicht bei der Addition erhöht. Eine Alternative besteht noch darin, die Stellenpositionen der Endnullen durch Punkte zu markieren.

9.3.2 Kommentare

- Die Reihenfolge in der Abarbeitung der Stellen bzgl. des zweiten Faktors ist fachlich unerheblich.
- Es sollte auch hier ein begleitendes oder bestätigendes Überschlagsrechnen zur Fehlervermeidung durchgeführt werden.

9.4 Typische Fehler und Schwierigkeiten

Das Wesen eines Algorithmus besteht darin, dass er automatisiert ausgeführt wird. Deshalb stehen auch nicht so sehr Schwierigkeiten im Zusammenhang mit dem Verständnis oder grundlegenden Rechenfertigkeiten im Vordergrund, sondern eher solche, die einer mangelnden Sorgfalt, Flüchtigkeit oder Irrtum zugeordnet werden können.

Selbstverständlich erzeugt auch eine mangelnde Einsicht grundlegende Schwierigkeiten bei der automatisierten Anwendung des Algorithmus.

- Fehler beim Rechnen im kleinen Ein–Mal–Eins.

4	6	3		·		9
			4	1	8	7

$9 \cdot 6 \overset{\sim\sim}{=} 56$

6	2	8		·		8	5	6
			4	4	2	4		
				3	1	4	0	
		+			3	7	6	2
					1			
			4	7	7	5	6	2

$6 \cdot 8 \overset{\sim\sim}{=} 42$ (zweimal)

- Falscher Zehnerübergang bei der Ein-Zeilen-Multiplikation

2	7	4		·		5
	1	0	3	5	2	0

Produkte werden einfach notiert.

2	7	4		·		5
1	3	2	5			

Links→Rechts-Abarbeitung
„Zehner an, Einer gemerkt"

2	7	4		·		5
			1	3	5	0

Merkziffer vergessen (nur einmal)

- Falsche Bündigkeit / Stellenzuordnung bei der Mehr-Zeilen-Multiplikation.

1	0	8	9		·		4	9	2
				4	3	5	6		
				9	8	0	1		
		+		2	1	7	8		
				1	1	1			
			1	6	3	3	5		

- Mangelnde Berücksichtigung der Null.

4	0	3		·		3
				1	2	9

Die Null als Ergebnisziffer wird nicht notiert.

2	7	4		·		5	0	8
			1	3	7	0		
		+		2	1	9	2	
			1	5	8	9	2	

Wegen der Nicht-Berücksichtigung der Null gerät die Tabelle ,,ins Wanken".

- Der Algorithmus wird nicht abgeschlossen.

3	6	7		·		5
				8	3	5

$367 \cdot 5 = 1835$

- Probleme bei der abschließenden schriftlichen Addition innerhalb der Mehr-Zeilen-Multiplikation. Siehe Kapitel 8.4.

10 Das Normalverfahren der Division

F11 T2

10.1 Division bei einstelligem Divisor

H07 T3

10.2 Schrittweise Erarbeitung

10.2.1 Division von Z bzw. H durch 10 bzw. 100

$$120 : 10 = 12 \qquad 4500 : 100 = 45.$$

Auch hier sollte diese Operation nicht als ein bloßes Weglassen von Nullen nahegebracht werden.

10.2.2 Division einer Zahl durch Z bzw. H

Es liegt das Gesetz von der ,,Konstanz des Quotienten bei gleichsinniger Veränderung von Dividend und Divisor" zugrunde.

$$560 : 80 = (56 \cdot 10) : (8 \cdot 10) \stackrel{\text{GIV}}{=} 56 : 8 = 7.$$

Vorsicht: Ein Fehler, der bei Überbetonung des Operatoraspekts leicht auftreten kann, ist — dargestellt an dem obigen Beispiel:

$$560 : 80 \stackrel{\sim\sim}{=} 56 : 8 \cdot 10 = 7 \cdot 10 = 70.$$

Es wurde ein vermeintlich gültiges Assoziativgesetz angewandt.

10.3 Zerlegung des Dividenden

10.3.1 Distributivgesetz

Hier kommt das Distributivgesetz der Division zur Geltung. Im Beispiel:

$$639 : 3 = (600 + 30 + 9) : 3 \stackrel{\text{DG}}{=} 600 : 3 + 30 : 3 + 9 : 3 = \underbrace{200 + 10 + 3} = 213.$$

Bei diesem Beispiel ist günstig, dass

- die Divisionen aufgehen und
- die Summe über der Klammer bereits die richtige Zehner-Entbündelung des Quotienten darstellt.

10.3.2 Zerlegungen

An einem anderen Beispiel testen wir verschiedene Stellenzerlegungen

$$\begin{array}{llllllll}
\mathcal{Z}_1 & 972 : 4 & = & (900 + 70 + 2) : 4 & = & 900 : 4 + 70 : 4 + 2 : 4 & = & ?? \\
\mathcal{Z}_2 & 972 : 4 & = & (900 + 60 + 12) : 4 & = & 900 : 4 + 60 : 4 + 12 : 4 & = & 225 + 15 + 3 \\
\mathcal{Z}_3 & 972 : 4 & = & (800 + 160 + 12) : 4 & = & 800 : 4 + 160 : 4 + 12 : 4 & = & 200 + 40 + 3
\end{array}$$

In $\mathcal{Z}_1$ können die Divisionen gar nicht ausgeführt werden.

In $\mathcal{Z}_2$ treten Quotienten auf, die keine reinen H, Z oder E Zahlen mehr sind. Dies ist jedoch im Hinblick auf das spätere schriftliche Verfahren unerwünscht.

In $\mathcal{Z}_3$ ist die abschließende Addition ein Kinderspiel, sie kann ,,ziffernweise" erfolgen.

Das besondere an der Zerlegung $\mathcal{Z}_3$ ist, dass die Summanden Vielfache von 400, 40 bzw. 4 sind — und zwar die größtmöglichen im Dividenden enthaltenden Vielfachen.

10.3.3 Erarbeitung des Verfahrens

Die gewünschte Zerlegung $\mathcal{Z}_3$ und das Ergebnis der Division können also wie folgt schrittweise ermittelt werden.

$$\begin{array}{rclcrclcrcl}
972 \div 400 & = & 2 & \quad & 2 \cdot 400 & = & 800 & \quad & 972 - 800 & = & 172 \\
172 \div 40 & = & 4 & & 4 \cdot 40 & = & 160 & & 172 - 160 & = & 12 \\
12 \div 4 & = & 3 & & 3 \cdot 4 & = & 12 & & 12 - 12 & = & 0
\end{array}$$

Das Rechenzeichen $\div$ steht für ,,Ganzzahldivision ohne Angabe des Rests".

In diesen Rechenschritten treten zahlreiche überflüssige Informationen in Erscheinung, man kann sie unterdrücken:

$$\begin{array}{rclcrclcrcl}
9 \div 4 & = & 2 & \quad & 2 \cdot 4 & = & 8 & \quad & 9 - 8 & = & 1 \\
17 \div 4 & = & 4 & & 4 \cdot 4 & = & 16 & & 17 - 16 & = & 1 \\
12 \div 4 & = & 3 & & 2 \cdot 4 & = & 12 & & 12 - 12 & = & 0
\end{array}$$

Die in der zweiten bzw. dritten Zeile neu hinzutretenden Ziffern 7 bzw. 2 sind in dem Ausgangsdividenden 972 gespeichert.

Weiter wird die Zahl 972 in der Kopfzeile ausgeschrieben, da die beiden zusätzlichen Ziffern als Informationen für die dritte, fünfte usw. Zeile gebraucht werden (Herunterholen). Diese Zahl ist aber sowieso Bestandteil der Aufgabenstellung.

```
  972 : 4 = 243
- 8
---
  17
- 16
----
   12
 - 12
 ----
    0
```

Dieses Verfahren muss abermals durch langandauernde Übung bis zur Einschleifung beherrscht werden.

10.3.4 Sonderfall

In dem Beispiel 1972 : 4 tritt ein Sonderfall auf, nämlich der, dass man bei strenger Durchführung des obigen Algorithmus als erstes die Rest–Division

$$1 : 4 \;=\; 0\,R\,1$$

durchführen müsste:

```
  1972 : 4 = 0493
- 0
---
  19
- 16
----
   37
 - 36
 ----
    12
  - 12
  ----
     0
```

```
1972 : 4 = 493
- 16
----
   37
 - 36
 ----
    12
  - 12
  ----
     0
```

Auf der rechten Seite wurde die erste Division mit dem Ganzteil–Ergebnis 0 gar nicht dargestellt, da dies völlig überflüssig ist. Es wird sogleich die Division 19 : 4 durchgeführt. Um zu vermeiden, dass bei der nächsten Division die zweite Ziffer 9 versehentlich nach unten geholt wird, kann man die beiden Ziffern 1 und 9 durch einen kleinen Bogen gekennzeichnet.

10.4 Typische Fehler und Schwierigkeiten

H07 T3

Das Wesen eines Algorithmus besteht darin, dass er automatisiert ausgeführt wird. Deshalb stehen auch nicht so sehr Schwierigkeiten im Zusammenhang mit dem Verständnis oder grundlegenden Rechenfertigkeiten im Vordergrund, sondern eher solche, die einer mangelnden Sorgfalt, Flüchtigkeit oder Irrtum zugeordnet werden können.

Selbstverständlich erzeugt auch eine mangelnde Einsicht grundlegende Schwierigkeiten bei der automatisierten Anwendung des Algorithmus.

- Fehler beim Rechnen im kleinen Eins–Durch–Eins (bezogen auf das kleine Ein-Mal-Eins).

```
 1176 : 8 = 147
- 8
---
  37
- 32
 ----
   54
 - 54
 ----
    0
```

```
  8192 : 4   = 2038
- 8
---
  019
 - 16
 ----
    32
  - 32
  ----
     0
```

Es wurde $54 : 8 \overset{\sim}{=} 7$ bzw. $19 : 4 \overset{\sim}{=} 3\,\mathrm{R}\,4$ gerechnet.

- Mangelnde Berücksichtigung der Null.

```
  8192 : 4 = 248
- 8
---
  019
-  16
 ----
    32
  - 32
  ----
     0
```

```
  8092 : 4   = 223
- 8
---
  009
  - 8
 ----
    12
  - 12
  ----
     0
```

Es ist $8192 : 4 = 2048$ bzw. $892 : 4 = 223$.

- Der Algorithmus wird nicht abgeschlossen.

```
  3213 : 7 = 45              3215 : 7 = 459
- 28                       - 28
----                       ----
   41                         41
-  35                      -  35
 ----                       ----
    63                          65
                              - 63
                              ----
                                 2
```

Es ist $3213 : 7 = 459$ bzw. $3215 : 7 = 459\,\mathrm{R}\,2$.

- Division mit Rest ist unzureichend.

```
  6734 : 7 = 9512
- 63
----
   43
-  35
 ----
    84
```

Es ist $43 : 7 = \overset{\leftrightsquigarrow}{=} 5\,\mathrm{R}\,8$.

- Probleme bei den Subtraktionsschritten. Siehe Kapitel 8.4.

10.5 Division bei mehrstelligem Divisor $^{\ominus}$

10.5.1 Division einer Zahl ZE oder HZE durch Z bzw. H

Hier kommt wieder das Gesetz der Konstanz des Quotienten bei gleichsinniger Veränderung von Dividend und Divisor zum Tragen:

$$680 : 40 \quad = \quad (68 \cdot 10) : (4 \cdot 10) \overset{\text{GIV}}{=} (68 : 4) \quad = \quad 17.$$

10.5.2 Division einer Zahl HZE durch ZE

Anders als an der entsprechenden Stelle bei der Multiplikation, kann hier **keine** Zerlegung des Divisors in Summanden erfolgen.

$$780 : 13 \quad = \quad 780 : (10 + 3) \overset{\leftrightsquigarrow}{=} 780 : 10 + 780 : 3 \quad = \quad 78 + 26 \quad = \quad 104$$

Bezüglich des Divisors gilt das Distributivgesetz eben nicht.

10.5.3 Verfahren

Deshalb bleibt nichts anderes übrig, als das obige Verfahren entsprechend anzuwenden. Man bemerkt, dass es hier nicht mehr möglich ist, die Berechnungen allein mit dem kleinen Einmaleins auszuführen.
So ist beispielsweise bei der Division durch 13 die Präsenz des 13er–Einmaleins notwendig.

```
  69511 : 13 = 5347
- 65
  --
   45
 - 39
   --
    61
  - 52
    --
     91
     91
     --
```

Wenn die 13er Einmaleins-Sätze nicht (per Gedächtnis oder Schnellrechnung) zur Verfügung stehen, so können die Ganzzahldivisionen auch überschlagsmäßig durchgeführt werden.

11 Terme$^{\ominus}$

M5-9 LB 7

Mit den Begriffen ,,Variable” und ,,Term” entfernt sich die Schulmathematik zum ersten Mal von der naiven Idee, dass sich Mathematik allein mit Zahlen (und Geometrie) beschäftigt. Sie wird dadurch anwendungs-mächtiger, aber eben auch abstrakter.

F11 T1

F06 T1

H02 T2

Zum Termbegriff gibt es im wesentlichen zwei Zugänge, die in den folgenden beiden Abschnitten mehr theoretisch beleuchtet werden.

F00 T3

H97 T3

H94 T2

H90 T3

11.1 Der Semantik–Zugang zum Termbegriff

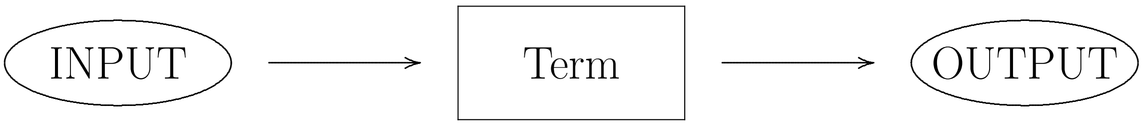
11.1.1 Was ist Semantik?

Semantik bedeutet allgemein die Lehre von der inhaltlich-konkreten Bedeutung von Zeichen, Wörtern und Sätzen in einer Sprache.

11.1.2 Semantik-Definition: Term

In der Mathematik heißt eine ,,Vorschrift”, mit deren Hilfe gegebenen Zahlen neue Zahlen zugeordnet werden können, ein *Term*.

Grafisch lässt sich diese Definition so illustrieren und komprimieren



11.1.3 Abgrenzung zum späteren Funktionsbegriff

Hier wird schon der spätere Funktions– bzw. Operatorbegriff vorweggenommen. Dies geschieht aber zunächst nicht in voller Ausschärfung und umfassender Begriffsumgebung, das heißt dass die folgenden Begriffe aus der Theorie der Funktionen noch nicht angesprochen werden:

- Definitionsmenge
- Wertemenge
- Betonung der Eindeutigkeit
- Frage der Umkehrbarkeit
- Darstellung mit Hilfe von Graphen

Zunächst geht es auch hauptsächlich nur um natürliche (diskrete) Zahlen und nicht um reelle (kontinuierliche) Zahlen.

11.2 Der Syntax–Zugang zum Termbegriff

11.2.1 Was ist Syntax?

Syntax ist allgemein die Lehre von den Regeln, die das Zusammenstellen und Manipulieren von Zeichen und Wörtern in einer Sprache beschreiben.

Ein Term ist (lediglich) eine Folge von Symbolen.

11.2.2 Syntax-Definition: Term

Eine regelhafte Abfolge von bestimmten Symbolen $\mathcal{A}$ heißt *Term*.

11.2.3 Fachmathematische Ausschärfung

Diese Definition ist fachmathematisch sehr dürftig und damit unhaltbar.

Sie lässt sich aber mit vergleichsweise abstrakten Begriffen auch mathematisch einwandfrei präsentieren, wir wollen dies hier nur stichpunktartig wiedergeben:

- Grundlage ist ein *Alphabet*. Das ist eine Menge von Ziffern, Buchstaben und sonstigen Zeichen, die man dann einfach *Symbole* nennt.
- Eine endliche Folge von solchen Symbolen heißt *formaler Term*.
- Eine Sammlung von Regeln (= die eigentliche Syntax) legt fest, dass nur bestimmte formale Terme als sinnvoll (=*zulässig*) gelten.
- Ein Termkalkül legt fest, welche der zulässigen Terme *äquivalent* heißen sollen und wie aus gegebenen Termen neue gebildet werden können.

11.2.4 Kommentare

- Der Syntax-Zugang zum Termbegriff ist die Grundlage der sogenannten Computer–Algebra–Systeme (CAS) wie DERIVE, MAPLE, MATHEMATICA. Die Syntax-Theorie ist ein unabdingbarer Bestandteil der Theoretischen Informatik:

  ,,Ohne Syntax kein Handy".

- Der österreichische Mathematiker Kurt Gödel (1906 – 1978) hat in grundlegenden Arbeiten gezeigt, dass das Axiomensystem ,,unserer" Mathematik unvollständig ist: Es gibt immer Terme, von denen nicht entschieden werden kann, ob sie mathematisch konstruierbar sind oder nicht. Dieses Problem kann auch nicht durch Hinzunahme weiterer Regeln (Axiome) behoben werden.

  Stark vereinfacht könnte man sagen, dass die Mathematik ihre eigene Unzulänglichkeit beweisen kann.

  Dieses mathematische Grundlagenphänomen wird in dem Buch ,,Gödel, Escher, Bach" von D.R. Hofstadter populär auseinandergesetzt.

11.3 Der schulpraktische Zugang zum Termbegriff

LP 5.4
LP 6.4
LP 7.5
LP 8.4
LP 9.4

11.3.1 Definition: Variable

Symbole wie

$$\square \quad \triangle \quad \bigcirc \quad ? \quad x \quad y \quad z \quad a \quad b \quad c \quad \ldots$$

an deren Stelle Zahlen eingesetzt werden können, heißen in der Mathematik *Variable*.

11.3.2 Kommentare

- Anstelle des Wortes Variable kann auch das Wort *Platzhalter* verwendet werden. Das ist vor allem in der Grundschule verbreitet.
- Die Standard-Variable bei mathematischen Termen ist das x.
- Bei Anwendungen in Geometrie, Physik usw. treten alle Groß- und Kleinbuchstaben des Alphabets, auch griechische Buchstaben in Erscheinung.

11.3.3 Schul-Definition: Term

Rechenausdrücke, in denen

- Zahlen und/oder Variable
- einzeln oder durch Rechenzeichen,

verknüpft auftreten, heißen in der Mathematik *Terme*.

11.3.4 Beispiele

$$13 - \square \qquad 25 \qquad a \qquad 7 + 4 \cdot x \qquad a^2 + b^2 - c^2$$

Genau genommen sind auch einzelne Zahlen oder Variable Terme.

11.3.5 Zahlenterme

Terme, in denen keine Variable auftreten, werden einfach *Zahlenterme* genannt. Beispiele sind

$$12 \cdot 65 + 83 \qquad 4 \cdot 921 \cdot 125 \qquad 11 : 3 + 91 : 7 \qquad 789 - 987$$

11.3.6 Kommentare

- Rechenzeichen sind auch Klammern, Bruchstriche, Hochstellen einer Zahl.
- Der Malpunkt zwischen Zahlen, Variable oder Teiltermen wird in der höheren Mathematik häufig weggelassen. Dies entspricht dem Sprachgebrauch ,,Zwei Semmeln" anstelle von ,,Zwei mal Semmel".

$$\begin{aligned} 2\,a &= 2\cdot a \\ \ell\,b\,h &= \ell\cdot b\cdot h \\ 2\,\pi\,r &= 2\cdot\pi\cdot r \\ (a+b)(a-b) &= (a+b)\cdot(a-b) \end{aligned}$$

- Beachte dabei, dass der Malpunkt zwischen zwei Zahlen nicht weggelassen wird.

$$3\;2 \neq 3\cdot 2 = 6 \qquad 8\,\tfrac{1}{2} \neq 8\cdot\tfrac{1}{2} = 4$$

- In Termen werden normalerweise runde, eckige und geschweifte Klammern in der Reihenfolge von innen nach außen benutzt. Dies ist als Hilfestellung, nicht als unumstößliche Regel anzusehen.

11.3.7 Punkt-vor-Strich

- Für die Grundrechenarten und Vorzeichenopertoren gilt die folgende Vorrangregel.
  1. Potenz vor
  2. Punktoperationen (Multiplikation, Division) vor
  3. Strichoperationen (Addition, Subtraktion).

  Diese Regel ist eine Konvention, das heißt sie beruht auf einer (unausgesprochenen) Abmachung der weltweit (früher und heute) tätigen Mathematiker.

- Kommentare zu dieser Regel:
  - Der zweite Teil dieser Regel ist als ,,Punkt-vor-Strich"-Regel bekannt.
  - Als Kurzformel wird die gesamte Regel als ,,Po vor Pu vor S" formuliert.
  - Klammern haben — ihrem Wesen gemäß — immer Vorrang.
  - Für das Minuszeichen als Vorzeichen gelten fallweise unterschiedliche Vorrangregeln:

    $$\begin{aligned} -3^4 &:= -(3^4) = -81 \neq (-3)^4 \\ -3+4 &:= (-3)+4 = 1 \neq -(3+4) \end{aligned}$$

  - Hinweis: Der netten Abkürzung ,,PoKlaPS" liegt ein Fehler zugrunde. Potenzen haben keinen Vorrang gegenüber Klammern. Beispiel: $(4+3)^2 \neq (4+3^2)$

11.4 Terme zur Modellierung

Die in Abschnitt 11.1.1 geschilderte Input-Output-Situation taucht vielfältig in der Wirklichkeit (Alltag, Natur, Wirtschaft, Wissenschaft, Freizeit) auf. Die mathematische Modellierung geschieht durch das *Aufstellen* von Termen.

11.4.1 Beispiele

- Ein Geldbetrag wird zunächst verdreifacht, dann werden 7 € abgezogen.

  Der Geldbetrag wird als Variable x angesehen. Ob man x als Zahl (= ohne Einheit) oder als Größenwert (= mit Einheit) ansetzt, bleibt dem praktischen oder schulischen Kontext überlassen. Der Term lautet dann

  $$T(x) = 3 \cdot x - 7$$

- Von einem Geldbetrag werden 7 € abgezogen, dann wird das Ergebnis verdreifacht.

  $$T(x) = 3 \cdot (x - 7)$$

  Anhand dieser Beispiele kann herausgearbeitet werden, dass es auf die Reihenfolge der Operationen ankommt. Auf mathematischer Seite wird die Reihenfolge durch die Punkt-vor-Strich-Regel (siehe Abschnitt 11.3.7) bzw. durch die Klammersetzung beschrieben.

- Ein Rechteck ist dreimal so lang wie breit. Wie kann der Flächeninhalt berechnet werden?

  Als Variable nehmen wir die Breite b. Dann ist die Länge gleich $3 \cdot b$. Mit Hilfe der Formel für den Rechtecksflächeninhalt ergibt sich der Term

  $$A(x) = 3 \cdot b \cdot b = 3b^2$$

- Die Strecke zwischen zwei Bahnhöfen ist s, ein ICE benötigt dafür die Zeit t. Als Durchschnittsgeschwindigkeit ergibt sich

  $$v = \frac{s}{t}$$

- Einzäunung eines Quadrats. Siehe Abschnitt 11.7.3.
- Advanced: Der Kartenhausterm.
- Prepaid-Tarif: Grundgebühr plus Min. / SMS.

11.4.2 Beispiel: Rechnung der Stadtwerke Eichstätt

(W) Für Wasser werden (inkl. MwSt 7%) eine Grundgebühr von $32,10\,€$ pro Jahr und Verbrauchsgebühren von $1,40\,€/\,\mathrm{m}^3$ berechnet. Bei einem Jahresverbrauch von x m^3 beträgt daher der Kosten-Term

$$W(x) \quad = \quad 32,10 + 1,40 \cdot x \qquad\qquad (€)$$

(S) Für Strom werden (inkl. MwSt 19%) ein Grundbetrag von $90,68\,€$ pro Jahr und Verbrauchsgebühren von $22,5\,\mathrm{Ct}/\,\mathrm{kWh}$ berechnet. Bei einem Jahresverbrauch von x kWh beträgt daher der Kosten-Term

$$S(x) \quad = \quad 90,68 + 0,225 \cdot x \qquad\qquad (€)$$

(G) Für Gas werden (inkl. MwSt 19%) ein Grundpreis von $204,20\,€$ pro Jahr und Verbrauchsgebühren von $6,13\,\mathrm{Ct}/\,\mathrm{kWh}$ berechnet. Bei einem Jahresverbrauch von x kWh beträgt daher der Kosten-Term

$$G(x) \quad = \quad 204,20 + 0,0613 \cdot x \qquad\qquad (€)$$

11.5 Auswerten von Termen

11.5.1 Definition: Auswerten

Unter dem *Auswerten* eines Terms versteht man, dass anstelle der Variablen Zahlen eingesetzt werden. Dabei nimmt der Term einen *Wert* an.

11.5.2 Beispiele und Erläuterungen

- Es ist der Term $T(x) = 3x+7$ gegeben. Wenn die Zahlen $0, 1, 2, 3$ eingesetzt werden, so ergeben sich die Werte

  $$T(0) = 7 \qquad T(1) = 10 \qquad T(2) = 13 \qquad T(3) = 16$$

- In dem Term

  $$T(x) = (\tfrac{x}{10})^2 + 3 \cdot \tfrac{x}{10}$$

  für den Anhalteweg (in m) $T(x)$ eines Autos bei Geschwindigkeit x (in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$) tritt die Variable x mehrfach auf. Es ist dann

  $$\begin{aligned} T(30) &= (\tfrac{30}{10})^2 + 3 \cdot \tfrac{30}{10} &= 18 \\ T(60) &= (\tfrac{60}{10})^2 + 3 \cdot \tfrac{60}{10} &= 54 \end{aligned}$$

  Beachte, dass nicht verschiedene Zahlen für die gleiche Variable x eingesetzt werden dürfen, etwa so

  $$(\tfrac{60}{10})^2 + 3 \cdot \tfrac{30}{10} = 45$$

- Es ist der Term $T(\ell, b) = \ell \cdot b$ für den Flächeninhalt eines Rechtecks gegeben. Dann gilt beispielsweise

  $$T(1; 2) = 1 \cdot 2 = 2 \qquad T(5; 12) = 5 \cdot 12 = 60 \qquad T(-3; \tfrac{2}{5}) = -\tfrac{6}{5}$$

  Es dürfen für die verschiedene Variablen auch gleiche Zahlen eingesetzt werden, so dass mit diesem Term auch die Fläche eines Quadrats berechnet werden kann:

  $$T(1; 1) = 1 \cdot 1 = 1 \qquad T(5; 5) = 5 \cdot 5 = 25 \qquad T(-3; -3) = 9$$

11.6 Gliedern von Termen

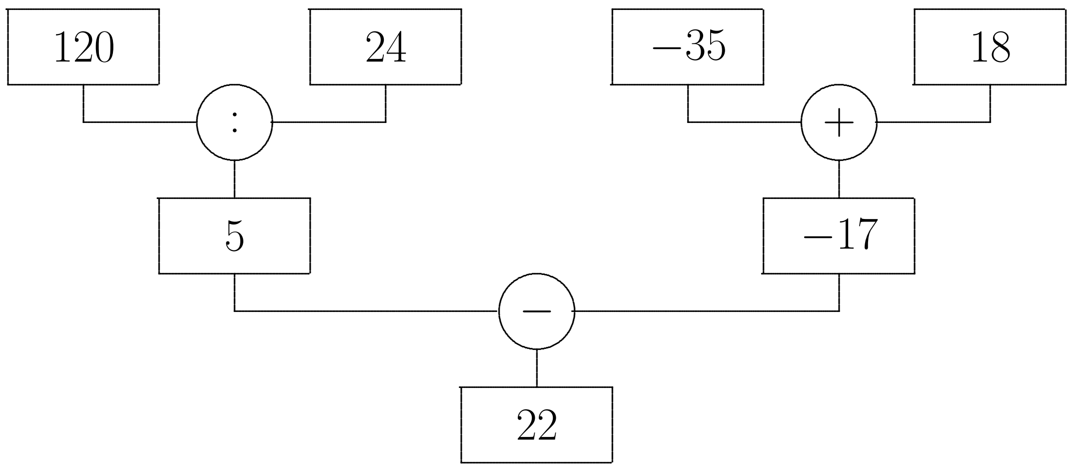
Wir zeigen an zwei Beispielen verschiedene Darstellungformen der ,,Gliederungsstruktur" eines Terms.

11.6.1 Beispiel 1

- Formeldarstellung: $120 : 24 - (-35 + 18)$
- Textbeschreibung:

  Der Term ist eine Differenz. Der Minuend ist der Quotient mit 120 als Dividenden und 24 als Divisor. Der Subtrahend ist die Summe mit den beiden Zahlen -35 und 18 als Summanden.

- Termbaum



- Formeldarstellung mit Unterklammerungen und Fachbegriffen

$$\underbrace{\underbrace{120 \ : \ 24}_{\text{Quotient}} \ - \ (\underbrace{-\,35 \ + \ 18}_{\text{Summe}})}_{\text{Differenz}}$$

- Formeldarstellung mit Unterklammerungen und Zwischenergebnissen

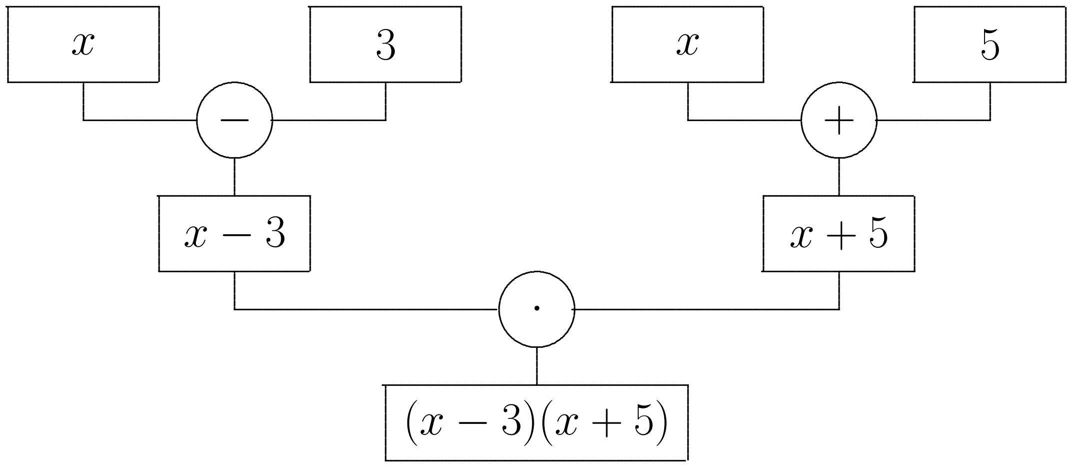
$$\underbrace{\underbrace{120 \ : \ 24}_{5} \ - \ (\underbrace{-\,35 \ + \ 18}_{-17})}_{22}$$

11.6.2 Beispiel 2

- Formeldarstellung: $(x-3)\cdot(x+5)$
- Textbeschreibung:

  Der Term ist ein Produkt. Der 1. Faktor ist die Differenz mit der Variablen x als Minuendem und 3 als Subtrahenden. Der 2. Faktor ist die Summe aus x und 5.

- Termbaum



- Formeldarstellung mit Unterklammerungen und Fachbegriffen

$$\underbrace{\underbrace{(x\ -\ 3)}_{\text{Differenz}}\ \cdot\ \underbrace{(x\ +\ 5)}_{\text{Summe}}}_{\text{Produkt}}$$

- Eine Formeldarstellung mit Unterklammerungen und Zwischenergebnissen (vgl. Beispiel 1 in 11.6.1) ist hier nicht sinnvoll.

11.6.3 Kommentare

- Einstieg: Es soll ein Term beschrieben werden, ohne dass dabei Rechenzeichen genannt werden.
- Bei der Termgliederung muss genau in der umgekehrten Reihenfolge vorgegangen werden wie bei der Auswertung.
- Bei der Termgliederung tritt wieder der Syntax–Aspekt des Termbegriffs stärker hervor.

11.7 Äquivalenz von Termen

11.7.1 Definitionen: Grund– und Definitionsmenge

(1) Die Menge, deren Elemente für die Einsetzung anstelle einer Variablen eines Terms vorgesehen sind, heißt *Grundmenge* G des Terms.

(2) Die Menge der Elemente aus der Grundmenge, die für eine Variable eingesetzt werden dürfen (können), heißt *Definitionsmenge* D des Terms.

11.7.2 Kommentare

- Oft wird bei Termen der Begriff der Grundmenge gar nicht intensiv thematisiert. Es wird dann stillschweigend einfach der aktuelle Zahlbereich $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ als Grundmenge angesehen.

- Eine Unterscheidung zwischen Grund- und Definitionsmenge wird in der aktuellen Schulpraxis kaum vorgenommen.

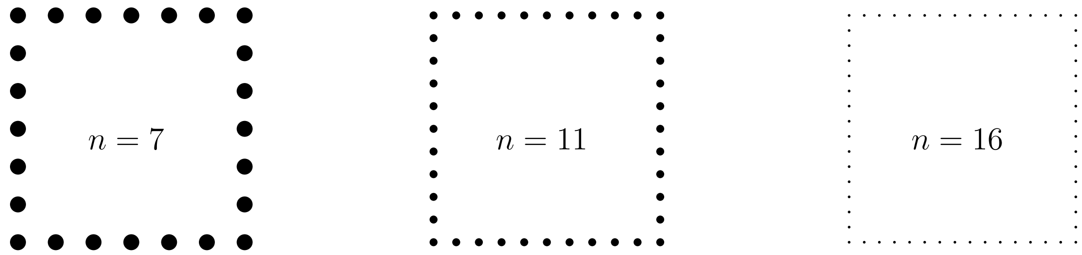
  Beispiel: Als Grundmenge für den Term $\frac{1}{x-2}$ kann man $\mathbb{N}$ ansehen. Da aber die Zahl 2 nicht eingesetzt werden kann, ist die Definitionsmenge gleich $D = \mathbb{N} \setminus \{2\}$.

  Im Kontext der Bemühung, das überzogene Begriffssystem der Schulmathematik zu verschlanken, gibt es den Ansatz, einen der beiden Begriffe ganz zu vermeiden und die Problematik der nicht–zulässigen Einsetzungen da zu behandeln, wo man ihr begegnet.

- Wir sprechen im folgenden nur von der Grundmenge. In der Mittelschulpraxis tritt generell der Mengenbegriff nicht in Erscheinung.

11.7.3 Beispiel

Ein quadratisches Grundstück soll eingezäunt werden. Auf jeder Seite sollen n Pfähle mit immer gleichem Abstand stehen. Wie viele Pfähle müssen eingepflockt werden?



11.7.4 Mathematisierung

Bei der Mathematisierung dieses Sachverhalts stößt man auf ,,verschiedene" Terme:

- $T_1(n) \;=\; n + (n-1) + (n-1) + (n-2)$
- $T_2(n) \;=\; n + n + (n-2) + (n-2)$
- $T_3(n) \;=\; 2 \cdot n + 2 \cdot (n-2)$
- $T_4(n) \;=\; 4 \cdot (n-1)$
- $T_5(n) \;=\; n^2 - (n-2)^2$

11.7.5 Auswertung

Wir werten die Terme für verschiedene n aus:

Term	$n = 2$	$n = 5$	$n = 10$	$n = 63$
$T_1(n) = n + (n-1) + (n-1) + (n-2)$	4	16	36	248
$T_2(n) = n + n + (n-2) + (n-2)$	4	16	36	248
$T_3(n) = 2 \cdot n + 2 \cdot (n-2)$	4	16	36	248
$T_4(n) = 4 \cdot (n-1)$	4	16	36	248
$T_5(n) = n^2 - (n-2)^2$	4	16	36	248

Die Tabelle deutet darauf hin, dass bei der Einsetzung natürlicher Zahlen für die Variable n jeweils der gleiche Wert auftritt.

11.7.6 Semantik-Definition: Äquivalenz von Termen

Zwei Terme $T_1(x)$ und $T_2(x)$ mit gemeinsamer Grundmenge G heißen *äquivalent*, wenn sie bei Einsetzung einer beliebigen Zahl aus dieser Grundmenge für die Variable jeweils den gleichen Wert annehmen.

Man schreibt dann:

$$T_1(x) \;=\; T_2(x), \qquad x \in G.$$

Beachte, dass die Angabe der Grundmenge G weggelassen werden kann, wenn der Kontext klar ist.

11.7.7 Beispiele

- Die beiden Terme $(x+3)^2$ und x^2+6x+9 sind äquivalent über $\mathbb{R}$.
- Die beiden Terme $3x+51$ und $3(x+17)$ sind äquivalent über $\mathbb{R}$.
- Die beiden Terme x^2 und x sind äquivalent über $\{0,1\}$, nicht aber über $\mathbb{R}$.

11.7.8 Frage

Kann man äquivalente Terme als ,,gleich” bezeichnen?

- In semantischer Hinsicht JA, da es sich um die gleichen Wertzuweisungen (im Sinne von Funktionen, siehe später) handelt.
- In syntaktischer Hinsicht NEIN, da es sich um verschiedene Symbolfolgen handelt.
- In der Schulpraxis wird dieses Problem im allgemeinen ,,unter den” Teppich gekehrt. So wird zwar der Begriff der ,,Äquivalenz” eingeführt, dann aber beispielsweise die beiden Terme

  $$(a+b)^2 \qquad a^2+2ab+b^2$$

  als gleich bezeichnet.

11.7.9 Nicht–Äquivalenz

liegt vor, wenn zwei Terme bei Einsetzung irgend einer (einzigen) Zahl aus der Grundmenge verschiedene Werte annehmen.

Eine Fehlvorstellung besteht hier darin, dass die Nicht–Äquivalenz durch Äquivalenzumformungen (Begriff: Siehe unten) gezeigt werden muss.

11.7.10 Beispiele

(1) Die beiden Terme x^2 und $2x$ sind nicht äquivalent, da sie bei Einsetzung von $x=1$ verschiedene Werte ergeben.

(2) Die beiden Terme x^3-3x^2+2x+5 und $2x^3-6x^2+4x+5$ ergeben bei Einsetzung der Zahlen $0,1,2$ gleiche Werte, aber bei Einsetzung von 3 zwei verschiedene Werte. Also sind sie nicht äquivalent.

11.8 Äquivalenzumformungen

11.8.1 Nachweis der Äquivalenz

Zum Nachweis der Äquivalenz von zwei Termen müsste man gemäß Definition alle Elemente der Grundmenge ,,durchtesten". Dies ist bei unendlichen Grundmengen unmöglich. Dieses Problem wird nun — mathematisch wenig einwandfrei — wieder durch Rückgriff auf den Syntax–Aspekt ,,gelöst", man definiert:

11.8.2 Syntax-Definition: Umformung

Wird ein Term durch Anwendung von gültigen Rechengesetzen in einen anderen Term umgeformt, so spricht man von einer *Äquivalenzumformung* des einen Terms in den anderen.

Oft (vor allem in der MS-Praxis) wird der Begriff verkürzt: *Umformung* von Termen.

Bei dem Begriff ,,gültige Rechengesetze" nimmt man Bezug auf die in der bisherigen Schul–Mathematik erworbenen Rechengesetze bzw. die zum Teil intuitiv vorhandenen Auffassungen davon. Wir beschreiben sie auf der folgenden Seite.

11.8.3 Kommutativgesetz der Addition

Es besagt, dass es bei der Addition von Zahlen (oder Termen) nicht auf die Reihenfolge der Zahlen ankommt:

$$\begin{aligned} a+b &= b+a \\ 17+453 &= 453+17 \end{aligned}$$

11.8.4 Assoziativgesetz der Addition

Es besagt, dass es bei der Addition von Zahlen (oder Termen) nicht auf die Reihenfolge der Operationen ankommt:

$$\begin{aligned} (a+b)+c &= a+(b+c) \\ (86+17)+23 &= 86+(17+23) \end{aligned}$$

11.8.5 Kommutativgesetz der Multiplikation

Es besagt, dass es bei der Multiplikation von Zahlen (oder Termen) nicht auf die Reihenfolge der Zahlen ankommt:

$$\begin{aligned} a\cdot b &= b\cdot a \\ 4592\cdot 3 &= 3\cdot 4592 \end{aligned}$$

11.8.6 Assoziativgesetz der Multiplikation

Es besagt, dass es bei der Multiplikation von Zahlen (oder Termen) nicht auf die Reihenfolge der Operationen ankommt:

$$\begin{aligned} (a+b)+c &= a+(b+c) \\ (34\cdot 25)\cdot 4 &= 34\cdot(25\cdot 4) \end{aligned}$$

11.8.7 Distributivgesetz Es besagt, dass es bei der Multiplikation einer Zahl mit einer Summe nicht darauf ankommt, ob man erst die Summanden multipliziert und dann addiert oder erst addiert und dann die Summe multipliziert:

$$\begin{aligned} a\cdot(b+c) &= (a\cdot b)+(a\cdot c) \\ 18\cdot(200+7) &= (18\cdot 200)+(18\cdot 7) \end{aligned}$$

11.9 Lineare Terme

11.9.1 Definition: Linearer Term

Ein Term der Form

$$T(x) \quad = \quad m \cdot x + t,$$

wobei m und t fixierte Zahlen sind, heißt *linearer Term*.

Auch Terme, die durch Umformungen in diese Form gebracht werden können, heißen linear.

11.9.2 Beispiele linearer Terme

$$3x + 7 \qquad 4(x - 8) \qquad -x + 5$$

$$x^2 - 5x + 6 - x^2 + 2x$$

$$7 \cdot (-5) \cdot a \cdot 3$$

11.9.3 Kommentare

- Lineare Terme zur Modellierung wurden bereits in Abschnitt 11.4.2 über die Rechnung der Stadtwerke angegeben.
- Innerhalb eines einfachen linearen Terms werden zwei Rechenoperationen ausgeführt. LP 5.4
- Eine besondere Aufgabenstellung bei linearen Termen ist, zu einem gegebenem Wert (=Output) rückwärts die eingesetzte Zahl (=Input) zu ermitteln. Das ist bereits das Gebiet der linearen Gleichungen.

12 Gleichungen

M5-9 LB 7

12.1 Einstieg

Der Zugang zum Begriff der Gleichung geschieht wieder semantik-orientiert, im Rahmen der Logik und Mengenlehre.

Wir können uns hier nicht ausführlich mit den feinen und tiefen mathematischen Einsichten in diese zwei grundlegenden Teilgebiete abgeben. Nichtsdestoweniger müssen wir einige elementare Begriffe und Fakten bereitstellen.

12.1.1 Definition: Aussage

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Gebilde, das — innerhalb eines vereinbarten Kontexts — eindeutig als *wahr* (w) oder *falsch* (f) erkannt werden kann.

12.1.2 Kommentare

- In der obigen Definition treten einige Begriffe auf, die ihrerseits eigentlich erst definiert werden müssten. Deshalb wird diese Definition auch naiv genannt.
- Ist eine Aussage wahr, so sagt man auch, sie *gilt*.
- Aussagen werden dann wieder zu mathematischen Objekten, mit denen man sogar ,,rechnen kann": Aussagenlogik, Boolesche Algebra. In diesem Zusammenhang werden Symbole für Aussagen eingeführt, meist $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ o.ä.

12.1.3 Nicht-Beispiele für Aussagen

- Bleib hier! (Grammatik)
- Wie geht es Dir? (Grammatik)
- Die Resteverwertung ist bunt. (Sinngehalt)
- ,,Rot" ist eine schöne Farbe. (Wertung, Subjektivität)
- Harald ist rothaarig. (Kontext)
- Wenn zwei Geraden eine gemeinsame Lotgerade haben, dann sind sie parallel. (Kontext fehlt: 2-dim oder 3-dim?)
- ,,Der Satz, den Sie gerade lesen (hören), ist falsch".
- Der älteste Mann der Welt ist tot. (Schlagzeile im Eichstätter Kurier)

12.1.4 Beispiele für Aussage

,,Gute" Beispiele erhält man im allgemeinen dadurch, dass man als Kontext einfache und klare Sachverhalte wählt oder — eben — die ,,Mathematik".

Von den folgenden Aussagen kann man klar entscheiden, ob sie wahr oder falsch sind.

- 91 ist durch 7 teilbar. (w)
- Es ist $30^2 + 40^2 = 50^2$. (w)

- Wenn die Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl ungerade ist, dann handelt es sich um eine Quadratzahl. (w)
- Ein Viereck mit vier gleich langen Seiten ist ein Quadrat. (f)
- Zwei Vierecke sind ähnlich, wenn sie in allen Innenwinkeln übereinstimmen. (f)
- Das um 1 vergrößerte Produkt von vier aufeinanderfolgenden Zahlen ist eine Quadratzahl. (w)
- Es gibt unendlich viele Primzahlen (w)

12.1.5 Definition: Aussageform und Variable

Es sei G irgendeine Menge, die in diesem Zusammenhang auch wieder Grundmenge heißt.

Ist nun für jedes $x \in G$ eine Aussage $\mathcal{A}(x)$ gegeben, so spricht man von einer *Aussageform*.

In diesem Zusammenhang heißt x auch die *Variable* innerhalb der Aussageform. Anstelle von x kann natürlich auch jedes andere Symbol als ,,Statthalter" für die Elemente der Grundmenge herangezogen werden.

12.1.6 Beispiele für Aussageformen

- $G = \{\mathrm{Mo}; \mathrm{Di}; \mathrm{Mi}; \mathrm{Do}; \mathrm{Fr}; \mathrm{Sa}; \mathrm{So}\}$ x's geht Marina in den Fitness-Raum.
- $G = \mathbb{N}$ n ist eine Primzahl.
- $G = \mathbb{R}$ x ist eine irrationale Zahl.
- $G = \mathbb{R}^2$ Der Punkt $P(x_P; y_P)$ liegt auf der ,,Zackenkurve" $K = \{(x, y) | y^2 = x^3\}$.

12.1.7 Definition: Gleichung

Es seien zwei Terme $T_1(x)$ und $T_2(x)$ mit der gleichen Grundmenge G vorgegeben.

Dann entsteht durch Gleichsetzen der beiden Terme eine Aussageform mit Grundmenge G.

$$\mathcal{A}(x): \qquad T_1(x) \quad = \quad T_2(x)$$

Eine solche Aussageform heißt kurz *Gleichung*.

12.1.8 Definition: Lösung

Setzt man ein Element aus der Grundmenge G anstelle der Variablen ein, so entsteht aus der Aussageform eine Aussage.

Ist diese Aussage wahr, so heißt x eine *Lösung* der Gleichung.

Ist diese Aussage falsch, so sagt man, dass x keine Lösung der Gleichung ist.

12.1.9 Elementare Begriffe bei Gleichungen

Als Rahmen treten die folgenden in der Sprache der Mengenlehre gefassten Begriffe in Erscheinung:

1. (Wh:) Die Menge, deren Elemente für die Einsetzung anstelle einer Variablen einer Gleichung vorgesehen sind, heißt *Grundmenge* G der Gleichung.

   Genau genommen gehört zu einer Gleichung immer die Grundmenge. Diese Einsicht tritt in der Schulpraxis — mehr oder weniger — in den Hintergrund, weil die Grundmenge gleich dem aktuellen Zahlenbereich ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$) ist.

2. Die Menge der Elemente aus der Grundmenge G, die für die Variable einer Gleichung eingesetzt werden dürfen, heißt *Definitionsmenge* D der Gleichung.

   Während die Schulmathematik früher genauer zwischen Grundmenge und Definitionsmenge unterschieden hatte, ist dies heute nicht mehr so üblich. Wir sprechen im folgenden nur von der Grundmenge.

3. Die Menge der Elemente x der Grundmenge G, die Lösung der Gleichung sind, heißt *Lösungsmenge* L der Gleichung

   $$L \quad := \quad \left\{ a \in G \;\middle|\; \text{Gleichung in } a \text{ ist erfüllt} \right\}$$

   Aus der bereits in der Grundschule angebahnten Vertrautheit mit linearen Gleichungen entsteht der Eindruck, dass Gleichungen immer eine eindeutige Lösung haben.

   Die Bedeutung des hier beschriebenen Kontexts mit Hilfe der Mengenlehre liegt darin, dass andere Arten von Lösungsmengen zwanglos miterfasst werden, beispielsweise:

   - gar keine Lösung
   - zwei oder mehrere (endlich viele) Lösungen
   - Lösungsmengen auch von Ungleichungen, beispielsweise Intervalle
   - Lösungsmenge auch von Gleichungssystemen

4. Eine Gleichung, für die $L = \{\,\}$ gilt, heißt *unerfüllbar*.

   $$\begin{aligned} x &= x + 1 \\ 0 \cdot x &= 5 \end{aligned}$$

5. Eine Gleichung, für die $L = G$ gilt, heißt *allgemeingültig*

   $$\begin{aligned} 2x + 6 &= (3 + x) \cdot 2 \\ 0 \cdot x &= 0 \end{aligned}$$

12.2 Äquivalenzumformungen

12.2.1 Ziel

Ist eine Gleichung mit Grundmenge vorgegeben, so ist das damit verbundene Ziel das Lösen dieser Gleichung, das heißt die Ermittlung der Lösungsmenge.

12.2.2 Umformen

Die Methode besteht im Umformen von Gleichungen. Dabei entsteht eine Kette von Gleichungen:

- am Anfang steht die gegebene Gleichung
- am Ende sollte eine Gleichung stehen, aus der die Lösungsmenge leicht ermittelt werden kann.

Bei einer Umformung einer ,,Anfangsgleichung" in eine ,,Endgleichung" ändert sich — bei fest gegebener Grundmenge — im allgemeinen die Lösungsmenge L_{Anf} (vorher) in eine Lösungsmenge L_{End} (nachher).

12.2.3 Typen von Umformungen

In diesem Zusammenhang sind die folgenden Typen von Umformungen besonders interessant:

- Eine Umformung heißt *Gewinnumformung*, wenn $L_{\text{Anf}} \subset L_{\text{End}}$. Es kommen also beim Umformen Lösungen dazu.

  Beispiele sind

Multiplizieren mit der Variablen	$17x$	$=$	34	$\Longrightarrow$	$17x^2$	$=$	$34x$
Multiplizieren mit einem Term	$37x$	$=$	111	$\Longrightarrow$	$37x \cdot (x+2)$	$=$	$111x + 222$
Multiplizieren mit Null	$2x$	$=$	4	$\Longrightarrow$	0	$=$	0
Quadrieren	$2x+1$	$=$	7	$\Longrightarrow$	$(2x+1)^2$	$=$	49

  Wird eine Gleichung mittels Gewinnumformungen gelöst, so muss man die Lösungsmenge der Endgleichung daraufhin testen, ob sie die Anfangsgleichung erfüllen. Es muss eine *Probe* durchgeführt werden.

- Eine Umformung heißt *Verlustumformung*, wenn $L_{\text{End}} \subset L_{\text{Anf}}$. Beim Umformen verschwinden Lösungen.

  Beispiele sind

Dividieren durch die Variable	$13x^2$	$=$	$26x$	$\Longleftarrow$	$13x$	$=$	26
Wurzelziehen	x^2	$=$	169	$\Longleftarrow$	x	$=$	13
Auflösen von Beträgen	$\lvert x-5 \rvert$	$=$	3	$\Longleftarrow$	$x-5$	$=$	3

  Wenn man also die Endgleichung löst, kann man sich nicht sicher sein, alle Lösungen der Anfangsgleichung gefunden zu haben.

- Eine Umformung heißt *Äquivalenzumformung*, wenn $L_{\text{End}} = L_{\text{Anf}}$. Die Lösungen bleiben gleich.

  Beispiele siehe unten in Abschnitt 12.2.5.

12.2.4 Frage

Es bleibt dabei eine Frage offen:

> Die Lösungsmenge einer Gleichung ist zunächst unbekannt.
> Wie soll man dann den Typ einer Umformung erkennen?

Diese Frage wird ,,umgangen", indem man vom Semantik-Kontext (Lösungsmenge) der Gleichungslehre zum Syntax-Kontext (Regelwerk) umschaltet. Es wird ein Katalog von ,,erlaubten Äquivalenzumformungen" zusammengestellt.

12.2.5 Katalog

Erlaubte Äquivalenzumformungen sind unter anderen:

$\boxed{\text{VS}}$ Vertauschung der Seiten

$$53 = 8x+5 \iff 8x+5 = 53$$

$$v = \tfrac{s}{t} \iff v \cdot t = s \iff s = v \cdot t$$

$\boxed{\text{TU}}$ Termumformungen innerhalb der linken oder rechten Seite der Gleichung.

$$5+x+3+x = 10 \iff 2x+8 = 10$$

$$9x-12+15x = 25+9x-7 \iff 24x-12 = 9x+18$$

$\boxed{\text{AS/Z}}$ Addition bzw. Subtraktion einer beliebigen Zahl.

$$8x+2 = 11x-7 \iff 8x = 11x-9$$

$$x^2+6x = 27 \iff x^2+6x+9 = 36$$

$\boxed{\text{AS/T}}$ Addition bzw. Subtraktion eines beliebigen Terms.

$$18-4x = 12+2x \iff 18 = 12+6x$$

$$5x^2-7x+3 = 2-x^2 \iff 6x^2-7x+1 = 0$$

$\boxed{\text{MD/Z}}$ Multiplikation mit bzw. Division durch eine Zahl **ungleich Null**.

$$\tfrac{1}{2}x+\tfrac{5}{3} = \tfrac{19}{6} \iff 3x+10 = 19$$

$$17x^2+34 = 51x \iff x^2+2 = 3x$$

$\boxed{\text{MD/T}}$ Multiplikation mit bzw. Division durch einen Term, der bei Einsetzung beliebiger Elemente der Grundmenge nur Werte ungleich Null annimmt.

$$x^2 - 9 \;=\; (2x-7)(x+3) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x - 3 \;=\; 2x - 7$$

Beachte, dass dies nur eine Äquivalenzumformug ist, wenn -3 nicht in der Grundmenge enthalten ist. Wenn doch, handelt es sich um eine Verlustumformung; die Lösung -3 ging verloren.

12.2.6 Kommentare

- Generell sollte bei Äquivalenzumformungen der vier letztgenannten Typen immer der Aspekt

  ,,Auf beiden Seiten der Gleichung wird die gleiche Operation ausgeführt"

  gegenüber dem ,,auf die andere Seite bringen" oder dem ,,Rüberbringen" herausgestellt werden.

- Eine in der Schulpraxis weitverbreitete Notation von Umformungen ist ein senkrechter Strich mit Angabe der Operation auf der rechten Seite der Ausgangsgleichung

  $$\begin{array}{rcl|l} 14x - 9 & = & 8x + 9 & -\,8x \\ 6x - 9 & = & 9 & \end{array}$$

  Gelegentlich wird der Senkrecht-Strich als ,,Kommandostrich" bezeichnet. Es stellt sich die Frage, ob man das Lösen von Gleichungen als eine Abfolge von Kommandos auffassen sollte.

- Gewinn- und Verlustumformungen werden in der Schulpraxis nicht thematisiert, ihre Problematik aber angerissen durch Eingrenzung der Grundmenge (auf die Definitionsmenge), durch Proben oder Fallunterscheidungen.

- Sinn der Probe allgemein:
  - Verlebendigung einer formalen Prozedur, Einsicht in die Schlagkraft eines Algorithmus.
  - Austesten von Lösungen bei Gewinnumformungen.
  - Überprüfen, ob bei den Äquivalenzumformungen Fehler begangen wurden.

- Der Typ $\boxed{\text{MD/T}}$ von Äquivalenzumformung tritt meist nicht im Positiv-Katalog der schulischen Äquivalenzumformungen auf. Nichtsdestoweniger wird er immer wieder angewandt, vor allem bei Sachaufgaben, Bruchgleichungen, physikalischen Formeln.
  - Kreuzweises Ausmultiplizieren

    $$\tfrac{3}{4-x} \;=\; \tfrac{2}{2+x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3(2+x) \;=\; 2(4-x)$$

– Kehrwertbildung

$$\frac{1}{x} = \frac{3}{6x-9} \iff x = \frac{6x-9}{3}$$

– Beispiel: Formel für den el. Widerstand

$$R = \frac{U}{I} \iff R \cdot I = U$$

12.3 Das Waage–Modell

12.3.1 Idee

Zur einführenden Veranschaulichung von Äquivalenzumformungen bei Gleichungen dient das Waage–Modell:

- Der linke und rechte Term werden als Gewichte interpretiert, die auf die Schalen einer Balkenwaage oder Tafelwaage gelegt werden.
- Besteht Gleichheit zwischen den Termen, so ist die Waage im Gleichgewicht.
- Werden auf den beiden Seiten der Gleichung gleiche Operationen ausgeführt, so entspricht das einer Veränderung der Gewichte auf der Waage, sie bleibt aber im Gleichgewicht.

Das Waage–Modell sollte nur zur einführenden Veranschaulichung von Äquivalenzumformungen benutzt werden. Der kontinuierliche Einsatz, beispielsweise auch bei komplexeren Beispielen, führt vom Lernziel ,,Fertigkeit und flexibler Umgang mit den Techniken der Äquivalenzumformung" weg.

12.3.2 Praktische Umsetzung

- Man braucht mehrere gleiche Gegenstände, beispielsweise Holzwürfel, mit gleichem Gewicht (Masse), die die Zahl 1 repräsentieren.
- Leichte Plastikbecher beinhalten jeweils gleich viele Holzwürfel und repräsentieren so die Variable — und ihren Wert.
- Beispielsweise wird die Gleichung

  $$3x + 2 = x + 10$$

  dann dadurch modelliert, dass auf die beiden Schalen

  Drei Becher und zwei Würfel bzw. Ein Becher und zehn Würfel

  gelegt werden. Die Waage ist im Gleichgewicht, wenn in den Bechern jeweils vier Würfel enthalten sind.

  Es können dann die Äquivalenzumformungen simuliert werden, indem auf den beiden Schalen jeweils gleich viele Würfel bzw. Becher dazugelegt oder weggenommen werden.

12.3.3 Grenzen

Das Waage–Modell hat Grenzen, da ...

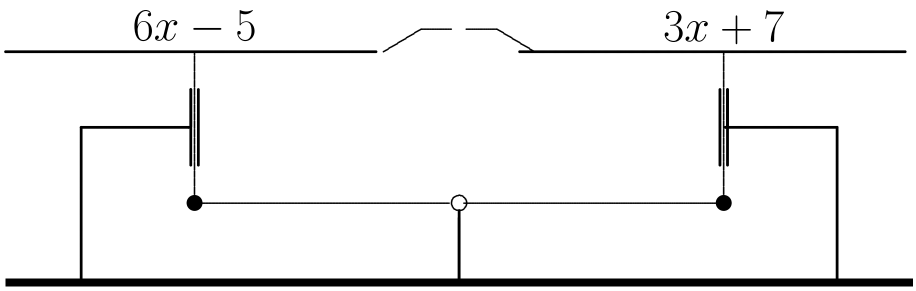
- beliebige negative, rationale oder reelle Zahlen
- das Quadrat oder andere Potenzen von Variablen
- die Multiplikation mit bzw. Division durch negative Zahlen

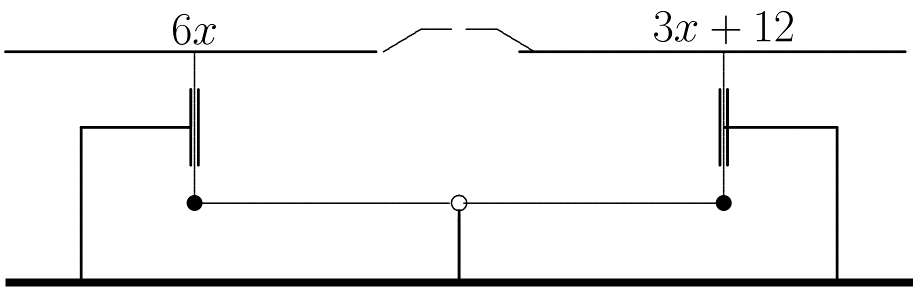
nicht gut repräsentiert werden können.

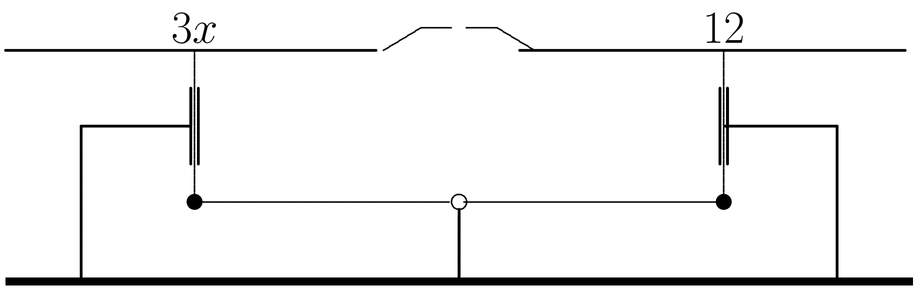
Wie soll beispielsweise bei dem Beispiel $6x - 5 = 3x + 7$ (siehe nächste Seite) der Teilterm -5 realisiert werden?

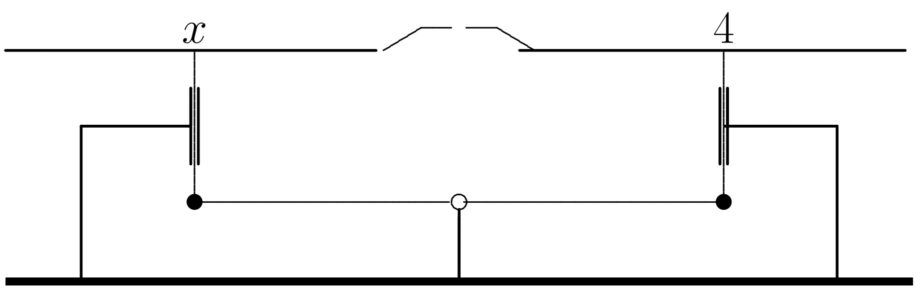
12.3.4 Schaubilder zum Waage-Modell

Die linke und rechte Seite einer Gleichung „liegen” auf den beiden Schalen einer Tafelwaage.









12.4 Kontextfelder für Gleichungen

Gleichungen treten nicht nur als zu erfüllende Aussageformen (innerhalb eines Problems), sondern auch als Aussagen (bei Sätzen, Definitionen,...), auf.

- Formeln als Gleichungen: Mathematik, Physik, Wirtschaft, Statistik

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\ (a+b)\cdot(a-b) &= a^2 - b^2 \\ \tfrac{1}{R_{\text{ges}}} &= \tfrac{1}{R_1} + \tfrac{1}{R_2} \\ \text{BE} &= \text{NE} + \text{St} + \text{SA} \end{aligned}$$

- Mengenbeschreibende Gleichungen:

$$Q \;=\; \Big\{ n \in \mathbb{N} \;\Big|\; \text{Es existiert ein } m \in \mathbb{N}, \text{ so dass } m^2 = n \Big\}$$

- Funktionsgleichungen:

$$y \;=\; f(x) \;=\; x^2 + -3x + 5$$

  Ermittlung einer Nullstelle bzw. Auflösen einer Funktion nach dem Wert.

12.5 Typische Fehler bei Äquivalenzumformungen von Gleichungen

Beachte, dass im folgenden Fehler beschrieben werden. Die angegebenen Umformungen sind also keine (gültigen) Äquivalenzumformungen.

- Fehler beim Rechnen mit Zahlen (aller Art)!
- Fehler bei Termumformungen.
- Die Variable in einem Produktterm wird durch Subtraktion isoliert:

$$3x + 5 \;=\; 26 \;\Big|\, -3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x + 5 \;=\; 23$$

$$23(3x-7) \;=\; 115 \;\Big|\, -23 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3x - 7 \;=\; 92$$

$$6x + 3 \;=\; 12 \;\Big|\, -5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x + 3 \;=\; 7$$

- Mangelnde Berücksichtigung des Distributivgesetzes:

$$2x + 3 \;=\; 4 \;\Big|\, : 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x + 3 \;=\; 2$$

- Vermeintliche Berücksichtigung des Distributivgesetzes:

$$25 \cdot (x+15) \;=\; 150 \quad \Big| :5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 5 \cdot (x+3) \;=\; 30$$

- Zwei Schritte werden zugleich ausgeführt und dabei die Reihenfolge vertauscht:

$$6x^2 + 4x + 14 \;=\; -8x \quad \Big| + 8x \;\; :2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3x^2 + 10x + 7 \;=\; 0$$

- Beim ,,Rüberbringen" treten Vorzeichenfehler auf:

$$6x^2 + 4x + 14 \;=\; -8x \quad \Big| + 8x \qquad \Longleftrightarrow \qquad 6x^2 - 4x + 14 \;=\; 0$$

(Das vorhandene Vorzeichen bei $8x$ wirkt zu stark.)

- Fehler mit Null und Eins:

$$25 \cdot x \;=\; 25 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \;=\; 0$$

(Die Operation $\cdot x$ auf der linken Seite ist ,,ohne Einfluss", also muss x gleich Null sein.)

$$3x - 2 \;=\; 0 \quad \Big| + 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3x \;=\; 0$$

- Fehler im Zusammenhang mit Brüchen:

$$140\,a + 70 \;=\; \frac{35}{x} \quad \Big| :35 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4a + 2 \;=\; x$$

- Mangelndes Problembewusstsein um Gewinn- und Verlustumformungen.

$$x^2 \;=\; 625 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \;=\; 25$$

oder

$$|x-2| \;=\; 27 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \;=\; 29$$

- Viele dieser Fehler treten verstärkt auf, wenn Parameter (Variable) anstelle von Zahlen in den Gleichungen auftreten.
- Bei Ungleichungen: Falsche Berücksichtigung der Umkehr des Relationszeichens.
- Mangelnde Unterscheidung von Mal–Punkten und Minuszeichen (Schrift).

12.6 Modellbildung durch Gleichungen

12.6.1 Schrittfolge

Bei der Modellbildung durch Gleichungen bietet sich die folgende Schrittfolge an.

V (Variable). Welches ist die genaue Bedeutung der (unbekannten) Variablen?

T (Terme) Mit Hilfe der Variable und der Daten der Aufgabe werden Terme gebildet (vielleicht in einer Tabelle).

G (Gleichung) Die Aufgabe beinhaltet eine Information über Gleichheit (oder Vielfachheit) von Termen. Dies wird in Form einer Gleichung zwischen diesen Termen mathematisiert.

L (Lösung) Dies ist ein innermathematisches Problem.

A (Antwort) Vergleiche unten: Interpretation.

P (Probe) Eventuell empfiehlt sich eine Probe innerhalb des Kontexts der Sachaufgabe.

12.6.2 Beispiel 1: Kartenkauf

Die Eintrittskarte für das DFB-Pokal-Spiel kostet für Erwachsene dreimal so viel wie die für Kinder. Familie Socker (Vater, Mutter, drei Kinder) hat insgesamt 108 Euro bezahlt.

V x (Euro) sei der Preis für eine Kinderkarte.

T Der Preis für eine Erwachsenenkarte ist dann $3 \cdot x$.

G Der Gesamtpreis führt auf die Gleichung

$$2 \cdot (3 \cdot x) + 3 \cdot x = 108$$

L

$$\begin{aligned} 2 \cdot (3 \cdot x) + 3 \cdot x &= 108 \\ 6x + 3x &= 108 \\ 9x &= 108 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

A Eine Kinderkarte kosten 12 Euro, die Karte für Erwachsene 36 Euro.

P Der Preis für 3 Kinderkarten und zwei Erwachsenenkarten ist tatsächlich (in Euro)

$$3 \cdot 12 + 2 \cdot 36 = 108.$$

12.6.3 Beispiel 2: Jagdausbeute

Nach einer Jagd werden die erlegten Hasen und Wildschweine betrachtet: Insgesamt sind es 74 Tiere mit 250 Beinen. Wie viele Tiere sind es jeweils?

V Die Anzahl der Wildschweine wird mit x bezeichnet.

T Es ist dann die Anzahl der Hasen gleich $74 - x$.

G Die ,,Bilanz der Beine” führt auf die Gleichung

$$4 \cdot x + (74 - x) \cdot 2 = 250$$

L

$$\begin{aligned} 4 \cdot x + (74 - x) \cdot 2 &= 250 \\ 4 \cdot x + 148 - 2 \cdot x &= 250 \\ 2 \cdot x + 148 &= 250 \\ 2 \cdot x &= 102 \\ x &= 51 \end{aligned}$$

A Es wurden 51 Wildschweine und 23 Hasen erlegt.

P Probe. Es sind tatsächlich $51 + 23 = 74$ Tiere mit $4 \cdot 51 + 2 \cdot 23 = 250$ Beinen.

12.6.4 Beispiel 3: Zwei Schäfer

Ein Schäfer sagt zum anderen: Wenn Du mir ein Schaf gibst, haben wir gleich viele.
Sagt der andere zum ersten: Wenn Du mir ein Schaf gibst, habe ich doppelt so viele wie Du.

V Die Anzahl der Schafe des ersten Schäfers (beim Zusammentreffen, ohne Tauschaktionen) werde mit x bezeichnet.

T Aus der ersten Aussage lässt sich erschließen, dass der zweite Schäfer zwei Schafe mehr, also $x + 2$ Schafe hat.

G Der zweite Satz führt zur Gleichung:

$$x + 2 + 1 = 2 \cdot (x - 1)$$

L

$$\begin{aligned} x + 2 + 1 &= 2 \cdot (x - 1) \\ x + 3 &= 2x - 2 \\ 5 &= x \end{aligned}$$

A Der erste Schäfer hat (beim Zusammentreffen) 5 Schafe, der zweite hat 7 Schafe.

P Probe. Spiele die Situation mit Hilfe der Lösung nochmals durch.

12.6.5 Beispiel 4: Mary and Ann

Maria ist 24 Jahre alt. Sie ist doppelt so alt, wie Anne war, als Maria so alt war, wie Anne jetzt ist. Wie alt ist Anne? (Gesellschaftliches Ereignis, New York, 20er Jahre).

V x ist das jetzige Alter von Anne in Jahren.

T Es wird eine Tabelle angelegt, in der die zugehörigen Terme eingetragen werden.

	Maria	Anne
jetzt	24	x
früher	x	$x-(24-x)$

Der Eintrag x bei ,,Maria früher" ergibt sich aus der Formulierung ,,als Maria so alt war, wie Anne jetzt ist"

Die bei ,,Anne früher" abzuziehende Zeitspanne $24 - x$ ergibt sich aus den beiden Einträgen in der ,,Maria"-Spalte.

G $$24 = 2 \cdot \Big[x - (24 - x)\Big]$$

L
$$\begin{aligned}
24 &= 2 \cdot \Big[x - (24 - x)\Big] \\
24 &= 2 \cdot \Big[2x - 24\Big] \\
24 &= 4x - 48 \\
72 &= 4x \\
x &= 18
\end{aligned}$$

A Anna ist jetzt 18 Jahre alt. Vor sechs Jahren war Maria so alt wie Anna jetzt ist. Damit ist Maria jetzt doppelt so alt wie Anna damals war.

P

	Maria	Anne
jetzt	24	18
früher	18	12

12.7 Lineare Gleichungen

12.7.1 Definition: Lineare Gleichung

Eine Gleichung, die sich — direkt oder nach einer Äquivalenzumformung — in der Form

$$m \cdot x + t = 0$$

mit fest gegebenen Zahlen $m, t \in \mathbb{R}$ schreiben lässt, heißt *Lineare Gleichung.*

Als Grundmenge sind dabei im allgemeinen $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ vorgesehen.

12.7.2 Beispiele

$$\begin{aligned} x - 3 &= 5 \\ 5x - 2 &= 38 \\ 4x - 2 &= -5x + 8 \\ x^2 + 8x - 2 &= (x-5)^2 + 2x - 9 \end{aligned}$$

12.7.3 Bemerkungen: Parameter

- In der Definition 12.7.1 treten gleich drei verschiedene ,,Buchstaben" in Erscheinung. Während das x — wie oft üblich — die tatsächliche Variable der Gleichung (oder Aussageform) darstellt, spielen m und t die Rolle von so genannten *Parametern.*
- Parameter sollten innerhalb der Gleichung als ,,feste, aber dennoch unbekannte" Zahlen angesehen werden. Man könnte hinsichtlich der ,,Festigkeit" eine Reihenfolge

  Zahl — Parameter — Variable

  konstatieren. Diese Begriffe lassen sich aber nicht klar als eigenständige mathematische Objekte definieren.
- Diese unterschiedlichen Auffassungen im Umgang mit Symbolen bergen nicht wenige Probleme für Schüler/innen, die mathematische Denkweisen nur bei vergleichsweise konkreten Problemstellungen (eben ohne ,,Buchstaben") vollziehen können.
- Es ist auch

  $$k \cdot y + c = 0$$

  eine lineare Gleichung. Hier tritt y als Variable auf. k und c sind die Parameter.
- Während eine solche Auswechslung von Symbolen lediglich eine andere Schreibweise für den gleichen Gleichungstyp darstellt, wird ihr von vielen Menschen, eben auch Schülern, eine (große) Bedeutung unterstellt.

12.7.4 Satz: Lösungsmenge der linearen Gleichung

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

(i) Ist $m \neq 0$, so enthält die Lösungsmenge genau ein Element: $L = \{-\frac{t}{m}\}$.

(ii) Ist $m = 0$ und $t \neq 0$, so ist die Lösungsmenge leer: $L = \{\ \}$.

(iii) Ist $m = 0$ und $t = 0$, so ist die Lösungsmenge gleich der Grundmenge: $L = G$.

12.7.5 Lösungsverfahren

Überlege anhand des Beispiels

$$5x - 2 \quad = \quad 38$$

- Versuch und Irrtum: Es werden einfach verschiedene Zahlen aus der Grundmenge für die Variable x eingesetzt, die Gleichung dann auf ihre Gültigkeit getestet. Dabei können Strategien / Tricks erkannt werden:
  - Muss die Lösung gerade oder ungerade sein?
  - Sollte man größere bzw. kleinere Zahlen einsetzen?
  - Kann man erkennen, ob die Lösung eine Bruchzahl oder eine negative Zahl sein muss?
- Schrittweise Reduktion durch Verbalisierung:
  Die Gleichung wird in der Form $m \cdot x = -t$ betrachtet. Die Frage nach der Lösung kann dann wie folgt verbalisiert werden:
  - Mit welcher Zahl muss m multipliziert werden, so dass man $-t$ erhält.
- Lösen mit Hilfe von ,,Umkehroperatoren”. Es wird die Unbekannte x durch Umkehroperationen ,,herausgeschält”. Im Beispiel: Es wird 2 zu 38 dazugezählt und dann durch 5 dividiert.
- Algebraische Lösung mit Hilfe des ,,Waage-Modells”, siehe Abschnitt 12.3.
  - Addiere auf beiden Seiten $-t$.
  - Falls $m \neq 0$, dividiere durch m. Die Lösung steht dann direkt da.
  - Falls $m = 0$, ist die Lösungsmenge offensichtlich.
- Fertige Lösungsformel. Siehe dazu oben den Satz 12.7.4.
- Graphische Lösung mit Hilfe des Graphen der linearen Funktion. Die Lösungsmenge ergibt sich aus den Schnittpunkten mit der x-Achse.
- Tabelle / Tabellenkalkulation: Es wird eine Tabelle der Werte der linearen Funktion angelegt. Daraus kann die Lösung ermittelt werden.
- Einsatz von elektronischen Hilfsmitteln aller Art.

13 Quadratische Gleichungen

13.1 Einführung

13.1.1 Der Begriff

Eine Gleichung, die sich — direkt oder nach einer Äquivalenzumformung — in der Form

$$\underbrace{a \cdot x^2}_{\text{qu.G.}} + \underbrace{b \cdot x}_{\text{l.G.}} + \underbrace{c}_{\text{k.G.}} = 0$$

mit fest gegebenen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ schreiben lässt, heißt *Quadratische Gleichung.*

13.1.2 Kommentare

- Als Grundmenge ist meist $G = \mathbb{R}$ (stillschweigend) vorgegeben.
- Den Fall $a = 0$ kann man ausschließen, er führt zurück auf die lineare Gleichung, siehe Abschnitt 12.7.
- Die Abkürzungen bedeuten *quadratisches, lineares* bzw. *konstantes Glied.* Der Parameter a heißt *Formfaktor.*
- Ist $b = 0$, so spricht man von einer *reinquadratischen* Gleichung.

  $$ax^2 + c = 0$$

  Umgekehrt heißt dann eine quadratischen Gleichung mit $b \neq 0$ *gemischtquadratisch.*
- Die obige Form der Gleichung heißt *Normalform* oder *Summenform* der quadratischen Gleichung — im Gegensatz zur Scheitelform, die eher geometrisch wichtig ist.
- Zur Bedeutung und Wahl der Buchstaben x, a, b, c vergleiche die Kommentare in Abschnitt 12.7.3.

13.1.3 Beispiele

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad\qquad x^2 = 36$$

$$3x^2 + 7x - 36 = 28x - 25x^2 - 40 \qquad\qquad x \cdot (x+5) = 8$$

$$(x-25)^2 = 0 \qquad\qquad 5x - 3 = 0 \quad \text{(Nicht–Beispiel)}$$

Die Variable muss nicht unbedingt x sein. Auch

$$3y^2 + 5y - 12 = 0$$

ist eine quadratische Gleichung.

13.2 Lösungsverfahren anhand von Beispielen

13.2.1 Vorbemerkung

Die Sofort–Präsentation der Lösungsformel ist insofern ungünstig, als die Schüler/innen den Eindruck erhalten, dass sie fertige Werkzeuge einfach nur benutzen sollen und sie ,,sowieso" keine Einsicht in ihr Zustandekommen bekommen können.

Im folgenden wird ein Vorschlag beschrieben, bei dem

- mit ganz einfachen leicht lösbaren quadratischen Gleichungen begonnen wird,
- der Schwierigkeitsgrad immer weiter gesteigert wird,
- bis zum Schluss auch die allgemeinen quadratischen Gleichungen gelöst werden.

Die Beispielklassen entstehen durch unterschiedliche Kombinationen der Bedingungen

$$a = 1 \qquad b = 0 \qquad c = 0 \qquad D < 0 \;|\; D = 0 \;|\; D > 0,$$

wobei $D := b^2 - 4ac$ die so genannte *Diskriminante* ist.

13.2.2 Beispielklassen ,,Vom Einfachen zum Schwierigen"

BK 1	$x^2 = 0$	$a = 1$	$b = 0$	$c = 0$	$D = 0$

$$x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad L = \{0\}$$

BK 2	$ax^2 = 0$	a	$b = 0$	$c = 0$	$D = 0$

$$7x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad L = \{0\}$$

BK 3	$x^2 + bx = 0$	$a = 1$	b	$c = 0$	$D = b^2$

$$\begin{aligned} & x^2 - 10x = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & x \cdot (x - 10) = 0 \quad \Longrightarrow \quad L = \{0; 10\} \end{aligned}$$

Es wird also x in dem Term auf der linken Seite ausgeklammert. Dann wird die wichtige Einsicht benötigt, dass das Produkt zweier Zahlen genau dann Null ist, wenn mindestens einer der beiden Faktoren Null ist.

BK 4	$ax^2 + bx = 0$	a	b	$c = 0$	$D = b^2$

$$\begin{aligned} & 7x^2 + 4x = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & 7 \cdot x \cdot (x + \tfrac{4}{7}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad L = \{0; -\tfrac{4}{7}\} \end{aligned}$$

BK 5	$x^2 + c \;=\; 0$	$a = 1$	$b = 0$	c	$D = -4c$

$$x^2 - 25 = 0 \implies L = \{-5; +5\}$$
$$x^2 - 12 = 0 \implies L = \{-\sqrt{12}; +\sqrt{12}\}$$
$$x^2 + 9 = 0 \implies L = \{\,\}$$

BK 6	$ax^2 + c \;=\; 0$	a	$b = 0$	c	$D = -4ac$

$$9x^2 - 25 = 0 \implies L = \{-\tfrac{5}{3}; +\tfrac{5}{3}\}$$
$$2x^2 - 4 = 0 \implies L = \{-\sqrt{2}; +\sqrt{2}\}$$
$$-5x^2 - 80 = 0 \implies L = \{\}$$

BK 7	$x^2 + bx + c \;=\; 0$	$a = 1$	b	c	$D = b^2 - 4c = 0$

$$\begin{aligned} & x^2 - 10x + 25 = 0 \\ \iff\quad & (x-5)^2 = 0 \\ \iff\quad & x - 5 = 0 \qquad \implies L = \{5\} \end{aligned}$$

BK 8	$x^2 + bx + c \;=\; 0$	$a = 1$	b	c	$D = b^2 - 4c > 0$

$$\begin{aligned} & x^2 - 10x + 16 = 0 \\ \iff\quad & x^2 - 10x + 25 - 9 = 0 \\ \iff\quad & (x-5)^2 - 9 = 0 \\ \iff\quad & (x-5)^2 = 9 \\ \iff\quad & x - 5 = -3 \quad \text{oder} \quad x - 5 = +3 \\ \iff\quad & x = 2 \quad \text{oder} \quad x = 8 \\ \implies\quad & L = \{2; 8\} \end{aligned}$$

Die Äquivalenzumformung von der ersten zur zweiten Gleichung heißt *quadratische Ergänzung*. Tatsächlich ist die zweite Gleichung ,,komplizierter" als die erste, was zunächst der sonst unterliegenden Intention des ,,Vereinfachens" widerspricht. Dass diese Äquivalenzumformung zum Ziel führt, wird in den nachfolgenden Schritten, also erst im Nachhinein, klar.

BK 9	$x^2 + bx + c \;=\; 0$	$a = 1$	b	c	$D = b^2 - 4c < 0$

$$\begin{aligned} & x^2 - 10x + 74 = 0 \\ \iff\quad & x^2 - 10x + 25 + 49 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff \quad & (x-5)^2 + 49 &=& \ 0 \\ \iff \quad & (x-5)^2 &=& \ -49 \\ \implies \quad & L = \{\ \} \end{aligned}$$

BK 10	$ax^2 + bx + c \ = \ 0$	a	b	c	$D = b^2 - 4c = 0$

$$\begin{aligned} & 9x^2 + 12x + 4 &=& \ 0 \\ \iff \quad & (3x+2)^2 &=& \ 0 \\ \iff \quad & (3x+2) &=& \ 0 \\ \implies \quad & L = \{-\tfrac{2}{3}\} \end{aligned}$$

BK 11	$ax^2 + bx + c \ = \ 0$	a	b	c	$D = b^2 - 4c > 0$

$$\begin{aligned} & 9x^2 + 24x - 9 &=& \ 0 \\ \iff \quad & 9x^2 + 24x + 16 - 25 &=& \ 0 \\ \iff \quad & (3x+4)^2 - 25 &=& \ 0 \\ \iff \quad & (3x+4)^2 &=& \ 25 \\ \iff \quad & 3x + 4 &=& \ -5 \quad \text{oder} \ 3x+4 = +5 \\ \iff \quad & x &=& \ -3 \quad \text{oder} \ x = \tfrac{1}{3} \\ \implies \quad & L = \{-3; \tfrac{1}{3}\} \end{aligned}$$

BK 12	$ax^2 + bx + c \ = \ 0$	a	b	c	$D = b^2 - 4c < 0$

$$\begin{aligned} & 9x^2 + 24x + 20 &=& \ 0 \\ \iff \quad & 9x^2 + 24x + 16 + 4 &=& \ 0 \\ \iff \quad & (3x+4)^2 + 4 &=& \ 0 \\ \iff \quad & (3x+4)^2 &=& \ -4 \\ \implies \quad & L = \{\ \} \end{aligned}$$

13.2.3 Kommentare

- Wir haben gesehen, dass Lösungsmengen mit 2, 1 oder 0 Lösungen auftreten! Woran liegt das?
- Hier wurde mit der Lösungsmengen-Schreibweise gearbeitet. Man kann die Lösungen natürlich auch ohne umgebende Mengenklammern einfach so aufschreiben.

13.3 Herleitung der Lösungsformel$^{\ominus}$

13.3.1 Ziel:

Wir wollen eine Formel für die Lösungsmenge einer **beliebigen** quadratischen Gleichung finden, die in Summenform gegeben ist,

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \;=\; 0 \qquad (*)$$

13.3.2 Schrittweises Vorgehen

1. Der Divisionstrick: Wir dividieren die (beiden Seiten der) Gleichung durch den Formfaktor $a \neq 0$

   $$x^2 + \tfrac{b}{a} \cdot x + \tfrac{c}{a} \;=\; 0.$$

2. Quadratische Ergänzung: Wir schieben zwei Summanden dazwischen, die sich kompensieren:

   $$x^2 + \tfrac{b}{a} \cdot x \underbrace{+ \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2}_{=0} + \tfrac{c}{a} \;=\; 0.$$

3. Wir wenden die binomische Plusformel in ,,Rückwärtsrichtung" an:

   $$\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 + \tfrac{c}{a} \;=\; 0.$$

4. Wir ,,schälen" den quadratischen Term ,,heraus"

   $$\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 \;=\; \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{c}{a}.$$

   und formen die rechte Seite weiter um

   $$\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 \;=\; \tfrac{1}{4a^2} \cdot (\underbrace{b^2 - 4ac}_{=:D}).$$

   Der Ausdruck D heißt *Diskriminante*. Wir können übersichtlicher schreiben:

   $$\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 \;=\; \tfrac{D}{4a^2} \qquad (**).$$

   Beachte, dass die Anfangsgleichung $(*)$ und die Endgleichung $(**)$ äquivalent sind, sie besitzen also die gleichen Lösungsmengen.

5. Wir unterscheiden jetzt drei Fälle:

$\boxed{D > 0}$ Die Diskriminante ist positiv.

Dann ist die Gleichung $(**)$ äquivalent zu der Aussage:

$$\begin{array}{rcl} x + \frac{b}{2a} &=& +\frac{\sqrt{D}}{2a} \quad \text{oder} \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a} \\ \iff \quad x &=& -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} \quad \text{oder} \quad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} \end{array}$$

Wir können also die Lösungsmenge aufschreiben:

$$L = \left\{ -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}; -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} \right\} = \left\{ -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} \right\}.$$

$\boxed{D = 0}$ Die Diskriminante ist Null.

Dann ist die Gleichung $(**)$ äquivalent zu der linearen Gleichung:

$$x + \frac{b}{2a} = 0,$$

die wir leicht lösen können:

$$L = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}.$$

$\boxed{D < 0}$ Die Diskriminante ist negativ.

Dann besitzt die Gleichung $(**)$, demzufolge auch die Gleichung $(*)$ keine Lösung:

$$L = \{ \ \}.$$

Wir fassen dieses Verfahren in einem Satz zusammen.

13.3.3 Satz: „Mitternachtsformel"

Es sei eine quadratische Gleichung in Summenform vorgegeben:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

mit Grundmenge $G = \mathbb{R}$ vorgegeben.

Es wird dann die Diskriminante als Ausdruck $D := b^2 - 4ac$ gebildet. Ist dann

- $D < 0$, so gibt es keine Lösung. Die Lösungsmenge ist $L = \{ \ \}$.
- $D = 0$, so gibt es genau eine Lösung. Die Lösungsmenge ist $L = \{ -\frac{b}{2a} \}$.
- $D > 0$, so gibt es genau zwei verschiedene Lösungen. Die Lösungsmenge ist

$$L = \{ -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}; -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} \}.$$

13.3.4 Weitere Kommentare

- Will man die Sprech- und Schreibweisen mit den Lösungsmengen vermeiden, so werden nur die ,,Lösungen" — wie oft in Schulbüchern oder Formelsammlungen — präsentiert:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Es treten hier Verständnis-Erschwerungen auf, die in den folgenden Fragen verborgen sind:

  - Warum werden aus der einen Variablen x in der Gleichung plötzlich zwei Variable x_1 und x_2?
  - Was bedeutet das Rechenzeichen $\pm$?
  - Was ist, wenn die Zahl unter der Wurzel Null ist?
  - Was ist, wenn die Zahl unter der Wurzel negativ ist?

- Innerhalb des Lernziels ,,Beherrschen der Lösungsformel und ihrer Anwendung" sollten sich die extremen kognitiven Kategorien

$$\begin{array}{c} \text{Auswendig / Algorithmisch / Abarbeitend} \\ \updownarrow \\ \text{Lebendig verstehend / Inhaltlich orientiert / Verstehend-erarbeitend} \end{array}$$

in ausgeglichener Weise ergänzen.

- Die Probe ermöglicht die Einsicht, dass es sich bei der Lösungsformel nicht um eine inhaltsleere, formalistische Prozedur, sondern um ein sinnvolles Lösungsverfahren, handelt.

- Der Schwierigkeitsgrad innerhalb des Gebiets der quadratischen Gleichungen lässt sich problemlos steigern:

  - Die beteiligten Konstanten a, b, c sind größere, negative, rationale oder reelle Zahlen.
  - Parameter–Gleichungen: Die Zahl der Lösungen hängt von einem Parameter ab.
  - Biquadratische Gleichungen sind quadratische Gleichungen in der Variablen x^2. Sie werden mit Hilfe einer Substitution $u = x^2$ gelöst.
  - Wurzelgleichungen sind quadratische Gleichungen in der Variablen $\sqrt{x}$.
  - Bruchgleichungen

- Es gibt in der höheren Mathematik eine Zahlenmenge $\mathbb{C}$, die so genannte Menge der komplexen Zahlen. In ihr haben alle quadratischen Gleichungen (eben auch mit Diskriminante $D < 0$ Lösungen. Beispielsweise hat die Gleichung

$$x^2 = -1$$

die beiden Lösungen $x_1 = +i \in \mathbb{C}$ und $x_2 = -i \in \mathbb{C}$.

13.4 Quadratische Gleichungen mit Formfaktor $a = 1$ ⊖

Im M-Zweig der Mittelschule werden nur quadratische Gleichungen mit Formfaktor $a = 1$ betrachtet. Sie lassen sich also in die Form

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

umformen. Jede quadratische Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

kann durch die Äquivalenzumformung „Division durch a" in die einfachere Form mit

$$p = \tfrac{b}{a} \qquad q = \tfrac{c}{a}$$

gebracht werden.

13.4.1 p-q-Lösungsformel

Die Lösungsformel wird in diesem Fall zur so genannten *p-q-Formel*

$$x_{1,2} = \tfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = -\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

oder besser und leichter verständlich:

$$x_1 = -\tfrac{p}{2} + \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 - q}$$

$$x_2 = -\tfrac{p}{2} - \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 - q}.$$

13.4.2 Der Satz von Vieta

Bei gegebenen Parametern $p, q \in \mathbb{R}$ sind die beiden folgenden Aussagen über zwei Zahlen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ äquivalent:

(A) Die Zahlen x_1 und x_2 sind Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

(B) Das Zahlenpaar (x_1, x_2) ist Lösung des (nichtlinearen) Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p \\ x_1 \cdot x_2 &= q \end{aligned}$$

13.4.3 Beweis

Ist (A) erfüllt, so folgt mit der p-q-Formel

$$x_1 = -\tfrac{p}{2} + \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 - q}, \qquad x_2 = -\tfrac{p}{2} - \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 - q}$$

Addiert man diese beiden Zahlen, so folgt die obere Gleichung in (B).
Multipliziert man diese beiden Zahlen, so folgt die untere Gleichung in (B).

Ist (B) erfüllt, so folgt mit der oberen Gleichung

$$x_1 = -x_2 - p.$$

Setzt man das in die untere Gleichung ein, so folgt

$$\begin{aligned} & (-x_2 - p) \cdot x_2 = q \\ \Longleftrightarrow \quad & -x_2^2 - p \cdot x_2 = q \\ \Longleftrightarrow \quad & x_2^2 + p \cdot x_2 + q = 0 \end{aligned}$$

Also ist x_2 eine Lösung der quadratischen Gleichung in (A). Vertauscht man in dieser Argumentation die Rollen von x_1 und x_2, so folgt auch, dass x_1 eine Lösung ist.

13.4.4 Kommentar

Der Satz von Vieta stellt eine zusätzliche Einsicht in den Zusammenhang von Lösungen und Parametern bei einer quadratischen Gleichung zur Verfügung. Für sich allein genommen stellt er kein geschlossenes Verfahren zum Lösen bereit.

13.5 Kontextfelder für quadratische Gleichungen$^{\ominus}$

13.5.1 Innermathematische Bezüge

- Bezug zu quadratischen Funktionen und Wurzel–Funktionen
- Binomialkoeffizient: Bestimme n bei gegebenem a

$$\binom{n}{2} = a \quad \iff \quad \frac{n(n-1)}{2} = a$$

- Zahlrätsel
  - Multipliziert man Vorgänger und Nachfolger einer Zahl, so kommt 8 heraus.
  - Multipliziert man die Summe aus dem Vierfachen einer Zahl und 2 mit der Differenz des Dreifachen dieser Zahl und 7, so erhält man 176.

13.5.2 Geometrie

- Satzgruppe des Pythagoras
- Flächenformeln enthalten quadratische Terme
- Schnittpunkte von Kreis-Kreis oder von Kreis-Gerade
- Die quadratische Gleichung des goldenen Schnitts (Grundmenge $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

$$x - 1 = \frac{1}{x} \quad \iff \quad x^2 - x - 1 = 0$$

13.5.3 Sachsituationen

- Situationen, bei denen die Gleichung

$$b = \binom{n}{2} \quad \iff \quad b = \frac{n(n-1)}{2}$$

bei bekannten b nach n aufgelöst werden soll:

  - Zahl b der Händeschüttelungen bei eine Party mit n Gästen
  - Zahl b aller Trinkglas–Anstöße bei n Gästen
  - Zahl b der Spiele bei einem „Jeder–gegen–jeden"– Turnier bei n Mannschaften
  - Zahl b der Verbindungsstrecken von n Punkten in „allgemeiner" Lage.
  - Zahl b der Verbindungsstrecken von n Punkten auf einer Kreislinie
  - Zahl b der Seiten und Diagonalen in einem regelmäßigen n–Eck
  - Summe b der Zahlen kleiner n.
  - Zahl der Bausteine b in einem Podest der Höhe $n - 1$

13.5.4 Physikalische Kontexte

- Eine Faustformel aus der Fahrschule besagt, dass der Anhalteweg s eines Autos quadratisch von der Geschwindigkeit v abhängt:

  $$s = \left(\frac{v}{10}\right)^2 + 3 \cdot \frac{v}{10} \qquad v \text{ in } \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}, \qquad s \text{ in } \mathrm{m}$$

  Berechne bei gegebenem Anhalteweg die Geschwindigkeit v!

- Der Kraftstoffverbrauch K (in $\frac{\ell}{100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}$) hängt gemischt–quadratisch von der Geschwindigkeit v (in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$) ab:

  $$K = av^2 + bv + c, \qquad \text{wobei} \qquad \begin{array}{ccl} a & \approx & 10^{-4} \dots 10^{-3} \\ b & \approx & 10^{-2} \dots 10^{-1} \\ c & \approx & 10^{\,0} \dots 10^{+1} \end{array}$$

  Berechne bei gegebenem Kraftstoffverbrauch die Geschwindigkeit v!

- Zeitabhängigkeit der Höhe beim vertikalen Wurf:

  $$h = -4,9\,t^2 + v_0\,t + h_0$$

  (t Zeit in Sekunden nach Abwurf, h Höhe in m, v_0 Abwurfgeschwindigkeit in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, h_0 Abwurfhöhe in m).

  Berechne, zu welcher Zeit eine bestimmte Höhe erreicht ist.

14 Funktionen

M8-9 LB 8

M10 LB 7

14.1 Historische Episoden$^{\ominus}$

14.1.1 Funktion als Rechenausdruck — syntaktischer Zugang

Eine Funktion einer veränderlichen Größe ist ein Ausdruck, der auf irgendeine Weise aus der veränderlichen Größe und Konstanten zusammengesetzt ist.

Johann Bernoulli (1667 – 1748, 1718).

14.1.2 Funktion als Zuordnung — semantischer Zugang

Steht eine Variable y so in Beziehung zu einer Variablen x, dass zu jedem numerischen Wert von x gemäß einer Vorschrift ein eindeutiger Wert von y gehört, so heißt y eine Funktion der unabhängigen Variablen x.

P.G. Lejeune Dirichlet (1805 – 1859, 1837).

14.2 Funktion als Zuordnung

14.2.1 Definition

Es seien $\mathcal{D}$ und $\mathcal{W}$ zwei Mengen. Eine Vorschrift, die

jedem Element aus $\mathcal{D}$

genau ein Element aus $\mathcal{W}$

zuordnet, heißt *Funktion* von $\mathcal{D}$ nach $\mathcal{W}$.

14.2.2 Einige Kommentare

- Bei der Definition handelt es sich letztlich um einen Ettikettenschwindel: Der Ausdruck ,,Vorschrift" ist ja genauso wenig definiert wie der Begriff ,,Funktion".
- Innerhalb der Schul–Algebra und Schul–Analysis sind die beteiligten Mengen meist Teilmengen (insbesondere Intervalle) des aktuellen Zahlbereichs $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$.
- In der Geometrie tritt ebenfalls der Funktionsbegriff auf, man spricht aber von (geometrischen) Abbildungen. Die zugrundeliegenden Mengen D und W sind dann Teilmengen der ,,Zeichenebene".
- Die Elemente der Definitionsmenge werden praktisch immer mit dem Buchstaben x und die der Wertemenge mit y bezeichnet. (Vor- und Nachteile?)
- Oft, nicht nur im schulischen Kontext, werden die Elemente der Definitionsmenge (bzw. das Symbol dafür im Funktionsterm) ,,unabhängige Variable" und die der Wertemenge ,,abhängige Variable" genannt.
- Innerhalb der Fachmathematik wird eine Funktion beispielsweise so angegeben:

$$f : \begin{cases} \mathcal{D} & \to & \mathcal{W} \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

- In der schulischen Notation wird die Angabe der Mengen unterdrückt. Man schreibt also nur

  $$f : x \mapsto f(x)$$

- Einige besondere Bezeichnungen seien anhand des Beispiels

  $$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^2 - 5 \end{cases}$$

  erklärt:

Funktionsvorschrift	$x \mapsto 2x^2 - 5$
Funktionsterm	$2x^2 - 5$
Funktionsgleichung	$y = 2x^2 - 5$

- Die beiden Begriffe ,,Definitionsmenge" und ,,Definitionsbereich" stimmen überein.

- Hinsichtlich des Begriffs der Definitionsmenge treten Inkonsistenzen auf:

  In der allgemeinen Einführung des Funktionsbegriffs tritt die Definitionsmenge — korrekt — als vorgegebenes Objekt auf.

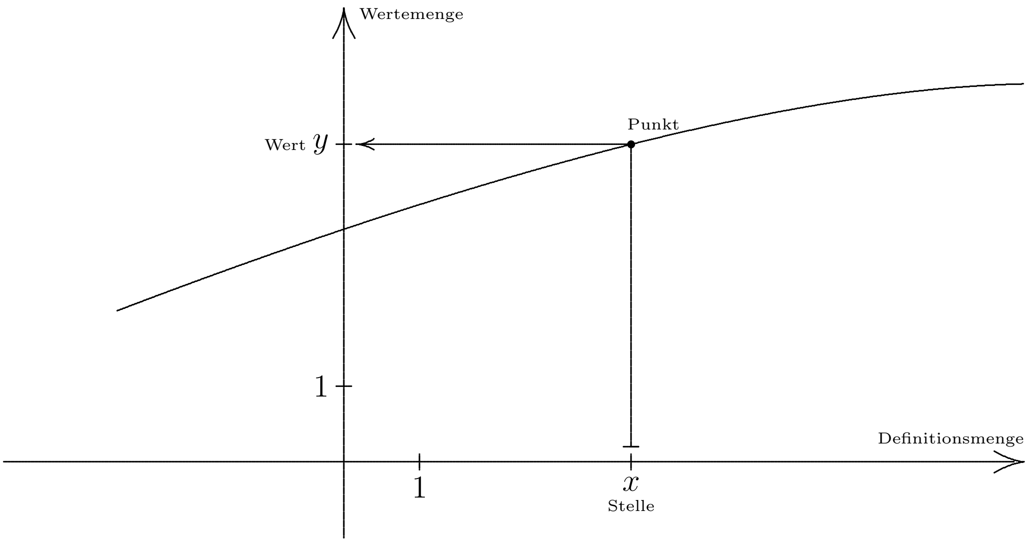
  In der schulischen Praxis dagegen muss meist der ,,maximale Definitionsbereich" aus dem Funktionsterm $f(x)$ als Teilmenge einer Grundmenge ($\mathbb{R}$) bestimmt werden. Dabei treten die folgenden Bedingungen an die maximale Definitionsmenge in Erscheinung:

  – Nenner dürfen nicht Null werden

  – Radikanden dürfen nicht negativ werden

14.3 Darstellung von Funktionen als Graphen

Sind Definitions– und Bildmenge einer Funktion Teilmengen von $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$, so wird eine veranschaulichende Darstellung als Graph möglich.



- Die Definitionsmenge D wird als (Teilmenge der)

  $$\text{Rechtswertachse} \quad = \quad \text{horizontale Achse} \quad = \quad x\text{–Achse} \quad = \quad \text{Abszisse}$$

  aufgefasst.

- Die Wertemenge $\mathcal{W}$ wird als (Teilmenge der)

  $$\text{Hochwertachse} \quad = \quad \text{vertikale Achse} \quad = \quad y\text{–Achse} \quad = \quad \text{Ordinate}$$

  aufgefasst.

- Die graphische Darstellung der Funktion (oder Relation) geschieht dadurch, dass jedes ,,Stelle-Wert-Paar" (x, y) in der mit einem Koordinatensystem versehenen Zeichenebene $\mathbb{E}$ als Punkt markiert wird:

  $$\begin{aligned} G_f &= \left\{ P(x|y) \in \mathbb{E} \;\middle|\; x \in \mathcal{D} \quad \wedge \quad y = f(x) \right\} \\ &= \left\{ P(x|f(x)) \in \mathbb{E} \;\middle|\; x \in \mathcal{D} \right\} \quad \subseteq \quad \mathcal{D} \times \mathcal{W}. \end{aligned}$$

- Unterscheide die Begriffe

Symbol	Begriff	Element der ...	graphisch ...	bzw.
x	Stelle	Definitionsmenge	Rechtswertachse	x-Achse
y	Wert	Wertemenge	Hochwertachse	y-Achse
(x, y)	Punkt	Kart. Produkt	Zeichenebene	(x, y)-Koordinatensystem

Sowohl in der Fachmathematik als auch in der Schulmathematik wird dieses Begriffssystem nur teilweise durchgehalten.

- Bei der graphischen Darstellung tritt der ,,dynamische" Charakter der Funktion (Zuordnung) wieder in den Hintergrund, der Graph ist eher ein ,,statisches" Objekt.

  Die Verbindung der beiden Auffassungen kann durch den im Diagramm angedeuteten ,,Eckpfeil" hergestellt werden.

14.4 Didaktische Aspekte zur Erschließung des Funktionsbegriffs

Die Erschließung von Funktionen geschieht in dem durch das folgende Diagramm abgesteckten Wechselspiel:

$$\begin{tikzcd}
\text{Abbildung} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{Term} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{Graph} \arrow[r, leftrightarrow] & \text{Auswerten}
\end{tikzcd}$$

14.5 Lineare Funktionen

14.5.1 Definition: Lineare Funktion

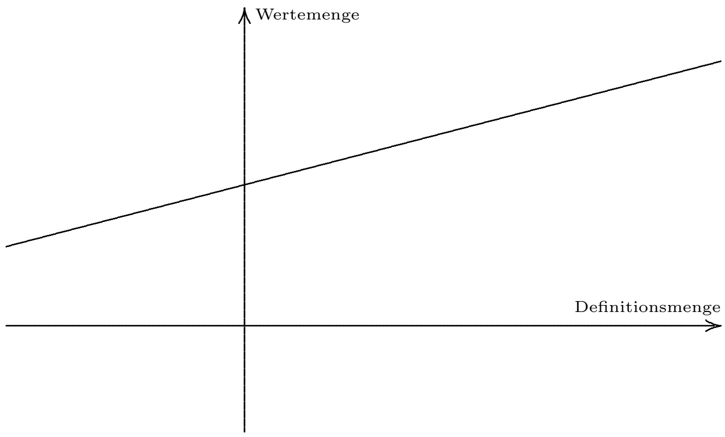
Eine Funktion, die in der Gestalt

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & m \cdot x + t \end{cases}$$

angegeben werden kann, wobei $m, t \in \mathbb{R}$ zwei beliebige, aber fixierte, Konstanten (Parameter) sind, heißt *lineare Funktion.*

14.5.2 Graphische Darstellung

Der Name kommt daher, dass eine Funktion genau dann linear ist, wenn ihr Graph eine Gerade darstellt.



14.5.3 Kommentare

Es tritt hier beispielhaft ein Grundkonflikt der Schulmathematik in Erscheinung: Die mehr oder weniger starke Fixierung bzw. Reservierung von bestimmten Buchstabensymbolen (hier x, y, m, t) für bestimmte Variable oder Parameter beinhaltet Vor– und Nachteile:

- Der Parameter m heißt *Steigung.* Er kann am Graphen im so genannten Steigungsdreieck interpretiert werden.
- Der Parameter t heißt meist *y–Achsen–Abschnitt.* Um die Fixierung auf einen bestimmten Buchstaben zu lösen, könnte/sollte man hier evtl. vom ,,Hochwertachsenabschnitt" sprechen.
- Die spezielle Form der Funktionsvorschrift $m \cdot x + t$ heißt gelegentlich *Normalform.*
- Eine starke Fixierung erhöht den ,,Wiedererkennungswert", (syntaktisch aufgefasste) Manipulationen werden erleichtert. Begriffe und Methoden zur Analyse können besser überschaut und eingeordnet werden.
- Lineare Zusammenhänge oder direkte Proportionalitäten treten zwischen vielfältigsten Größen des Alltagslebens oder der wissenschaftlichen Fächer in Erscheinung. Naturgemäß werden hier verschiedenste Symbole verwendet. Die Übertragung der allgemeinen Überlegungen auf konkrete Beispiele wird erschwert.

- In der linearen Algebra heißt eine Funktion f zwischen zwei Vektorräumen linear, wenn $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ für alle Skalare α und alle Vektoren x. Im Falle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folgt daraus, dass f die Form $f(x) = mx$ hat. Hier wird im folgenden der „schulische" Begriff zugrundegelegt.

- Innerhalb der Schulmathematik sind Definitions- bzw. Wertemenge nicht gewichtige Bestandteile der Definition: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}_0^+$, $\mathbb{Q}$ oder Intervalle bilden auch den Kontext für lineare Funktionen.

14.5.4 Spezielle lineare Funktionen

- Für $t = 0$ ergibt sich die Funktion $y = m \cdot x$, sie beschreibt die direkte Proportionalität, siehe Kapitel 14.6.

- Für $t > 0$ schneidet der Graph die y–Achse oberhalb des Ursprungs.

- Für $t < 0$ schneidet der Graph die y–Achse unterhalb des Ursprungs.

- Für $m = 0$ ergibt sich die konstante Funktion (Graph ist horizontale (zur x–Achse parallele) Gerade)

- Für $m > 0$ ist die Funktion streng monoton steigend (Graph steigt bzgl. Links–Rechts–Ausrichtung an)

- Für $m < 0$ ist die Funktion streng monoton fallend (Graph sinkt bzgl. Links–Rechts–Ausrichtung ab)

14.5.5 Qualitative Beschreibung linearer Funktionen

Lineare Funktionen beschreiben generell eine Beziehung zwischen zwei Größen x und y, die durch die folgenden (gleichwertigen) Aussagen beschrieben werden kann:

- eine **Änderung** der Größe x ist direkt proportional zu einer **Änderung** der Größe y, formelmäßig dargestellt:

$$\Delta x \quad \sim \quad \Delta y$$

- die Größe y setzt sich aus einem konstanten Anteil und einem direkt proportionalen Anteil zusammen:

$$y \quad = \quad m \cdot x + t$$

- Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade. Umgekehrt lässt sich jede Gerade in der Zeichenebene als Graph einer linearen Funktion darstellen, außer wenn sie parallel zur y-Achse verläuft.

14.5.6 Kontextfelder für lineare Funktionen

Mathematisch:

- Nullstellenbestimmung (→ Lineare Gleichungen)
- Punkt–Steigungsform: Eine lineare Funktion mit Steigung m, deren Graph durch den Punkt $(x_P|y_P)$ verläuft, ist gegeben durch

$$x \mapsto m(x - x_P) + y_P \qquad \text{bzw.} \qquad y = m(x - x_P) + y_P$$

- Umwandlung in die Implizit–Form: $ax + by + c = 0$,
- Propädeutik der linearen Gleichungssysteme
- Veränderung der Funktion bzw. ihres Graphen bei Veränderung der Parameter

Sachsituationen

- Kerzenuhr: Länge — Brenndauer

Wirtschaft:

- Fixkosten und variable Kosten
- Klassische Telefon–, Wasser oder Strom–Rechnung: Grundgebühr und verbrauchsabhängige Kosten.
- Kauf eines Spiels (elektronisch oder auch nicht): Grundgerät und Module
- Taxifahrt

Physik:

- Länge einer Stange bei Temperaturveränderung.
- Länge einer Feder bei angehängtem Gewichtsstück.
- Umwandlung Fahrenheit — Celsius. In den Vereinigten Staaten werden Temperaturen in $^\circ F$ (Grad Fahrenheit) angegeben. Benutzt man die Symbole t_F und t_C für die Maßzahlen in den Temperaturangaben, so ist die Umwandlung durch die linearen Funktionen

$$t_F = \tfrac{9}{5} \cdot t_C + 32 \qquad \text{oder umgekehrt:} \qquad t_C = \tfrac{5}{9} \cdot (t_F - 32)$$

gegeben.

14.6 Direkte Proportionalität

M7 LB 8

14.6.1 Satz und Definition: Direkte Proportionalität

Zwei Größen x und y heißen *direkt proportional zueinander*, symbolisch ausgedrückt durch

$$y \sim x,$$

wenn sie eine (und damit jede) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllen:

(A) Bei Ver–2,3,…,q–fachung eines Wertes x tritt eine Ver–2,3, …,q–fachung des Wertes $y \neq 0$ ein.

(B) Der Graph der Wertepaare (x, y) ist Teilmenge einer Ursprungsgerade, die ungleich der x- oder y-Achse ist.

(C) Wenn $x \neq 0$ und $y \neq 0$, dann sind die Quotienten der beiden Werte y und x sind konstant:

$$\frac{y}{x} = m = \text{const} \neq 0.$$

(D) Es gibt eine konstante Größe $m \neq 0$, so dass

$$y = m \cdot x.$$

14.6.2 Definition: Proportionalitätskonstante

Die in (C) und (D) erwähnte Konstante m heißt der *Proportionalitätskonstante* oder *Proportionalitätsfaktor*. Sie ist zugleich die Steigung der Geraden in (B).

Aus den Aussagen oben ist zu entnehmen, dass diese Konstante ungleich Null ist.

14.6.3 Kommentare

- In der Definition ist von Größen anstelle von Zahlen die Rede. Dies rührt daher, dass die Direkte Proportionalität viel stärker im schulischen Kontext von Sachsituationen thematisiert wird als im innermathematischen Kontext.
- Anders als bei vielen anderen funktionalen Zusammenhängen ist die direkte Proportionalität eine symmetrische Beziehung. Ist die Größe y direkt proportional zu der Größe x, so ist auch x direkt proportional zu y.

  Beachte, dass die Vertauschung der beiden Größen x und y die Kehrwertbildung $m \mapsto \frac{1}{m}$ beim Proportionalitätsfaktor nach sich zieht:

  $$y = m \cdot x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{1}{m} \cdot y$$

- In alltäglichen Sachkontexten ist die Proportionalitätskonstante m positiv. In der Physik tritt auch der Fall $m < 0$ in Erscheinung.
- Verwandte andere Zusammenhänge sind die der indirekten, der quadratischen, der quadratisch-reziproken Proportionalität oder der des logarithmischen Zusammenhangs.

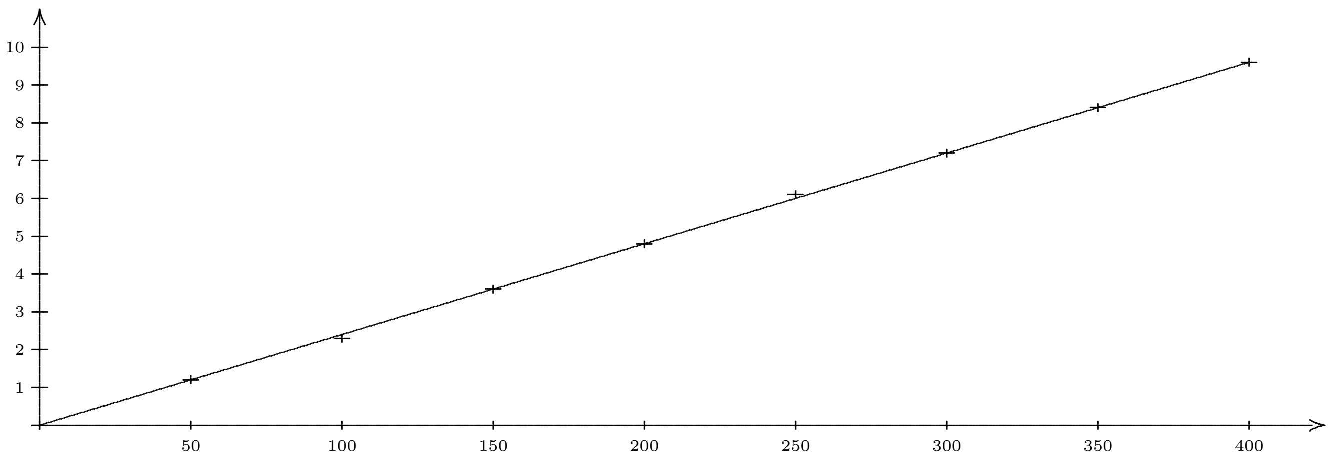
14.6.4 Beispiel

An eine „gute" metallene Schraubenfeder werden verschiedene Gewichtsstücke gehängt. Abhängig von den Gewichtsstücken wird die Dehnungslänge gemessen.

Es könnte dabei die folgende Wertetabelle entstehen:

m in g	0	50	100	150	200	250	300	350	400
$\Delta\ell$ in cm	0	1,2	2,3	3,6	4,8	6,1	7,2	8,4	9,6

Die beiden Größen sind direkt proportional zueinander, abgesehen von zwei „Ausreißern". Als Graph ergibt sich eine Ursprungshalbgerade



Man teste anhand der Tabelle und des Graphen die Eigenschaften (A) bis (D).

14.6.5 Direkte Proportionalität als Spezialfall einer linearen Funktion

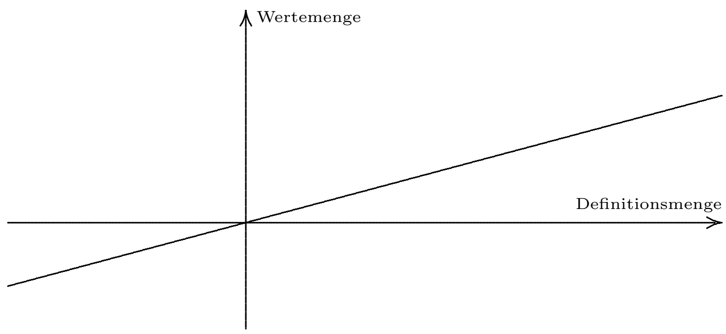
- Bei stärker mathematischer Sichtweise würde man sagen, dass eine direkte Proportionalität eine Funktion der Form

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathcal{W} \\ x & \mapsto & m \cdot x \end{array} \right.$$

  mit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ und $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}$ und $m \neq 0$ ist, also den Spezialfall $t = 0$ UND $m \neq 0$ einer linearen Funktion darstellt.

- Innerhalb der Schulmathematik sind Definitions- bzw. Wertemenge nicht gewichtige Bestandteile der Definition: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}_0^+$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}^+$ oder andere Intervalle kommen als ,,Wertereservoir" auch in Frage.

- Im Fall $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ ist der Graph einer direkten Proportionalität eine Ursprungsgerade, im Fall $\mathcal{D} = \mathbb{R}_0^+$ eine Ursprungshalbgerade.



14.6.6 Je mehr — desto mehr

Eine weit verbreitete Auffassung über die direkte Proportionalität ist, dass sie durch die Aussage

> **Je** größer der Wert der einen Größe x,
> **desto** größer der Wert der anderen Größe y.

beschrieben werden könne. Im mathematischen Sinn ist dies nur die Eigenschaft einer Funktion, dass sie streng monoton steigt.

- Richtig ist zunächst, dass

$$\text{direkte Proportionalität} \quad \overset{\text{falls } m > 0}{\Longrightarrow} \quad \text{je mehr — desto mehr.}$$

- Im Fall $m < 0$ stimmt diese Implikation nicht. Die direkte Proportionalität

$$y \;=\; -2 \cdot x$$

  zieht kein ,,je mehr — desto mehr" nach sich.

- Auf jeden Fall stimmt die Umkehrung nicht. Es gibt viele Zusammenhänge in der Mathematik und in der Sachwelt, die die „je mehr — desto mehr"–Eigenschaft haben, jedoch keine direkte Proportionalität darstellen.

  Beispiele sind:

  - Seitenlänge — Flächeninhalt (bei einem Quadrat)
  - Geschwindigkeit — Bremsweg
  - Spannung — Stromstärke (bei einer Glühlampe)
  - Fadenlänge — Schwingungsdauer (bei einem Fadenpendel)
  - Einkommen — Steuer

14.6.7 Kontextfelder für die direkte Proportionalität

Sachsituationen:

- Koch- oder Backzutaten
- Fest/Feier: Gästezahl — Einkaufsmenge
- Der tropfende Wasserhahn: Zeit — Volumen

Geometrie:

- Längen bei Ähnlichkeit:
  - Seite — Umfang im Quadrat
  - Seite — Diagonale im Quadrat
  - Radius — Umfang beim Kreis
  - Höhe im gleichseitigen Dreieck
- Gradmaß — Bogenmaß bei Winkeln

Wirtschaft:

- Kaufmenge — Kaufpreis
- Anbaufläche — Anbauertrag
- Stückzahl — Gewicht
- Währungsumwandlung (auch: Euro — DM)
- Klassischer Fahrpreis bei der DB
- Kraftstoff–Verbrauch: Fahrstrecke — Benzinvolumen

Physik:

- Steigung einer Straße
- Bei konstanter Geschwindigkeit: Wegstrecke — Zeitspanne
- Ohm'sches Gesetz: Angelegte Spannung — Fließender Strom
- Hooke'sches Gesetz für Schraubenfedern: Dehnungslänge — Kraft
- Masse — Volumen bei einem homogenen Körper
- Masse — Gewichtskraft
- Wassertiefe — Wasser(–Schwere–)druck
- Zusammenhang zwischen innerer Energie (zugeführter Wärme) und Temperaturerhöhung: Spezifische Wärmekapazität.
- Verschiedene Formen der Allgemeine–Gas–Gleichung für ideale Gase.

- Nicht–Beispiel: Meereshöhe — Luftdruck
- Nicht–Beispiel: Geschwindigkeit — Bremsweg
- Nicht–Beispiel: Fallhöhe — Fallzeit
- Nicht–Beispiel: Pendellänge — Schwingungsdauer.
- Umwandlung: Geschwindigkeit in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ — Geschwindigkeit in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
- Durchfluss

Technik:

- Übersetzung bei Zahnrädern,
- Ketten– oder Riemenantrieb, Getriebe

14.7 Indirekte Proportionalität

14.7.1 Satz und Definition: Indirekte Proportionalität

Zwei Größen x und y heißen *indirekt proportional zueinander*, symbolisch ausgedrückt durch

$$y \sim \frac{1}{x},$$

wenn sie eine (und damit jede) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllen:

(A) Bei Ver–2,3,...,q–fachung eines Wertes x tritt eine Halbierung, Drittelung, ..., Ver-$\frac{1}{q}$–fachung des Wertes $y \neq 0$ ein.

(B) Der Graph der Wertepaare (x, y) ist Teilmenge einer Hyperbel.

(C) Die Produkte der beiden Werte y und x sind konstant:

$$y \cdot x = m = \text{const} \neq 0$$

(D) Es gibt eine konstante Größe $m \neq 0$, so dass

$$y = m \cdot \frac{1}{x}.$$

14.7.2 Definition: Proportionalitätskonstante

Die in (C) und (D) erwähnte Konstante m heißt gelegentlich (m.E. nicht so glücklich) *Proportionalitätskonstante* oder sogar *Proportionalitätsfaktor*.

Aus den Aussagen oben ist zu entnehmen, dass diese Konstante ungleich Null sein muss.

14.7.3 Kommentare

- In der Definition ist von Größen anstelle von Zahlen die Rede. Dies rührt daher, dass die Indirekte Proportionalität viel stärker im schulischen Kontext von Sachsituationen thematisiert wird als im innermathematischen Kontext.

- Die indirekte Proportionalität eine symmetrische Beziehung. Ist die Größe y indirekt proportional zu der Größe x, so ist auch x indirekt proportional zu y.

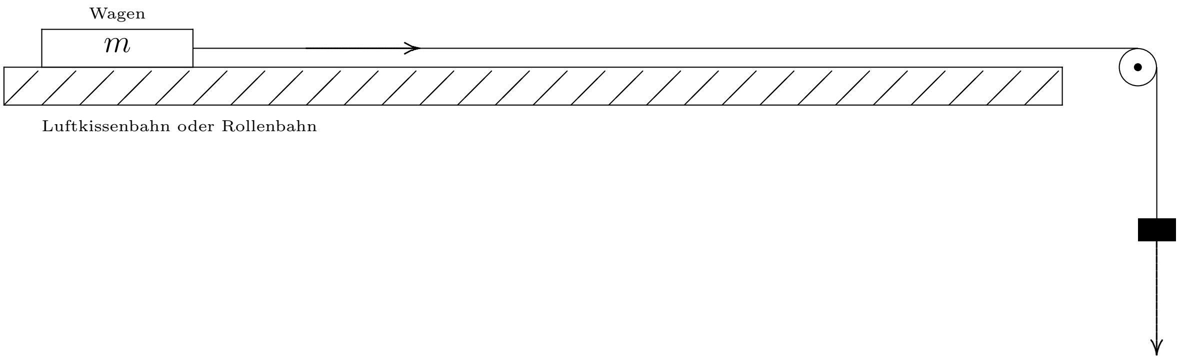
  Der Proportionalitätsfaktor bleibt dabei gleich:

  $$y = m \cdot \tfrac{1}{x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = m \cdot \tfrac{1}{y}.$$

- In alltäglichen Sachkontexten ist die Proportionalitätskonstante m positiv. In der Physik tritt auch der Fall $m < 0$ in Erscheinung.

14.7.4 Beispiel

Ein Wagen der Masse m kann sich auf einer Fahrbahn reibungsfrei bewegen. Er wird mit Hilfe eines Gewichtsstücks über eine Umlenkrolle beschleunigt.



Misst man (wie auch immer) die Beschleunigung a in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, so stellt sich heraus, dass die Beschleunigung indirekt proportional zur Masse des Wagens ist:

$$a \sim \frac{1}{m}.$$

14.7.5 Indirekte Proportionalität als Funktion

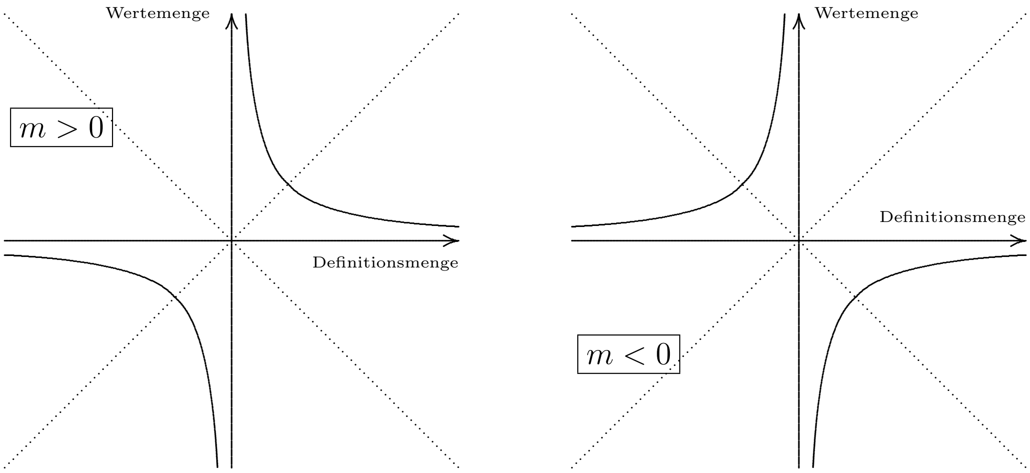
- Bei stärker mathematischer Sichtweise würde man sagen, dass eine indirekte Proportionalität eine Funktion der Form

$$f : \begin{cases} \mathcal{D} & \to & \mathcal{W} \\ x & \mapsto & m \cdot \frac{1}{x} \end{cases}$$

  mit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $m \neq 0$ ist.

- Innerhalb der Schulmathematik sind Definitions- bzw. Wertemenge nicht gewichtige Bestandteile der Definition.

- Die Graphen sind Hyperbeln. Sie nähern sich asymptotisch an die Achsen an. Sie sind achsensymmetrisch bzgl. der beiden Geraden $y = x$ und $y = -x$, deshalb auch punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs.



14.7.6 Kontextfelder für die indirekte Proportionalität

Geometrie:

- Bei Rechtecken mit konstantem Flächeninhalt: Länge – Breite

Wirtschaft:

- Bei konstanter Arbeitsmenge: Arbeitszeit — Zahl der Arbeitskräfte
- Bei Befüllung eines Gefäßes mit festem Volumen: Mittlere Füllgeschwindigkeit – Füllzeit

Physik:

- Bei konstanter Wegstrecke: Mittlere Geschwindigkeit — Zeitspanne
- Ideales Gas bei konstanter Temperatur: Volumen — Druck
- Goldene Regel der Mechanik beim Flaschenzug: Zugkraft — Zuglänge
- Goldene Regel der Mechanik in der Hydraulik: Kolbendruck — Kolbenhub
- Goldene Regel der Mechanik bei der Fahrradgangschaltung: Trittkraft — Pedalumdrehungen

14.8 Quadratische Funktionen$^{\ominus}$

H17 T1

14.8.1 Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt quadratische Funktion, wenn sie — evtl. nach Äquivalenzumformung — die Form

$$f(x) \quad = \quad ax^2 + bx + c$$

mit fest gegebenen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, hat.

14.8.2 Kommentare

(1) Es gibt weitere Begriffe, die wir bereits im Abschnitt 13.1 über quadratische Gleichungen kennengelernt haben: Formfaktor, quadratisches Glied, lineares Glied, konstantes Glied.

(2) Als Definitionsmenge und Wertemenge treten hier grundsätzlich die reellen Zahlen in Erscheinung. Natürlich könnten auch andere Zahlbereiche ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$) gewählt werden. Bei der Berechnung von Nullstellen, Umkehrbarkeit usw. läuft man dann aber in Sackgassen.

(3) Der Graph einer beliebigen quadratischen Funktion ist eine *Parabel*. Allgemeine Parabeln treten als Kegelschnitte in Erscheinung. Nicht jede Parabel ist Graph einer quadratischen Funktion.

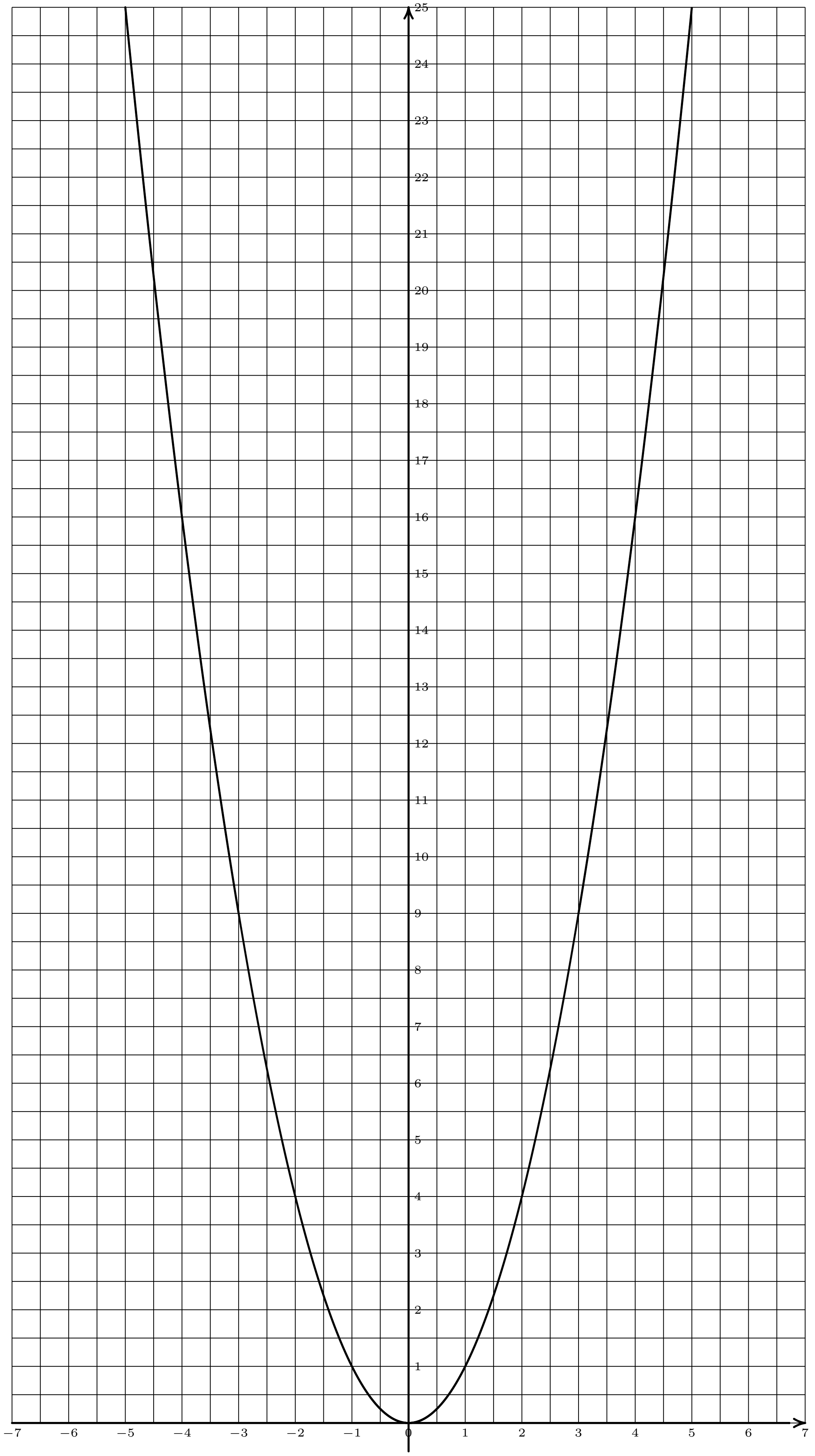
14.8.3 Die Quadratfunktion

Der Fall $a = 1$, $b = c = 0$ ist von besonderem Interesse. Der Funktionsterm lautet also

$$f(x) \quad = \quad x^2$$

Man spricht dann auch von **der** *Quadratfunktion*. Ihr Graph heißt *Normalparabel*. Auf der nächsten Seite ist der Graph abgebildet.

Beachte, dass die Normalparabel im Ursprung eine horizontale Tangente hat und nicht in irgendeiner Weise dort geknickt verläuft.



25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7

14.8.4 Summenform $\leftrightarrow$ Scheitelform

Wir wiederholen — mit leichten Veränderungen — die Schritte aus Abschnitt **??**, hier für quadratische Funktionen anstelle von quadratischen Gleichungen

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + b \cdot x + c \\
& \quad \text{(Ausklammern des Formfaktors)} \\
&= a \cdot [x^2 + \tfrac{b}{a} \cdot x + \tfrac{c}{a}] \\
& \quad \text{(Quadratische Ergänzung)} \\
&= a \cdot [x^2 + \tfrac{b}{a} \cdot x + (\tfrac{b}{2a})^2 - (\tfrac{b}{2a})^2 + \tfrac{c}{a}] \\
& \quad \text{(Plusformel)} \\
&= a \cdot [(x + \tfrac{b}{2a})^2 - (\tfrac{b}{2a})^2 + \tfrac{c}{a}] \\
& \quad \text{(Hineinmultiplizieren des Formfaktors)} \\
&= a \cdot (x \underbrace{+\tfrac{b}{2a}}_{=:-x_S})^2 \underbrace{-\tfrac{b^2}{4a} + c}_{=:y_S} \\
& \quad \text{(Umbenennung der Parameter)} \\
&= a \cdot (x - x_S)^2 + y_S
\end{aligned}$$

Um umgekehrt von der Scheitelform zur Summenform zukommen, genügt einfaches Ausmultiplizieren mit Hilfe der binomischen Plusformel.

$$\begin{aligned}
f(x) &= a \cdot (x - x_S)^2 + y_S \\
&= a \cdot (x^2 - 2x_S x + x_S^2) + y_S \\
&= ax^2 \underbrace{-2ax_S}_{=:b} x \underbrace{+ax_S^2 + y_S}_{=:c} \\
&= ax^2 + bx + c
\end{aligned}$$

14.8.5 Scheitelpunktkoordinaten mit x_S und y_S

Bei graphischer Interpretation (siehe weiter unten Abschnitt 14.8.11) stellt sich heraus, dass die beiden Zahlen

$$x_S = -\tfrac{b}{2a}, \qquad y_S = -\tfrac{b^2}{4a} + c$$

die Koordinaten des Scheitelpunkts sind.

Man mache sich klar, dass der Graph einer gegebenen quadratischen Funktion jeweils durch einen Satz von drei Parametern beschrieben ist:

$$(a, b, c) \quad \text{bzw.} \quad (a, x_S, y_S).$$

14.8.6 Problematik bei Wahl der Symbole

Die Bezeichnung der Scheitelpunktkoordinaten mit x_S und y_S ist

- einerseits hilfreich: Es handelt sich um die x- bzw. y-Koordinate bzgl. des Koordinatensystems.
- andererseits verständnishemmend: Es entsteht der Eindruck, dass es ,,(unbekannte) Variable" seien. Tatsächlich sind es aber Parameter, also ,,beliebige und aktuell fixierte" Zahlen, die einen einzelnen Funktionsgraphen beschreiben.

Die Problematik kommt also von den zwei Universal-Bedeutungen der Symbole x und y im Schulunterricht: Benennung der Achsen einerseits und Benennung der Elemente von Definitions/Wertemenge bei einer Funktion andererseits.

14.8.7 Umkehrbarkeit der quadratischen Funktionen

Als Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine quadratische Funktion f weder injektiv noch surjektiv, also nicht umkehrbar. Mit Hilfe der Scheitelform kann man leicht sehen, dass bei geeigneter Einschränkung von Definitions- und Wertemenge eine quadratische Funktion umkehrbar wird. Sie hat dann die Form

$$f_{\text{eing.}} : \begin{cases} [x_S, +\infty[& \to & \begin{cases} [y_S, +\infty[, & \text{falls } a > 0, \\ ]-\infty, y_S], & \text{falls } a < 0 \end{cases} \\ x & \mapsto & a(x - x_S)^2 + y_S \end{cases}$$

14.8.8 Tabelle von Parabelklassen

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über verschiedene Klassen von Parabeln.

Graph der Funktion	Beschreibung / Name	Bild der Normalparabel unter …	Schnittmenge eines Kegelmantels im $\mathbb{R}^3$ mit der (x,y)-Ebene. Eine Mantellinie ist parallel zur …
$y = x^2$	Normalparabel	Identität	y-Achse
$y = ax^2$	vertikal-symmetrische Parabel Scheitelpunkt ist Ursprung	Zentrischer Streckung $(x,y) \mapsto (\frac{x}{a}, \frac{y}{a})$	y-Achse
$y = x^2 + bx + c$ $= (x - x_S)^2 + y_S$	vertikal-symmetrische Parabel nach oben geöffnet kongruent zur Normalparabel	Verschiebung $(x,y) \mapsto (x + x_S, y + y_S)$	y-Achse
$y = -x^2 + bx + c$ $= -(x - x_S)^2 + y_S$	vertikal-symmetrische Parabel nach unten geöffnet kongruent zur Normalparabel	Punktspiegelung $(x,y) \mapsto (-x,-y)$ und Verschiebung $(x,y) \mapsto (x + x_S, y + y_S)$	y-Achse
$y = ax^2 + bx + c$ $= a(x - x_S)^2 + y_S$	vertikal-symmetrische Parabel	Zentrischer Streckung $(x,y) \mapsto (\frac{x}{a}, \frac{y}{a})$ und Verschiebung $(x,y) \mapsto (x + x_S, y + y_S)$	y-Achse
—	Parabel	Ähnlichkeitsabbildung	(x,y)-Ebene

14.8.9 Erläuterungen zur Tabelle

(1) Der Begriff „vertikal-symmetrisch" ist eine Abkürzung für die Eigenschaft einer Parabel, dass ihre Symmetrie-Achse parallel zur y-Achse verläuft. Diese Eigenschaft haben genau die Parabeln, die Graphen von quadratischen Funktionen sind.

(2) Die Aussagen in den einzelnen Zeile der Tabelle sind äquivalent.

(3) Die Graphen von quadratischen Funktionen mit Formparameter $a = \pm 1$ sind kongruent zur Normalparabel. Ob diese Graphen auch Normalparabel heißen sollen, bleibt dahingestellt.

14.8.10 Gruppentheoretische Deutung

Für eine Ähnlichkeitsabbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(A) T ist Nacheinanderausführung einer zentrischen Streckung und einer Translation.

(B) T bildet Geraden auf dazu parallele Geraden ab.

(C) T bildet Graphen von quadratischen Funktionen auf Graphen von quadratischen Funktionen ab.

Alle Ähnlichkeitsabbildungen mit diesen Eigenschaften bilden eine Untergruppe der Gruppe aller Ähnlichkeitsabbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Man könnte sie die Gruppe der „richtungstreuen Ähnlichkeitsabbildungen" nennen.

Drehungen sind Ähnlichkeitsabbildungen, die (außer bei Drehwinkel 0° oder 180°) nicht zu dieser Untergruppe gehören.

14.8.11 Graph-Transformation

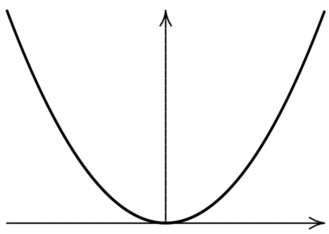
Wir begründen die zweite und dritte Zeile der Tabelle. Bei zentrischer Streckung bzw. Verschiebung wird die Normalparabel G_{x^2} auf die Graphen G_{ax^2} bzw. $G_{(x-x_S)^2+y_S}$ abgebildet.

$$G_{x^2} \;=\; \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y = x^2 \right\}$$

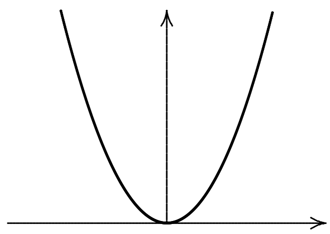
$$\begin{array}{ll|ll}
\longrightarrow & \overset{\text{(Zentrische Streckung mit Faktor } \frac{1}{a}\text{)}}{\left\{ (\frac{x}{a}, \frac{y}{a}) \in \mathbb{R}^2 \middle| y = x^2 \right\}} & \longrightarrow & \overset{\text{(Verschiebung um } (x_S, y_S)\text{)}}{\left\{ (x + x_S, y + y_S) \in \mathbb{R}^2 \middle| y = x^2 \right\}} \\
= & \overset{\text{(Substitution } \widetilde{x} = \frac{x}{a},\ \widetilde{y} = \frac{y}{a}\text{)}}{\left\{ (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \mathbb{R}^2 \middle| a\widetilde{y} = (a\widetilde{x})^2 \right\}} & = & \overset{\text{(Substitution } \widetilde{x} = x + x_S,\ \widetilde{y} = y + y_S\text{)}}{\left\{ (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \mathbb{R}^2 \middle| \widetilde{y} - y_S = (\widetilde{x} - x_S)^2 \right\}} \\
= & \overset{\text{(Äquivalenzumformung: Division durch } a\text{)}}{\left\{ (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \mathbb{R}^2 \middle| \widetilde{y} = a\widetilde{x}^2 \right\}} & = & \overset{\text{(Äquivalenzumformung: Addition von } y_S\text{)}}{\left\{ (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \mathbb{R}^2 \middle| \widetilde{y} = (\widetilde{x} - x_S)^2 + y_S \right\}} \\
= & \overset{\text{(Umbenennung)}}{\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y = ax^2 \right\}} & = & \overset{\text{(Umbenennung)}}{\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y = (x - x_S)^2 + y_S \right\}} \\
= & G_{ax^2} & = & G_{(x-x_S)^2+y_S}
\end{array}$$

14.8.12 Unterschiedliche Parabelklassen bzgl. Form

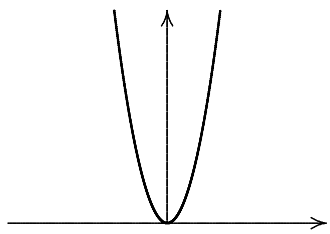
Abhängig vom Formparameter $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ergeben sich die folgenden Klassen von Parabeln, die als Graphen von quadratischen Funktionen auftreten können.



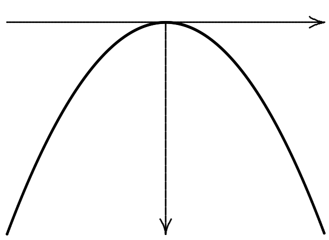
$0 < a < 1$



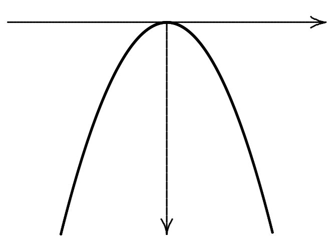
$a = 1$



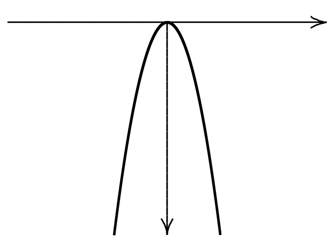
$a > 1$



$-1 < a < 0$



$a = -1$



$a < -1$

Kontextfelder für Quadratische Funktionen

14.8.13 Extremwertaufgaben

Es kommt gelegentlich vor, dass Optimierungsprobleme der Wirklichkeit bei der mathematischen Modellierung auf quadratische Zielfunktionen führen.

Auch ohne Zuhilfenahme von Extremwertkriterien der Analysis ist bekannt, dass der Scheitelpunkt (x_s, y_S) das Extremum der Funktion darstellt.

14.8.14 Beispielaufgabe aus der Geometrie

Auf einer Wiese soll ein rechteckiges Teilstück durch einen 800 m langen Zaun eingegrenzt werden. Wie lang/breit muss das Rechteck sein, damit die eingesperrten Schafe am meisten zu fressen bekommen?

Die Lösung kann in der folgenden Folge von Schritten erarbeitet werden.

Variable: Die Länge des rechteckigen Teilstücks wird mit x bezeichnet.
Die Breite des rechteckigen Teilstücks wird mit b bezeichnet.

Term: Der Umfang des rechteckigen Teilstücks ist dann gegeben durch $U = 2 \cdot x + 2 \cdot b$.

Nebenbedingung: Sie besteht in der Gleichung $U = 2 \cdot x + 2 \cdot b = 800\,\mathrm{m}$

Zielfunktion: Die zu maximierende Zielfunktion ist der Flächeninhalt: $A = x \cdot b$

Elimination: Mit Hilfe der Nebenbedingung kann die Breite eliminiert werden: $A = A(x) = x \cdot (\frac{U}{2} - x) = -x^2 + \frac{U}{2}\, x$.

Lösung: Der Scheitelpunkt der Funktion ist bei $x_S = -\frac{U}{4} = 200\,\mathrm{m}$.
Als Wert ergibt sich $y_S = \frac{-(\frac{U}{2})^2}{-4} = (\frac{U}{4})^2 = 40\,000\,\mathrm{m}^2$.

Antwort: Die Länge sollte gleich 200 m gewählt werden. Demzufolge ist das Teilstück quadratisch mit einer Fläche von $40\,000\,\mathrm{m}^2$.

14.8.15 Wurfparabel

Wird ein Körper im Schwerefeld der Erde — bei Reibungsfreiheit — geworfen, so ist die Zeit-Ort-Funktion in x bzw. y-Richtung gegeben durch

$$\begin{aligned} s_x(t) &= s_{x,0} + v_{x,0} \cdot t \\ s_y(t) &= s_{y,0} + v_{y,0} \cdot t - \tfrac{g}{2} \cdot t^2. \end{aligned}$$

Dabei bedeuten

t	Vergangene Zeit in s
s_x	Horizontale Wurfweite in m
s_y	Vertikale Wurfweite in m
$s_{x,0}$	Horizontal-Koordinate des Abwurfpunkts in m
$s_{y,0}$	Vertikal-Koordinate des Abwurfpunkts in m
$v_{x,0}$	Horizontal-Komponente der Abwurfgeschwindigkeit in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
$v_{y,0}$	Vertikal-Komponente der Abwurfgeschwindigkeit in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
g	Erdbeschleunigung $= 9,81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Löst man die erste Gleichung nach t auf,

$$t = \tfrac{s_x(t) - s_{x,0}}{v_{x,0}},$$

und setzt das in die zweite Gleichung ein, so folgt die Bahngleichung

$$\begin{aligned} s_y(t) &= s_{y,0} + v_{y,0} \cdot t - \tfrac{g}{2} \cdot t^2 \\ &= s_{y,0} + v_{y,0} \cdot \tfrac{s_x(t) - s_{x,0}}{v_{x,0}} - \tfrac{g}{2} \cdot \left(\tfrac{s_x(t) - s_{x,0}}{v_{x,0}}\right)^2. \end{aligned}$$

Wir vereinfachen diese Situation noch in mehrfacher Hinsicht:

- Der Körper werde horizontal geworfen, d.h. es ist $v_{y,0} = 0$.
- Der Körper werde im Ursprung geworfen, d.h. es ist $s_{x,0} = s_{y,0} = 0$.
- Wir verwenden übersichtlichere Symbole $v = v_{x,0}$, $x = s_x(t)$, $y = s_y(t)$.

Dann lautet die Bahngleichung

$$y = -\tfrac{g}{2} \cdot \left(\tfrac{x}{v}\right)^2 = -\tfrac{g}{2v^2}\, x^2,$$

die Bahn hat also die Form eines nach unten geöffneten Parabelbogens.

14.8.16 Sichtbare Bahn

Wird die Bahn eines Körpers sichtbar gemacht, beispielsweise durch die Langzeitaufnahme eines leuchtenden Körpers, so sieht man den Graphen der quadratischen Funktion direkt.

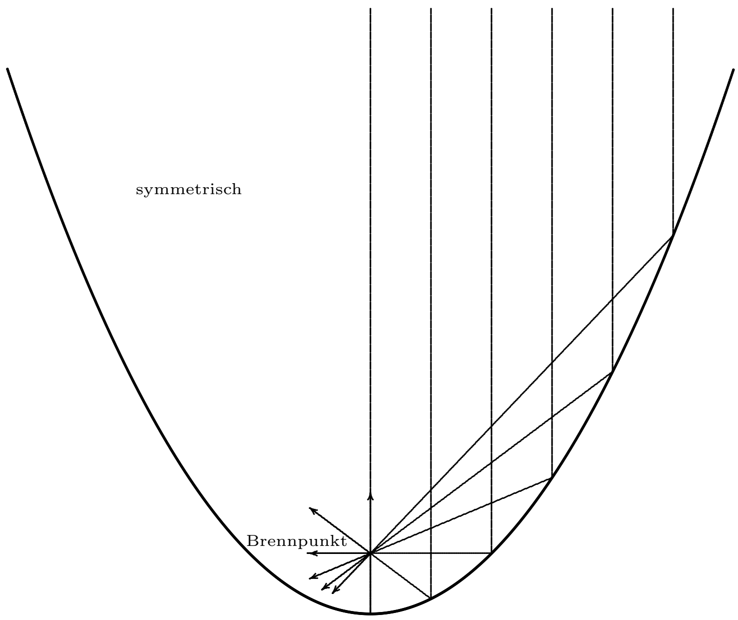
- Wasserstrahl,
- Funkenflug, Silvesterfeuerwerk, Vulkanausbruch

14.8.17 Parabolspiegel

Wir betrachten den Graphen der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2$ mit $a > 0$. Ein beliebiger parallel im Abstand x zur y-Achse von oben einfallender Strahl werde im Parabel-Punkt (x, ax^2) — genauer an der Tangente durch diesen Punkt — gemäß Reflexionsgesetz ,,Ausfallswinkel = Einfallswinkel" reflektiert.

Unabhängig von x geht der reflektierte Strahl genau durch den *Brennpunkt* $(0, \frac{1}{4a})$.

Diese geometrische Besonderheit der Parabel wird beim Parabolspiegel ausgenutzt. Licht- oder Funkwellen, die von einer weit entfernten Quelle ausgesandt werden, können in einem einzigen Punkt gebündelt werden. Aufgrund der Verdichtung können diese Signale von einem Empfänger im Brennpunkt viel besser registriert werden. Der Parabolspiegel muss allerdings genau auf die Quelle ausgerichtet sein.



14.8.18 Weitere Beispiele

- Brücken und andere Bauwerke
- Parabelrutsche im Gebäude der Mathematik/Informatik der TUM auf dem Campus Garching
- Der Gateway Arch in St. Louis ist nicht parabelförmig, er hat die Form einer abgeflachten Kettenlinie.