Skript zur Vorlesung

Mathematik in der Mittelschule 2 (Didaktik der Geometrie)

Sommersemester 2018

Dieses Geheft enthält die wesentlichen Inhalte, wie sie in der Vorlesung ,,Mathematik in der Mittelschule 2" vorgestellt werden. Es wird laufend modifiziert, erweitert oder gekürzt. Das Skript ist zum Gebrauch neben der Vorlesung gedacht und erhebt nicht den Anspruch, ,,in sich selbst verständlich" oder vollständig zu sein.

S. Hilger

Inhaltsverzeichnis

1 Einstieg ⊖ 5

1.1 Ziele zum Geometrieunterricht . . . 5
1.2 Räumliche Vorstellung . . . 7
1.3 Anregungen . . . 8

2 Die Zeichenebene — wesentliche Begriffe 9

2.1 Menge von Punkten ⊖ . . . 9
2.2 Strecken, Halbgeraden, Geraden . . . 10

3 Winkel, Lot und Parallele 11

3.1 Winkel . . . 11
3.2 Konstruktionen mit Winkeln . . . 14
3.3 Rechter Winkel und Lot . . . 17
3.4 Parallelität . . . 20
3.5 Winkel an einer Einfach-Kreuzung . . . 24
3.6 Winkel an einer Doppel-Kreuzung . . . 25

4 Abbildungen der Zeichenebene 27

4.1 Grundlagen ⊖ . . . 27
4.2 Überblick über die Abbildungen der Schulgeometrie ⊖ . . . 28
4.3 Achsenspiegelung . . . 29
4.4 Punktspiegelung . . . 33
4.5 Drehungen . . . 35
4.6 Verschiebungen . . . 37
4.7 Kongruenzabbildungen . . . 39
4.8 Zentrische Streckung ⊖ . . . 41
4.9 Ähnlichkeitssabbildungen ⊖ . . . 43

5 Ebene Figuren 44

5.1 Grundlagen . . . 44
5.2 Ebene Figuren in der Schulwelt . . . 45
5.3 Vielecke . . . 48
5.4 Regelmäßige Vielecke . . . 49
5.5 Kreise . . . 52

6 Symmetrie bei ebenen Figuren 56

6.1 Achsensymmetrie . . . 56
6.2 Achsensymmetrie in der Schulwelt . . . 57
6.3 Ebenensymmetrie ⊖ . . . 60
6.4 Punktsymmetrie ⊖ . . . 61
6.5 Punktsymmetrie in der Schulwelt ⊖ . . . 62
6.6 Drehsymmetrie . . . 63
6.7 Drehsymmetrie in der Schulwelt . . . 63
6.8 Parkettierungen . . . 64
6.9 Parkettierung in der Schulwelt . . . 66
6.10 Kongruenz ⊖ . . . 67

7 Geometrie der Dreiecke **69**
7.1 Grundlagen und Überblick 69
7.2 Der Satz über die Innenwinkelsumme 71
7.3 Innenwinkelsumme bei einem n-Eck 74
7.4 Transversalen 76
7.5 Spezielle Dreieckstypen 81
7.6 Der Satz von Thales 86

8 Geometrie der Vierecke **89**
8.1 Grundlagen 89
8.2 Das Quadrat 90
8.3 Das Rechteck 91
8.4 Die Raute 93
8.5 Das Parallelogramm 94
8.6 Das Drachenviereck 95
8.7 Das Trapez 97
8.8 Das gleichschenklige Trapez 99
8.9 Das Sehnenviereck $^{\ominus}$ 100
8.10 Das Tangentenviereck $^{\ominus}$ 101
8.11 Das Haus der Vierecke 102
8.12 Eigenschaften der Vierecke 103
8.13 Eigenschaften der Vierecke — Lösung 104

9 Die Satzgruppe des Pythagoras **105**
9.1 Überblick über die Satzgruppe 105
9.2 Arithmetische Beweise / mittels Ähnlichkeit $^{\ominus}$ 107
9.3 Beweise des Hypotenusensatzes 109
9.4 Beweis des Kathetensatzes $^{\ominus}$ 111
9.5 Beweise des Höhensatzes 112
9.6 Beweis des Kehrsätze $^{\ominus}$ 113
9.7 Kontextfelder zum Hypotenusensatz 115
9.8 Kontextfelder zum Höhensatz 117

10 Körper **119**
10.1 Grundsätzliche Begriffe 119
10.2 Ein Überblick über die Körpertypen 121
10.3 Körper in der Schul-Welt 122
10.4 Exkurs: Schrägbild–Darstellungen $^{\ominus}$ 125

11 Polyeder **127**
11.1 Einstieg 127
11.2 Quader 129
11.3 Würfel 134
11.4 Aktivitäten mit Würfeln 136
11.5 Würfelnetze 139
11.6 Prismen 144
11.7 Pyramiden $^{\ominus}$ 147
11.8 Platonische Körper $^{\ominus}$ 153

12 Drehkörper $^{\ominus}$ **157**
12.1 Allgemeine Drehkörper 157
12.2 Der Zylinder 158
12.3 Der Kegel 160
12.4 Die Kugel 163
12.5 Der Torus $^{\ominus}$ 164

1 Einstieg ⊖

1.1 Ziele zum Geometrieunterricht

1.1.1 Persönlich–psychologisch

Das mathematische Denken ist an Raumvorstellung und Raumorientierung geknüpft. Eine Förderung des geometrischen Denkens ist zugleich Förderung des mathematischen Denkens — und damit eines wesentlichen Anteils der „kognitiven Persönlichkeit".

1.1.2 Sicht der Welt

- Geometrie in der Natur: Achsensymmetrie bei Schmetterlingen, festgelegte Formen bei Kristallen.
- Geometrie im Alltag: Kuchenformen, Wohnzimmerparkett, DIN A Papier.
- Geometrie in der Kunst: Zeichnen, Bildhauerei, Architektur.
- Geometrie in der Technik:
  - Handwerk: Fliesenlegen, Pflastern, Hausbau, Gartenbau, Tapezieren, Schreiner.
  - Technik: Maschinenbau, Fahrzeuge.

Viele andere Beispiele werden wir noch kennenlernen.

1.1.3 Im Hinblick auf die Propädeutik und Grundlegung der „höheren Mathematik"

- Griechisch–klassische Mathematik,
- Geometrie ist in der Fachmathematik eng mit Analysis und Algebra verknüpft (Analytische Geometrie, Differentialgeometrie).
- Kombinatorik.
- Grundlegende Fertigkeiten des mathematischen Denkens (Abstraktion, Idealisierung) werden gefördert.

1.1.4 Unterrichtsprinzipien Viele übergeordnete Unterrichtsprinzipien lassen sich zwanglos einbringen:

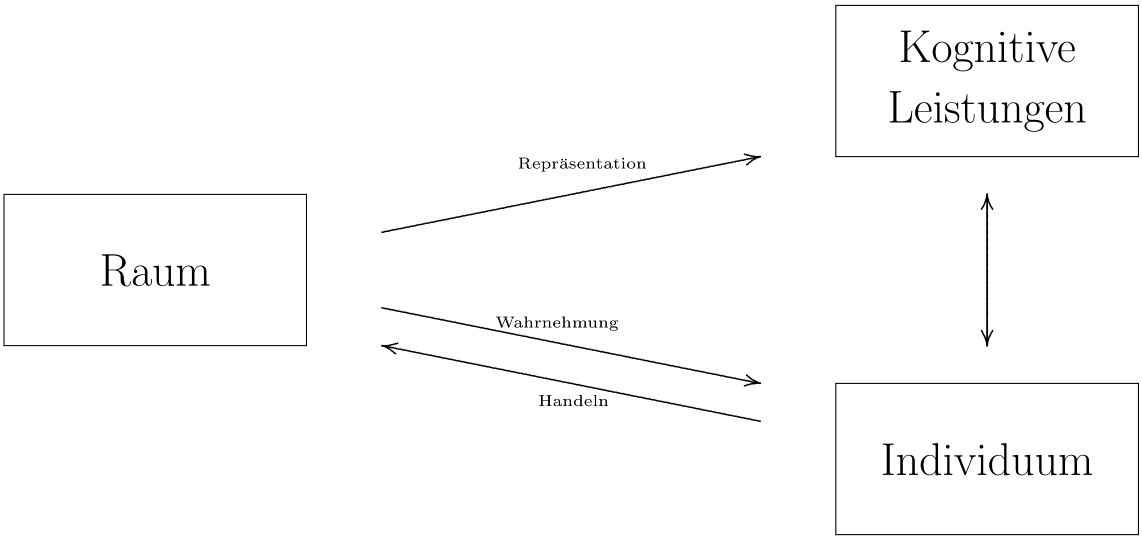
- Kreativität: Vielfältige Materialien können eingebracht werden (Eine umfangreiche Sammlung ist wunderbar).
- Handeln (Motorik): Umgang mit Lineal, Zirkel und anderen Zeichengeräten.
- Abwechslung von sonst eher strenger aufgebauten Lehrgängen, „Farbe" in der Unterrichtsgestaltung.

- Soziale Lernziele: Gruppenarbeit, Freiarbeit.
- Sprachliche Fertigkeiten im Hinblick auf die Beschreibung des uns umgebenden Raumes.
- Fachübergreifender Unterricht: Erdkunde, Werken/Textiles Gestalten, Kunst.
- Differenzierung: Beispielsweise erfahren rechenschwächere Kinder Erfolg, damit Motivation und dann eine andere Sichtweise der Mathematik.
- Lernorte außerhalb des Klassenzimmers finden Eingang in das Unterrichtsgeschehen: Turnhalle, Schulhof, Gemeinde, Gebäude in der Stadt.

Im folgenden werden wir die geometrischen Teilgebiete, die in der Schule wirksam werden, elementar–fachlich und dann im Hinblick auf Ideen zur schulpraktischen Umsetzung beschreiben. Der Gesichtspunkt eines nach Jahrgangsstufen geordneten Lehrgangs tritt hier nicht so klar wie bisher hervor.

1.2 Räumliche Vorstellung

1.2.1 Beschreibung Unter räumlicher Vorstellung versteht man die Repräsentation von Situationen und Prozessen in dem uns umgebenden Raum durch innere kognitive Leistungen.



1.2.2 Der „uns umgebende Raum" meint dabei genauer den dreidimensionalen Raum, mit dem wir als Individuum dadurch interagieren, dass wir

- (INPUT) ihn mit Hilfe von Sinnesorganen wahrnehmen, insbesondere
  - sehen (mit den Augen)
  - tasten (mit Händen, Füßen, Haut)
  - hören (mit den Ohren)
  - ein Gleichgewicht empfinden (Organ im Innenohr)

  und
- (OUTPUT) in ihm mit Hilfe unseres ganzen Körpers operieren, insbesondere
  - uns in ihm bewegen,
  - materielle Dinge und Abläufe gestalten.

1.2.3 Die inneren kognitiven Leistungen umfassen dabei genauer

- die Herstellung innerer mentaler Objekte, beispielsweise von
  - elementaren Handlungen
  - Wörtern, Sätzen, Sprache
  - allgemeineren Symbolen
  - mathematisch–abstrakten Objekten
- das Bewahren solcher Objekte (im Gedächtnis)
- das Denken als kognitives Operieren (Kombinieren, Verknüpfen, Assoziieren) mit den Objekten.

1.3 Anregungen

- Ist ein Parallelogramm symmetrisch?
- Warum ist ein DIN A4 Blatt so und „net anders"?
- Braucht man zum Würfeln unbedingt einen Würfel?
- Beschreiben Sie mit Worten eine Wendeltreppe!
- Warum vertauscht ein Spiegel „Links" und „Rechts", nicht aber „Oben" und „Unten"?
- Mit welcher Drehrichtung öffnen Sie eine Schraube an Ihrem Fahrrad?
- Mit welcher Drehrichtung spitzen Sie Ihren Bleistift?
- Ein Kind der fünften Klasse fragt Sie nach dem Satz des Pythagoras?
- Kann man den Boden eines Bades mit lauter gleichen Dreiecken fliesen?
- Warum sind Kanaldeckel kreisförmig?
- Ist der Regenbogen kreisförmig?
- Sie drehen einen Spielwürfel erst nach rechts, kippen ihn dann nach oben; bei einem anderen mit gleicher Ausgangslage führen Sie die Bewegungen in umgekehrter Reihenfolge aus. Sind anschließend beide Würfel in gleicher Lage?
- Sie sehen einen Spielwürfel an. Vorne ist „Eins", „Zwei" ist auf der rechten Seite. Welche Zahl ist oben?
- Warum ist unsere Welt dreidimensional?
- Beschreiben Sie mit Worten den Vorgang des Schuhebindens!
- Welchen Winkel nimmt die Sonnenscheibe (oder Mondscheibe) am Himmel ein?
- Welche n–zählige Drehsymmetrie sieht man bei Autorad–Felgen?
- Was bedeutet geometrisch Frühlingsanfang, Sommeranfang, Vollmond, Neumond, Sonnenfinsternis, Mondfinsternis . . . ?
- Warum gibt es Jägerstände?
- Können Sie ein Viereck mit einer Linie in drei Teile teilen?
- Warum sind Spielkarten punktsymmetrisch?
- Sind bei Ihnen zu Hause alle Türen rechteckig?

2 Die Zeichenebene — wesentliche Begriffe

2.1 Menge von Punkten ⊖

LP+ M5 LB3

2.1.1 Punkte in der Zeichenebene

Die *Zeichenebene* $\mathbb{E}$ kann als Menge von unendlich vielen Punkten aufgefasst werden.

Dies ist alles andere als eine korrekte vollständige mathematische Definition. Innerhalb der Fachmathematik wird die Zeichenebene als affine euklidische Ebene $\mathbb{A}^2$ modelliert.

2.1.2 Unendlichkeit Die Zeichenebene enthält in zweifacher Hinsicht unendlich viele Punkte

- Sie ist „im Großen" unendlich. Die Zeichenebene ist in alle Richtungen unendlich ausgedehnt
- Sie ist „im Kleinen" unendlich. Jede kleine Umgebung eines Punktes kann unendlich vergrößert (herausgezoomt) werden.

Beide Unendlichkeitseigenschaften vereinfachen die mathematische Auseinandersetzung mit der Geometrie. In der Wirklichkeit „stößt die Unendlichkeit an Grenzen". Zeichenblätter, Landkarten oder Grundstücke können weder unendlich ausgedehnt noch unendlich vergrößert werden.

2.1.3 Markierung Die *Punkte* der Zeichenebene werden — je nach Zweckmäßigkeit und Genauigkeitsanspruch — durch

$+$ gerade Kreuze,

$\times$ schrägstehende Kreuze,

$\circ$ Kreise oder

$\bullet$ Kreisscheiben

markiert und durch Großbuchstaben $A, B, C, P, Q, \ldots$ bezeichnet.

2.1.4 Ebene Figur

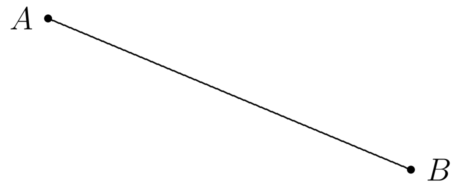
Eine beliebige Teilmenge der Zeichenebene, also eine Menge von Punkten, heißt *ebene Figur*. Aufgrund der Bildungsstandards hat auch der Begriff „Form" Eingang in die Schulpraxis gefunden.

Weiteres zu ebenen Figuren in Kapitel 5.

2.2 Strecken, Halbgeraden, Geraden

LP+ M5 LB3

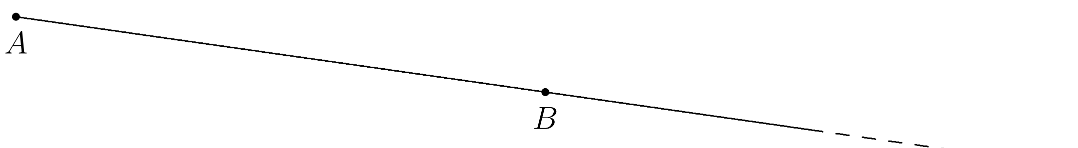
2.2.1 Definition: Strecke Die Menge aller genau zwischen zwei gegebenen Punkten A und B liegenden Punkte zusammen mit den Endpunkten wird bezeichnet mit *Strecke* $[AB]$. Es gilt also $[AB] = [BA]$.



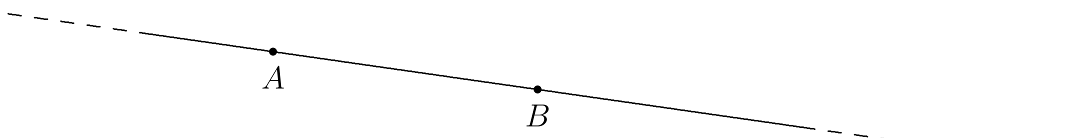
2.2.2 Länge Die *Länge der Strecke* $[AB]$ wird mit $\overline{AB}$ bezeichnet. Im Beispiel: $\overline{AB} = 5,2\,\mathrm{cm}$.

2.2.3 Definition: Halbgerade Verlängert man die Strecke $[AB]$ über B hinaus unbegrenzt und geradlinig, so entsteht die *Halbgerade* $[AB$. Beachte: $[AB \neq [BA$.

Gelegentlich werden Halbgeraden — wie früher — als Strahlen bezeichnet.



2.2.4 Definition: Gerade Verlängert man die Strecke $[AB]$ über A und B hinaus unbegrenzt und geradlinig, so entsteht die *Gerade* AB. Es gilt $AB = BA$.



2.2.5 Kommentare

- Kleinbuchstaben werden sowohl für Strecken als Punktmengen, für Streckenlängen, für Halbgeraden und Geraden als Symbole benutzt. Man sollte sich dieser unglück-lich–verwirrenden, gleichwohl unabänderlichen Tatsache bewusst sein.
- Die gestrichelte Darstellung erhöht den Eindruck der unendlichen Fortsetzung. Oft werden aber (Halb–)Geraden auch ohne Strichelung dargestellt. Der fehlende Begrenzungspunkt symbolisiert die Fortsetzung.
- In der Alltagssprache werden auch die Begriffe ,,Linie" oder ,,Strich" für gerade Objekte benutzt. Die Fachsprache kennt die ,,Grundlinie" eines Dreiecks, aber auch die ,,Kreislinie".

3 Winkel, Lot und Parallele

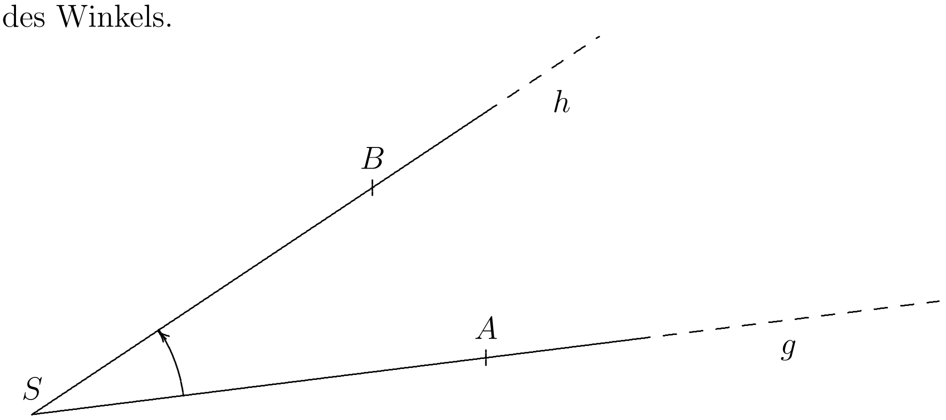
3.1 Winkel

LP$^+$ M5 LB3

H16 T2 A1

3.1.1 Definition: Winkel Ein geordnetes Paar (g, h) von Halbgeraden mit gemeinsamem Anfangspunkt S heißt *Winkel*. Er wird symbolisch als $\sphericalangle(g, h)$ angegeben.

In diesem Zusammenhang heißt g der *erste Schenkel*, h der *zweite Schenkel* und S *Scheitelpunkt* des Winkels.



3.1.2 Formel-Darstellung Sind auf den beiden Schenkeln zwei Punkte $A \in g$ und $B \in h$ gegeben, so ist der Winkel auch durch die drei Punkte A, S, B festgelegt:

$$\sphericalangle\, ASB \quad = \quad \sphericalangle\, (g, h).$$

Man spricht hier von der *Drei–Punkte–Darstellung* und der *Zwei–Schenkel–Darstellung*.

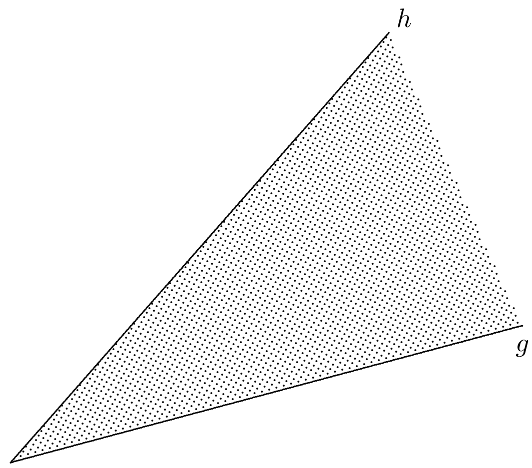
3.1.3 Spezielle Winkel

Stimmen die beiden Halbgeraden überein, so heißt der Winkel *Vollwinkel*.

Ergeben die beiden Halbgerade eine Gerade, so spricht man vom *gestreckten Winkel*.

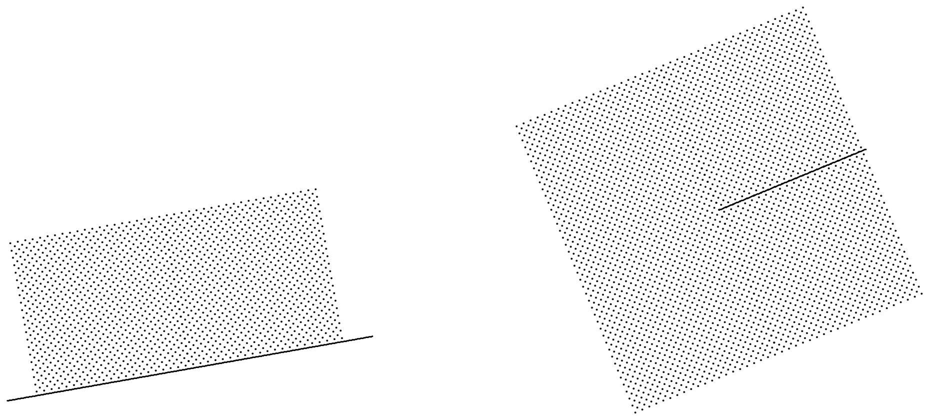
3.1.4 Winkelfeld

Ist ein Winkel $\sphericalangle\, (g, h)$ gegeben, so heißt die Menge der Punkte „zwischen" den Halbgeraden g und h das zugehörige *Winkelfeld*.



Ein bisschen unmathematisch ist dabei das Wort ,,zwischen". Man behilft isch mit der Konvention, dass der erste Schenkel g das Winkelfeld auf der Seite entgegen dem Uhrzeigersinn, der zweite auf der Seite im Uhrzeigersinn begrenzt.

Beachte, dass im Falle des gestreckten Winkels bzw. Vollwinkels das Winkelfeld eine Halbebene bzw. die gesamte Zeichenebene ist. Man kann also den Schnittpunkt gar nicht mehr erkennen.



3.1.5 Drehwinkel

Anschaulich verbindet man mit dem Begriff des Winkels auch die dynamische Auffassung, dass der erste Schenkel g in mathematisch positiver Richtung (Gegenuhrzeigersinn) bis zum zweiten Schenkel h bewegt wird. Man spricht dann vom *Drehwinkel*.

3.1.6 Definition: Winkelmaß

Jedem Winkel kann ein *Winkelmaß* — gemessen in Grad — zugeordnet werden.

Ein Winkel hat genau dann das Maß 1°, wenn bei 360-fachem Aneinanderlegen dieses Winkels der Vollwinkel entsteht.

Im Beispiel:

$$|\sphericalangle ASB| \;=\; |\sphericalangle (g,h)| \;=\; 27^\circ.$$

Winkel und Winkelmaße werden in der Regel mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet.

Je nach Winkelmaß α gibt es verschiedene Bezeichnungen für Winkel.

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	*spitz*		$\alpha = 90^\circ$	*recht*
$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	*stumpf*		$\alpha = 180^\circ$	*gestreckt*
$180^\circ < \alpha < 360^\circ$	*überstumpf*		$\alpha = 360^\circ$	*Voll(-winkel)*

3.1.7 Orientierung ⊖

Die Orientierung eines Winkels ist eine mathematisch klare, aber begrifflich diffizile Angelegenheit, die wir hier nicht genau herausarbeiten wollen. Es sei nur bemerkt, dass die Änderung der Orientierung eines Winkels damit korrespondiert, dass

- die Rollen von erstem und zweitem Schenkel vertauscht werden,
- bzw. die beiden Schenkel an der Winkelhalbierenden gespiegelt werden,
- Winkelmaße mit -1 multipliziert werden,
- in Zeichnungen der Kreisbogenpfeil seine Richtung ändert.

3.1.8 Aktivitäten

- Wie werden Winkel mit dem GEO-Dreieck bzw. Winkelmesser gemessen?

  Schwierigkeiten ergeben sich vor allem im Zusammenhang mit Winkelmaßen $> 90\,°$.
- Uhrzeiten: Winkel zwischen den Zeigern, Überstreichen der Zeiger.
- Geographie: Längen und Breitenkreise. Eichstätt: 49 °N, 11 °O.
- Astronomie: Sehwinkel Sonne und Mond.
- Sport: „Verkürzung" des Winkels.
- Konstruktion von Winkeln mit bestimmten Maßen. Siehe nächstes Unterkapitel 3.2.

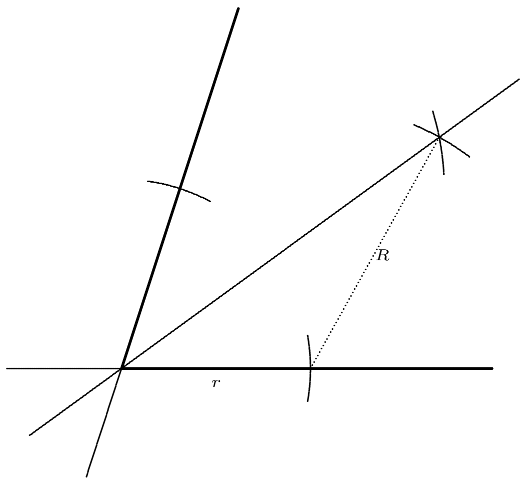
3.2 Konstruktionen mit Winkeln

3.2.1 Winkelhalbierende

H05 T2 A4

H00 T1 A4

Zu einem gegebenen Winkel kann die Symmetrieachse konstruiert werden.



In diesem Zusammenhang heißt die Symmetrieachse die *Winkelhalbierende*. Es entstehen zwei Winkel mit dem halben Maß.

3.2.2 Beschreibung der Konstruktion

(1) Um den Scheitelpunkt des gegebenen Winkels werden zwei Kreisbögen mit gleichem Radius r, die die Schenkel schneiden, gezogen.

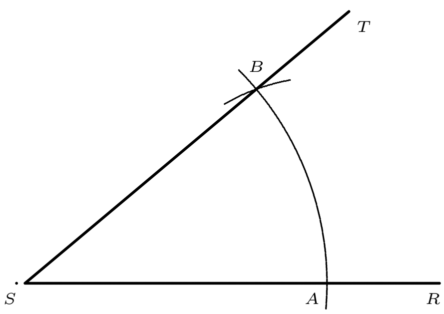
(2) Um die beiden Schnittpunkte werden zwei Kreisbögen mit gleichem (genügend großem) Radius R gezogen. Sie schneiden sich in einem neuen Schnittpunkt.

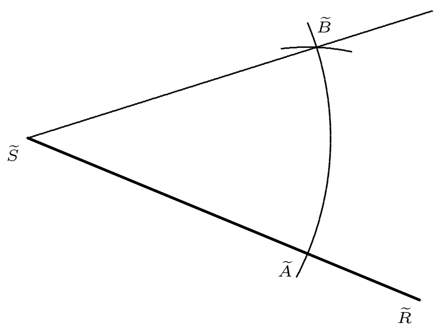
(3) Die Halbgerade durch den Scheitelpunkt und den neuen Schnittpunkt ist die Winkelhalbierende.

3.2.3 Kommentare

- Man kann die Winkelhalbierende als Halbgerade oder Gerade konstruieren. Die Gerade halbiert auch den zugehörigen Scheitelwinkel.
- Mit abstrakt-algebraischen Methoden kann man beweisen, dass die Drittelung eines Winkels per Konstruktion im allgemeinen nicht möglich ist.

3.2.4 Übertragung eines Winkels





Vorgegeben sind ein Winkel $\sphericalangle RST$ und ein freier Schenkel $\widetilde{S}\widetilde{R}$.

Beschreibung der Konstruktion

(1) Ziehe Kreise mit gleichem Radius um die beiden Scheitelpunkte S und $\widetilde{S}$. Es entstehen die Schnittpunkte $A, \widetilde{A}$ der Kreise mit dem jeweils ersten Schenkel und ein Schnittpunkt B des Kreises mit dem zweiten Schenkel des gegebenen Winkels.

(2) Ziehe einen Kreisbogen um $\widetilde{A}$ mit Radius $\overline{AB}$. Es entsteht ein Schnittpunkt $\widetilde{B}$ des Kreises um $\widetilde{S}$ und des Kreisbogens um $\widetilde{A}$.

(3) Die Halbgerade $[\widetilde{S}\widetilde{B}$ ist der zweite Schenkel des übertragenen Winkels.

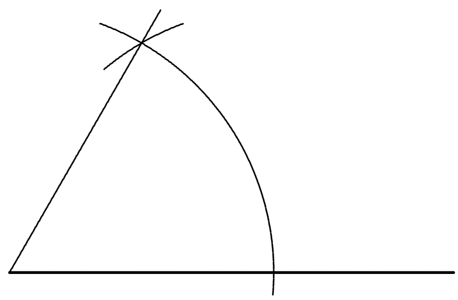
3.2.5 Konstruktion des $90\,^\circ$-Winkels

Die Konstruktion des Lotes wird gleich in Abschnitt **??** beschrieben.

Tatsächlich handelt es sich bei der dort beschriebenen Konstruktion um die der Winkelhalbierenden des gestreckten ($180\,^\circ$) Winkels.

3.2.6 Konstruktion des $60\,^\circ$-Winkels

Die Idee für die Konstruktion besteht darin, ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren.



Beschreibung der Konstruktion:

(1) Um den Anfangspunkt der gegebenen Halbgerade wird ein Kreis mit Radius r gezogen.

(2) Um den Schnittpunkt des Kreises mit der Halbgeraden wird ein Kreisbogen mit gleichem Radius r, der den Kreis schneidet, gezogen.

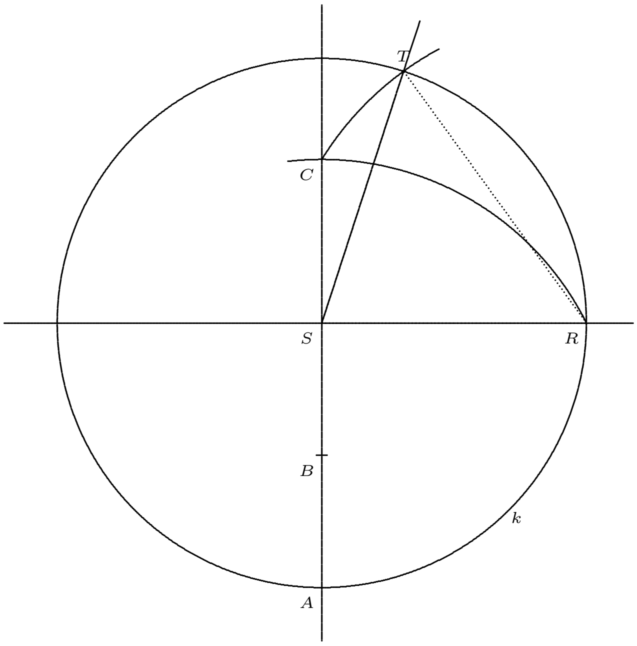
(3) Die Halbgerade durch den Anfangspunkt und den Schnittpunkt von Kreis und Kreisbogen ist der zweite Schenkel des gesuchten Winkels.

3.2.7 Konstruktion weiterer Winkel

Weiter können dann Winkel mit Maßen konstruiert werden, deren Maß sich durch (wiederholte) Addition, Subtraktion oder Halbierung aus den Maßen $60\,^\circ$ oder $90\,^\circ$ ergibt.

Es gibt noch weitere Winkel(-maße), die konstruiert werden können, beispielsweise der $72\,^\circ$-Winkel wie folgt.

3.2.8 Konstruktion des 72°-Winkels ⊖



Die Idee für diese schon etwas aufwändigere Konstruktion besteht darin, ein Mittelpunkts-Teildreieck RST des regelmäßiges Fünfecks zu konstruieren.

Beschreibung der Konstruktion: Vorgegeben ist die Halbgerade $[SR$ als erster Schenkel des gesuchten Winkels.

(1) Errichte das Lot auf SR durch S.

(2) Ziehe einen Kreis k um S, beispielsweise mit Radius $\overline{SR}$. Schnittpunkt A von Kreis und Lot.

(3) Konstruiere den Mittelpunkt B von $[SA]$.

(4) Ziehe einen Kreisbogen um B mit Radius $\overline{BR}$. Schnittpunkt C des Kreisbogens mit Halbgerade $[BS$

(5) Ziehe einen Kreisbogen um R mit Radius $\overline{RC}$. Schnittpunkt T des Kreisbogens mit dem Kreis k.

(6) Die Halbgerade $[ST$ ist der gesuchte zweite Schenkel.

(7) Zusatz: Durch Abtragen der Streckenlänge $\overline{RT}$ entlang des Kreises k kann das regelmäßige Fünfeck vervollständigt werden.

3.3 Rechter Winkel und Lot

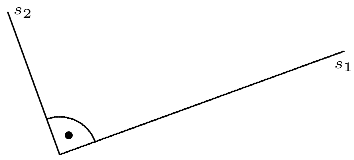
LP$^+$ M5 LB3

F09 T3 A1

3.3.1 Definition: Rechter Winkel

Ein Winkel heißt ein *rechter Winkel*, wenn er das Maß 90° hat.

3.3.2 Darstellung In Zeichnungen werden rechte Winkel durch einen Punkt gekennzeichnet.



3.3.3 Bemerkung

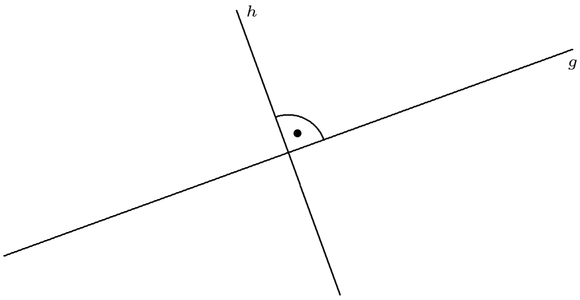
Zur Erfassung des Begriffs des rechten Winkels ist die Winkelmessung eigentlich gar nicht nötig. Er ist allein schon dadurch bestimmt, dass bei zweimaliger oder viermaliger Aneinanderlegung ein gestreckter Winkel bzw. ein Vollwinkel entsteht.

3.3.4 Definition: Lot und Senkrechtstehen

Man sagt, dass zwei sich schneidende Geraden *senkrecht* oder *lotrecht* zueinander stehen, wenn der Schnittwinkel ein rechter Winkel ist.

Man sagt dann auch, dass die eine Gerade eine *Lotgerade* (kurz: ein *Lot*) für die andere ist.

Entsprechendes gilt für Halbgeraden und Strecken.



Symbolisch: $g \perp h$.

3.3.5 Aufgabe: Lot durch einen Punkt

Zeichne oder konstruiere (ZoK) zu einer gegebenen Geraden g und einem gegebenem Punkt P (auf oder außerhalb der Geraden) ein Lot auf g durch P.

- Konstruktion mittels Zirkel und Lineal

  1. Ziehe einen Kreis um P und bestimme die beiden Schnittpunkte G_1, G_2 der Kreislinie mit g.
  2. Ziehe um G_1 und G_2 zwei Kreise mit **gleichen** Radien.
  3. Die Gerade durch die beiden Schnittpunkte K_1 und K_2 der beiden Kreise ist das gesuchte Lot.

- Zeichne mittels GEO-Dreieck

  1. Lege das GEO-Dreieck so auf, dass die Symmetrieachse des GEO-Dreiecks auf der Geraden g zu liegen kommt.
  2. Verschiebe dann das GEO-Dreieck so lange, bis die Hypotenuse (= längste Seite) durch den Punkt geht.
  3. Die Hypotenuse bildet das gesuchte Lot.

Diese Beschreibungen (und weitere, die noch kommen) sind gute Beispiele für das ,,Learning by Doing".

Eine weitere ganz andere Alternative ist der Einsatz von Dynamischer Geometrie-Software (DGS).

3.3.6 Kontextfelder

- Warum spricht man vom rechten Winkel?

  In Bezug auf zahllose handwerkliche, technische, logistische, wirtschaftliche Situationen erweist sich der rechte Winkel als der RICHTIGE Winkel.

- Die Schwerkraft wirkt senkrecht zur Erdoberfläche:
  - Lässt man einen Gegenstand (ohne Schubs) los, so fällt er senkrecht auf den Boden.
  - Eine Kerzenflamme richtet sich immer senkrecht aus.
  - Das Senkblei richtet sich genau nach unten aus.

- Stabilität unter dem Einfluss der Schwerkraft. Natürliche, künstliche und technische Dinge aller Art stehen auf der Erde viel stabiler, wenn sie senkrecht zur Erdoberfläche stehen.
  - Bäume, Halme, Stalaktiten und Stalagmiten in Tropfsteinhöhlen, Tiere und Menschen
  - Gebäude, Türme, Masten, Ziegelsteine
  - Möbel, Bierkastenturm,

- Auftreten rechter Winkel in der Schul- und Alltagswelt
  - Blatt Papier, Tapete, Verpackungen, Möbel, Architektur
  - Der rechte Winkel an der Schultafel, beim GEO–Dreieck
  - Werkzeuge, die einen (exakten) rechten Winkel beinhalten: Schublehre, Papierschneider
  - Kochsalzkristalle

- Ästhetik: Gleichmaß $\leftrightsquigarrow$ Hundertwasser

- Aktivitäten:

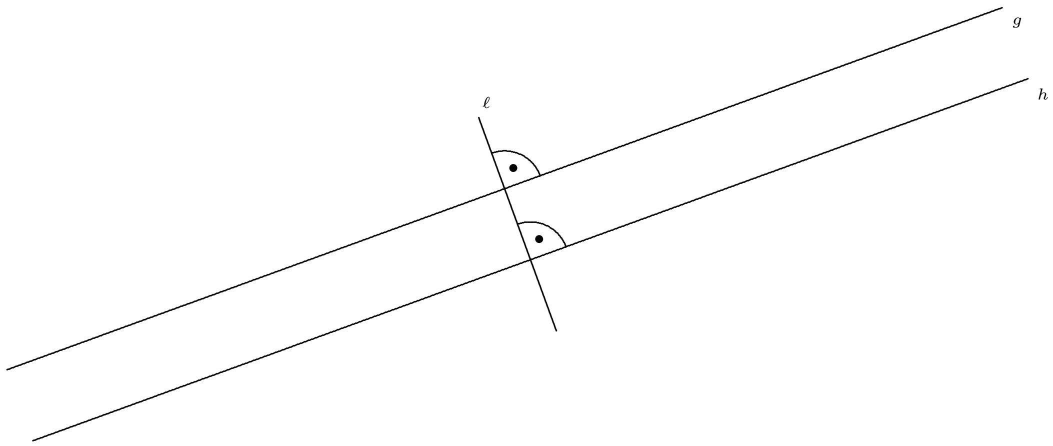
– Ein rechter Winkel kann durch zweimaliges Falten eines Papierfetzens erzeugt werden.
– Schneide von einem Blatt Papier ein Stück ab, so dass ein rechter Winkel entsteht.
– Turmbau mit (irgendwelchen) Bausteinen, Getränkekisten oder Zuckerwürfeln.
– Ein hoher Stapel aus Büchern.
– Balancieren eines Besenstiels oder Zeigestocks.
– Ausprobieren eines ,,Senkbleis" oder einer Wasserwaage.

3.4 Parallelität

LP$^+$ M5 LB3

F10 T1 A1

3.4.1 Definition: Parallelität Zwei Geraden g und h heißen *parallel* zueinander, wenn sie ein gemeinsames Lot ℓ haben.



3.4.2 Ergänzungen und Kommentare

1. Sind zwei Geraden parallel zueinander, so kann dies symbolisch ausgedrückt werden durch

$$g \mid\mid h.$$

2. Da Strecken und Halbgeraden immer zu Geraden verlängert werden können, lässt sich auch für zwei Strecken, Halbgeraden oder Geraden, angeben, ob sie parallel sind.

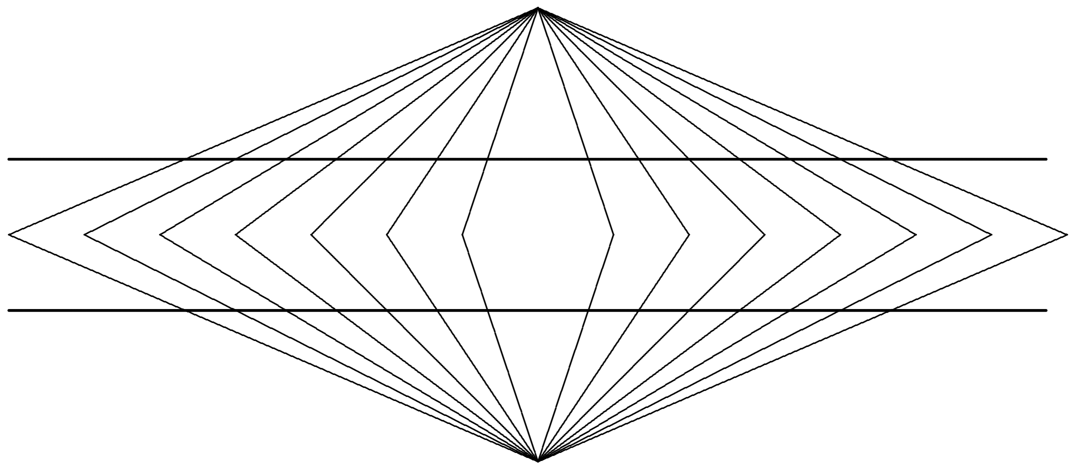
3. Man mache sich bewusst, dass für zwei Geraden der Zeichenebene genau eine der drei Konstellationen auftritt:
   - Die beiden Geraden stimmen überein (und sind deshalb parallel).
   - Die beiden Geraden sind verschieden und parallel.
   - Die beiden Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

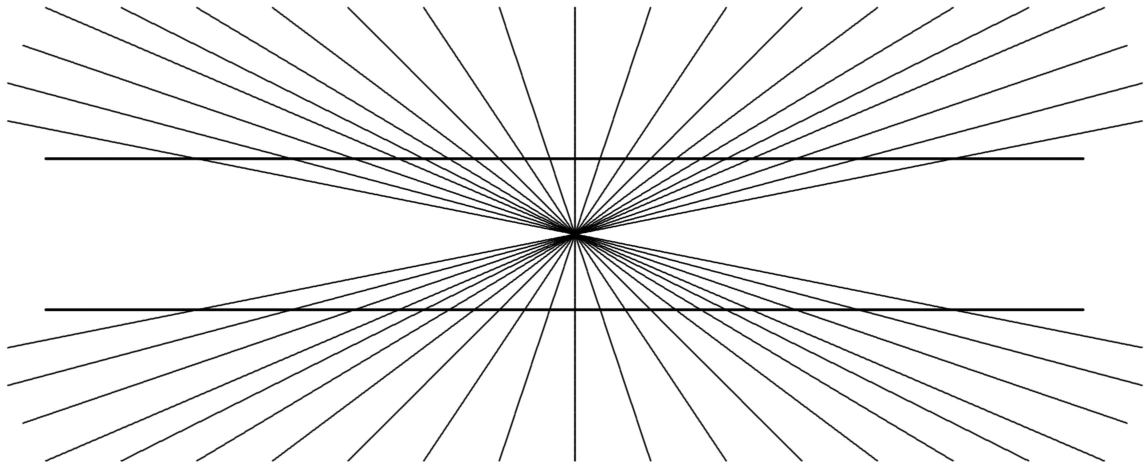
4. Im dreidimensionalen Raum ist die obige Definition unbrauchbar. Zwei Geraden im Raum haben immer ein gemeinsames Lot.

3.4.3 Beispiele Veranschaulichende Beispiele aus der Sachwelt sind:

- Langlaufloipen, Eisenbahnschienen
- Parallelschwung beim Skifahren.
- In etwa: Lichtstrahlen, die von der Sonne kommen.
- Optische Täuschungen mit Parallelität

3.4.4 Parallel?





3.4.5 Alternative Definitionen von Parallelität

F10 T1 A1

Es gibt äquivalente Aussagen, die die Parallelität beschreiben.

Zwei Geraden g und h heißen *parallel* zueinander, wenn sie ...

- sich in keinem Punkt der (unendlich ausgedehnten) Zeichenebene schneiden oder identisch sind.

  Diese Definition ist zugleich simpel und abstrakt, da sie völlig ohne Hilfsbegriffe wie ,,Lot" oder ,,Winkel"' auskommt. Beim alltäglichen Umgang mit Parallelität ist sie nicht gut verwendbar.

- von einer dritten Gerade unter dem gleichen Winkel geschnitten werden.

- ,,an jeder Stelle" den gleichen Abstand haben.

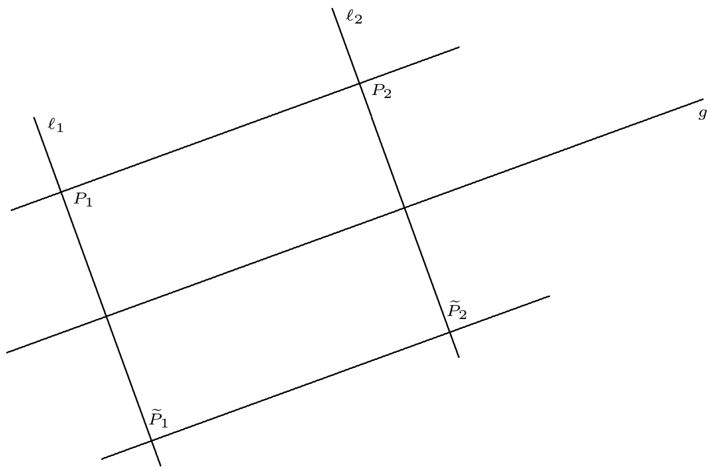
  Diese Definition ist vergleichsweise anschaulich und lebensnah, hat aber den Nachteil, dass der Begriff ,,Abstand" erst im Nachhinein (3.4.8) geklärt wird.

3.4.6 Aufgabe: Parallele mit Abstand

Zeichne oder konstruiere (ZoK) zu einer gegebenen Geraden g eine parallele Gerade (oder beide) mit gegebenem Abstand d!

Die folgenden Möglichkeiten werden in der Vorlesung dargestellt. Es wird davon ausgegangen, dass das ZoK von Lotgeraden bereits bekannt ist (vgl. Abschnitt 3.3.5).

- Lot auf Lot
  1. ZoK eine Lotgerade ℓ auf die Gerade g.
  2. Bestimme auf der Lotgeraden ℓ den Punkt P (oder die beiden Punkte $P, \widetilde{P}$) im Abstand d.
  3. ZoK das Lot auf ℓ durch P (und $\widetilde{P}$).
- Zweimal Lot
  1. ZoK zwei Lotgeraden ℓ_1, ℓ_2 auf die Gerade g.
  2. Bestimme auf beiden Lotgeraden die Punkte P_1, $\widetilde{P}_1$ und P_2, $\widetilde{P}_2$ mit Abstand d zur Geraden g.
  3. ZoK die Geraden P_1P_2 und $\widetilde{P}_1\widetilde{P}_2$.



Hilfsmittel beim Zeichnen ist das GEO-Dreieck. Eventuell können auch die eingeprägten Parallellinien auf dem GEO-Dreieck herangezogen werden.

Hilfsmittel beim Konstruieren sind ausschließlich das Lineal und der Zirkel.

Eine weitere ganz andere Alternative ist der Einsatz von Dynamischer Geometrie-Software (DGS).

3.4.7 Aufgabe: Parallele durch Punkt

F10 T1 A2

Zeichne oder konstruiere zu einer gegebenen Geraden g eine parallele Gerade durch einen gegebenen Punkt P.

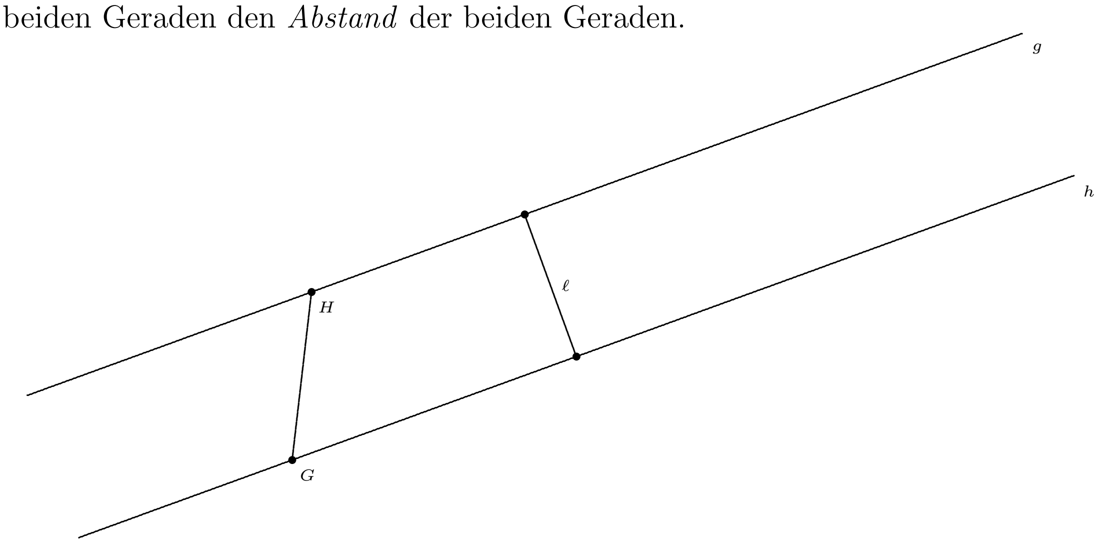
Die folgenden Möglichkeiten werden in der Vorlesung dargestellt:

- Lot auf Lot
  1. ZoK die Lotgerade ℓ vom gegebenem Punkt P auf die Gerade g („Lotfällen").
  2. ZoK das Lot auf ℓ durch P.
- Konstruktion mittels Parallelogramm-Idee.
  1. Wähle zwei Punkte G_1 und G_2 auf der Geraden g.
  2. Ziehe einen Kreis um G_2 mit Radius $\overline{G_1P}$.
  3. Ziehe einen Kreis um P mit Radius $\overline{G_1G_2}$.
  4. Die beiden Kreise haben zwei Schnittpunkte S_1 und S_2.
  5. Eine der beiden Geraden PS_1 oder PS_2 ist die gesuchte parallele Gerade.
- Zeichnen mittels Parallelverschiebung des GEO-Dreiecks entlang eines Lineals.
  1. Lege eine Seite s des GEO-Dreiecks an die gegebene Gerade.
  2. Lege das Lineal an eine andere Seite des GEO-Dreiecks.
  3. Verschiebe das GEO-Dreieck entlang dem Lineal (als Gleitschiene), bis die Seite s durch den Punkt P geht.

  Die Begründung für dieses Vorgehen liefert die zweite Definition in 3.4.5.

3.4.8 Definition: Abstand von parallelen Geraden ⊖

Sind zwei Geraden g und h parallel, so nennt man die Länge einer Lotstrecke ℓ zwischen den beiden Geraden den *Abstand* der beiden Geraden.



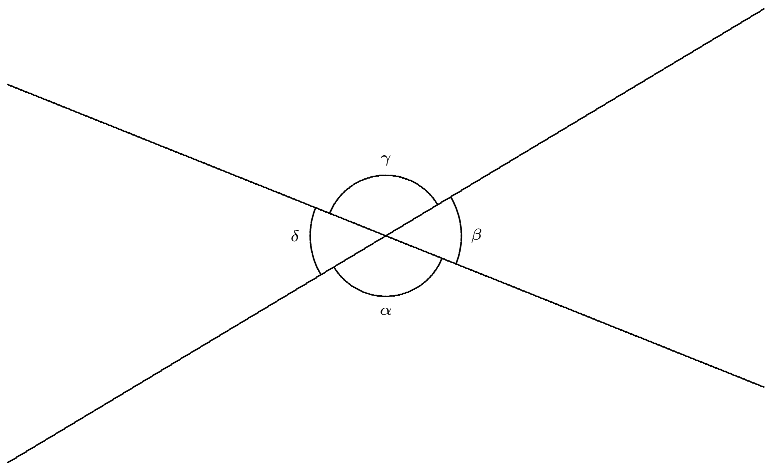
Dieser Abstand ist minimal unter allen Längen von Strecken $[GH]$ mit Endpunkten G auf g und H auf h.

$\curvearrowright$ Überqueren einer Straße, eines Flusses.

3.5 Winkel an einer Einfach-Kreuzung

3.5.1 Situation: Einfach-Kreuzung

Es schneiden sich zwei (verschiedene) Geraden. Am Schnittpunkt treten vier Schnittwinkel auf, die mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezeichnet werden.



3.5.2 Grundsatz: Scheitelwinkel und Nebenwinkel Bezüglich der obigen Situation gilt

(i) (Scheitelwinkelsatz) Scheitelwinkel sind gleich groß:

$$\alpha = \gamma.$$

(ii) (Nebenwinkelsatz) Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°:

$$\beta = 180^\circ - \alpha.$$

3.5.3 Bemerkungen

1. Die obige Aussage nennen wir Grundsatz, da sie im Rahmen der Schulmathematik nicht weiter begründbar ist. Man kann diesen Grundsatz beispielsweise aus der Definition des Winkelmaßes in der analytischen Geometrie heraus beweisen.

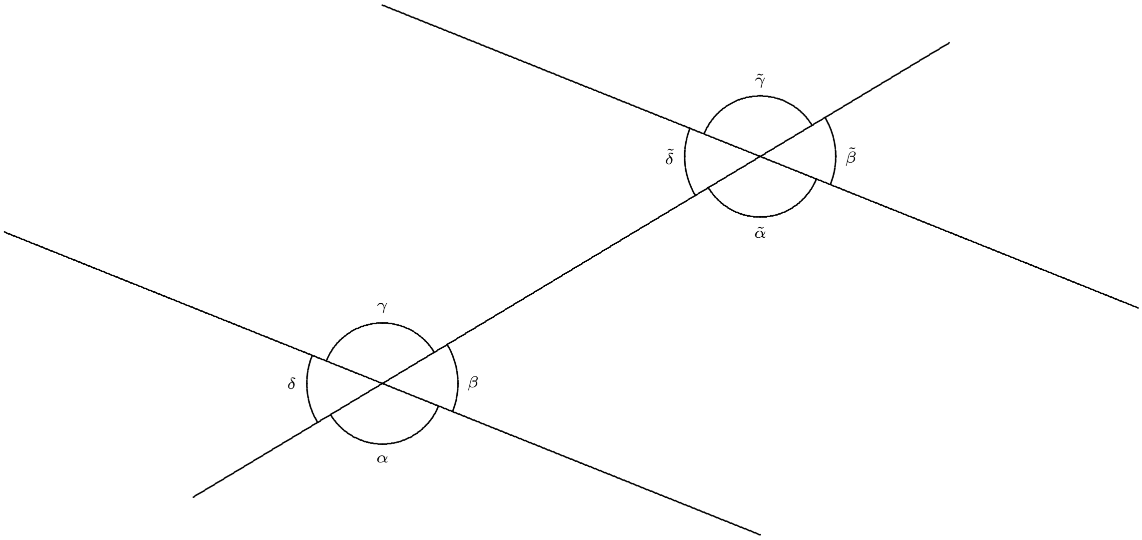
2. Natürlich gelten auch die analogen Aussagen

$$\beta = \delta \qquad \text{bzw.} \qquad \delta = 180^\circ - \gamma.$$

3.6 Winkel an einer Doppel-Kreuzung

3.6.1 Situation: Doppel-Kreuzung

Zwei (verschiedene) parallele Geraden werden von einer dritten Gerade geschnitten. An den beiden Schnittpunkten treten acht Schnittwinkel auf, die mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}$ bezeichnet werden.



3.6.2 Satz: Stufenwinkel und Wechselwinkel In Bezug auf die obige Situation gilt

(i) (Stufenwinkelsatz) Stufenwinkel (= F-Winkel) sind gleich groß:

$$\alpha = \tilde{\alpha}.$$

(ii) (Wechselwinkelsatz) Wechselwinkel (= Z-Winkel) sind gleich groß:

$$\beta = \tilde{\delta}.$$

(iii) C-Winkel ergänzen sich zu 180°:

$$\beta = 180^\circ - \tilde{\alpha}.$$

3.6.3 Bemerkungen

1. Der Stufenwinkelsatz ist wieder ein Grundsatz, der hier nicht weiter begründet wird. Er ist unmittelbar mit dem Begriff der Parallelität verknüpft. Vergleiche dazu die dritte Alternativdefinition der Parallelität in Abschnitt 3.4.5.

   Die anderen beiden Sätze lassen sich über den Scheitelwinkelsatz bzw. Nebenwinkelsatz aus dem Stufenwinkelsatz herleiten.

2. Natürlich gelten viele weitere Zweier-Gleichheiten, die sich so zusammenfassen lassen:

$$\alpha = \gamma = \tilde{\alpha} = \tilde{\gamma} \qquad \text{bzw.} \qquad \beta = \delta = \tilde{\beta} = \tilde{\delta}.$$

3. Es sind auch die Kehrsätze gültig: Wenn zwei Geraden von einer dritten so geschnitten werden, dass die Stufenwinkel (oder Wechselwinkel) übereinstimmen, dann sind sie parallel.

4 Abbildungen der Zeichenebene

4.1 Grundlagen $\ominus$

4.1.1 Definition: Abbildung der Zeichenebene

Von einer *geometrischen Abbildung* spricht man, wenn

♣ **jedem** Punkt P der Zeichenebene

♠ **genau ein** Punkt P' der Zeichenebene

zugeordnet wird. P' heißt dann *Bildpunkt* von P.

Die geometrischen Abbildungen der Schulgeometrie sind ein-eindeutig. Das bedeutet, dass auch

♡ **jedem** Bildpunkt P' der Zeichenebene

♢ **genau ein** Urbildpunkt P' der Zeichenebene

zugeordnet werden kann.

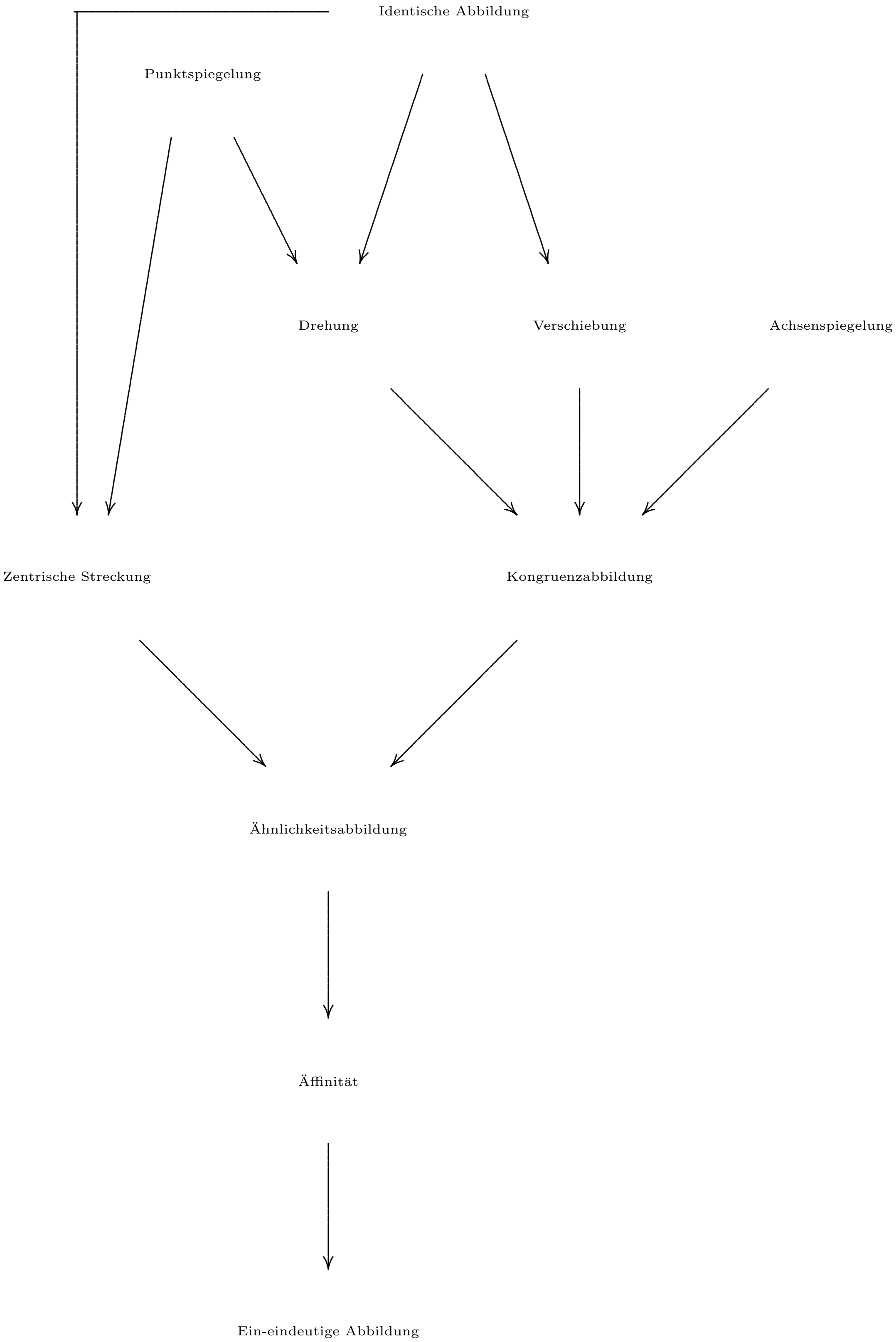
Deshalb kann P als *Urbildpunkt* von P' bezeichnet werden.

4.1.2 Kommentare

- Geometrische Abbildungen sind also spezielle Abbildungen, wie sie in der Grundlagenmathematik bzw. Mengenlehre definiert werden. Die Zeichenebene $\mathbb{E}$ ist sowohl Definitionsmenge als auch Wertemenge der geometrischen Abbildung.
- Man sagt weiter, eine ebene Figur $\mathcal{F}$ wird auf eine andere Figur $\mathcal{F}'$ (*Bildfigur*) abgebildet, wenn jeder Punkt P von $\mathcal{F}$ auf einen Punkt P' von $\mathcal{F}'$ abgebildet wird.
- Ein Punkt der Zeichenebene heißt *Fixpunkt* der geometrischen Abbildung, wenn er auf sich selbst abgebildet wird.
- Eine Figur (Gerade, Strecke, Kreis) heißt *Fixfigur* (*Fixgerade*, *Fixkreis*), wenn sie auf sich selbst abgebildet wird.

  Eine Fixfigur muss nicht notwendig Fixpunkte enthalten: Wird eine Kreisscheibe um 90° gedreht, so ist sie Fixfigur ohne Fixpunkte.
- Eine Abbildung, bei deren zweimaliger Ausführung die Ausgangssituation wiederhergestellt ist, heißt *Involution*.
- Im Zusammenhang mit perspektivischen Darstellungen (Schrägbildern, Technisches Zeichnen) spielen Projektionen eine große Rolle. Diese Abbildungen sind grundsätzlich nicht bijektiv.
- Viele, aber nicht alle, bisherigen Ausführungen können auch auf Abbildungen im Raum (oder höherdimensionale Räume) verallgemeinert werden.

4.2 Überblick über die Abbildungen der Schulgeometrie ⊖



4.3 Achsenspiegelung

H17 T2 A1

4.3.1 Definition der Achsenspiegelung: Senkrechter Abstand

Es sei g eine Gerade.

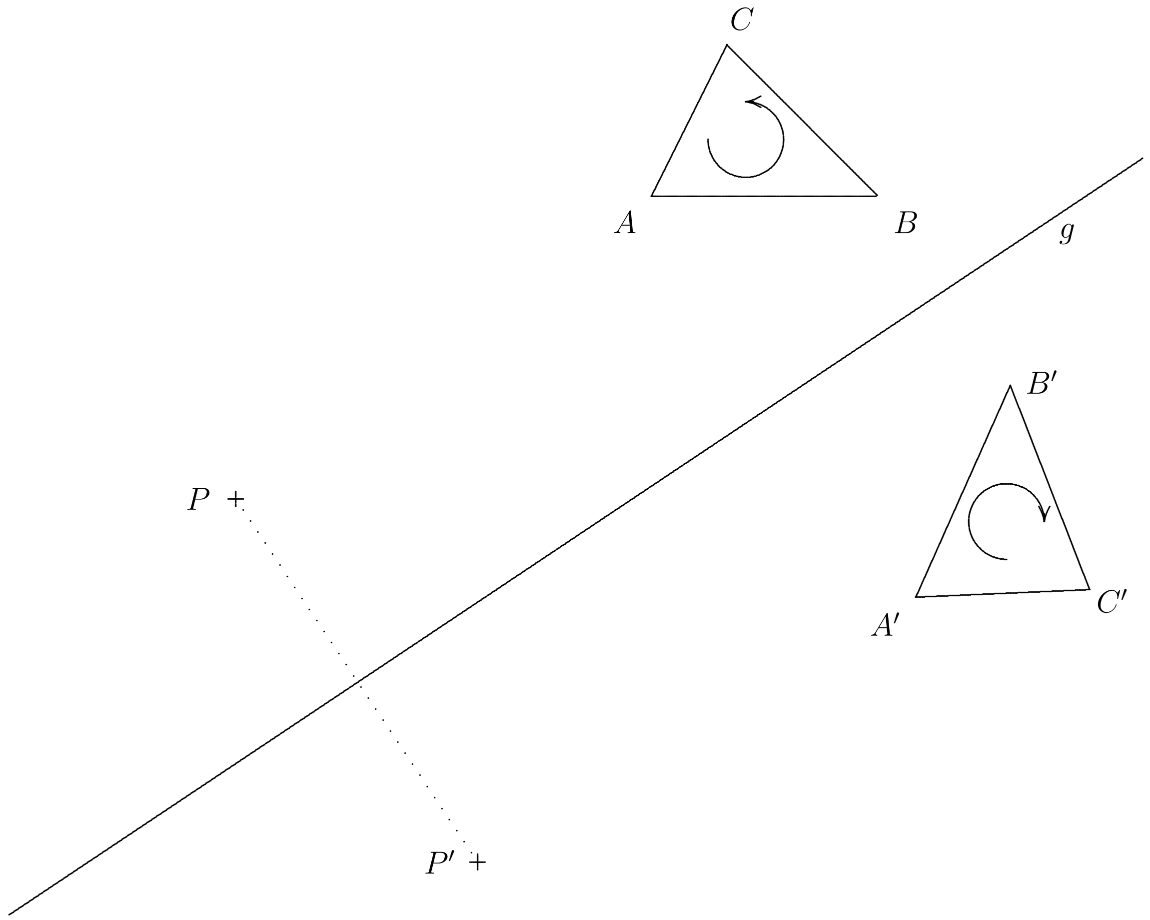
Eine geometrische Abbildung heißt *Achsenspiegelung (bzgl. der Geraden g)*, wenn für jeden Punkt P und seinen Bildpunkt P' gilt:

Die Strecke [PP'] wird von der Gerade g senkrecht halbiert.

Da die Punkte auf der Geraden g von dieser Eigenschaft nicht präzise erfasst werden, vereinbart man noch, dass diese auf sich selbst abgebildet werden.

Man sagt dann, dass P an g auf P' achsengespiegelt wird. Die Gerade g heißt in diesem Zusammenhang *Symmetrieachse*.

4.3.2 Diagramm zur Achsenspiegelung



4.3.3 Anschauliche Deutung

Anschaulich bedeutet die Achsenspiegelung bzgl. einer Geraden g, dass die Zeichenebene längs g ,,geteilt" und dann die beiden Teile übereinandergefaltet werden. Punkt P und Bildpunkt P' kommen zur Deckung.

4.3.4 ZoK des Bildpunkts mittels Lot

Daraus ergibt sich die folgende Handlungsanweisung für die Achsenspiegelung eines Punktes P an einer Achse g:

- Fälle ein Lot von P auf die Achse g!
- Mit Zirkel oder GEO-Dreieck: Bestimme den Bildpunkt P' auf diesem Lot, so dass sein Abstand zu g gleich groß ist wie der Abstand von P zu g!

4.3.5 Äquivalente Definition: Gleicher Abstand

Eine geometrische Abbildung heißt *Achsenspiegelung (bzgl. der Geraden g)*, wenn jeder Punkt P so auf den Bildpunkt P' abgebildet wird, dass

$$\overline{PG_1} = \overline{P'G_1} \quad \text{und} \quad \overline{PG_2} = \overline{P'G_2},$$

wobei G_1 und G_2 zwei beliebige verschiedene Punkte auf der Geraden g sind.

4.3.6 Konstruktion des Bildpunkts mittels Zirkel

Daraus ergibt sich die folgende Konstruktion für einen achsengespiegelten Punkt:

- Wähle zwei beliebige Punkte $G_1 \in g$ und $G_2 \in g$ aus. (Günstig, wenn sie nicht zu nahe beieinanderliegen.)
- Ziehe einen Kreis um G_1 durch P.
- Ziehe einen Kreis um G_2 durch P.
- Der zweite Schnittpunkt der beiden Kreise ist der gesuchte Bildpunkt P'.

4.3.7 Äquivalente Definition: Gleicher Winkel $\ominus$

Eine geometrische Abbildung heißt *Achsenspiegelung (bzgl. der Geraden g)*, wenn jeder Punkt P so auf den Bildpunkt P' abgebildet wird, dass

$$\underbrace{|\sphericalangle(PG_1, g)| = |\sphericalangle(P'G_1, g)|}_{\text{entgegengesetzt orientiert}} \quad \text{und} \quad \underbrace{|\sphericalangle(PG_2, g)| = |\sphericalangle(P'G_2, g)|}_{\text{entgegengesetzt orientiert}},$$

wobei G_1 und G_2 zwei beliebige verschiedene Punkte auf der Geraden g sind.

4.3.8 Konstruktion des Bildpunkts mittels Winkel $\ominus$

Daraus ergibt sich die folgende Konstruktion für einen achsengespiegelten Punkt:

- Wähle zwei beliebige Punkte $G_1 \in g$ und $G_2 \in g$ aus. (Günstig, wenn sie nicht zu nahe beieinanderliegen.)
- Trage den Winkel, unter dem P bei G_1 gegenüber der Geraden g erscheint, auf der anderen Seite von g an.
- Trage den Winkel, unter dem P bei G_2 gegenüber der Geraden g erscheint, auf der anderen Seite von g an.
- Der Schnittpunkt der beiden neuen Schenkel ist der gesuchte Bildpunkt P'.

4.3.9 Äquivalente Definition: Gleicher Abstand und Winkel ⊖

Eine geometrische Abbildung heißt *Achsenspiegelung (bzgl. der Geraden g)*, wenn jeder Punkt P so auf den Bildpunkt P' abgebildet wird, dass

$$\overline{PG} = \overline{P'G} \quad \text{und} \quad \underbrace{|\sphericalangle(PG, g)| \; = \; |\sphericalangle(P'G, g)|}_{\text{entgegengesetzt orientiert}},$$

wobei G ein beliebiger Punkt auf der Geraden g ist.

4.3.10 Konstruktion des Bildpunkts mittels Abstand und Winkel ⊖

Daraus ergibt sich die folgende Konstruktion für einen achsengespiegelten Punkt:

- Wähle einen beliebigen Punkt $G \in g$ aus.
- Trage den Winkel, unter dem P bei G gegenüber der Geraden g erscheint, auf der anderen Seite von g an.
- Ziehe einen Kreis um G durch P.
- Der Schnittpunkt von Kreis und dem neuen Schenkel ist der gesuchte Bildpunkt P'.

4.3.11 Treue-Eigenschaften von Achsenspiegelungen

- Die Tatsache, dass viele (geo–)metrischen Eigenschaften bei einer Achsenspiegelung unverändert bleiben, bezeichnet man als „Treue" bzgl. dieser Eigenschaft. Genauer:
  - *Geradentreue*: Das Bild einer Geraden bei einer Achsenspiegelung ist wieder eine Gerade.
  - *Parallelitätstreue*: Werden zwei parallele Geraden achsengespiegelt, so sind die beiden Bildgeraden wieder parallel.
  - *Längentreue*: Wird eine Strecke $[AB]$ achsengespiegelt, so ist die Bildstrecke $[A'B']$ genauso lang wie die ursprüngliche Strecke.

    Allgemeiner bleibt die Länge von (auch gekrümmten) Linien unverändert.
  - Wird ein Winkel $\sphericalangle ABC$ achsengespiegelt, so hat der Bildwinkel $\sphericalangle A'B'C'$ das gleiche Maß.
  - *Kreistreue*: Ein Kreis wird bei einer Achsenspiegelung auf einen Kreis mit gleichem Radius abgebildet.
  - *Flächentreue*: Die Fläche einer geometrischen Figur bleibt bei einer Achsenspiegelung unverändert.
- *Orientierungsumkehrung*: Vgl. das Diagramm 4.3.2.

  Ist der Drehsinn eines Dreiecks $\triangle ABC$ positiv (=Gegenuhrzeigersinn), so ist der Drehsinn des Bilddreiecks $\triangle A'B'C'$ negativ (=Uhrzeigersinn).

  Daraus folgt auch die umgekehrte Formulierung:

  Ist der Drehsinn eines Dreiecks $\triangle ABC$ negativ (=Uhrzeigersinn), so ist der Drehsinn des Bilddreiecks $\triangle A'B'C'$ positiv (=Gegenuhrzeigersinn).
- Direkt aus der Definition folgt, dass der Bildpunkt P' durch die gleiche Achsenspiegelung wieder auf den Urbildpunkt P zurückabgebildet wird. Die Achsenspiegelung ist also eine Involution.

4.4 Punktspiegelung

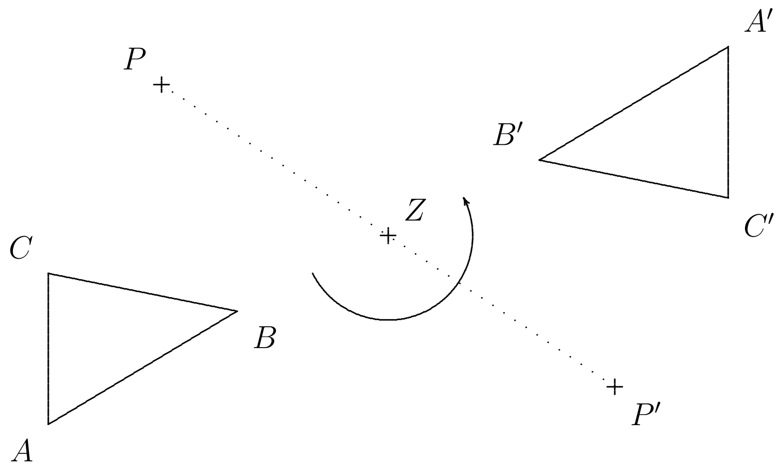
4.4.1 Definition: Punktspiegelung Es sei Z ein Punkt in der Zeichenebene.

Eine geometrische Abbildung heißt *Punktspiegelung* bzgl. Z, wenn jeder Punkt P der Zeichenebene so auf seinen Bildpunkt P' abgebildet wird, dass die Strecke $[PP']$ durch Z halbiert wird.

Der Punkt Z wird auf sich selbst abgebildet.

Man sagt dann, dass P an Z auf P' (punkt-)gespiegelt wird. Der Punkt Z heißt in diesem Zusammenhang *Zentrum*.

4.4.2 Diagramm zur Punktspiegelung



4.4.3 ZoK des Bildpunkts

Daraus ergibt sich die folgende Anleitung für die Punktspiegelung eines Punktes P an einem Zentrum Z:

- Zeichne einen Strahl mit Anfangspunkt P durch Z.
- Zeichne den Bildpunkt P' auf diesem Strahl, so dass sein Abstand zu Z gleich groß ist wie der Abstand von P zu Z! Dafür ist auch ein Zirkel gut geeignet.

4.4.4 Alternativen

Mit einer Punktspiegelung gleichbedeutend sind ...

- eine $180\,^\circ$–Drehung um Z oder
- eine zweifache Achsenspiegelung bzgl. zweier Geraden, die sich in Z senkrecht schneiden.

Dieser Zusammenhang wird im nächsten Unterkapitel 4.5 über Drehungen genauer aufgezeigt.

4.4.5 Eigenschaften von Punktspiegelungen

- Längentreue, Winkeltreue, Geradentreue, Kreistreue, Flächentreue, Parallelitätstreue.
- Die Orientierung bleibt erhalten, d.h. ist der Drehsinn eines Dreiecks $\triangle ABC$ positiv (Gegenuhrzeigersinn), so ist der Drehsinn des Bilddreiecks $\triangle A'B'C'$ ebenfalls positiv. Siehe die Zeichnung 4.4.2.
- Direkt aus der Definition folgt, dass der Bildpunkt P' durch die Punktspiegelung bzgl. Z wieder auf den P zurück abgebildet wird. Die Punktspiegelung ist also auch eine Involution.

4.5 Drehungen

H13 T2

4.5.1 Definition: Drehung Es sei Z ein Punkt der Zeichenebene und α ein Winkelmaß. F12 T1 A1

Eine geometrische Abbildung heißt *Drehung (um Z mit Winkel α)*, wenn jeder Punkt P der Zeichenebene so auf einen Punkt P' abgebildet wird, dass H03 T1 A3

$$\overline{PZ} = \overline{P'Z} \quad \text{und} \quad |\sphericalangle PZP'| = \alpha.$$

In diesem Kontext heißt Z der *Drehpunkt (= Zentrum)* und α der *Drehwinkel.*

Wie bereits erwähnt, ist die Punktspiegelung ein Spezialfall der Drehung, nämlich der des Drehwinkels 180°.

4.5.2 Handlung Daraus ergibt sich die folgende Handlungsanweisung für die Drehung eines Punktes P um ein Zentrum Z mit dem Winkel α:

- Zeichne die Strecke $[PZ]$!
- Zeichne einen Strahl mit Anfangspunkt Z, der mit der Strecke $[PZ]$ den Winkel α bildet.
- Zeichne den Bildpunkt P' auf den Strahl, so dass sein Abstand zu Z gleich groß ist wie der Abstand von P zu Z! Dafür ist auch ein Zirkel gut geeignet.

4.5.3 Treue

Drehungen haben ebenfalls die typischen Treue-Eigenschaften: Sie sind längentreu, winkeltreu, flächentreu, geradentreu, kreistreu, parallelentreu. Außerdem sind sie orientierungserhaltend.

4.5.4 Satz über Drehungen

F12 T1 A1

Es seien g und h zwei Geraden, die sich in einem Punkt Z unter dem Winkel β schneiden.

- Eine Nacheinanderausführung von zwei Achsenspiegelungen an den beiden Geraden

ist gleichbedeutend mit

- einer Drehung mit Drehpunkt Z und Drehwinkel $2 \cdot \beta$.

4.5.5 Fragen zu diesem Satz

Ist diese Feststellung ein purer Zufall, eine Laune der Geometrie?

Ist diese Feststellung von einer Allmacht in unsere Welt hineinbestimmt, quasi verordnet?

Müssen wir als geometrieinteressierte Menschen diese Beobachtung als zufällig oder verordnet kommentarlos hinnehmen?

NEIN. Kraft unseres Denkens können wir uns davon überzeugen, dass diese Beobachtung aus der Geometrie heraus (d.h. aus der Sache heraus — intrinsisch) unausweichlich ist.

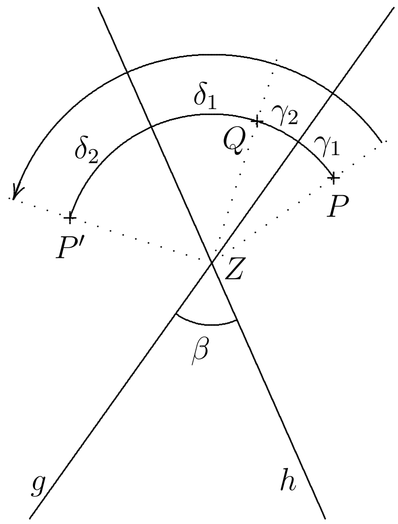
Eine sinnvolle Zusammenstellung von Gedanken, die diese Überzeugung hervorbringen, heißt ...... B.W.

4.5.6 Beweis

(0) Wir studieren die erste im Satz angegebene Situation.

Es sei weiter P — stellvertretend für alle Punkte der Zeichenebene — irgend ein beliebiger Punkt.

(1) Wir spiegeln den Punkt P zuerst an der Geraden g, es entsteht der Bildpunkt Q. Anschließend wird dieser Punkt Q an der Geraden h gespiegelt. Es entsteht ein weiterer Bildpunkt, den wir P' nennen.



(2a) Bei der ersten Achsenspiegelung an g gilt aufgrund der Eigenschaften der Achsensymmetrie:

$$\overline{PZ} = \overline{QZ} \qquad \text{und} \qquad \underbrace{|\sphericalangle(PZ,g)|}_{\gamma_1} = \underbrace{|\sphericalangle(QZ,g)|}_{\gamma_2}$$

(2b) Bei der zweiten Achsenspiegelung an h gilt:

$$\overline{QZ} = \overline{P'Z} \qquad \text{und} \qquad \underbrace{|\sphericalangle(QZ,h)|}_{\delta_1} = \underbrace{|\sphericalangle(P'Z,h)|}_{\delta_2}.$$

(3) Durch „Zusammenfügen" dieser Eigenschaften lässt sich folgern

$$\begin{aligned} \overline{PZ} &= \overline{P'Z} \\ |\sphericalangle(PZ,P'Z)| &= \gamma_1+\gamma_2+\delta_1+\delta_2 = 2\gamma_2+2\delta_1 = 2(\gamma_2+\delta_1) \\ &= 2\cdot|\sphericalangle(g,h)| = 2\cdot\beta. \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen bedeuten aber genau, dass P' als Bildpunkt entsteht, wenn P um Z als Drehzentrum mit dem Drehwinkel $2\cdot\beta$ gedreht wird.

(4) Damit ist die Oben $\Rightarrow$ Unten–Richtung des Satzes über Drehungen bewiesen. Die mathematisch notwendige Vervollständigung des Beweises durch die Unten $\Rightarrow$ Oben–Richtung ersparen wir uns.

4.6 Verschiebungen

4.6.1 Definition: Verschiebung

Es sei R eine *Richtung* in der Zeichenebene und a eine Streckenlänge. In diesem Kontext heißt R die *Verschiebungsrichtung* und a die *Verschiebungslänge*.

Eine geometrische Abbildung heißt *Verschiebung* (in Richtung R mit Länge a), wenn jeder Punkt P der Zeichenebene so auf einen Punkt P' abgebildet wird, dass

$$\text{der Pfeil von } P \text{ nach } P' \text{ die Richtung } R \text{ hat} \quad \text{und} \quad \overline{PP'} = a \text{ ist.}$$

4.6.2 Kommentare

- Wir wollen den Begriff der Richtung hier nicht näher unter die Lupe nehmen, sondern nur darauf hinweisen, dass eine Richtung durch einen Pfeil (bzw. einen Vektor) definiert wird.
- Man könnte auf die Idee kommen, dass auch die Achsenspiegelung eine Verschiebung ist. Ein Punkt P wird senkrecht zur Spiegelachse um den zweifachen Achs-Abstand ,,verschoben".

  NEIN. Beachte, dass bei einer Verschiebung **alle** Punkte der Zeichenebene mit gleicher Verschiebungslänge verschoben werden.

4.6.3 Treue

Schon eintönig mutet die Feststellung an, dass Verschiebungen ebenfalls die Treue–Eigenschaften erfüllen: Sie sind längentreu, winkeltreu, flächentreu, geradentreu, kreistreu, parallelentreu. Außerdem sind sie orientierungserhaltend.

4.6.4 Satz über Verschiebungen

Es seien g und h zwei parallele Geraden mit Abstand b.

- Eine Nacheinanderausführung von zwei Achsenspiegelungen an den beiden Geraden

  ist gleichbedeutend mit

- einer Verschiebung in Richtung senkrecht zu den beiden Geraden und Länge $2 \cdot b$.

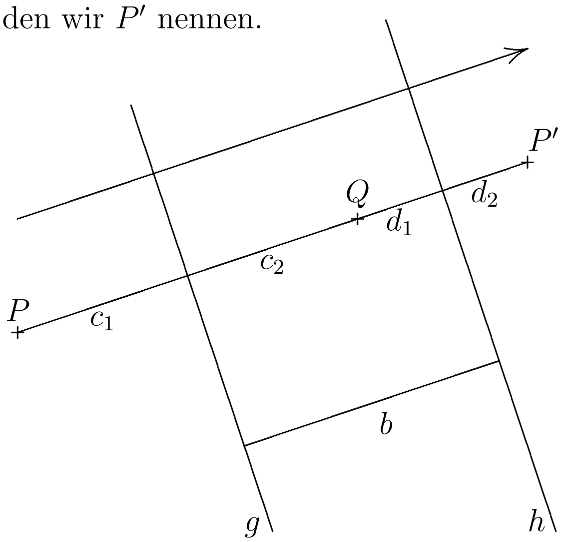
Vergleichen Sie die Formulierung dieses Satzes und seines Beweises mit der des Satzes über Drehungen. Die starke Analogie kann in der ,,Projektiven Geometrie" mathematisch begründet werden.

4.6.5 Beweis ⊖

(0) Wir studieren die erste im Satz angegeben Situation.

Es sei weiter P irgend ein beliebiger Punkt der Zeichenebene.

(1) Wir spiegeln den Punkt P zuerst an der Geraden g, es entsteht der Bildpunkt Q. Anschließend wird dieser Punkt Q an der Geraden h gespiegelt. Es entsteht ein weiterer Bildpunkt, den wir P' nennen.



(2a) Bei der ersten Achsenspiegelung an g gilt aufgrund der Eigenschaften der Achsensymmetrie:

$$PQ \perp g \qquad \text{und} \qquad \underbrace{d(P,g)}_{c_1} = \underbrace{d(Q,g)}_{c_2}$$

(2b) Bei der zweiten Achsenspiegelung an h gilt:

$$QP' \perp h \qquad \text{und} \qquad \underbrace{d(Q,h)}_{d_1} = \underbrace{d(P',h)}_{d_2}$$

(3) Durch ,,Zusammenfügen" dieser Eigenschaften lässt sich folgern

der Pfeil von P nach P' steht senkrecht auf den beiden Geraden

$\overline{PP'} = c_1 + c_2 + d_1 + d_2 = 2c_2 + 2d_1 = 2(c_2 + d_1) = 2 \cdot b.$

Diese beiden Aussagen bedeuten aber genau, dass P' als Bildpunkt entsteht, wenn P senkrecht zu den Geraden mit Länge $2 \cdot b$ verschoben wird.

(4) Damit ist die Oben $\Rightarrow$ Unten–Richtung des Satzes über Drehungen bewiesen. Die mathematisch notwendige Vervollständigung des Beweises durch die Unten $\Rightarrow$ Oben–Richtung ersparen wir uns.

4.7 Kongruenzabbildungen

H13 T2

4.7.1 Definition und Satz über Kongruenzabbildungen

H03 T1 A3

Für eine geometrische Abbildung sind die folgenden Eigenschaften äquivalent (= gleichbedeutend)

(A) (Def) Die Abbildung heißt *Kongruenzabbildung.*

(B) Die Abbildung ist längentreu.

(C) Die Abbildung ist längentreu, winkeltreu (= formtreu), flächentreu, geradentreu, parallelentreu und kreistreu.

(D) Es lassen sich eine, zwei oder drei Geraden finden, so dass die Abbildung als Nacheinanderausführung von Achsenspiegelungen an diesen Geraden realisiert werden kann.

4.7.2 Begründungen für diesen Satz ⊖

Begründung für (B) ⇒ (C): Ein beliebiger Winkel lässt sich in ein Dreieck ,,einbauen". Dieses Dreieck wird durch die längentreue Abbildung in ein kongruentes Dreieck abgebildet (SSS-Satz). Deswegen ist der abgebildete Winkel wieder gleich groß. Also ist eine längentreue Abbildung auch winkeltreu. (Die Umkehrung gilt nicht!) Die anderen Treue–Eigenschaften ergeben sich ähnlich. Wir wollen nicht alles ,,zerkleinern".

Begründung für (B) ⇒ (D):

1. Zunächst kann man sich überlegen, dass eine Kongruenzabbildung dadurch festgelegt ist, wie ein beliebiges Dreieck abgebildet wird. Wir müssen also zeigen, dass ein Dreieck auf ein deckungsgleiches mit höchstens drei Achsenspiegelungen abgebildet werden kann. Es seien also zwei beliebige deckungsgleiche Dreiecke ABC und PQR gegeben.

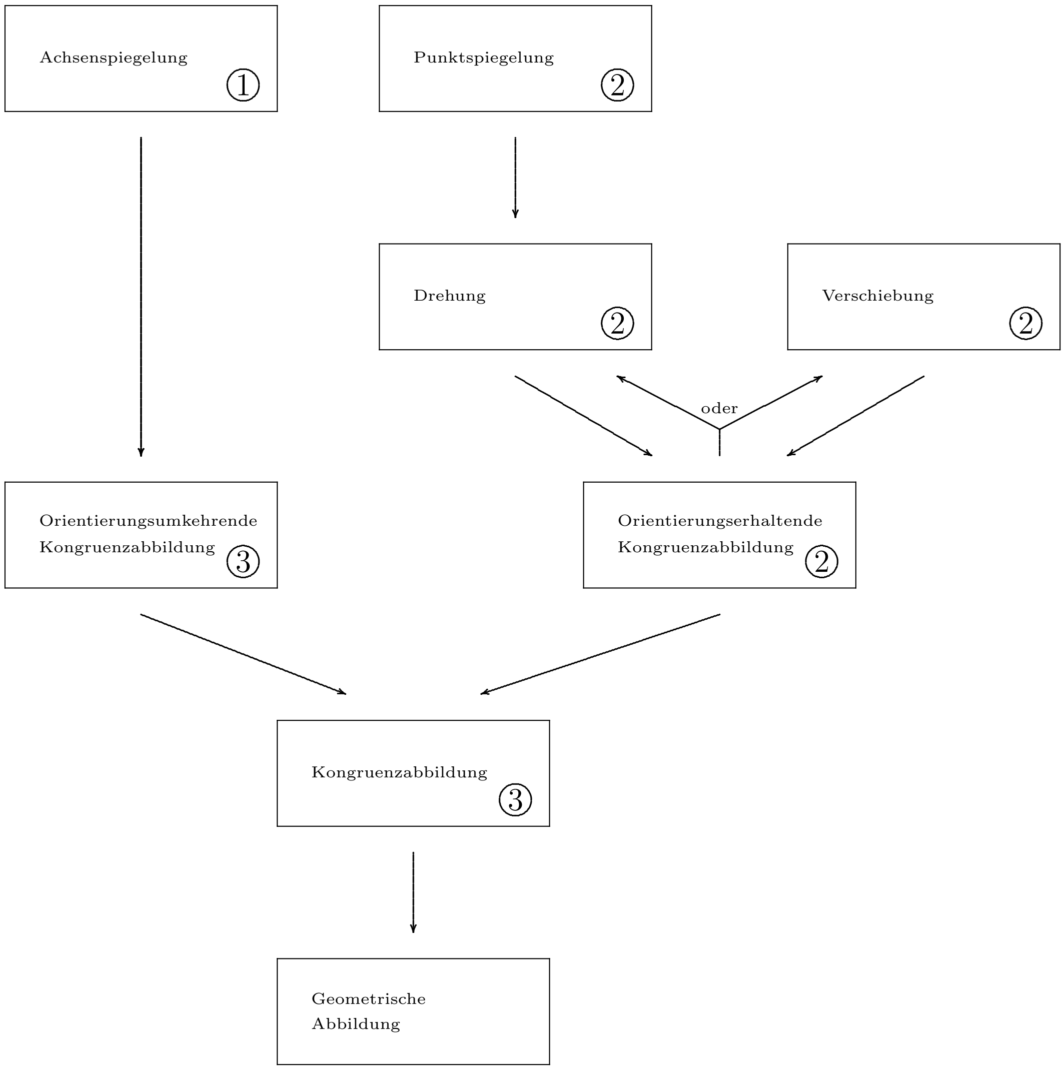
2. Wir führen zunächst eine Achsenspiegelung durch, die A auf $A' = P$ abbildet. Es entsteht ein Dreieck $A'B'C'$.

3. Haben die beiden gegebenen Dreiecke ABC und PQR gleiche Orientierungen, so haben die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ verschiedene Orientierungen. Es genügt jetzt eine Achsenspiegelung, die B' auf Q (oder R) abbildet. Dabei wird auch C' auf R (bzw. Q) abgebildet.

4. Haben die beiden ursprünglich gegebenen Dreiecke ABC und PQR verschiedene Orientierungen, so haben die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gleiche Orientierungen. Es genügt jetzt eine Drehung (also eine Zweifach–Achsenspiegelung), die B' auf Q (oder R) abbildet. Dabei wird auch C' auf R (bzw. Q) abgebildet.

Begründung für (D) ⇒ (B): Da eine einzelne Achsenspiegelung längentreu ist, gilt dies auch für die Nacheinanderausführung von mehreren Achsenspiegelungen.

4.7.3 Diagramm der Kongruenzabbildungen



- Ein Pfeil ist als ,,ist Spezialfall von” zu lesen.
- Die jeweils einem Typ von geometrischer Abbildung $\mathcal{A}$ zugeordnete eingekreiste Zahl n hat die folgende Bedeutung:

  Die Abbildung $\mathcal{A}$ lässt sich als Nacheinanderausführung von höchstens n Achsenspiegelungen (bei geeigneter Auswahl der Achsen) durchführen.

- Das Diagramm könnte noch weiter ergänzt werden durch die beiden folgenden Typen von orientierungsumkehrenden Kongruenzabbildungen
  - Drehspiegelung: Das ist eine Drehung mit anschließender Achsenspiegelung oder umgekehrt.
  - Gleitspiegelung (= Schubspiegelung): Das ist eine Verschiebung mit anschließender Achsenspiegelung oder umgekehrt.

4.8 Zentrische Streckung ⊖

M10 LB 3

H02 T1 A4

4.8.1 Definition Es sei Z ein fester Punkt der Zeichenebene und $m \neq 0$ eine feste reelle Zahl.

Eine Abbildung der Zeichenebene heißt *zentrische Streckung* mit *Streckungszentrum* Z und *Streckungsfaktor* m, wenn für alle Punkte P der Zeichenebene und ihre Bildpunkte P' gilt:

$$\overrightarrow{ZP'} = m \cdot \overrightarrow{ZP}.$$

4.8.2 Alternativ-Definition ohne Vektorbegriff

Will man die Schreibweise mit Vektoren vermeiden, so wird die Formulierung der definierenden Bedingung aufwändiger.

Eine geometrische Abbildung heißt zentrische Streckung mit Streckungszentrum Z und Streckungsfaktor m, wenn der Bildpunkt P' eines beliebigen Punktes P durch die beiden folgenden Bedingungen gegeben ist:

- Es gilt $\overline{P'Z} = |m| \cdot \overline{PZ}$
- Im Fall $m > 0$ liegt der Bildpunkt auf der gleichen Seite wie P bzgl. des Zentrums. Im Fall $m < 0$ liegt der Bildpunkt auf der anderen Seite wie P bzgl. des Zentrums.

4.8.3 Sechs Konstellationen

Es gibt im wesentlichen sechs verschiedenen Konstellationen:

$m > 1$: Eine wirkliche zentrische Streckung. Der Punkt P wird vom Zentrum weiter weg in die gleiche Richtung abgebildet.

$m = 1$: Das ist die identische Abbildung. („Nichts passiert")

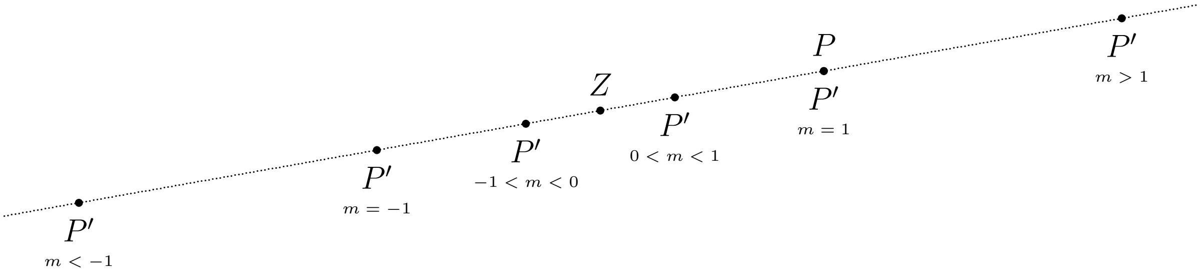
$0 < m < 1$: Eine zentrische „Stauchung". Der Punkt P wird näher ans Zentrum in die gleiche Richtung abgebildet.

$-1 < m < 0$: Der Punkt P wird näher ans Zentrum abgebildet, aber in entgegengesetzte Richtung vom Zentrum aus.

$m = -1$: Das ist die Punktspiegelung.

$m < -1$: Der Punkt P wird weiter weg und entgegengesetzt vom Zentrum abgebildet.

4.8.4 Geometrische Darstellung



4.8.5 Weitere Kommentare

- Aus der Definition ergibt sich, dass das Zentrum auf sich selbst abgebildet wird.
- Auch bei $m = 0$ würde eine geometrische Abbildung vorliegen: Alle Punkte der Zeichenebene werden auf das Zentrum abgebildet. Man spricht aber nicht von einer zentrischen Streckung.
- Der Begriff Streckung erscheint erst bei der Abbildung von ebenen Figuren passend. Dass einzelne Punkte gestreckt werden, mutet seltsam an.
- Jede zentrische Streckung besitzt eine Umkehrabbildung, nämlich die zentrische Streckung mit gleichem Zentrum und Streckungsfaktor $\frac{1}{m}$.
- Die Aussage über die Längenmaße lässt sich umschreiben in

  $$\frac{\overline{P'Z}}{\overline{PZ}} = |m| \qquad \text{für alle Punkte } P \text{ der Zeichenebene.}$$

  Fasst man Urbildstreckenlänge und Bildstreckenlänge als Größen auf, so liegt also eine direkte Proportionalität vor.

4.8.6 Treue-Eigenschaften bei zentrischen Streckungen

- *Geradentreue*: Das Bild einer Geraden bei einer zentrischen Streckung ist wieder eine Gerade.
- *Parallelitätstreue*: Werden zwei parallele Geraden zentrisch gestreckt, so sind die beiden Bildgeraden wieder parallel.
- *Winkeltreue*: Wird ein Winkel $\sphericalangle ABC$ zentrisch gestreckt, so hat der Bildwinkel $\sphericalangle A'B'C'$ das gleiche Maß.
- *Kreistreue*: Ein Kreis wird wieder auf einen Kreis abgebildet.
- *Orientierungstreue*: Der Drehsinn eines Dreiecks $\triangle ABC$ bleibt bei der zentrischen Streckung erhalten.
- *Längenverhältnistreue*: Das Längenverhältnis zweier Strecken bleibt bei einer zentrischen Streckung gleich.
- NEIN! *Längentreue*: Vielmehr wird bei einer zentrischen Streckung mit dem Streckungsfaktor m eine Strecke $[AB]$ auf eine Strecke mit $|m|$-facher Länge abgebildet.
- NEIN! *Flächentreue*: Vielmehr wird bei einer zentrischen Streckung mit dem Streckungsfaktor m eine ebene Figur auf eine Figur mit m^2-fachem Flächeninhalt abgebildet.

4.9 Ähnlichkeitssabbildungen ⊖

M10 LB 3

4.9.1 Definition: Ähnlichkeitssabbildung Eine geometrische Abbildung f heißt *Ähnlichkeitsabbildung*, wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen erfüllt ist:

(A) f ist die Hintereinanderausführung einer Kongruenzabbildung und einer zentrischen Streckung.

(B) Es gibt eine positive Konstante m, so dass für je zwei beliebige und verschiedene Punkte P, Q der Zeichenebene und deren Bildpunkte P', Q' gilt:

$$\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = m.$$

4.9.2 Satz: Treue-Eigenschaften einer Ähnlichkeitsabbildung

Eine Ähnlichkeitsabbildung hat folgende Eigenschaften:

(i) Existenz eines Maßstabs. Sind $[AB]$, $[CD]$ zwei beliebige Strecken positiver Länge, so gilt

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}}.$$

(ii) Konstante Längenverhältnisse. Sind $[AB]$, $[CD]$ zwei Strecken positiver Länge, so gilt

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}.$$

(iii) Winkel. Sind A, B, C drei paarweise verschiedene Punkte, so gilt

$$|\sphericalangle A'B'C'| = |\sphericalangle ABC|.$$

(iv) Die Bilder von zwei parallelen Geraden g, h sind wieder zwei parallele Geraden g', h'.

(v) Kreise werden auf Kreise abgebildet.

(vi) Konstante Flächenverhältnisse. Sind $\mathcal{F}$ und $\widetilde{\mathcal{F}}$ zwei geometrische Figuren mit positiven Flächeninhalten $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ bzw. $\mathcal{A}(\widetilde{\mathcal{F}})$, so gilt

$$\frac{\mathcal{A}(\widetilde{\mathcal{F}}')}{\mathcal{A}(\mathcal{F}')} = \frac{\mathcal{A}(\widetilde{\mathcal{F}})}{\mathcal{A}(\mathcal{F})}.$$

4.9.3 Treue-Eigenschaften bei Ähnlichkeitsabbildungen

Es sind die gleichen wie bei zentrischen Streckungen. Siehe Abschnitt 4.8.6.

5 Ebene Figuren

5.1 Grundlagen

5.1.1 Definition: Ebene Figuren

Eine Menge von Punkten in der Zeichenebene $\mathbb{E}$ heißt *ebene Figur*, wenn sie von Strecken und gekrümmten Linien begrenzt ist und dabei zusammenhängend und beschränkt ist.

5.1.2 Kommentare

- Als ebene Figuren könnte man allgemeiner jede beliebige Menge von Punkten bezeichnen. In der Schulgeometrie treten aber nur die in Definition 5.1.1 beschriebenen einfacheren Gebilde als ebene Figuren auf.
- Gelegentlich ist es günstig, sich der Unterscheidung von Kontur– und Flächenfigur bewusst zu sein!

$$\bigcirc \quad \neq \quad \bullet$$

- Die Summe der Längen aller Begrenzungslinien heißt *Umfang* der Figur.
- Eine ebene Figur heißt *konvex*, wenn zu je zwei Punkten der Figur immer auch die gesamte Verbindungsstrecke dazugehört.

  Beispiele: Dreieck, Kreis, Ellipse jeweils als Flächenfigur.

  Nicht-Beispiele: Windvogel-Viereck, Dreieck als Konturfigur, Kreisring.
- Ein in der Mathematik sehr selten benutzter Begriff ist, dass eine nicht–konvexe Figur *konkav* heißt.

5.2 Ebene Figuren in der Schulwelt

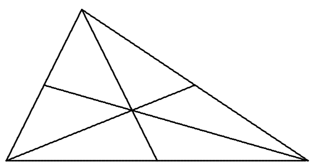
5.2.1 Wahrnehmung

Ebene Situationen oder ,,Gegenstände mit ebenen Ansichten" werden mit den Sinnesorganen (Sehen, Tasten) wahrgenommen, die Namen der zugehörigen abstrakten Figuren erarbeitet.

Ein zunehmender Schwierigkeitsgrad ist dabei, dass die Figuren ,,versteckt" sind.

- Ihre äußere Lage stimmt nicht mit der ,,Standardauffassung" überein. Beispiele:
  - Das quadratische Vorfahrt–Schild steht auf einer Ecke.
  - Die Diagonalen einer Raute sind nicht horizontal bzw. vertikal ausgerichtet.
- Die Konturen der Figur stimmen nicht geometrisch–exakt, wohl aber strukturell mit den Konturen der mathematisch idealisierten Figur überein.
- Die ebenen Figuren treten als Seitenflächen oder Querschnittsflächen von eigentlich drei–dimensionalen Körpern auf.
- Die Figuren sind verborgen in Graphiken oder anderen die Aufmerksamkeit zunächst auf sich ziehenden Situationen.

  Beispiel: Wie viele Dreiecke kannst Du in der folgenden Figur (aus dem Lehrplan MGS 2001) erkennen?



5.2.2 Beispiele

- Verkehrsschilder: Vorfahrt, Vorfahrt Achten, Stopp, Einfahrt verboten,
- GEO–Dreieck, Bogen Papier, ist eine CD–Box quadratisch?, Schallplattenhülle
- Tafel Schokolade (quadratisch, rechteckig), Pralinenschachtel, Tischdecke,
- Schachbrett, Memory–Karten
- Ober- oder Frontseite von Möbeln, Geräten, Waschmaschine
- Mond und Sonne

5.2.3 Zeichnen

Mit verschiedenen Hilfsmitteln zeichnen:

- Frei, spielerisches Zeichnen / Sorgsames Zeichnen
- Luft– oder Sand–Zeichnen, Rücken-Zeichnen
- mit Lineal, GEO–Dreieck, Zirkel konstruieren!
- mit Schablone
- mit Hilfe von Kästchenpapier
- Computereinsatz (Windows-Zubehör/Paint, Dynamische Geometrie Software)

5.2.4 Herstellen

Mit verschiedenen Hilfsmitteln herstellen:

- Legen mit Schaschlik–Spießen, Streichhölzern oder ähnlichem
- Ausschneiden aus Papier, Pappe, oder anderen ,,Werkstoffen"
- Aussägen aus Holzplatten
- Falten aus Papier, Teile zusammenkleben
- Auf dem GEO–Brett spannen
- Kinder stellen oder legen sich zu einer Figur
- Spannen oder Legen mit einem Seil

5.2.5 Andere Aktivitäten zu ebenen Figuren

- Komplexere Figuren aus elementaren Figuren zusammensetzen. Tangram
- Mosaike oder Parkette legen.

5.2.6 Geometrische Eigenschaften erkunden

- Symmetrien feststellen, Symmetrieachsen finden.
- Schwerpunkt (Mittelpunkt) finden: Ausbalancieren einer Pappe–Figur.

5.2.7 Weitere Überlegungen

Grundsätzlich ist es nicht ganz einfach, spezielle ebene Figuren (z.B. ein Parallelogramm) frei herzustellen. Es bleibt abzuwägen, inwieweit technische Hilfsmittel aller Art hier eine Erleichterung bringen, andererseits aber die Verwirklichung von Unterrichtsprinzipien wie Handlungsorientierung, Lebensnähe, freies Arbeiten beeinträchtigen.

5.2.8 Herausarbeitung des Begriffs der 2–Dimensionalität $\ominus$

Frage: In wie viele grundsätzlich verschiedene Richtungen (vorwärts, rückwärts sollen eine Richtung bedeuten) muss sich ein Mensch (oder ein Tier) bewegen können, um überall hinzukommen?

Antwort:

- Beim Laufen entlang einer Strecke (gespannte Schnur, Weg, Aschenbahn) genügt **eine** Richtung.
- Beim Bewegen auf einer ebenen Figur (Sportplatz, Turnhalle) muss man sich in **zwei** Richtungen bewegen können.
- Ein Vogel oder Hubschrauber in der Luft oder ein Fisch im Wasser muss sich in **drei** Richtungen bewegen können, um überall hinzukommen.

5.3 Vielecke

5.3.1 Definition: Vieleck

- Eine ebene Figur heißt *Vieleck* (= *Polygon*), wenn sie durch Strecken begrenzt wird.
- Ist die Zahl der Strecken drei, vier, fünf, ..., n, so spricht man auch von einem *Dreieck*, *Viereck*, *Fünfeck* bzw. n*–Eck*.

In diesem Zusammenhang heißen die Punkte *Ecken (=Eckpunkte)* des Vielecks, die Strecken heißen *Seiten* des Vielecks.

5.3.2 Mittelpunkt eines Vielecks ⊖

Das wesentliche am Begriff „Mittelpunkt eines beliebigen Vielecks" ist, dass er nicht vernünftig definiert werden kann.

Es stehen verschiedene Angebote zur Auswahl:

U Der Umkreismittelpunkt, wenn das gegebene Vieleck einen Umkreis besitzt.

Z Das Zentrum, wenn das gegebene Vieleck punkt- oder drehsymmetrisch ist.

S Der Schwerpunkt.

I Der Inkreismittelpunkt, wenn das gegebene Vieleck einen Inkreis besitzt.

D Der Diagonalenschnittpunkt oder der Schnittpunkt der Seitenmittenverbindenden bei Vierecken.

5.3.3 Beispiele zum Mittelpunkt

- Lediglich der Schwerpunkt S ist für alle Typen von Vielecken definiert.
- Bei Rechtecken stimmen alle Mittelpunktstypen bis auf I überein. Echte Rechtecke haben keinen Inkreis.
- Bei Rauten stimmen alle Mittelpunktstypen bis auf U überein. Echte Rauten haben keinen Umkreis.
- Bei Parallelogrammen stimmen alle Mittelpunktstypen bis auf U, I überein. Echte Parallelogramme haben weder Umkreis noch Inkreis.
- Bei einem stumpfwinkligen Dreieck liegt U außerhalb der Figur. Bei einem Windvogelviereck liegen D und evtl. S außerhalb der Figur.
- Bei regelmäßigen Vielecken (siehe nächster Abschnitt 5.4) entsteht das Mittelpunkt-Problem nicht. Alle oben angegebenen Mittelpunktstypen stimmen dann überein.

5.4 Regelmäßige Vielecke

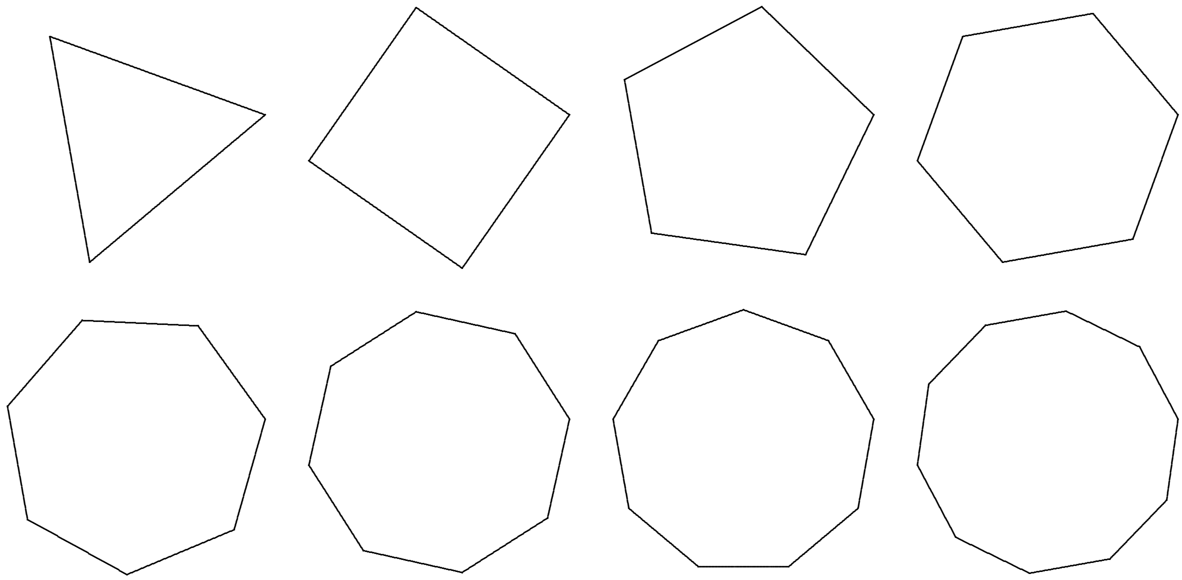
5.4.1 Definition: Regelmäßige Vielecke

Ein Vieleck heißt *regelmäßig (= regulär)*, wenn ...

- alle Seiten gleich lang sind und
- alle Innenwinkel gleich groß

sind.

Beachte, dass die beiden Bedingungen unabhängig voneinander sind. Ein Viereck mit gleich langen Seiten oder vier gleich großen Winkeln ist nicht unbedingt ein Quadrat.



5.4.2 Spezialfälle

- Ein regelmäßiges Dreieck heißt auch *gleichseitig*, es wird ausführlicher in Abschnitt 7.5.6 beschrieben.
- Ein regelmäßiges Viereck ist dasselbe wie ein *Quadrat*. Es wird in Kapitel 8.2 ausführlicher beschrieben.

5.4.3 Weitere Eigenschaften von regelmäßigen Vielecken

- Achsen-, Punkt- und Drehsymmetrie?
- Welche (Wieviele) Symmetrieachsen hat ein regelmäßiges n–Eck?
- Sind regelmäßige n–Ecke punktsymmetrisch?
- Wird ein regelmäßiges n–Eck um den Mittelpunkt mit Winkel $\frac{360^\circ}{n}$ gedreht, so geht es in sich selbst über.
- Parkettierungen mit regelmäßigen n-Ecken: Siehe Abschnitt 6.8.2.

- Regelmäßige Vielecke haben einen eindeutigen Mittelpunkt, einen Inkreis und einen Umkreis.
- Für festes n sind alle regelmäßigen n-Ecke ähnlich zueinander.

5.4.4 Frage ⊖

Die klassische Frage ob — für ein gegebenes n — das regelmäßige n–Eck mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, hat Carl Friedrich Gauss 1796 beantwortet:

> Genau dann ist das regelmäßige n–Eck konstruierbar, wenn n ein Produkt von ,,Zweien" und lauter verschiedenen Fermat'schen Primzahlen ist.
>
> Eine Primzahl heißt *Fermat'sch*, wenn sie die Form $2^{(2^k)}+1$ hat. Die heute bekannten Fermat'schen Primzahlen sind in der Tabelle aufgelistet:

k	0	1	2	3	4	5
2^k	1	2	4	8	16	32
$2^{(2^k)}+1$	2^1+1 $=3$	2^2+1 $=5$	2^4+1 $=17$	2^8+1 $=257$	$2^{16}+1$ $=65\,537$	$2^{32}+1$ $=4\,294\,967\,297$
	FPZ	FPZ	FPZ	FPZ	FPZ	$=641\cdot 6\,700\,417$

Man vermutet, dass es außer den fünf Fermat'schen Primzahlen

3 5 17 257 65 537

keine weiteren gibt.

5.5 Kreise

5.5.1 Definition: Kreis

Es seien M ein fixierter Punkt der Zeichenebene und r eine Länge.

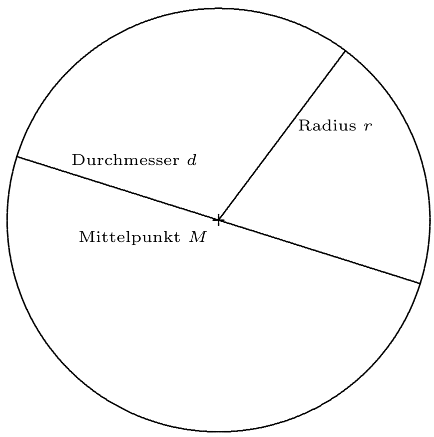
- Die Menge aller Punkte, die von M höchstens den Abstand r haben, bilden eine *Kreisscheibe.*
- Die Kontur der Kreisscheibe heißt *Kreislinie.* Der doppelte Radius wird *Durchmesser* d genannt.

Innerhalb der Alltagssprache werden beide Figuren oft vereinfachend als *Kreis* bezeichnet.

5.5.2 Weitere Begriffe In diesem Zusammenhang heißt …

- M der *Mittelpunkt*,
- r der *Radius*,
- der doppelte Radius $d = 2 \cdot r$ der *Durchmesser*

des Kreises.



$\boxed{d = 2 \cdot r}$

5.5.3 Bemerkungen

- Verwenden Sie — auch im Alltag — das Adjektiv ,,kreisförmig” anstelle von ,,rund” zur Beschreibung von Kreisen!
- Oft werden die Begriffe Radius und Durchmesser sowohl für die geometrischen Objekte (= Punktmengen der Zeichenebene) als auch für die Längen (= Zahl mit Längeneinheit) verwendet. Kraftloser Purismus stört sich daran.

5.5.4 Definition: Sehne, Kreissektor und Kreissegment

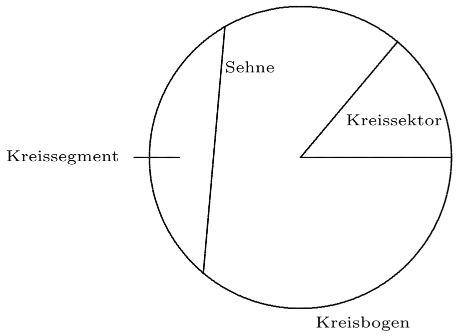
Es seien ein Kreis gegeben.

Eine Teilmenge der Kreislinie, die von zwei Punkten der Kreislinie begrenzt wird, heißt *Kreisbogen*.

Eine Strecke, deren beide Endpunkte auf der Kreislinie liegen, heißt *Sehne*.

Eine ebene Figur, die von einer Sehne und dem zugehörigen Kreisbogen begrenzt wird, heißt *Kreissegment*.

Eine ebene Figur, die von zwei Radien und einem Kreisbogen begrenzt wird, heißt *Kreissektor*.

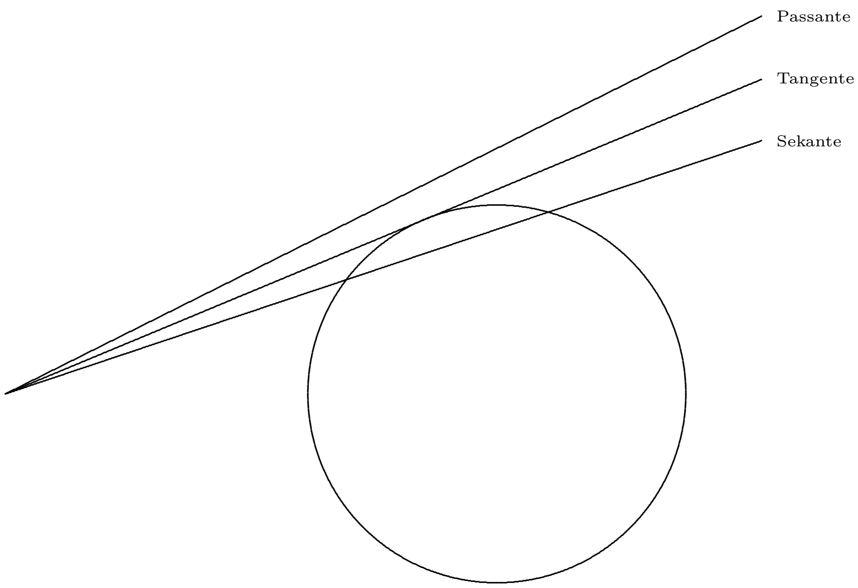


5.5.5 Definitionen: Kreis und Gerade ⊖

Wir betrachten die Schnittmenge eines gegebenen Kreises und einer Gerade.

Die Gerade heißt ...

- *Sekante*, wenn die Schnittmenge zwei Punkte enthält,
- *Tangente*, wenn die Schnittmenge genau einen Punkt enthält,
- *Passante*, wenn die Schnittmenge leer ist.



Die Tatsache, dass eine Tangente genau einen gemeinsamen Punkt mit der Geraden hat, erweckt den Eindruck, dass sie den Kreis ,,berührt" (lat. tangere = berühren).

5.5.6 Kreis als topologische Idee

Der Begriff Kreis hat sowohl fachlich (in der mathematischen Topologie) als auch alltagssprachlich die Bedeutung eines ,,linearen Gebildes", das an den beiden Enden wieder zusammengeführt ist.

Diese Deutung setzt sich dann fort für Situationen, die ,,begrenzt" oder ,,abgeschlossen" erscheinen:

- Suchen Sie das Wort Kreis in den Lehrplänen!
- Stromkreis, Schaltkreis, Farbkreis
- Wasserkreislauf, Stoffkreislauf (Re**cycl**ing)
- Jahreskreis
- Morgenkreis, Gesprächskreis, Freundeskreis, Arbeitskreis, Landkreis
- Zirkeltraining, Kreislauf beim Tischtennis
- Lernzirkel

5.5.7 Kreise in der Schulwelt

- Naturphänomene
  - Hexenringe, Feenkreise
  - Sonnenblume
  - Kreise bei Nieseln auf dem Wasser, Tropfen auf das Wasser
  - Regenbogen: Warum kreisförmig?
- Gegenstände aller Art. Warum wählt man die Kreisform?
  - Räder
  - Münzen, Herdplatten, Verkehrsschilder, Geschirr, Kuchenformen, CD, Schallplatte
  - Kanaldeckel
  - Ringe, Reifen (Hulla–Hoop), Frisbee–Scheibe
  - Ansicht von Mond und Sonne
- Die Kreisform für Bewegungen und Situationen
  - Kreisbewegungen auf der Kirchweih, Karussell
  - Kreisverkehr
  - Voltigierzirkel
  - Bestimmung der Reichweite bei einer Tankfüllung,
  - Bewässerungsanlagen

  - Maschinen aller Art (Spül–, Wasch–, Rühr–, Bohr–)
  - Bei Aufleuchten der Tankanzeige im Auto reicht das Benzin noch für 70 km. Zeichne die erreichbaren Orte bei Maßstab 1 : 1 000 000.

- Äußeres Handeln
  - Kreise ziehen
    - freihand
    - mit geeigneten „gelochten" Schablonen aus Pappe, Holz, Plastik, Metall
    - mit einer Schnur oder Stoffband. Ein Ende wird im Mittelpunkt fixiert. Am anderen Ende wird die Kreide in einer Schlaufe oder Schlüsselring geführt.
      - Gärtner–Konstruktion zur Anlage einer Baumscheibe, eines Blumenbeetes, einer Pflasterfläche
      - Im Schulhof oder in der Sporthalle: Im Mittelpunkt wird eine Stange (Turngerät, Kartenständer o.ä.) aufgestellt, an dem das Ende einer Schnur (Tau, Band) festgebunden wird. Bewegt man nun das andere Ende der gespannten Schnur um die Stange, so beschreibt dieses einen Kreis.
    - mit Schul–Zirkeln (Hinweis: Markiere vorher den Mittelpunkt)
  - Muster mit Kreisen
  - Wie findet man den Mittelpunkt eines Kreises?
  - Öffnungsraum für Türen, Möbel in Bauplänen
  - Zusammenhang mit regelmäßigem Sechseck.

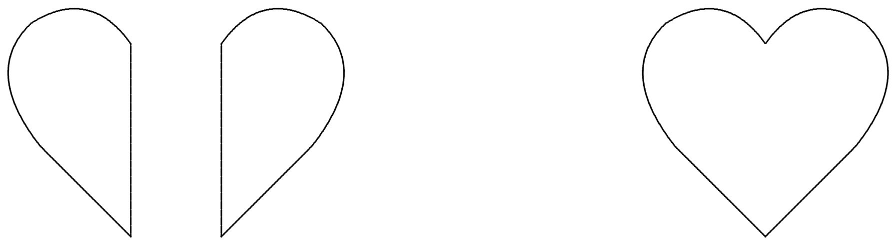
6 Symmetrie bei ebenen Figuren

6.1 Achsensymmetrie

H17 T2 A1

6.1.1 Definition: Achsensymmetrie

- Zwei ebene Figuren $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ heißen bzgl. der Geraden g *achsensymmetrisch zueinander*, wenn $\mathcal{F}_1$ auf $\mathcal{F}_2$ achsengespiegelt bzgl. g wird.
- Eine einzelne ebene Figur $\mathcal{F}$ heißt *achsensymmetrisch in sich*, wenn sie bei einer Achsenspiegelung mit ihrer Bildfigur übereinstimmt.



achsensymmetrisch zueinander   achsensymmetrisch in sich

6.1.2 Beispiele aus der abstrakten Geometrie

- Ein Dreieck ist genau dann achsensymmetrisch, wenn es gleichschenklig ist. Ein Dreieck wiederum heißt *gleichschenklig*, wenn es zwei gleich lange Seiten hat.
- Drachen- oder Windvogelviereck (Spezialfälle: Raute, Quadrat)
- Gleichschenkliges Trapez (Spezialfälle: Rechteck, Quadrat)
- Kreis
- Regelmäßiges n–Eck

6.2 Achsensymmetrie in der Schulwelt

6.2.1 Betrachtung von Bildern oder ,,ebenen" Gegenständen: Welche sind achsensymmetrisch, welche nicht?

- Biologie: Blätter, Schmetterlinge, viele andere Lebewesen
- Zuhause: Teppiche, Brettspiele, Schere, Besteck, Geschirr
- Zeichen aller Art: Verkehrszeichen, Flaggen, Logos, Spielkartensymbole
- Kunst: Ornamentik in der islamischen Kunst
- Vorder- und Rückseite transparenter Bilder: Folie, Dia, Fensterbilder.

6.2.2 Betrachtung mit einem Spiegel

Ein Spiegel wird senkrecht aufgestellt. Beim schrägen Blick in den Spiegel wird die Situation vor dem Spiegel durch die Situation im Spiegel achsensymmetrisch ergänzt.

- Alltagsspiegel
- Fliesenspiegel (Baumarkt)
- halbdurchlässigen Spiegel (fertige Plastikständer, Lehrmittelverlage)
- optischen Spiegel. Beachte, dass bei einem gewöhnlichen Glasspiegel aus dem Alltag die spiegelnde Fläche unter der Glasscheibe liegt. Dies kann bei geometrischen Aufgaben zu Ungenauigkeiten führen. Bei einem *optischem Spiegel* wird dies vermieden.

6.2.3 Symbolische Achsensymmetrie

- Buchstaben, Ziffern,
- Wörter mit geometrischer Symmetrie: OTTO, HEIKE
- Scherzrechnung ,,Die Hälfte von 12 ist 7": erhält man bei der horizontalen Halbierung der Zahl XII die Zahl VII.
- Wörter mit symbolischer Symmetrie (Drehwürmer, Palindrome):

  MARKTKRAM, ANNA, RENTNER, ABBA, REITTIER,

- Ganze Sätze mit symbolischer Symmetrie:

  EIN NEGER MIT GAZELLE ZAGT IM REGEN NIE

  EINE TREUE FAMILIE BEI LIMA FEUERTE NIE

  STEP ON NO PETS

  Quadratisches Palindrom:

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	L	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

- Spiegelzahlen: 303, 5775, 1991, 2002 (nur zweimal in unserem Leben).

  Eine Spiegelzahl mit gerader Stellenzahl ist durch 11 teilbar. (Warum?)
- Es gibt Menschen, die der Tatsache, dass am **19.9.1991** der Eismann (Ötzi) am Hauslabjoch (Grenze Italien—Österreich) aufgefunden wurde, eine mystische Dimension beimessen.
- Am **20.02.2002** sendete der Bayerische Rundfunk einen Beitrag über Palindrome: Daraus:

  NA, FAKIR, PAPRIKAFAN?

6.2.4 Handeln (Enaktiv)

Vielfältige Spiel- oder Bastelspiele im Zusammenhang mit dem Falten oder Klappen.

- Scherenschnitt
- Herstellen achsensymmetrischer Bilder mit verschiedensten ,,Spiel–Möglichkeiten": Ministeck, Plastikknöpfe, Holz–Plättchen–Nageln
- Drucken: Kartoffel– oder Spielstempel, Linoldruck. Der Figur auf dem Stempel und die gedruckte Figur erscheinen achsensymmetrisch zueinander.
- Arbeiten mit dem Geobrett
- Basteln von Papierflugzeugen

6.2.5 Zeichnen (Ikonisch)

- Papier:
  - Kariertes Papier: Die Gitterlinien dienen zur Orientierung.
  - Blankes Papier
  - Folien
  - Kohlepapier
- Genauigkeit:
  - Freies Zeichnen
  - Zeichnen mit Lineal, GEO–Dreieck,
  - Zeichnen bzw. Konstruieren mit dem Zirkel.

- Symmetrie–Simultan–Zeichnen: Symmetrie ist offenbar irgendwie in unserer ,,Psychomotorik" angelegt.
- Malen und Färben:
  - Symmetrisches Einfärben (Kindermalbuch)
  - Klecksbilder

6.2.6 Weitere Aktivitäten

- Bildbearbeitungsprogramme: Bilder oder Fotos werden per Befehl gespiegelt und ausgedruckt.
- Spiegelschrift.
- Einbringen von Überlegungen zur Bedeutung der Symmetrie. Ist sie notwendig, zweckmäßig, interessant, langweilig, ästhetisch?
- Denksport: Wie oft an einem Tag bilden die beiden Zeiger einer Uhr eine achsensymmetrische Figur?

6.2.7 Unterschiedliche Schwierigkeitsgrade

- Liegt Achsensymmetrie vor?
- Auffinden der Symmetrieachsen / Zahl der Symmetrieachsen.
- Ergänzen zu achsensymmetrischen Figuren.
- Die Figur enthält vertikale, horizontale, diagonale Strecken, Kreisbögen, gekrümmte Linien.
- Lage der Achse gegenüber den Blatträndern oder der Kästcheneinteilung: Vertikal, horizontal, diagonal, beliebig schräg.
- Lage der Achse gegenüber der Figur: Durch den Mittelpunkt $\to$ am Rand $\to$ außerhalb.

6.3 Ebenensymmetrie ⊖

Ein zur Achsensymmetrie irgendwie ähnlicher, dann aber doch in vielerlei Hinsicht unterschiedlicher Symmetriebegriff ist der der Ebenensymmetrie.

6.3.1 Tabelle In der folgenden Tabelle sind die Kennzeichen und Unterschiede zwischen drei Symmetrietypen zusammengestellt:

Symmetrietyp	Punktsymmetrie	Achsensymmetrie	Ebenensymmetrie
Abbildung	Punktspiegelung	Achsenspiegelung	Ebenenspiegelung
WO (Geometrischer Kontext)	Ebene (2–dim)	Ebene (2–dim)	Raum (3–dim)
WAS (Zu spiegelnde Objekte)	Ebene Figuren	Ebene Figuren	Räumliche Körper
WORAN (Merkmal)	Zentrum Z (Punkt)	Achse g (Gerade)	Ebene e
Orientierung	erhalten	umkehrend (Drehsinn)	umkehrend (Links–Rechts)

Es ist eine ,,Dimensions–Analogie” zwischen der Ebenensymmetrie im Raum und der Achsensymmetrie in der Ebene zu erkennen. Man sollte sich des Unterschieds bewusst sein.

Es besteht ein Zusammenhang zwischen den beiden Symmetrietypen, da die ebenen Ansichten oder Schnitte von räumlich spiegelbildlichen Situation achsensymmetrisch sind.

6.3.2 Ebenensymmetrie in der Schulwelt

- Betrachten von Situationen oder Gegenständen:
  - Menschlicher Körper, Insekten,
  - Fahrrad, Auto (Fahrer, Beifahrer).
  - Musikinstrumente, Geräte aller Art, Möbel.
  - Geometrische Körper: Würfel, Quader, Pyramide, Kugel.
- Das Zeichnen ist hier — aufgrund der Natur der Sache — schwieriger.
- Handeln: Spiegelbewegungen, Erfahrungen mit (Fliesen–)Spiegeln.
- Arbeiten mit halbdurchlässigen Spiegeln (Glasscheiben)

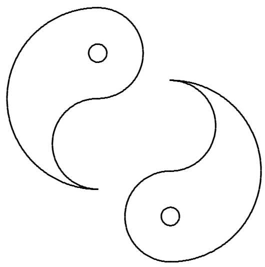
6.3.3 Links und Rechts Bei welchen Gegenständen, Geräten, Situationen oder Bewegungen treten die Begriffe ,,Rechts” und ,,Links” auf?

- Mit welcher Hand schreiben Sie?
- Sie spitzen einen Bleistift
- Sie drehen einen Hahn oder Schraube zu
- Jimi Hendrix spielt Gitarre
- Werden ,,Links” und ,,Rechts” im Spiegel vertauscht?

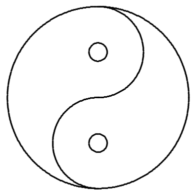
6.4 Punktsymmetrie ⊖

6.4.1 Definition: Punktsymmetrie

- Zwei ebene Figuren $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ heißen bzgl. des Zentrums Z *punktsymmetrisch zueinander*, wenn $\mathcal{F}_1$ auf $\mathcal{F}_2$ punktgespiegelt bzgl. Z wird.
- Eine einzelne ebene Figur $\mathcal{F}$ heißt *punktsymmetrisch in sich*, wenn sie bei einer Punktspiegelung mit ihrer Bildfigur übereinstimmt.



punktsymmetrisch zueinander



punktsymmetrisch in sich

6.5 Punktsymmetrie in der Schulwelt ⊖

6.5.1 Betrachtung von „ebenen" Situationen, Bildern oder Symbolen

S N Z §

- Spielkarten
- Anordnung der Pralinen in einer Schachtel
- Sport (Fußball, Tennis, Tischtennis, Volleyball):
  Gleiche Aufstellung nach einem Seitenwechsel
- Parallelogramm
- Regelmäßige n–Ecke **nur** für gerades n

Generell sind Figuren, die

- sowohl punktsymmetrisch als auch achsensymmetrisch sind (Rechteck, Raute, Quadrat, Kreis)
- eine höhere Drehsymmetrie (s.u.) aufweisen (Kreis, Mandala, Blüten)

als Beispiele nicht so gut geeignet, da dann die Punktsymmetrie in der Wahrnehmung „abgedrängt" wird.

6.5.2 Handeln

- Figuren, Gegenstände werden um 180°–gedreht.
- Drehfolien: Fixierung des Drehpunkts mit einem Nagel (Zirkelspitze).

6.5.3 Zeichnen

Kästchenfiguren werden punktsymmetrisch ergänzt.

6.6 Drehsymmetrie

6.6.1 Definition: Drehsymmetrie

Eine ebene Figur heißt *α–drehsymmetrisch (in sich / bzgl. Z)*, wenn sie bei einer α–Drehung in sich selbst übergeht. Man spricht auch von *n–zähliger Drehsymmetrie*, wenn der Drehwinkel $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ ist.

Eine ebene Figur heißt *vollständig drehsymmetrisch (in sich) (bzgl. Z)*, wenn sie bei Drehungen um beliebige Winkel α in sich selbst übergeht.

6.7 Drehsymmetrie in der Schulwelt

6.7.1 Betrachtung von Bildern oder „ebenen" Gegenständen, Situationen:

- Darts–Scheibe, Windrad, Brettspiele (Halma)
- Blüten, Schneeflocken, Quer–Schnitt durch das Kerngehäuse eines Apfels
- Werkzeuge, Muttern,
- Speichenräder, Autofelgen, Sonnenschirme,
- Gugelhupf
- Rosetten an Bauwerken, in Fenstern oder Möbeln.
- Regelmäßige n–Ecke haben eine n–zählige Drehsymmetrie.
- Kreise, Kreisscheiben und Kreisringe sind vollständig drehsymmetrisch
- Querschnitt von Kerzen, Dosen, Seilen

6.7.2 Handeln

- Basteln: Weihnachtssterne, Windräder.
- Schneiden von Sternen nach Mehrfachfaltung.
- Drehfolien: Fixierung des Drehpunkts mit einem Nagel (Zirkelspitze).
- Mandalas färben

6.7.3 Zeichnen

- Kästchenfiguren werden drehsymmetrisch ergänzt
- Rosetten werden mit dem Spirograph gezeichnet

6.7.4 Zunehmende Schwierigkeit hinsichtlich der Lage des Drehpunkts bzgl. der Figur: Mittelpunkt, Eckpunkt, Randpunkt, außerhalb, innerhalb.

6.8 Parkettierungen

6.8.1 Vorbemerkung

Anders als bei Achsenspiegelungen oder Drehungen kann die Nacheinanderausführung von mehreren gleichen Verschiebungen nicht die identische Abbildung ergeben.

Das bedeutet, dass eine ebene Figur durch mehrfache Verschiebungen immer neue Figuren ergibt, genauer: sich immer weiter ,,entfernt".

Im Schul- und Alltagsleben spricht man nicht von (beschränkten) verschiebungssymmetrischen Figuren, sondern eher von so genannten periodischen Parkettierungen oder Mustern.

6.8.2 Parkettierungen Es seien eine (zwei, drei oder endlich viele) ebene Figuren vorgegeben.

(A) Von einer *Parkettierung* spricht man, wenn die Zeichenebene durch ebene Figuren vollständig belegt ist, die alle zu den gegebenen Figuren kongruent sind.

(B) Eine Parkettierung heißt *periodisch*, wenn sie bei Verschiebungen in zwei Richtungen in sich selbst übergeht.

6.8.3 Kommentare

- Es gibt Parkettierungen mit zwei Figuren — beispielsweise so genannte Penrose-Muster — die nicht periodisch sind.

6.8.4 Parkettierungen mit einer einzigen Figur

- Beliebiges Rechteck, Parallelogramm
- Beliebiges Dreieck. Zwei Dreiecke können zu einem Parallelogramm zusammengefügt werden.
- Kreuze
- Parkettierung $60°/120°$-Parallelogrammen. Es entstehen ,,Perspektiv–Würfel".
- Platonische Parkettierung: Vgl. Abschnitt 6.8.5. mit einem regelmäßigen n-Eck: Nur für $n = 3, 4$ oder 6 möglich.
- Es gibt zur Zeit 15 bekannte Parkettierungen mit einem Fünfeckstyp. $\boxed{\text{W}}$

6.8.5 Satz: Platonische Parkettierungen

Eine Parkettierung mit einem Typ von regelmäßigen n-Eck ist nur für $n = 3, 4$ oder 6 möglich.

Die Zeichenebene kann also parkettiert werden ...

- mit regelmäßigen (d.h. gleichseitigen) Dreiecken, wobei immer 6 an einer Ecke zusammenstoßen,
- mit regelmäßigen Vierecken (d.h. Quadraten), wobei immer 4 an einer Ecke zusammenstoßen,
- mit regelmäßigen Sechsecken, wobei immer 3 an einer Ecke zusammenstoßen.

Andere regelmäßige n–Ecke kommen nicht in Frage.

6.8.6 Begründung

1. Es ist bekannt (siehe später), dass für den Innenwinkel α eines regelmäßigen n–Ecks gilt:

$$\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \qquad (*)$$

Als Tabelle ergibt sich

n	3	4	5	6	7	8	12	16	18	10.000
α	60°	90°	108°	120°	$\approx 128,57^\circ$	135°	150°	$157,5^\circ$	160°	$179,964^\circ$
	$\surd$	$\surd$	–	$\surd$	–	–	–	–	–	–

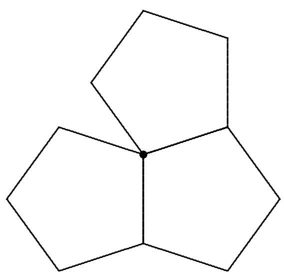
2. Da an einer Ecke sich mehrere dieser Innenwinkel α genau zu einem Vollwinkel zusammenfügen lassen müssen, muss der Vollwinkel 360° ein ganzzahliges Vielfaches ($=s$) von α sein.

$$360^\circ = s \cdot \alpha.$$

3. Schaut man jetzt die obige Tabelle durch, so sieht man, dass diese Bedingung nur in den drei Fällen mit $\surd$ erfüllt ist.

6.8.7 Illustration bei Fünfecken

Mit regelmäßigen Fünfecken kann man nicht parkettieren. Werden $s = 3$ Fünfecke an einer Ecke aneinandergelegt, so bleibt eine Lücke. Dies liegt daran, dass der Vollwinkel 360° kein ganzzahliges Vielfaches des Innenwinkels 108° ist.



6.9 Parkettierung in der Schulwelt

6.9.1 Betrachtung von Bildern und ,,ebenen" Gegenständen:

- Bienenwaben,
- Flaggen (Bayerische Fahne),
- Rückseiten von Spielkarten,
- Muster auf Tapeten, Teppichen, Geschenkpapier, oder Tischdecken.
- Bandornamente, islamische Ornamentik.
- Parkettboden (Fischgrät, Schiffsboden)
- Pflasterflächen (S–Steine, Rechtecksteine, Sechsecksteine)
- LEGO–Grundplatte,
- Gitternetz (Käastchenpapier)
- Maschendrahtzaun, Hasendraht
- Netze aller Art, beispielsweise an Fussballtor
- Bilder von M.C. Escher

6.9.2 Handeln

- Plättchen–Nageln, Ministeck
- Legen mit Figuren, Verschieben von Formplättchen
- Sticken, Häkeln, Stricken, Weben (,,Glücksarmband")
- Drucken
- Blech–Kuchenbacken, Waffel–Musterung

6.9.3 Zeichnen

- Verschiebungs–Fortsetzen von Figuren auf Karopapier — beispielsweise mit Schablonen.

6.10 Kongruenz $\ominus$

6.10.1 Definition: Kongruenz

Zwei ebene Figuren $\mathcal{F}$ und $\widetilde{\mathcal{F}}$ heißen *kongruent zueinander*, wenn es eine Kongruenzabbildung gibt, die die Figur $\mathcal{F}$ in die Figur $\widetilde{\mathcal{F}}$ überführt.

6.10.2 Kommentar

Oft wird das Wort ,,deckungsgleich" als Synonym für kongruent benutzt. Da kongruente Figuren in Form und Größe übereinstimmen, werden sie in Alltags- und Schulsprache oft als ,,gleich" angesprochen.

6.10.3 Satz: Notwendige Bedingungen für Kongruenz

Dieser so genannte Hauptsatz der Kongruenz zeigt auf, welche Konsequenzen die Kongruenz zweier ebener Figuren hat. Die unter DANN aufgeführten Aussagen sind notwendige Bedingungen der Kongruenz.

WENN zwei Figuren $\mathcal{F}$ und $\widetilde{\mathcal{F}}$ kongruent zueinander sind,
DANN stimmen die zugehörigen Längen in den beiden Figuren überein.
DANN stimmen die zugehörigen Winkelmasse in den beiden Figuren überein.
DANN stimmen die zugehörigen Flächeninhalte in den beiden Figuren überein.

6.10.4 Hinreichende Bedingung für Kongruenz von zwei Dreiecken

Die folgenden bekannten „Kongruenzsätze" zeigen auf, unter welchen Bedingungen zwei Dreiecke kongruent sind. Die unter WENN aufgeführten Aussagen sind hinreichende Bedingungen für Kongruenz.

Oft werden diese Sätze dahingehend verstanden, dass sie angeben, wenn ein Dreieck „eindeutig konstruierbar" ist.

6.10.5 SSS-Satz Es seien zwei Dreiecke gegeben.

WENN jede Seitenlänge des einen Dreiecks jeweils mit einer Seitenlänge des anderen Dreiecks übereinstimmt,

DANN sind die beiden Dreiecke kongruent zueinander.

6.10.6 SWS-Satz Es seien zwei Dreiecke gegeben.

WENN ein Winkelmaß in dem einen Dreieck mit einem Winkelmaß im anderen Dreieck übereinstimmt und die Längen der anliegenden Seiten in dem einen Dreieck jeweils mit den Längen der anliegenden Seiten im anderen Dreieck übereinstimmen,

DANN sind die beiden Dreiecke kongruent zueinander.

6.10.7 WSW-Satz Es seien zwei Dreiecke gegeben.

WENN eine Seitenlänge in dem einen Dreieck mit einer Seitenlänge im anderen Dreieck übereinstimmt und die Masse der anliegenden Winkel in dem einen Dreieck jeweils mit den Massen der anliegenden Winkel im anderen Dreieck übereinstimmen,

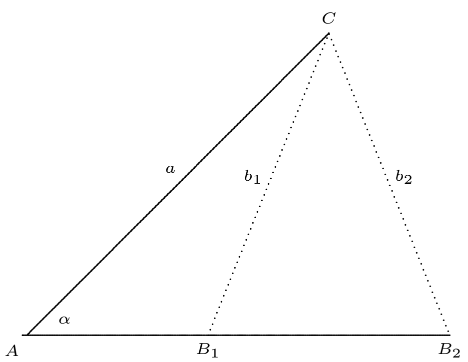
DANN sind die beiden Dreiecke kongruent zueinander.

6.10.8 SsW-Satz Es seien zwei Dreiecke gegeben.

WENN jede von zwei Seitenlängen in dem einen Dreieck mit jeweils einer Seitenlängen im anderen Dreieck übereinstimmt und der der größeren dieser beiden Seiten gegenüberliegende Winkel in dem einen Dreieck mit dem der größeren dieser beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel im anderen Dreieck übereinstimmt,

DANN sind die beiden Dreiecke kongruent zueinander.

6.10.9 Einen SSW-Satz gibt es nicht In den beiden Dreiecken AB_1C und AB_2C stimmen der Winkel α und je zwei Seitenlängen überein. Die beiden Dreiecke sind aber nicht kongruent.



7 Geometrie der Dreiecke

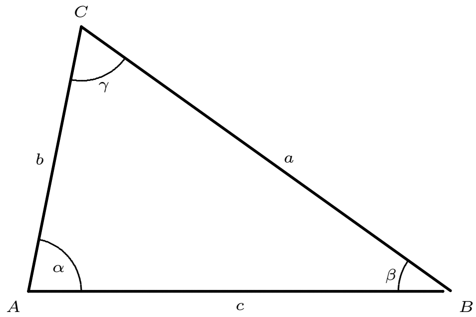
LP+ M7 LB3

7.1 Grundlagen und Überblick

7.1.1 Definition: Dreieck

H15 T3 A1

Eine durch drei Strecken begrenzte ebene Figur heißt *Dreieck*.



7.1.2 Weitere Bezeichnungen

Wenn ein Dreieck vorliegt, dann ergeben sich einige weitere Bezeichnungen

- Die drei begrenzenden Strecken heißen *Seiten*.
- Die drei Schnittpunkte benachbarter Seiten heißen *Ecken*.
- Die drei Winkel, die sich zwischen den Seiten an den Ecken ergeben, heißen *Innenwinkel* des Dreiecks.
- Normalerweise werden die drei Ecken mit A, B, C (gegen den Uhrzeigersinn) bezeichnet.
- Bei Dreiecken tritt die Besonderheit auf, dass die Seiten entsprechend der gegenüberliegenden Eckpunkte benannt werden. Die Seiten sind dann $a = [BC]$, $b = [CA]$ und $c = [AB]$. Die Innenwinkel werden mit den zugeordneten griechischen Buchstaben bezeichnet.

7.1.3 Dreiecksungleichung ⊖

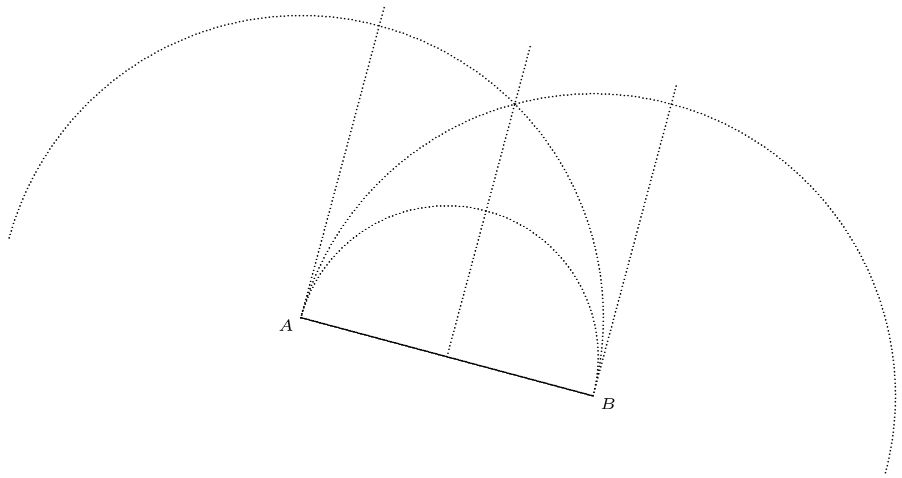
Eine Seite des Dreiecks ist immer kürzer als die Summe der Längen der beiden anderen Seiten:

$$a < b + c, \qquad b < c + a, \qquad c < a + b.$$

Die Dreiecksungleichung spielt bei schulischen Argumentationen kaum eine Rolle, sie ist für fachmathematische Überlegungen, beispielsweise bei der Definition des ,,metrischen Raumes" von großer Bedeutung.

7.1.4 Zeichen-Trick für die Schulpraxis ⊖

Soll eine Strecke $[AB]$ oberhalb zu einem allgemeinen (= nicht-speziellen) Dreieck ABC ergänzt werden, so darf der dritte Eckpunkt C nicht auf den gepunkteten Linien liegen.

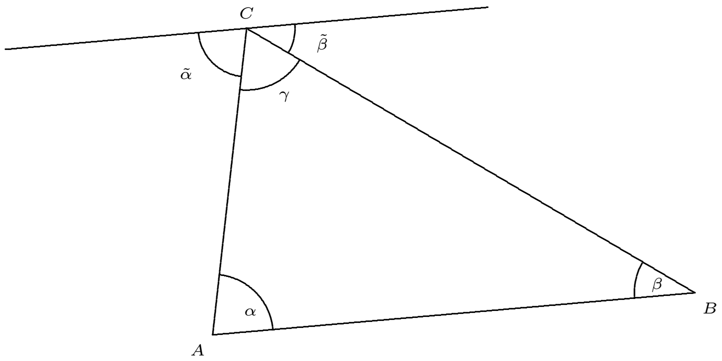


7.2 Der Satz über die Innenwinkelsumme

7.2.1 Satz In einem beliebigen Dreieck ist die Summe der Innenwinkelmaße gleich 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma \;=\; 180^{\circ}.$$

7.2.2 Beweis



Betrachte eine zu AB parallele Gerade durch den Eckpunkt C.

Die drei bei C auftretenden Winkel $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ und γ ergänzen sich zu 180°.

Gemäß dem Wechselwinkelsatz 3.6.2 (ii) sind die Wechselwinkel gleich groß:

$$\alpha \;=\; \tilde{\alpha} \qquad \text{und} \qquad \beta \;=\; \tilde{\beta}$$

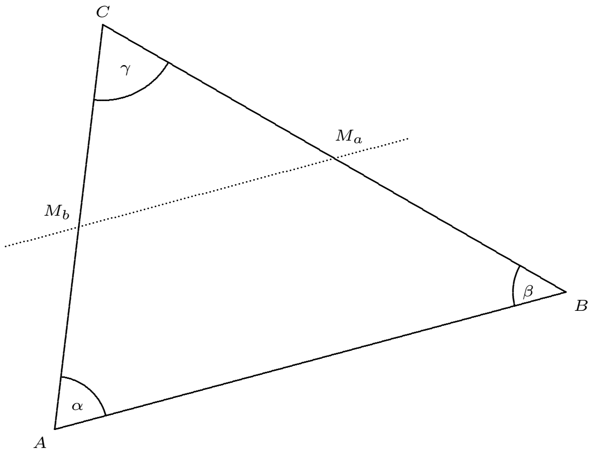
Deshalb gilt

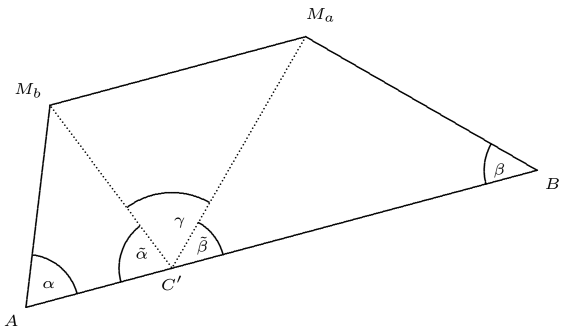
$$\alpha + \beta + \gamma \;=\; \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \gamma \;=\; 180^{\circ}. \qquad \text{q.e.d.}$$

7.2.3 Beweis Variante II

Durch 180°-Drehung um einen Seitenmittelpunkt, sagen wir M_{BC}, wird das Dreieck ,,verdoppelt". Es entsteht ein Parallelogramm, dessen einer Innenwinkel gleich α ist, der andere hat das Maß $\beta + \gamma$. Aufgrund des C-Winkelsatzes 3.6.2 (iii) ergänzen sich die diese beiden Winkel zu 180°.

7.2.4 Beweis Variante III: Spiegeln bzgl. einer Mittenlinie ⊖





Ein Eckpunkt (hier C) des beliebigen gegebenen Dreiecks wird an der Geraden (hier: M_aM_b) durch die Mittelpunkte der angrenzenden Seiten gespiegelt.

Der Bildpunkt C' kommt dabei auf die Seite $[AB]$ zu liegen.

Die beiden Dreiecke $AC'M_b$ und $C'BM_a$ sind gleichschenklig, demzufolge sind die Basiswinkel gleich groß:

$$\tilde{\alpha} = \alpha, \qquad \tilde{\beta} = \beta.$$

Der gestreckte Winkel bei C' setzt sich also aus Winkeln der Maße α, β, γ zusammen, folglich gilt

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Dieser Beweis ist mathematisch nicht so ganz überzeugend, da Argumentationen aus dem Umfeld von Achsensymmetrie und gleichschenkligen Dreiecken, die erst später betrachtet werden, einbezogen werden.

Er kann aber ,,handelnd" — Spiegelung als Faltung — ausgeführt werden.

7.2.5 Aktivitäten

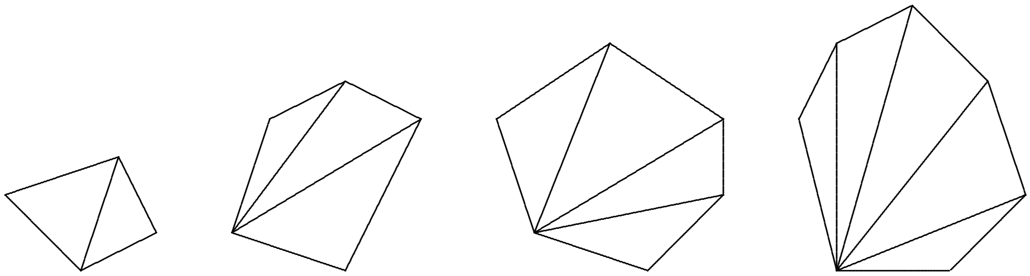
Es bietet sich an, dass dieser Satz an vielerlei (von den Schülerinnen und Schülern selbst erstellten) Beispielen entdeckt oder zumindest bestätigt wird. H15 T3 A2

- Abschneiden oder Abreißen der Innenwinkel an Karton-Dreiecken und Zusammenlegen.
- Dynamische Geometrie-Software: Es werden ein Dreieck gezeichnet und die drei Innenwinkel angezeigt. Dann werden beispielsweise die arithmetischen Ausdrücke $\alpha+\beta$ und $\alpha+\beta+\gamma$ gebildet und angezeigt. Was passiert, wenn das Dreieck gezogen wird?
- Auf dem Fußboden oder mit Stativen werden die Eckpunkte eines Dreiecks ABC markiert. Die Seiten können durch Klebestreifen oder gespannte Schnüre dargestellt werden. Dann wird das Dreieck umrundet und dabei die Innenwinkel mit ,,Drehen der Blickrichtung" aufaddiert.
  - Stelle Dich bei A auf und blicke in Richtung B: Blickrichtung $0\,^\circ$.
  - Drehe Dich in Richtung C: Addition von α.
  - Laufe dann nach C.
  - Bei C drehe Dich in die von B abgewandte Richtung:
    Addition (des Scheitelwinkels) von γ.
  - Laufe nach B.
  - Bei B drehe Dich in Richtung A: Addition von β.
  - Laufe nach A zurück: Blickrichtung $180\,^\circ$.

  Insgesamt hat man sich um den Winkel $\alpha+\gamma+\beta$ (gegen den Uhrzeigersinn) gedreht und schaut am Ende genau in die entgegengesetzte ($=180\,^\circ$)-Richtung. Der Innenwinkelsatz ist bestätigt.

7.3 Innenwinkelsumme bei einem n-Eck

7.3.1 Innenwinkelsumme bei einem n-Eck Ein n–Eck kann in $n-2$ Dreiecke zerlegt werden.



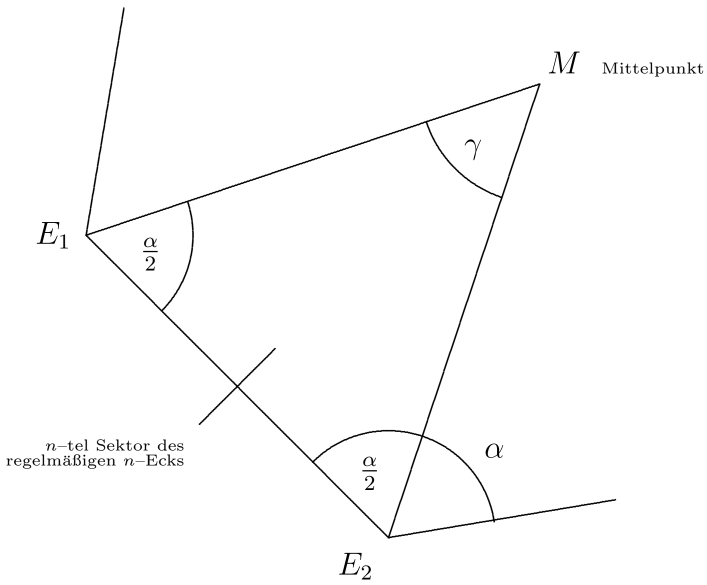
Viereck: 2 Dreiecke — Fünfeck: 3 Dreiecke — Sechseck: 4 Dreiecke — Siebeneck: 5 Dreiecke

Damit ergibt sich für die Innenwinkelsumme in einem n-Eck

n	3	4	5	6	7	8	$\ldots$	n
IWS	180°	360°	540°	720°	900°	1080°		$(n-2)\cdot 180^{\circ}$

7.3.2 Innenwinkel in einem regelmäßigen n–Eck

LP+ M9 LB3



Ist α der Innenwinkel des regelmäßigen n–Ecks, so gilt …

- aufgrund des Satzes von der Dreiecks–Innenwinkelsumme

$$\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - \gamma$$

- und für den Vollwinkel um M

$$n \cdot \gamma = 360^\circ,$$

- insgesamt also

$$\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

Es ergibt sich also

n	3	4	5	6	7	8	12	16	18	10.000
α	60°	90°	108°	120°	$\approx 128,57^\circ$	135°	150°	$157,5^\circ$	160°	$179,964^\circ$

Was passiert also für $n \to \infty$?

7.4 Transversalen

7.4.1 Definition: Transversalen

In einem Dreieck haben die folgenden Strecken eine besondere Bedeutung. Sie heißen gelegentlich *Transversalen*.

$\boxed{\text{M}}$ Die *Mittelsenkrechte* einer Seite.

$\boxed{\text{W}}$ Die *Winkelhalbierende* eines Innenwinkels.

$\boxed{\text{S}}$ Die Verbindungsstrecke zwischen einem Eckpunkt und dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite heißt *Seitenhalbierende*.

$\boxed{\text{H}}$ Die Lotstrecke von einem Eckpunkt auf die gegenüberliegenden Seite (oder Ihre verlängernde Gerade) heißt *Höhe*.

Siehe das Diagramm 7.4.3.

7.4.2 Kommentare

- Es ist klar, dass es in einem allgemeinen Dreieck jeweils drei solcher Strecken gibt.
- Anstelle der Strecken kann man auch zugehörige Halbgeraden oder Geraden betrachten.
- Die Transversalen gleichen Typs schneiden sich jeweils in einem Punkt. Diese Punkte haben besondere Eigenschaften:

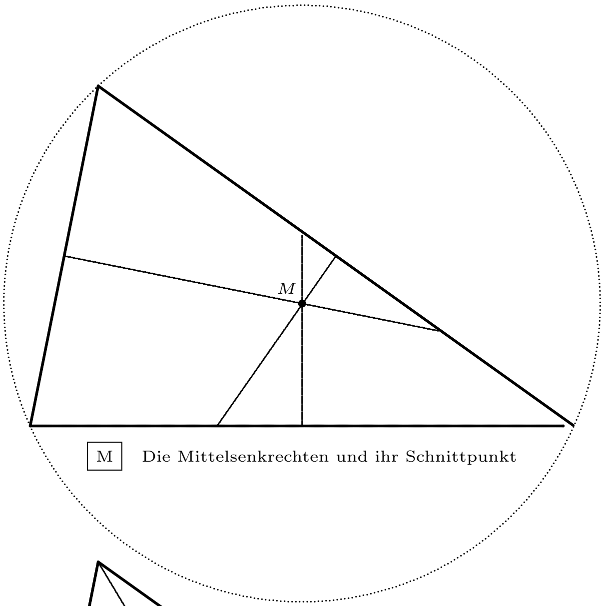
  $\boxed{\text{M}}$ Der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten heißt *Umkreismittelpunkt*. Es handelt sich dabei um den Mittelpunkt des Kreises, für den die drei Dreiecksseiten Sekanten sind. Anschaulicher ausgedrückt: Der Kreis geht durch die drei Eckpunkte.

  $\boxed{\text{W}}$ Der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden heißt *Inkreismittelpunkt*. Es handelt sich dabei um den Mittelpunkt des Kreises, für den die drei Dreiecksseiten Tangenten sind. Anschaulicher ausgedrückt: Der Kreis ist in die drei Seiten eingeschmiegt.

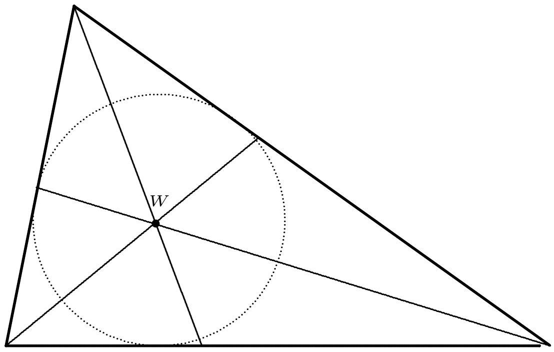
  $\boxed{\text{S}}$ Der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden heißt *Schwerpunkt*. Dieser physikalische Begriff ist dadurch gerechtfertigt, dass bei Unterstützung in diesem Punkt mit einem Finger ein Pappdreieck ausbalanciert ist.

  $\boxed{\text{H}}$ Der Schnittpunkt der drei Höhen hat keinen besonderen Namen oder eine besondere Bedeutung.

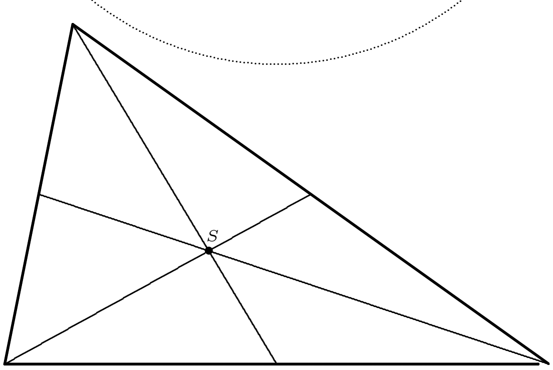
7.4.3 Diagramm der Schnittpunkte



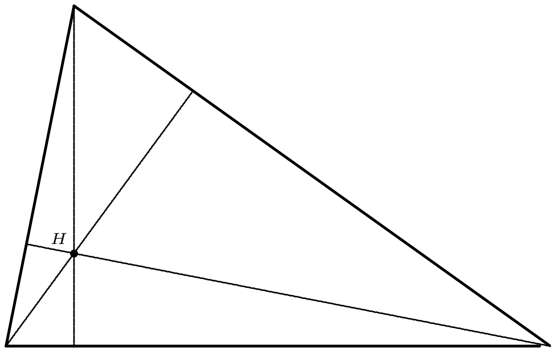
M Die Mittelsenkrechten und ihr Schnittpunkt



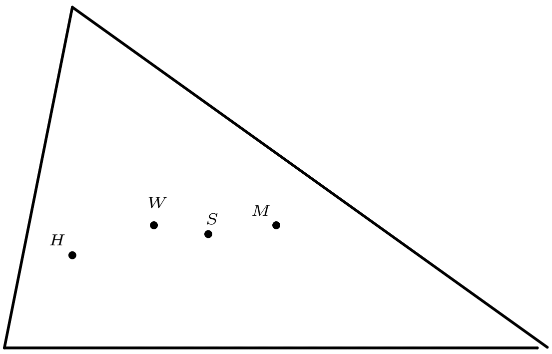
W Die Winkelhalbierenden und ihr Schnittpunkt



S Die Seitenhalbierenden und ihr Schnittpunkt



H Die Höhen und ihr Schnittpunkt



Zusammenschau der Schnittpunkte

7.4.4 Satz: $\boxed{\text{M}}$ Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

Es sei ein Dreieck ABC gegeben. Für einen Punkt M sind die folgenden Aussagen äquivalent (gleichbedeutend):

(A) M ist der Schnittpunkt von zweien der Mittelsenkrechten.

(B) M ist der Schnittpunkt von allen drei Mittelsenkrechten.

(C) M ist von allen drei Eckpunkten gleich weit entfernt: $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$.

(D) M ist der Mittelpunkt eines Kreises durch die drei Eckpunkte, des so genannten Umkreises.

7.4.5 Beweis Zur Begründung wird einfach die Eigenschaft einer Mittelsenkrechten benutzt, dass sie genau die Punkte enthält, die von den Endpunkten der gegebenen Strecke gleichen Abstand haben.

(A) ⇒ (B): Es sei M der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m_a und m_b auf die Seiten a bzw. b. Dann gilt

$$\left.\begin{array}{lcl} M \in m_a & \Longrightarrow & \overline{BM} = \overline{CM} \\ M \in m_b & \Longrightarrow & \overline{AM} = \overline{CM} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \overline{BM} = \overline{AM} \quad \Longrightarrow \quad M \in m_c$$

Also liegt M auch auf der dritten Mittelsenkrechten m_c.

(B) ⇒ (C): Das ist eine grundlegende Eigenschaft von Mittelsenkrechten.

(C) ⇒ (D): Das ist eine grundlegende Eigenschaft von Kreisen.

(D) ⇒ (A): M ist als Mittelpunkt des Kreises von allen drei Ecken gleich weit entfernt. Deswegen muss M auf allen Mittelsenkrechten liegen.

7.4.6 Satz: $\boxed{\mathbf{W}}$ Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

Es sei ein Dreieck ABC gegeben. Für einen Punkt W sind die folgenden Aussagen äquivalent (gleichbedeutend):

(A) W ist der Schnittpunkt von zweien der Winkelhalbierenden.

(B) W ist der Schnittpunkt von allen drei Winkelhalbierenden.

(C) W ist von allen drei Seiten gleich weit entfernt: $d(W,a) = d(W,b) = d(W,c)$.

(D) W ist der Mittelpunkt eines Kreises, der die drei Seiten berührt, des so genannten Inkreises.

7.4.7 Beweis ⊖

Zur Begründung wird einfach die Eigenschaft einer Winkelhalbierenden benutzt, dass sie genau die Punkte enthält, die von den Schenkeln des gegebenen Winkels gleichen Abstand haben.

(A) ⇒ (B): Es sei W der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_α und w_β der Winkel α und β. Dann gilt

$$\left.\begin{array}{lcl} W \in w_\alpha & \Longrightarrow & d(W,b) = d(W,c) \\ W \in w_\beta & \Longrightarrow & d(W,a) = d(W,c) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad d(W,b) = d(W,a) \quad \Longrightarrow \quad W \in w_\gamma$$

Also liegt W auch auf der dritten Winkelhalbierenden w_γ.

(B) ⇒ (C): Das ist eine grundlegende Eigenschaft von Winkelhalbierenden.

(C) ⇒ (D): Das ist die grundlegende Eigenschaft von Kreisen, dass Tangenten auf Radien senkrecht stehen.

(D) ⇒ (A): W ist als Mittelpunkt des Inkreises von allen Seiten gleich weit entfernt. Deswegen muss W auf allen Winkelhalbierenden liegen.

7.4.8 Satz: $\boxed{\text{S}}$ Schnittpunkt der Seitenhalbierenden

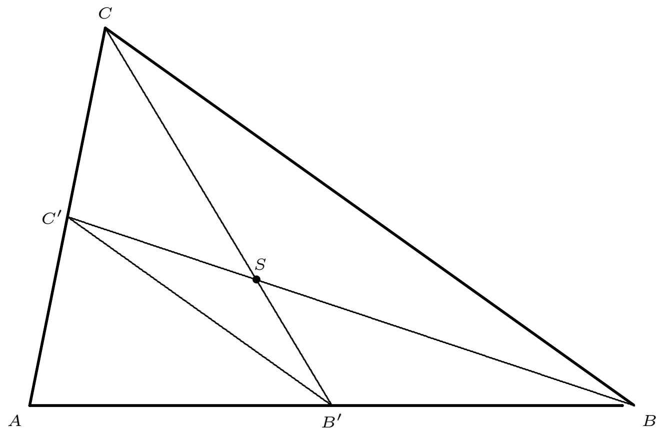
Es sei ein Dreieck ABC gegeben. Für einen Punkt S sind die folgenden Aussagen äquivalent (gleichbedeutend):

(A) S ist der Schnittpunkt von zweien der Seitenhalbierenden.

(B) S teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis $2:1$, wobei die längere Teilstrecke den zugehörigen Eckpunkt als Endpunkt hat.

(C) S ist der Schnittpunkt aller drei Seitenhalbierenden.

Der Punkt S heißt *Schwerpunkt*, was physikalische Gründe hat.



7.4.9 Beweis ⊖

(A) ⇒ (B) Wir bezeichnen den Schnittpunkt der beiden Seitenhalbierenden s_b und s_c mit S und die Seitenmittelpunkte von c bzw. b mit B' bzw. C'. Siehe die Strahlensätze **??**.

1. Mit der Umkehrung des ersten Strahlensatzes bzgl. Zentrum A können wir schließen:

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} \quad \Longrightarrow \quad B'C' \,||\, BC$$

2. Mit dem zweiten Strahlensatz bzgl. Zentrum A können wir weiter schließen:

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$$

3. Mit dem zweiten Strahlensatz bzgl. des Zentrums S ist dann:

$$\frac{\overline{C'S}}{\overline{BS}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2}$$

Das ist die Aussage (B).

(B) ⇒ (C) Es sei S_{ac} der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden s_a und s_c und S_{ab} der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden s_a und s_b. Es liegen beide Punkte S_{ac} und S_{ab} auf s_a und gemäß Aussage (B) liegen sowohl S_{ac} als auch S_{ab} in $\frac{2}{3}$-Entfernung von A. Deshalb müssen S_{ac} und S_{ab} übereinstimmen. Das ist die Aussage (C).

Die anderen Implikationen zeigen wir hier nicht.

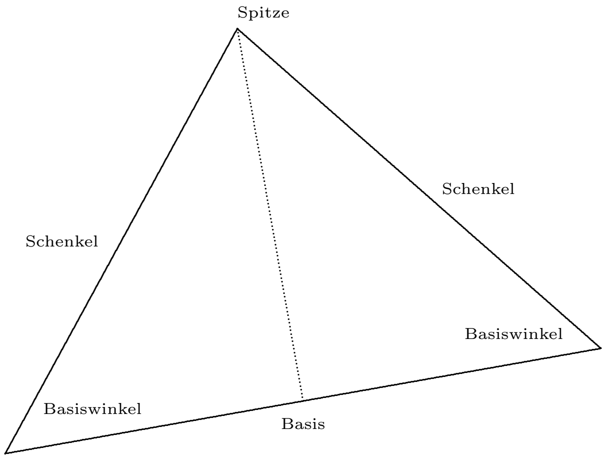
7.4.10 Frage

Teilt jede Gerade durch S das Dreieck in zwei Teilfiguren mit gleichem Flächeninhalt?

7.5 Spezielle Dreieckstypen

7.5.1 Definition: Gleichschenkliges Dreieck

Ein Dreieck heißt *gleichschenklig*, wenn (mindestens) zwei der Seiten gleich lang sind.



7.5.2 Begriffe beim gleichschenkligen Dreieck

Ist ein Dreieck gleichschenklig, so heißen ...

- die beiden gleich langen Seiten *Schenkel*,
- die dritte Seite *Basis*,
- die zwei an der Basis anliegenden Winkel die *Basiswinkel*,
- der Eckpunkt gegenüber der Basis die *Spitze*.

7.5.3 Satz: Gleichschenkliges Dreieck

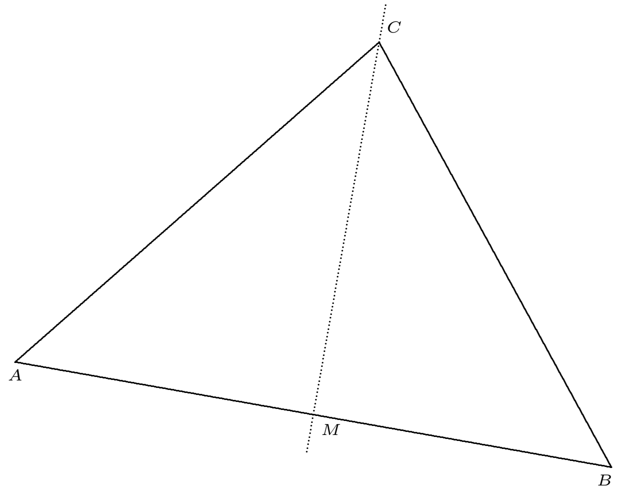
Für ein beliebiges Dreieck sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(S) Das Dreieck ist gleichschenklig.

(W) (Mindestens) zwei der Innenwinkel sind gleich groß.

(Y) Das Dreieck ist achsensymmetrisch.

7.5.4 Beweis



$\boxed{\text{(S)} \Rightarrow \text{(Y)}}$ Es sei C die Spitze. Betrachte die Seitenhalbierende s_c, ihr Schnittpunkt mit der Basis $[AB]$ sei M. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \overline{BC} \qquad \text{und} \\ \overline{AM} &= \overline{BM}, \end{aligned}$$

Die beiden Eckpunkte A und B sind also von den beiden Punkten C und M auf der Geraden jeweils gleich weit entfernt.

Gemäß der Charakterisierung 4.3.5 der Achsenspiegelung werden A und B bzgl. s_c aufeinander achsengespiegelt. C wird auf sich selbst achsengespiegelt.

,,Die Menge der drei Eckpunkte" des Dreiecks wird auf sich selbst achsengespiegelt.

Wegen der Längentreue wird dann das ganze Dreieck auf sich selbst achsengespiegelt, es ist achsensymmetrisch bzgl. g.

$\boxed{\text{(W)} \Rightarrow \text{(Y)}^{\ominus}}$ Es sei C der Eckpunkt des dritten Winkels. Betrachte die Winkelhalbierende w_γ, ihr Schnittpunkt mit der Basis $[AB]$ sei M. Es gilt dann

$$\begin{array}{rrcl} \text{(Def Winkelhalbierende)} & |\sphericalangle ACM| &=& |\sphericalangle BCM| \\ \text{(Vor: Zwei gleich große Winkel)} & |\sphericalangle CAM| &=& |\sphericalangle CBM| \\ \stackrel{\text{IWS }\Delta}{\Longrightarrow} & |\sphericalangle AMC| &=& |\sphericalangle BMC|. \end{array}$$

Die beiden Eckpunkte A und B liegen also von den beiden Punkten C und M auf w_γ aus ,,unter dem gleichen Winkel".

Gemäß der Charakterisierung 4.3.7 der Achsenspiegelung werden A und B bzgl. w_γ aufeinander achsengespiegelt. C wird auf sich selbst achsengespiegelt.

,,Die Menge der drei Eckpunkte" des Dreiecks wird auf sich selbst achsengespiegelt.

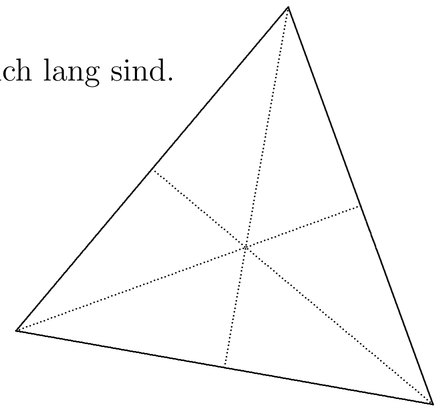
Wegen der Längentreue wird dann das ganze Dreieck auf sich selbst achsengespiegelt, es ist achsensymmetrisch bzgl. g.

$\boxed{\text{(Y)} \Rightarrow \text{(S)}}$ Diese Folgerung gilt aufgrund der Längentreue.

$\boxed{\text{(Y)} \Rightarrow \text{(W)}}$ Diese Folgerung gilt aufgrund der Winkeltreue.

7.5.5 Definition: Gleichseitiges Dreieck

Ein Dreieck heißt *gleichseitig*, wenn alle drei Seiten gleich lang sind.



7.5.6 Satz: Gleichseitiges Dreieck

Für ein beliebiges Dreieck sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(S) Das Dreieck ist gleichseitig.

(W_1) Alle drei Winkel sind gleich groß.

(W_2) Alle drei Winkel haben das Maß $60\,^\circ$.

(Y) Das Dreieck ist achsensymmetrisch bzgl. dreier verschiedener Symmetrieachsen.

7.5.7 Beweis

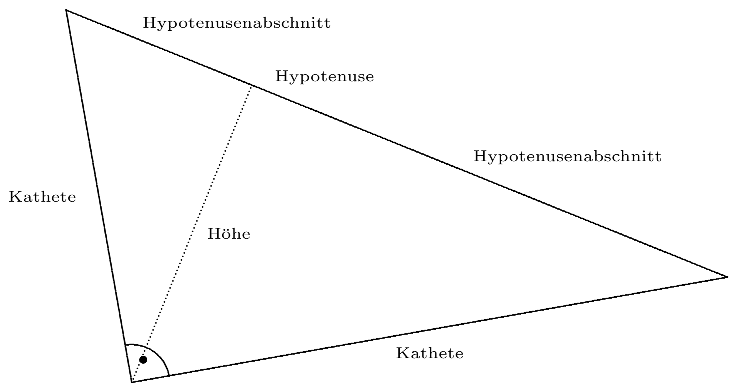
Die Äquivalenz der Aussagen (W_1) und (W_2) ist klar aufgrund des Satzes über die Innenwinkelsumme bei Dreiecken. Die anderen Äquivalenzen sind klar, wenn man die entsprechenden Aussagen über gleichschenklige Dreiecke aus Satz 7.5.3 jeweils auf zwei Seiten bzw. Winkel anwendet.

7.5.8 Besonderes $^\ominus$

Alle gleichseitigen Dreiecke sind ähnlich zueinander.

7.5.9 Definition: Rechtwinkliges Dreieck

Ein Dreieck heißt *rechtwinklig*, wenn einer der Innenwinkel ein rechter Winkel ist.



Ist ein Dreieck rechtwinklig, so heißen ...

- die beiden dem rechten Winkel anliegenden Seiten ,,Katheten",
- die dritte Seite ,,Hypotenuse",
- die zu der Ecke mit dem rechten Winkel gehörige Höhe ,,die Höhe",
- die beiden durch die Höhe abgeteilten Teilstrecken der Hypotenuse die ,,Hypotenusenabschnitte"

Rechtschreib-Eselsbrücke: Die Wörter ,,rechtwinklig, Kathete, Hypotenuse, Pythagoras, Thales" enthalten jeweils genau einmal den Buchstaben *h*.

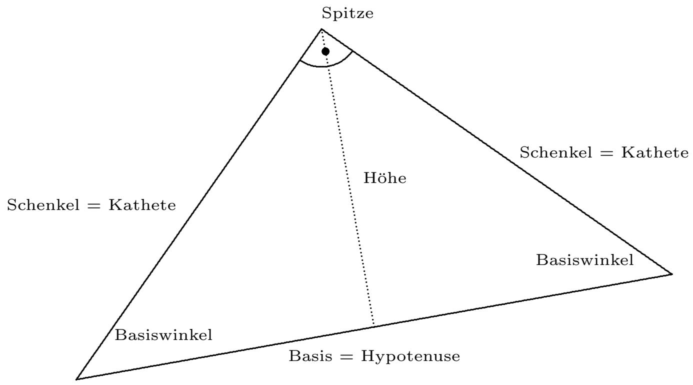
7.5.10 Bedeutung

Rechtwinklige Dreiecke haben eine enorme Bedeutung für den Aufbau der Schulgeometrie, was deutlich wird mit ...

- dem Satz von Thales, vgl. Kapitel 7.6.
- der Satzgruppe des Pythagoras, vgl. Kapitel 9.
- den trigonometrischen Beziehungen.

7.5.11 Definition: Gleichschenklig-Rechtwinkliges Dreieck

Ein Dreieck heißt *gleichschenklig-rechtwinklig*, wenn es gleichschenklig und rechtwinklig ist.

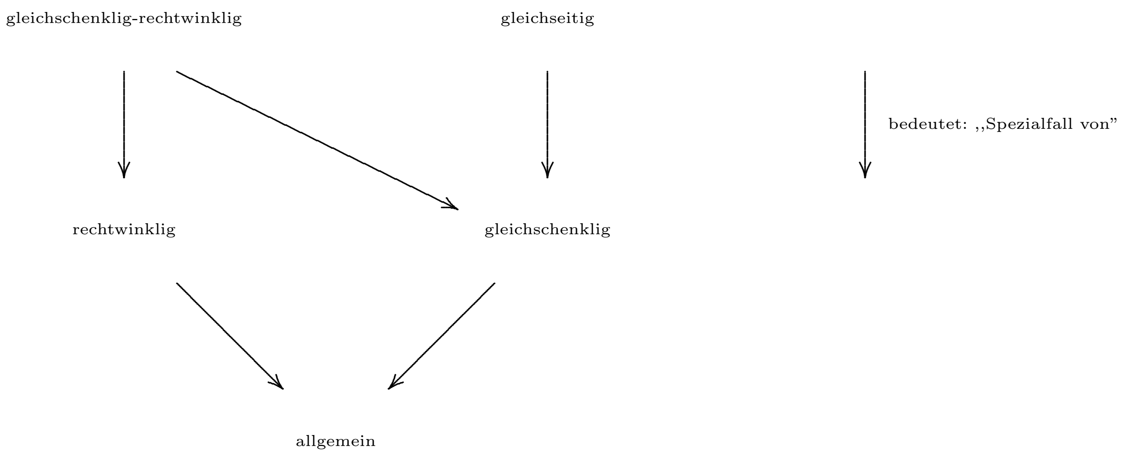


Ist dies der Fall, so kann der rechte Winkel nur zwischen den beiden Schenkeln auftreten. Die beiden Basiswinkel haben das Mass 45°.

7.5.12 Weiteres

- Ist ein Dreieck gleichschenklig-rechtwinklig, so kann der rechte Winkel nur an der Spitze auftreten. Die beiden Basiswinkel haben das Mass 45°.
- Alle gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke sind ähnlich zueinander.
- Das Standardbeispiel ist das GEO-Dreieck.

7.5.13 Diagramm der Dreieckstypen



7.6 Der Satz von Thales

H15 T3 A1b

7.6.1 Satz von Thales: Dreiecks-Version

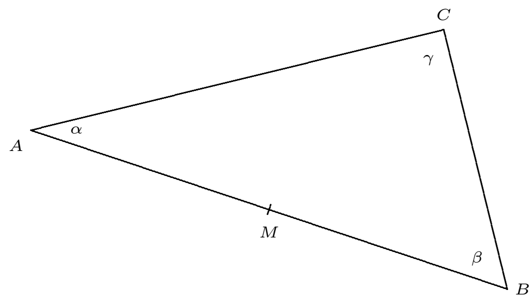
Es sei ein Dreieck ABC gegeben. M sei der Mittelpunkt der Seite $[AB]$, d.h. es gilt $\overline{AM} = \overline{BM}$.

(i) Satz von Thales

WENN $\overline{AM} = \overline{CM}$,
DANN ist $\gamma = 90°$.

(ii) Kehrsatz des Satzes von Thales

WENN $\gamma = 90°$,
DANN ist $\overline{AM} = \overline{CM}$.



7.6.2 Satz von Thales: Kreis-Version

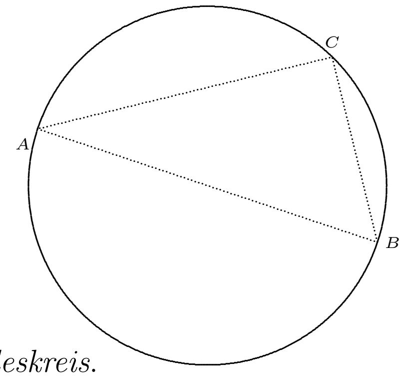
Es sei ein Kreis mit drei Punkten A, B, C auf der Kreislinie gegeben.

(i) Satz von Thales

WENN $[AB]$ ein Durchmesser des Kreises ist,
DANN ist $|\sphericalangle ACB| = 90°$.

(ii) Kehrsatz des Satzes von Thales

WENN $|\sphericalangle ACB| = 90°$,
DANN ist $[AB]$ ein Durchmesser des Kreises.



In diesem Zusammenhang heißt der Kreis dann auch *Thaleskreis*.

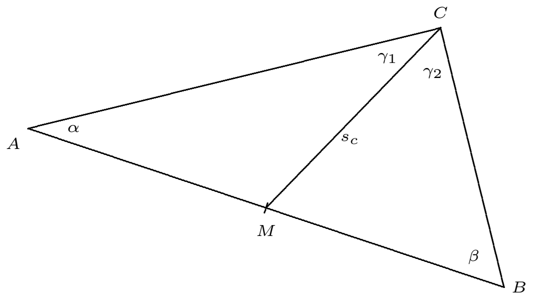
7.6.3 Satz von Thales: Textversion

Es sei ein Kreis gegeben. Ein Punkt liegt genau dann auf der Kreislinie, wenn er mit dem Durchmesser als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck bildet.

Dass alle Versionen das gleiche bedeuten, liegt daran, dass jedes beliebige Dreieck einen Umkreis hat.

7.6.4 Beweis des Satzes

Wir betrachten die Dreiecksversion und zeichnen die Seitenhalbierende s_c ein.



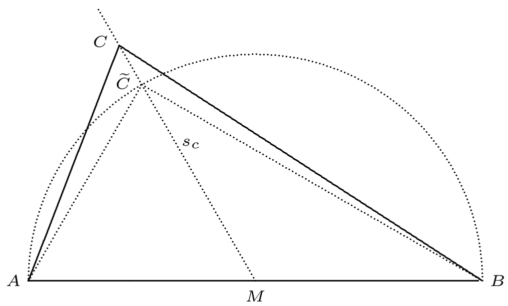
Jetzt kann man die folgende Implikationskette aufschreiben:

$$\begin{aligned}
& \overline{AM} = \overline{CM} \\
\iff\; & \overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} \\
\iff\; & \text{Die Dreiecke } AMC \text{ und } BMC \text{ sind gleichschenklig mit Spitze bei } M. \\
\iff\; & \alpha = \gamma_1 \quad \text{und} \quad \beta = \gamma_2 \\
\overset{(\text{IWS } \Delta)}{\Longrightarrow}\; & 2\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \\
\iff\; & \gamma = 90^\circ
\end{aligned}$$

7.6.5 Beweis des Kehrsatzes ⊖

Wir betrachten die Dreiecksversion. Es sei also ein Dreieck ABC mit $\gamma = 90^\circ$ gegeben.

Wir bezeichnen den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden s_c mit dem Halbkreis über $[AB]$ als Durchmesser mit $\widetilde{C}$.



Wir nehmen nun an, dass die beiden Punkte C und $\widetilde{C}$ verschieden seien.

Dann hat das entstehende (nicht-konvexe) Viereck $A\widetilde{C}BC$

- bei C einen Innenwinkel von 90° (nach Voraussetzung) und
- bei $\widetilde{C}$ einen Innenwinkel von 270° (gemäß Satz von Thales).

Das ist ein Widerspruch zum Satz über die Innenwinkelsumme in einem Viereck.

Also müssen C und $\widetilde{C}$ übereinstimmen. Daraus folgt dann, dass

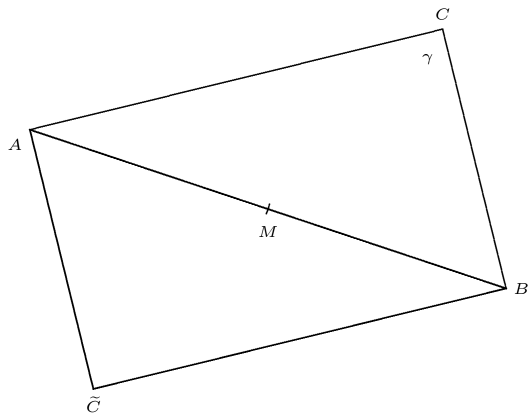
$$\overline{AM} = \overline{\widetilde{C}M} = \overline{CM},$$

was zu beweisen war.

Sollte der Schnittpunkt $\widetilde{C}$ außerhalb des Dreiecks ABC erscheinen, so lässt sich die gleiche Argumentation mit dem Viereck $ACB\widetilde{C}$ durchführen.

7.6.6 Beweis — Variante II $^{\ominus}$

Ergänze das gegebene Dreieck ABC durch eine 180°-Drehung um den Punkt M zu einem Parallelogramm $A\widetilde{C}BC$. M ist als Drehzentrum der Diagonalenschnittpunkt.



Jetzt kann man die folgende Äquivalenz-Kette über das Parallelogramm $A\widetilde{C}BC$ aufschreiben:

$$
\begin{aligned}
& \overline{AM} = \overline{CM} \\
\Longleftrightarrow \quad & \text{Die Diagonalen sind gleich lang.} \\
\Longleftrightarrow \quad & \text{Das Parallelogramm ist ein Rechteck} \\
\Longleftrightarrow \quad & \gamma = 90^{\circ}.
\end{aligned}
$$

Damit sind sowohl der Satz von Thales als auch sein Kehrsatz bewiesen.

7.6.7 Bemerkung $^{\ominus}$

Diese Variante II des Beweises erscheint im Vergleich zu den obigen getrennten Beweisen von Satz und Kehrsatz schnell, simpel und kompakt.

Es bleibt aber die Frage, wann und wie die beiden dabei verwendeten Sätze

> Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn es punktsymmetrisch ist (Satz 8.5.2).
>
> Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn die Diagonalen gleich lang sind (Satz 8.3.2).

bewiesen werden.

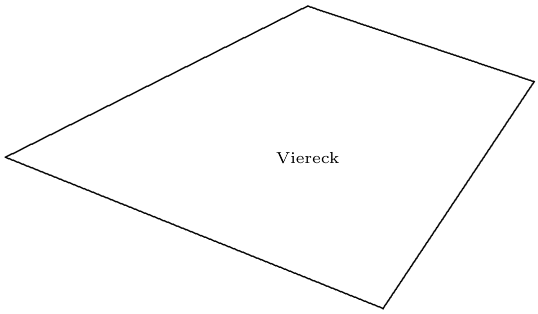
8 Geometrie der Vierecke

LP+ M6 LB3

8.1 Grundlagen

8.1.1 Definition: Viereck

Eine durch vier Strecken begrenzte ebene Figur heißt *Viereck*.



8.1.2 Weitere Bezeichnungen

Wenn ein Viereck vorliegt, dann ergeben sich einige weitere Bezeichnungen

- Die vier begrenzenden Strecken heißen *Seiten*.
- Die vier Schnittpunkte benachbarter Seiten heißen *Ecken*.
- Die vier Winkel, die sich zwischen den Seiten an den Ecken ergeben, heißen *Innenwinkel* des Vierecks.
- Die zwei Strecken, die zwei einander gegenüberliegende Seitenmittelpunkte verbinden, nennen wir *Seitenhalbierende*. Man beachte, dass dieser Begriff in der Schul- und Fachmathematik unüblich ist.
- Normalerweise werden die vier Ecken mit A, B, C, D (gegen den Uhrzeigersinn) bezeichnet. Die Seiten sind dann $a = [AB]$, $b = [BC]$, $c = [CD]$ und $d = [DA]$. Die Innenwinkel werden mit den zugeordneten griechischen Buchstaben bezeichnet.
- Die zwei Strecken, die zwei einander gegenüberliegende Ecken verbinden, heißen *Diagonalen*. Sie werden meist mit e und f bezeichnet.

8.1.3 Satz: Innenwinkelsumme im Viereck

In jedem Viereck beträgt die Summe aller Innenwinkel $360°$.

Zur Begründung muss nur auf die Innenwinkelsumme in einem allgemeinen Vieleck (vgl. 7.3) hingewiesen werden.

8.1.4 Schwerpunkt eines Vierecks $\ominus$

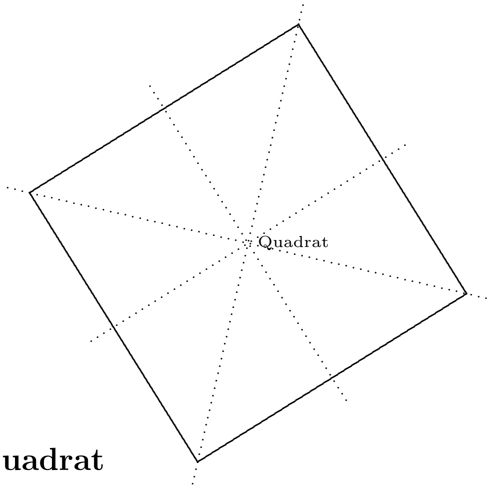
Teilt man ein Viereck jeweils entlang den Diagonalen, so entstehen vier Teildreiecke, die jeweils einen Dreiecks-Schwerpunkt haben. Der Schnittpunkt der beiden Geraden, die jeweils zwei gegenüberliegende solche Dreiecks-Schwerpunkte verbinden, ist der Schwerpunkt des Vierecks.

Beim Windvogelviereck tritt evtl. das bemerkenswerte (auch physikalische) Phänomen auf, dass der Schwerpunkt außerhalb der Figur liegt.

8.2 Das Quadrat

8.2.1 Definition: Quadrat

Ein Viereck heißt *Quadrat*, wenn es vier gleich lange Seiten und vier gleich große Innenwinkel hat.



8.2.2 Satz: Quadrat

Für ein beliebiges Viereck sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(D) Es ist ein Quadrat.

(M) Es hat vier gleich lange Seiten und einen rechten Innenwinkel.

(Y) Es ist achsensymmetrisch bzgl. vier verschiedener Symmetrieachsen.

8.2.3 Beweis fehlt.

8.2.4 Weitere Kommentare

- Die Aussage (M) ist ,,minimalistisch", d.h. sie kommt mit möglichst wenig Information aus. Die Aussage (Y) erfolgt über den Symmetriebegriff und ist für den Mathematiker am interessantesten.
- Die Eigenschaft ,,vier gleich lange Seiten" reicht für die Definition nicht aus. Auch Rauten haben diese Eigenschaft.
- Im Alltagssprachgebrauch werden die Begriffe ,,Viereck" oder ,,viereckig" zur Beschreibung quadratischer Situationen verwendet.
- Beachte, dass ein Quadrat nicht unbedingt ,,auf einer Seite" stehen muss, siehe oben.
- Alle Quadrate sind ähnlich zueinander.

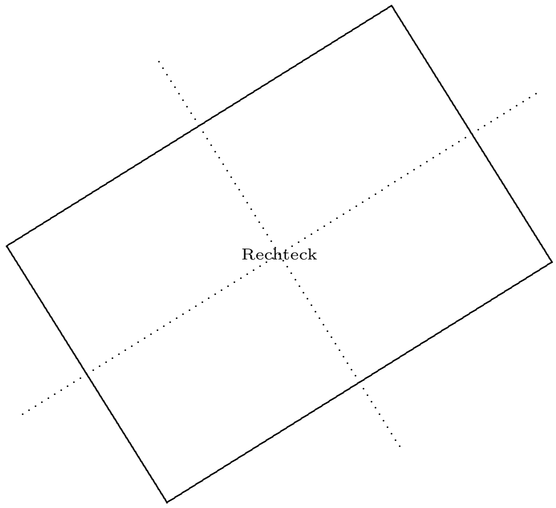
8.2.5 Kontextfelder

- Tafel Schokolade, Scheibe Toastbrot
- Badfliesen, Sitzfläche eines Hockers
- Vorfahrtsschild (,,steht auf der Spitze") oder Schilder zur Vorfahrts-Regelung (,,stehen auf der Seite").

8.3 Das Rechteck

8.3.1 Definition: Rechteck

Ein Viereck heißt *Rechteck*, wenn es vier echte Innenwinkel hat.



8.3.2 Satz: Rechteck

Für ein beliebiges Viereck sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(D) Es ist ein Rechteck.

(W_1) Es hat drei rechte Innenwinkel.

(W_2) Es hat einen rechten Innenwinkel und je zwei Gegenseiten sind gleich lang.

(W_3) Es hat einen rechten Innenwinkel und je zwei Gegenseiten sind parallel.

(Y) Es ist achsensymmetrisch bzgl. der beiden Seitenhalbierenden.

8.3.3 Beweis fehlt.

8.3.4 Weitere Eigenschaften

- Die Diagonalen sind gleich lang und halbieren einander.
- Das Viereck ist punktsymmetrisch.

8.3.5 Kommentar

Bezeichnung der Seiten: Meist heißen die beiden verschiedenen Seitenlängen *Länge* und *Breite*. Ob die beiden Namen der Paarung lange/kurze Seite oder horizontale/vertikale Seite entsprechen sollen, kann nicht grundsätzlich festgelegt werden. Weitere Verwirrung bringt, dass eine Seite auch *Höhe* oder *Tiefe*, evtl. sogar *Dicke*, heißen könnte. Dies hängt von der zugehörigen Sachsituation ab.

8.3.6 Kontextfelder

- Blatt Papier, Tischfläche, Türe, Teppich, Regalboden.
- Grundriss eines Zimmers, eines Hauses
- Fußballplatz
- DIN A Blätter haben die bemerkenswerte Eigenschaft, dass

$$\text{größere Seitenlänge} \quad = \sqrt{2}\cdot \; \text{kleinere Seitenlänge.}$$

  Dieses Längenverhältnis sorgt dafür, dass bei

  - Halbierung (parallel zur kürzeren Seite) und
  - Verkleinerung (auf halb so große **Fläche**)

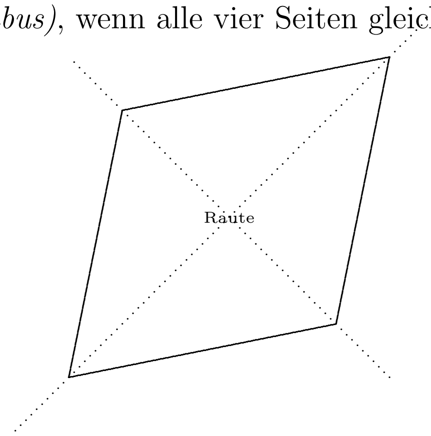
  genau das gleiche Rechteck entsteht. Dieses hat dann auch wieder das oben beschriebene Längenverhältnis.

8.4 Die Raute

H08 T3

8.4.1 Definition: Raute

Ein Viereck heißt *Raute (=Rhombus)*, wenn alle vier Seiten gleich lang sind.



8.4.2 Satz: Raute

Für ein beliebiges Viereck sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(D) Es ist eine Raute.

(Y) Es ist achsensymmetrisch bzgl. der beiden Diagonalen.

8.4.3 Beweis fehlt.

8.4.4 Weitere Eigenschaften

- Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander und halbieren einander.
- Das Viereck ist punktsymmetrisch.

8.4.5 Kommentare und Kontextfelder

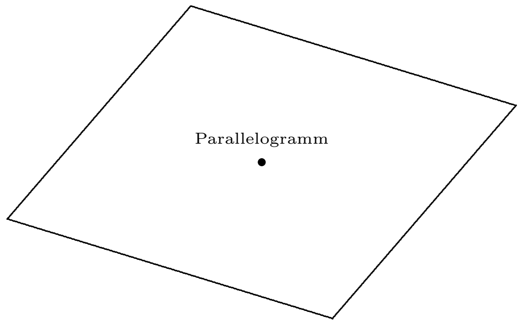
- Beachte, dass eine Raute nicht unbedingt ,,auf einer Spitze" stehen muss.
- Rautenmuster in der Bayerischen Fahne.
- Die Form einer Eisenbahnschienen-Kreuzung
- Die ,,Merkel-Raute" ist gar keine Raute.

8.5 Das Parallelogramm

H12 T2 A3

8.5.1 Definition: Parallelogramm

Ein Viereck heißt *Parallelogramm*, wenn je zwei Gegenseiten parallel sind.



8.5.2 Satz: Parallelogramm

Für ein beliebiges Viereck sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(D) Es ist ein Parallelogramm.

(S) Je zwei Gegenseiten sind gleich lang.

(W) Je zwei Gegenwinkel sind gleich groß.

(Y) Es ist punktsymmetrisch.

8.5.3 Beweis fehlt.

8.5.4 Weitere Eigenschaften

- Die Diagonalen halbieren einander.

8.5.5 Aktivitäten

- Betrachte den Schattenwurf eines Karton-Quadrats. Als Lichtquelle sind der Tageslichtprojektor oder die Sonne geeignet. Welche Viereckstypen ergeben sich, wenn das Quadrat in seiner Lage verändert wird?
- Verbinde die benachbarten Seitenmittelpunkte eines beliebigen Vierecks. Welcher Viereckstyp entsteht?
- Zeigen mit dem Zollstock: 20 cm – 30 cm – 20 cm – 30 cm
- Schienenkreuzung
- Parallelogramm–Konstruktion mit Zirkel und Lineal.

8.5.6 Sprechweisen

Die Sprechweise, dass ein Parallelogramm nicht achsensymmetrisch sei, ist mathematisch hoch-problematisch.

Es gibt durchaus achsensymmetrische Parallelogramme, nämlich Rechtecke, Rauten und Quadrate.

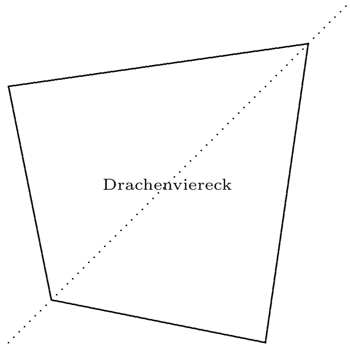
Richtig ist, dass ein Parallelogramm **im allgemeinen nicht achsensymmetrisch** ist.

8.6 Das Drachenviereck

F06 T2

8.6.1 Definition: Drachenviereck

Ein Viereck heißt *Drachenviereck (kurz: Drachen)*, wenn es konvex ist, zusätzlich zwei benachbarte Seiten gleich lang sind, und die zwei anderen Seiten ebenfalls gleich lang sind.



8.6.2 Satz: Drachenviereck

Für ein beliebiges **konvexes** Viereck sind die folgenden Aussagen äquivalent:

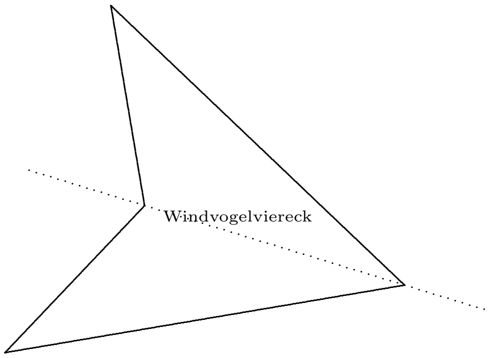
(D) Es ist ein Drachenviereck.

(Y) Es ist achsensymmetrisch bzgl. einer Diagonalen.

8.6.3 Beweis fehlt.

8.6.4 Definition: Windvogelviereck

Ein Viereck heißt *Windvogelviereck*, wenn es nicht konvex ist, zusätzlich zwei benachbarte Seiten gleich lang sind, und die zwei anderen Seiten ebenfalls gleich lang sind.



8.6.5 Satz: Windvogelviereck

Für ein beliebiges **nicht-konvexes** Viereck sind die folgenden Aussagen äquivalent:

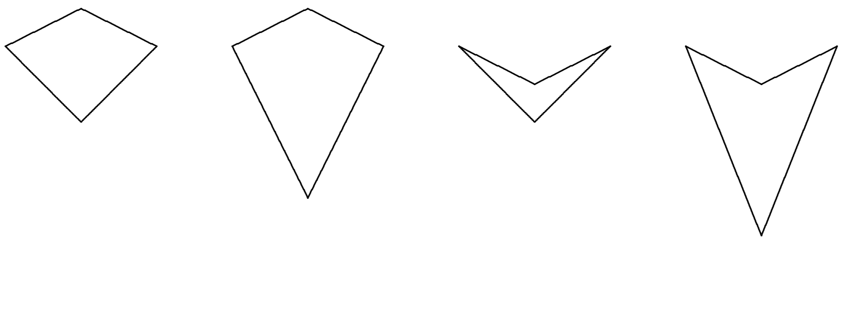
(D) Es ist ein Windvogelviereck.

(Y) Es ist achsensymmetrisch bzgl. einer Diagonalen.

8.6.6 Beweis fehlt.

8.6.7 Kommentare

- Bemerkenswert ist, dass beim Windvogelviereck eine der beiden Diagonalen außerhalb verläuft.
- Was ist das „Zwischending" zwischen Drachen- und Windvogelviereck?
- Aus den Definitionen ist zu ersehen, dass sich die beiden Typen „Drachenviereck" und „Windvogelviereck" nur durch die Konvexität unterscheiden. Als Oberbegriff für beide Typen wird auch „diagonalsymmetrisches Viereck" verwendet.
- In einem Drachen- oder Windvogelviereck stehen die beiden Diagonalen senkrecht aufeinander. Umgekehrt ist diese Bedingung nicht hinreichend dafür, dass ein Viereck ein Drachenviereck oder Windvogelvierecke sein muss.
- Beachte, dass bei einem Drachenviereck oder Windvogelviereck die Symmetrieachse keineswegs die längere oder kürzere Diagonale sein muss.



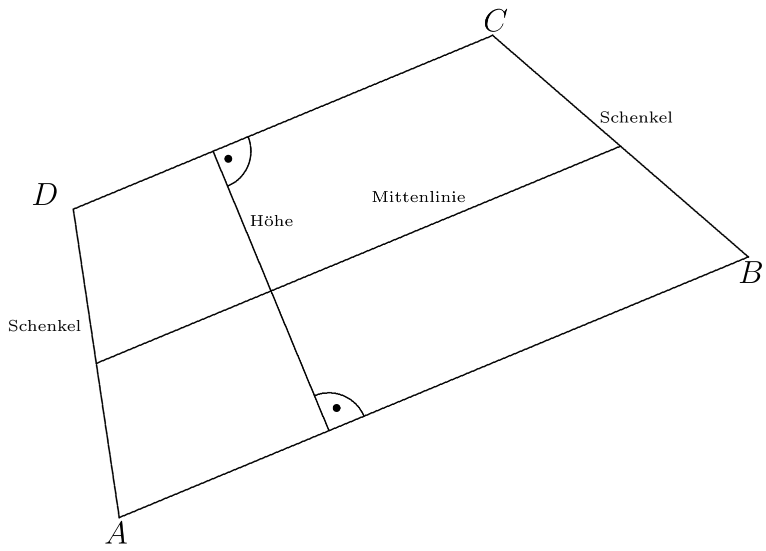
8.7 Das Trapez

H06 T1

8.7.1 Definition: Trapez

Ein Viereck heißt *Trapez*, wenn zwei der Seiten parallel sind.

8.7.2 Begriffe Wenn ein Viereck ein Trapez ist, dann werden noch die in dem Diagramm angegebenen Begriffe verwendet:



8.7.3 Satz: Trapez ⊖

Für ein beliebiges Viereck sind die folgenden Aussagen äquivalent:

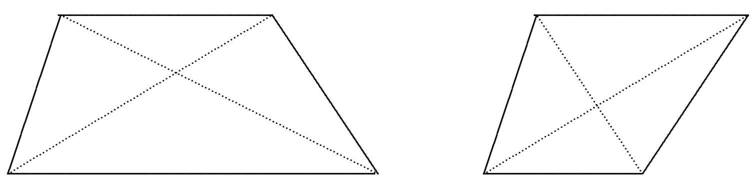
(D) Es ist ein Trapez.

(V) Die beiden Diagonalen schneiden sich im gleichen Verhältnis. H06 T1 A4

8.7.4 Beweis ⊖

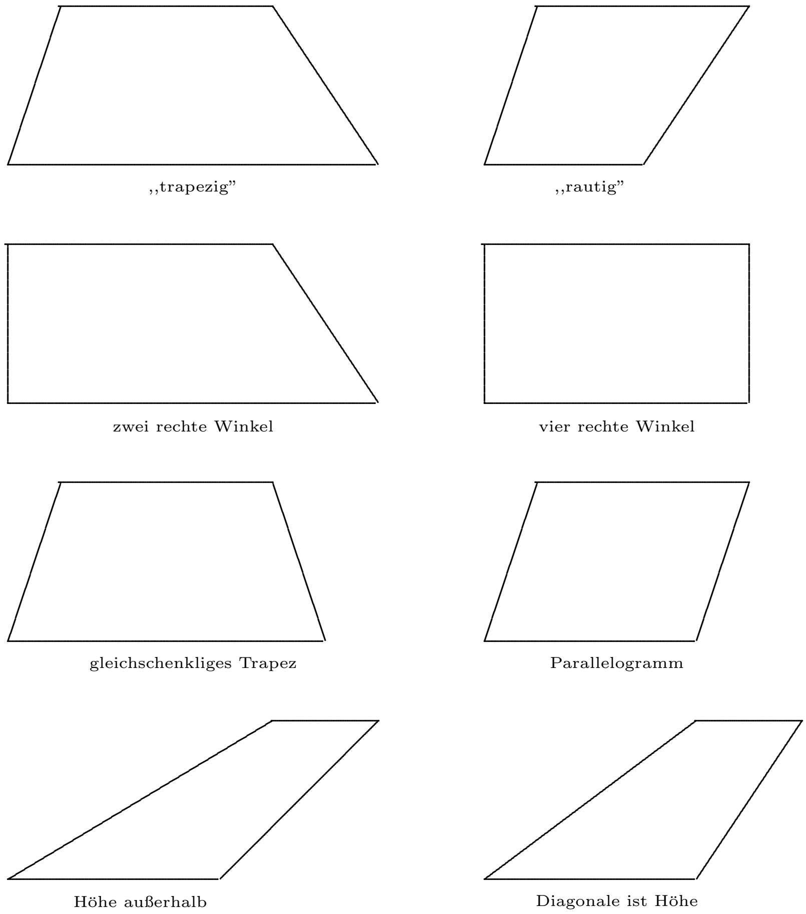
(D) ⇒ (V) Die beiden Diagonalen bilden zusammen mit den parallelen Seiten eine X-Figur bzgl. der Strahlensätze. Die Behauptung folgt dann mit dem ersten Strahlensatz.

(V) ⇒ (D) Die beiden Seiten, an denen die kürzeren (bzw. längeren) Diagonalabschnitte enden, bilden zusammen mit den Diagonalen eine X-Figur. Die Behauptung folgt dann mit der Umkehrung des ersten Strahlensatzes.



8.7.5 Beispielvielfalt

Das folgende Diagramm gibt einen Eindruck von der Beispielvielfalt bei Trapezen.



8.7.6 Kontextfelder

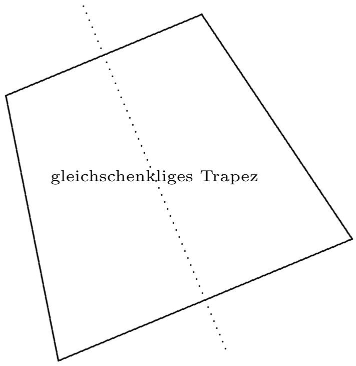
Die Traufseite eines Walmdachs hat die Form eines Trapezes.

8.8 Das gleichschenklige Trapez

H06 T1

8.8.1 Definition: Gleichschenkliges Trapez

Ein Viereck heißt *gleichschenkliges Trapez*, wenn zwei benachbarte Winkel gleich groß sind und die zwei anderen Winkel ebenfalls gleich groß sind.



8.8.2 Satz: Gleichschenkliges Trapez

Für ein beliebiges Viereck sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(D) Es ist ein gleichschenkliges Trapez.

(A) Es sind die drei folgenden Bedingungen erfüllt:

- (A_1) Zwei der Seiten sind parallel, d.h. es ist ein Trapez,
- (A_2) die beiden anderen Seiten sind gleich lang,
- (A_3) zwei an einer der beiden parallelen Seiten anliegenden Innenwinkel sind gleich groß.

(Y) Es ist achsensymmetrisch bzgl. einer Seitenhalbierenden.

8.8.3 Beweis fehlt.

8.8.4 Kommentare

- Die Definition 8.8.1 ist ungewöhnlich, aber sehr kompakt, außerdem in gewisser Weise analog zu der des Drachenvierecks.
- Die äquivalente Beschreibung von Trapezen in der Aussage (A) ist anschaulicher und alltagsnäher, dafür aber ziemlich umständlich. Die seltsame zusätzliche Bedingung (A_3) ist notwendig, da Parallelogramme nicht als gleichschenklige Trapeze ,,zugelassen” sein sollen.
- Man mache sich klar, dass die Eigenschaft (A_2) aus den anderen beiden (A_1) und (A_3) folgt. Eine Beschreibung nur mittels (A_1) und (A_3) wäre fachlich richtig, aber ungewöhnlich und alltagsfern.
- Im Alltagssprachgebrauch wird häufig das präzisierende Attribut ,,gleichschenklig” weggelassen. Es bleibt dann unklar, ob es um gleichschenklige oder allgemeine Trapeze geht. Siehe auch den Lehrplan. LP^+ M6 LB3

8.9 Das Sehnenviereck ⊖

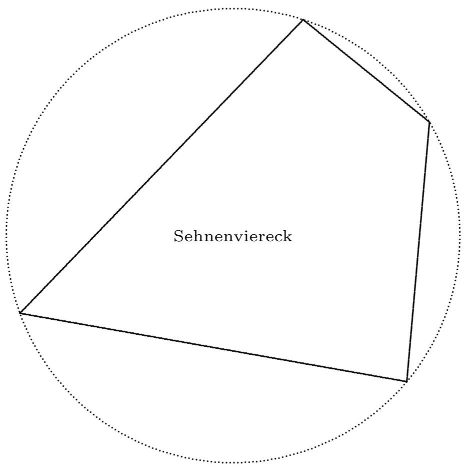
8.9.1 Definition und Satz: Sehnenviereck

Ein Viereck heißt *Sehnenviereck*, wenn es eine (und damit jede) der folgenden Bedingungen erfüllt:

(D) Die vier Seiten sind Sehnen eines Kreises.

(K) Es besitzt einen Umkreis. Das ist ein Kreis, dessen Kreislinie alle Eckpunkte des Vierecks enthält.

(W) Die Summen der Maße von je zwei Gegenwinkeln sind gleich.



8.9.2 Beweis fehlt.

8.10 Das Tangentenviereck ⊖

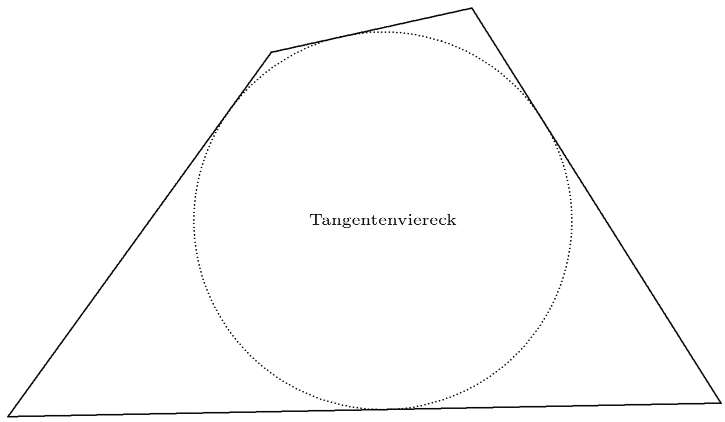
8.10.1 Definition und Satz: Tangentenviereck

Ein Viereck heißt *Tangentenviereck*, wenn es eine (und damit jede) der folgenden Bedingungen erfüllt:

(D) Die vier Seiten sind Tangenten eines Kreises.

(K) Es besitzt einen Inkreis. Das ist ein Kreis, dessen Kreislinie jede Seite genau einmal berührt.

(S) Die Summen der Längen von je zwei Gegenseiten sind gleich.



8.10.2 Beweis fehlt.

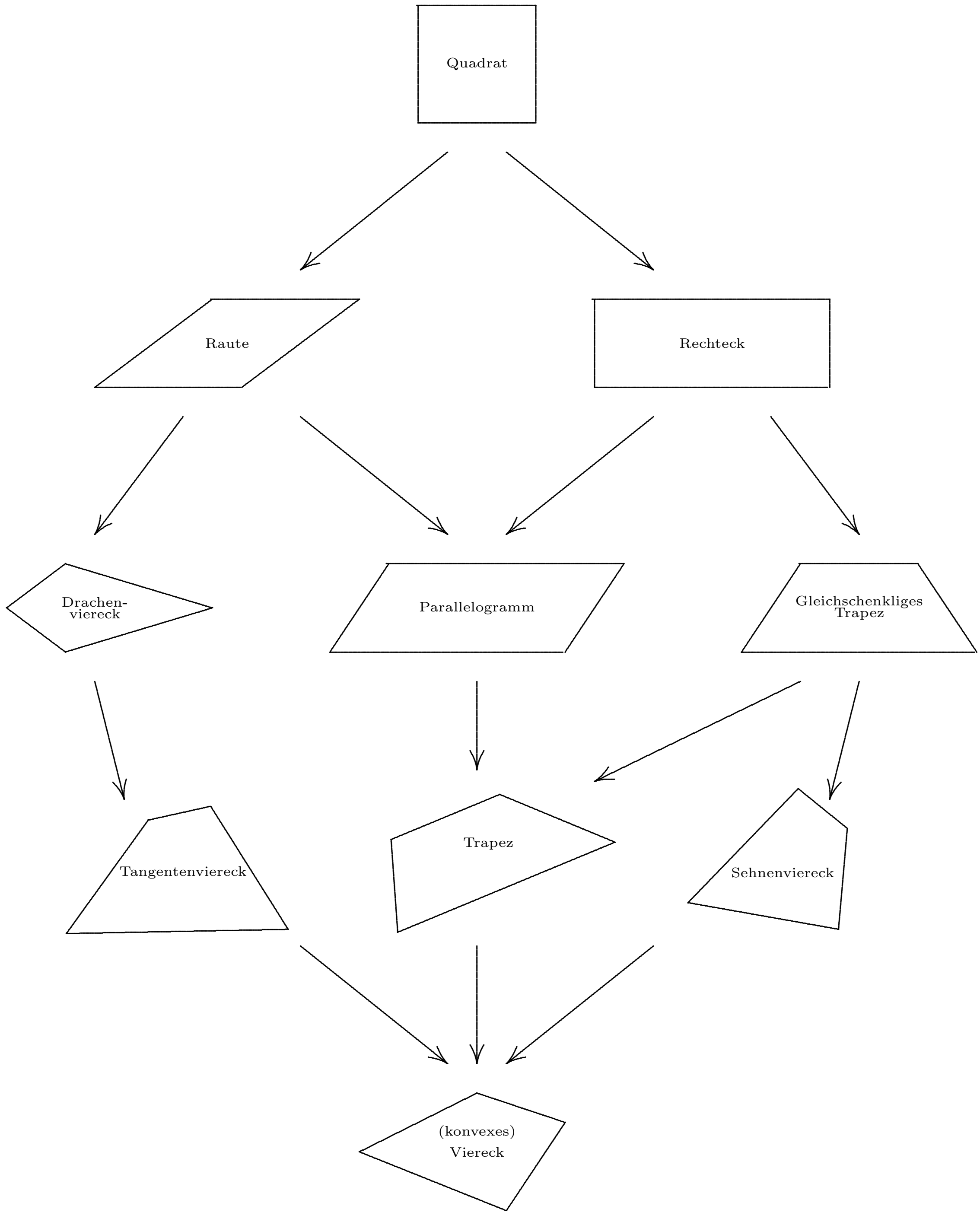
8.11 Das Haus der Vierecke

LP+ M6 LB3

F13 T1 A1

H12 T2 A1

H08 T3 A1



Ein Pfeil, der von Viereckstyp A nach Viereckstyp B weist, hat die folgende Bedeutung:

- Viereckstyp A ist ein Spezialfall von Viereckstyp B oder
- Die Menge der Viereckstypen A ist in der Menge der Viereckstypen B enthalten.

8.12 Eigenschaften der Vierecke

	Eigenschaft	Quadrat	Raute	Rechteck	Drachen	Paralgr.	gl. Trapez
1	Alle vier Seiten sind gleich lang						
2	Es gibt zwei mal zwei gleich lange benachbarte Seiten						
3	Je zwei gegenüberliegende Seiten sing gleich lang						
4	Zwei benachbarte Seiten sind gleich lang						
5	Zwei gegenüberliegende Seiten sing gleich lang						
6	Drei Seiten sind gleich lang						
7	Zwei Seiten sind gleich lang						
8	Alle vier Winkel gleich groß						
9	Es gibt zwei mal zwei gleich große benachbarte Winkel						
10	Je zwei gegenüberliegende Winkel sing gleich groß						
11	Zwei benachbarte Winkel sind gleich groß						
12	Zwei gegenüberliegende Winkel sing gleich groß						
13	Drei Winkel sind gleich groß						
14	Zwei Winkel sind gleich groß						
15	Zwei der Nachbarwinkel ergänzen sich zu $180\,^{o}$						
16	Die Summe der Innenwinkel ist $360\,^{o}$						
17	Die Diagonalen sind gleich lang						
18	Die Diagonalen halbieren einander						
19	Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander						
20	Beide Diagonalen halbieren die Winkel						
21	Eine Diagonale halbiert die Winkel						
22	Die Seitenhalbierenden sind gleich lang						
23	Die Seitenhalbierenden halbieren einander						
24	Die Seitenhalbierenden stehen senkrecht aufeinander						
25	Das Viereck ist achsensymmetrisch						
26	Das Viereck ist punktsymmetrisch						
27	Das Viereck besitzt vier Symmetrieachsen						
28	Das Viereck besitzt zwei Symmetrieachsen						
29	Das Viereck besitzt eine Symmetrieachse						
30	Beide Diagonalen sind Symmetrieachsen						
31	Eine Diagonale ist Symmetrieachse						
32	Zwei Seitenhalbierende sind Symmetrieachsen						
33	Eine Seitenhalbierende ist Symmetrieachse						
34	Je zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel zueinander						
35	Zwei der Seiten sind parallel zueinander						
36	Das Viereck besitzt einen Umkreis (Sehnenviereck)						
37	Das Viereck besitzt einen Inkreis (Tangentenviereck)						

Eintragungen in der linken Seite eines Feldes: Die richtige Antwort!

$\boxed{\checkmark}$ Bei dem Viereckstyp liegt die Eigenschaft vor.

$\boxed{\circ}$ Bei dem Viereckstyp liegt die Eigenschaft nicht vor.

Eintragungen in der rechten Seite eines Feldes: Wie habe ich die Antwort ermittelt?

$\boxed{\mathrm{W}}$ (Wissen) Mir war die Antwort bekannt.

$\boxed{\mathrm{Z}}$ (Zeichnen) Ich habe ein Beispiel des Viereckstyps gezeichnet und daraus die Antwort erschlossen.

$\boxed{\mathrm{V}}$ (Vorstellung) Ich habe mir den Viereckstyp vorgestellt und die Antwort daraus erschlossen.

$\boxed{\mathrm{M}}$ (Mathematik) Ich habe die Antwort durch geometrisches oder kombinierendes Schließen ermittelt.

Unter den *Seitenhalbierenden* eines Vierecks verstehen wir die beiden Strecken, die die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten des Vierecks verbinden. Beachte, dass dieser Begriff kaum üblich ist.

8.13 Eigenschaften der Vierecke — Lösung

		Quadrat	Raute	Rechteck	Drachen	Paralgr.	gl. Trapez
1		$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
2		$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\circ$	$\circ$
3		$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\circ$
4		$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\circ$	$\circ$
5		$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\checkmark$
6		$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
7		$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
8		$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
9		$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\circ$	$\circ$	$\checkmark$
10		$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\circ$
11		$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\circ$	$\circ$	$\checkmark$
12		$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$
13		$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
14		$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
15		$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\checkmark$
16		$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
17		$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\circ$	$\circ$	$\checkmark$
18		$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\circ$
19		$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\circ$	$\circ$
20		$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
21		$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\circ$	$\circ$
22		$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\circ$	$\circ$
23		$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\checkmark$
24		$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\circ$	$\circ$	$\checkmark$
25		$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$
26		$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\circ$
27		$\checkmark$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
28		$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
29		$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$
30		$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
31		$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\circ$	$\circ$
32		$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
33		$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\circ$	$\circ$	$\checkmark$
34		$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\circ$
35		$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\checkmark$
36		$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\circ$	$\circ$	$\checkmark$
37		$\checkmark$	$\checkmark$	$\circ$	$\checkmark$	$\circ$	$\circ$

9 Die Satzgruppe des Pythagoras

9.1 Überblick über die Satzgruppe

LP+ M9 LB3

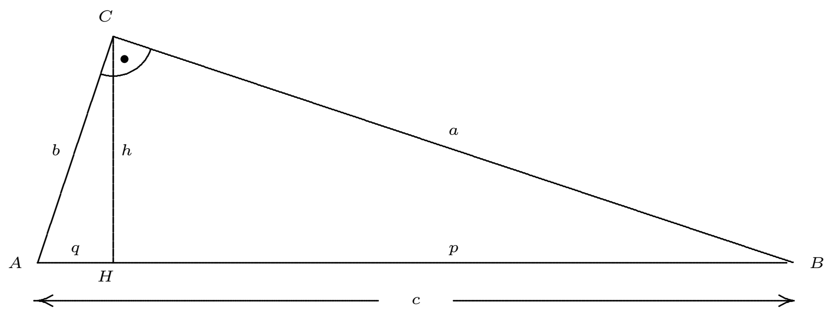
9.1.1 Zeichnung

F14 T1

F11 T3

H07 T2

F03 T1



9.1.2 Definitionen

Ist einer der Innenwinkel eines Dreiecks ein rechter Winkel, so heißt das Dreieck *rechtwinklig*.

Es folgt mit IWS, dass nur ein Winkel eines Dreiecks ein rechter Winkel sein kann.

Die beiden dem rechten Winkel anliegenden Seiten heißen *Katheten*, die ihm gegenüberliegende Seite heißt *Hypotenuse*.

Da die zwei Katheten zugleich Höhen sind, nennt man die dritte Höhe auf die Hypotenuse **die** Höhe im rechtwinkligen Dreieck.

Die Hypotenuse wird durch den Höhenfußpunkt F in zwei Abschnitte der Längen q und p geteilt. Diese Strecken heißen *Hypotenusenabschnitte*.

Meist werden die Eckpunkte A, B, C so gewählt, dass der rechte Winkel bei C ist.

H15 T3 A1b

9.1.3 Hypotenusensatz = klassischer Satz des Pythagoras

WENN in einem Dreieck ABC bei C ein rechter Winkel ist,
DANN gilt die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$.

Andere Formulierung unabhängig von den Bezeichnungen:
Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, so ist die Summe der Quadrate der Kathetenlängen gleich dem Quadrat der Länge der Hypotenuse.

9.1.4 Kehrsatz zum Hypotenusensatz

WENN in einem Dreieck ABC die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt,
DANN ist der Winkel bei C ein rechter Winkel.

Andere Formulierung unabhängig von den Bezeichnungen:
Wenn die Summe der Quadrate zweier Seiten gleich dem Quadrat der Länge der dritten Seite ist, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

9.1.5 Höhensatz (des Euklid)

F14 T1

WENN in einem Dreieck ABC bei C ein rechter Winkel ist,
DANN gilt die Beziehung $p \cdot q = h^2$.

Andere Formulierung unabhängig von den Bezeichnungen:
Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, so ist das Produkt der Längen der Hypotenusenabschnitte gleich dem Quadrat der Länge der Höhe.

F14 T1

9.1.6 Kehrsatz zum Höhensatz

WENN in einem Dreieck ABC die Beziehung $p \cdot q = h^2$ gilt,
DANN ist der Winkel bei C ein rechter Winkel.

Andere Formulierung unabhängig von den Bezeichnungen:
Wenn in einem Dreieck das Quadrat der Länge einer Höhe gleich dem Produkt der Längen der durch sie abgetrennten Seitenabschnitte ist, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

9.1.7 Kathetensatz (des Euklid)

WENN in einem Dreieck ABC bei C ein rechter Winkel ist,
DANN gelten die beiden Beziehungen $p \cdot c = a^2$ und $q \cdot c = b^2$.

Andere Formulierung unabhängig von den Bezeichnungen:
Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, so ist das Produkt der Länge eines Hypotenusenabschnitts und der der Hypotenuse gleich dem Quadrat der Länge der zugehörigen Kathete.

9.1.8 Kehrsatz zum Kathetensatz

WENN in einem Dreieck ABC eine der Beziehungen $p \cdot c = a^2$ oder $q \cdot c = b^2$ gilt,
DANN ist der Winkel bei C ein rechter Winkel.

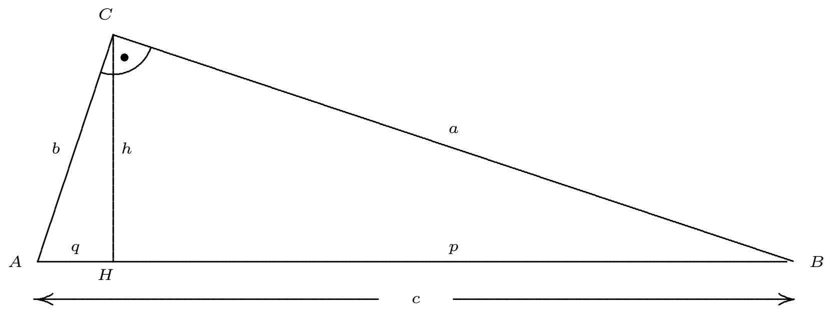
Andere Formulierung unabhängig von den Bezeichnungen:
Wenn in einem Dreieck das Quadrat einer Höhe gleich dem Produkt der Länge einer Seite und dem der Länge des zugehörigen durch sie abgetrennten Seitenabschnitts ist, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

9.2 Arithmetische Beweise / mittels Ähnlichkeit ⊖

Mit Hilfe der Ähnlichkeit können alle drei Sätze elegant — in einem „Aufwasch" — bewiesen werden.

9.2.1 Beweis mittels Ähnlichkeit

Es sei ein rechtwinkliges Dreieck gegeben.



Die drei Dreiecke (gesamt — links — rechts)

$$\Delta_g \;=\; \Delta ABC \qquad \Delta_\ell \;=\; \Delta ACH \qquad \Delta_r \;=\; \Delta CBH$$

sind paarweise ähnlich zueinander, da in jedem Dreieck ein Winkel mit Maß α, ein Winkel mit Maß β und ein rechter Winkel vorliegen.

Aufgrund der Ähnlichkeit stimmen auch entsprechende Seitenverhältnisse überein, dann

$$\Delta_\ell \sim \Delta_r \quad\Longrightarrow\quad \frac{h}{q} = \frac{p}{h} \quad\Longrightarrow\quad h^2 = p \cdot q \qquad \text{(Höhensatz)}$$

$$\Delta_r \sim \Delta_g \quad\Longrightarrow\quad \frac{p}{a} = \frac{a}{c} \quad\Longrightarrow\quad a^2 = c \cdot p \qquad \text{(Kathetensatz I)}$$

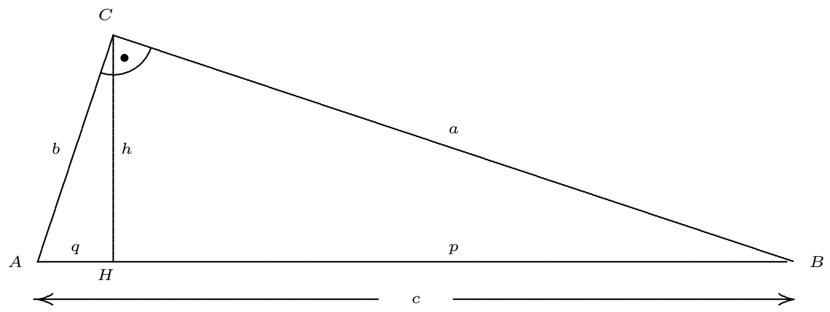
$$\Delta_g \sim \Delta_\ell \quad\Longrightarrow\quad \frac{b}{c} = \frac{q}{b} \quad\Longrightarrow\quad b^2 = c \cdot q \qquad \text{(Kathetensatz II)}$$

Addition der beiden Gleichungen des Kathetensatzes liefert den Hypotenusensatz

$$a^2 + b^2 \;=\; c \cdot p + c \cdot q \;=\; c \cdot (p+q) \;=\; c^2.$$

9.2.2 Hypotenusensatz ⇒ Satzgruppe ⊖

Nimmt man an, dass der Hypotenusensatz bewiesen ist, so lassen sich die anderen Sätze daraus herleiten.



Wir schreiben den Hypotenusensatz für jedes der drei Dreiecke (gesamt — links — rechts) auf

$$\Delta_g = \Delta ABC \qquad \Delta_\ell = \Delta ACH \qquad \Delta_r = \Delta CBH.$$

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & \Delta_g & a^2+b^2 = (p+q)^2 \\ \text{(II)} & \Delta_\ell & b^2 = h^2+q^2 \\ \text{(III)} & \Delta_r & a^2 = h^2+p^2 \end{array}$$

Verschiedene Linearkombinationen dieser Gleichungen liefern dann die anderen Sätze.

$$\begin{aligned} &\text{(I)} + \text{(II)} - \text{(III)} \\ (a^2+b^2)+b^2-a^2 &= (p+q)^2+h^2+q^2-(h^2+p^2) \\ 2b^2 &= 2q(p+q) \\ b^2 &= qc \end{aligned}$$

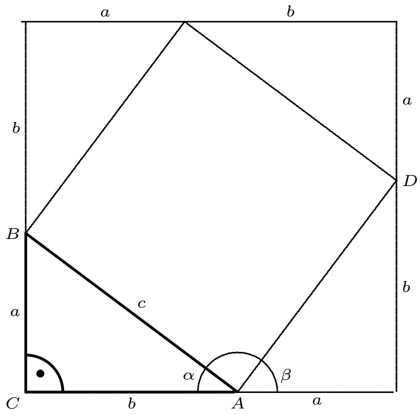
$$\begin{aligned} &\text{(I)} + \text{(III)} - \text{(II)} \\ (a^2+b^2)+a^2-b^2 &= (p+q)^2+h^2+p^2-(h^2+q^2) \\ 2a^2 &= 2p(p+q) \\ a^2 &= pc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{(I)} - \text{(II)} - \text{(III)} \\ (a^2+b^2)-a^2-b^2 &= (p+q)^2-(h^2+q^2)-(h^2+p^2) \\ 0 &= 2pq-2h^2 \\ h^2 &= pq \end{aligned}$$

9.3 Beweise des Hypotenusensatzes

F11 T3 A4

9.3.1 Beweis mittels innerem Hypotenusenquadrat



(1) Ergänze das gegebene rechtwinklige Dreieck ΔABC mit den Katheten a und b gemäß obiger Figur zu einem Quadrat mit Seitenlänge $a + b$.

(2) Für den Winkel $\sphericalangle DAB$ gilt:

$$180^\circ \quad = \quad \alpha + |\sphericalangle DAB| + \beta \overset{\text{IWS}}{=} |\sphericalangle DAB| + 90^\circ$$

und deshalb

$$|\sphericalangle DAB| = 90^\circ.$$

Die gleichen Überlegungen für die anderen vier inneren Winkel zeigen, dass die Figur im Inneren ein Quadrat ist.

(3) Wir stellen eine Flächenbilanz auf:

$$\underbrace{(a+b)^2}_{\text{Äußeres Quadrat}} - 4 \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2} \cdot ab}_{\text{Dreieck}} \quad = \quad \underbrace{c^2}_{\text{Inneres Quadrat}}$$

Ausmultiplizieren mit der ersten binomischen Formel zeigt:

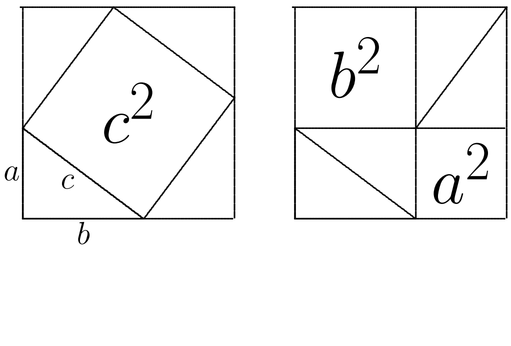
$$a^2 + 2ab + b^2 - 2ab \quad = \quad c^2,$$

also den Satz von Pythagoras für das rechtwinklige Dreieck ΔABC

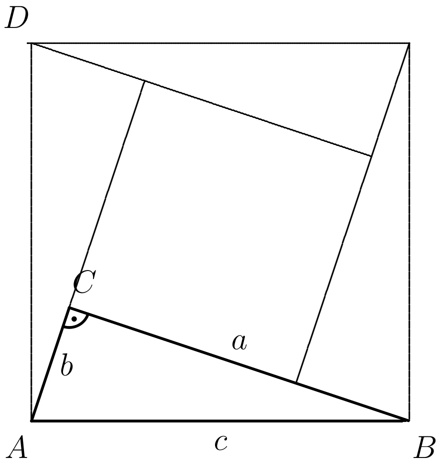
$$a^2 + b^2 \quad = \quad c^2.$$

9.3.2 Anschauliche Flächenbilanz („Pythagoras-Puzzle”)

Anschaulich und verkürzt-unvollständig kann der obige Beweis so dargestellt werden:



9.3.3 Beweis mittels äußerem Hypotenusenquadrat ⊖



(1) Ergänze das gegebene rechtwinklige Dreieck ΔABC mit den Katheten a und b gemäß obiger Figur zu einer Raute mit Seitenlänge c.

(2) Für den Winkel $\sphericalangle DAB$ gilt:

$$|\sphericalangle DAB| \;=\; \alpha + \beta \stackrel{\text{IWS}}{=} 90^{\circ}$$

Die gleichen Überlegungen für die anderen vier Winkel in der aus den Hypotenusen gebildeten Raute zeigen, dass diese ein Quadrat ist.

(3) Wir stellen eine Flächenbilanz auf:

$$\underbrace{(a-b)^2}_{\text{Inneres Quadrat}} + 4 \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot ab}_{\text{Dreieck}} \;=\; \underbrace{c^2}_{\text{Äußeres Quadrat}}$$

Ausmultiplizieren mit der zweiten binomischen Formel zeigt:

$$a^2 - 2ab + b^2 + 2ab \;=\; c^2,$$

also den Satz von Pythagoras für das rechtwinklige Dreieck ΔABC

$$a^2 + b^2 \;=\; c^2.$$

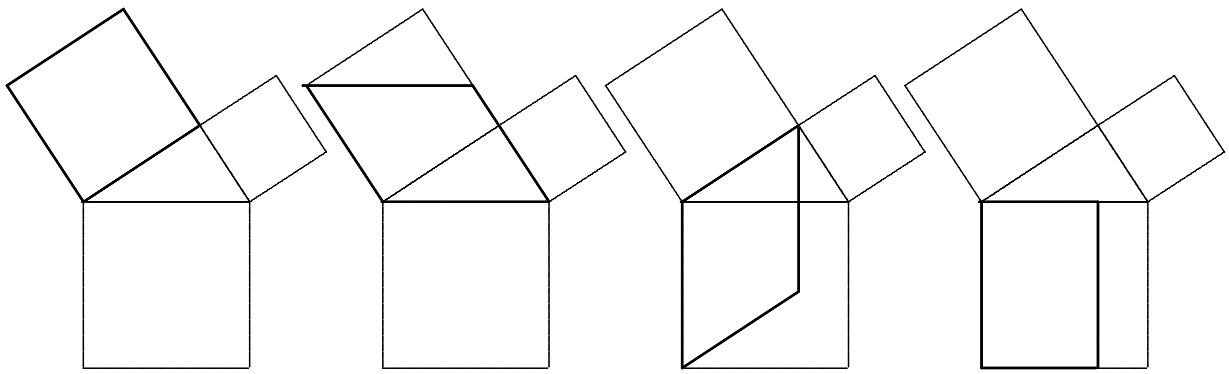
9.4 Beweis des Kathetensatzes ⊖

9.4.1 Beweis mittels Scherung

Das folgende Diagramm zeigt die Abfolge der flächenerhaltenden Abbildungen

Scherung — Drehung — Scherung,

die das eine Katheten-Quadrat in das flächengleiche Hypotenusen-Abschnitts-Rechteck überführt.



In Formeldarstellung lautet der so bewiesene Kathetensatz

$$b^2 = p \cdot c$$

Dual dazu zeigt man den anderen Kathetensatz

$$a^2 = q \cdot c.$$

Die Addition der beiden Gleichungen bringt den Hypotenusensatz hervor

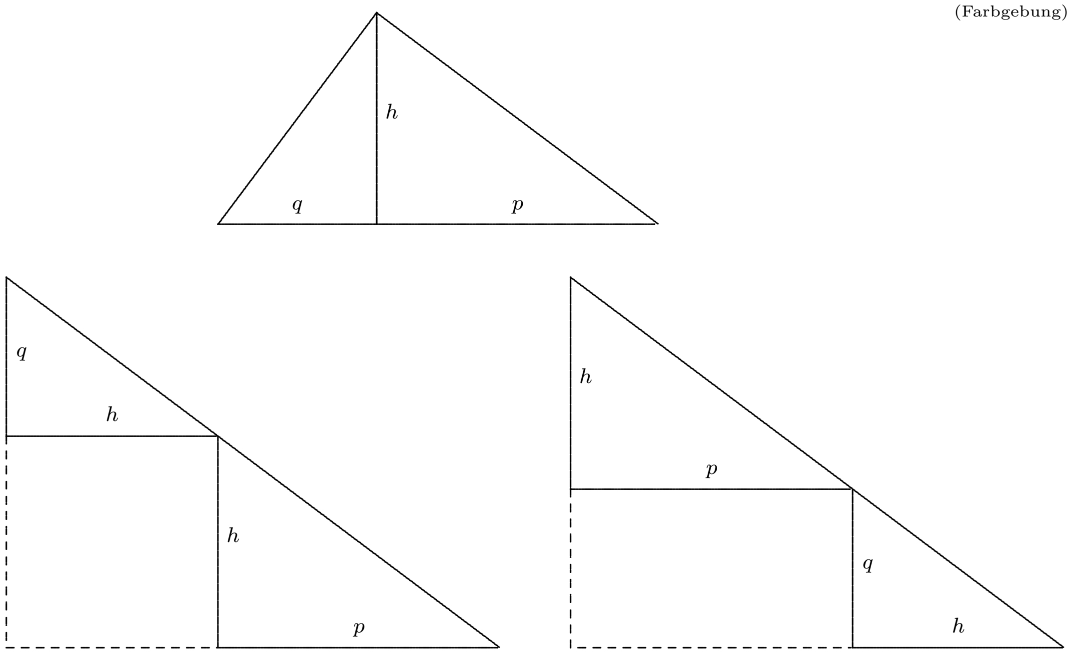
$$a^2 + b^2 = p \cdot c + q \cdot c = (p+q) \cdot c = c^2.$$

9.5 Beweise des Höhensatzes

H07 T2

9.5.1 Beweis mittels Ergänzungsgleichheit

(Farbgebung)



(1) Das linke Teildreieck des gegebenen rechtwinkligen Dreiecks wird um 90° im Uhrzeigersinn gedreht und dann „stufig" am rechten Teildreieck angelegt — einmal oberhalb, einmal unterhalb.

(2) Da das ursprüngliche Dreieck rechtwinklig war, entsteht zwischen den Stufen jeweils ein rechter Winkel.

(3) Durch Ergänzung mit Rechtecken entstehen zwei neue rechtwinklige Dreiecke mit übereinstimmenden Kathetenlängen $p + h$ und $q + h$.

(4) Die beiden Dreiecke sind aufgrund des SWS-Kongruenzsatzes 6.10.6 kongruent und somit flächengleich.

(5) In den beiden Dreiecken sind die Teildreiecke flächengleich, also müssen auch die ergänzten Rechtecke flächengleich sein.

(6) Die Seiten dieser Rechtecke sind aber h und h bzw. p und q. Es folgt:

$$h^2 \;=\; p \cdot q.$$

9.6 Beweis des Kehrsätze ⊖

9.6.1 Vorbemerkung Die Kehrsätze werden alle nach dem gleichen Muster bewiesen. Ausgangspunkt ist ein Dreieck ABC, das eine der pythagoräischen Beziehungen erfüllt.

(1) Es wird ein rechtwinkliges Vergleichs-Dreieck konstruiert, bei dem zwei der Seitenlängen jeweils mit denen des gegebenen Dreiecks übereinstimmen.

(2) Das neue Dreieck erfüllt die gleiche pythagoräische Beziehung wie das gegebene Dreieck.

(3) Da in der pythagoräischen Beziehung zwei Längen übereinstimmen, muss auch die dritte Länge übereinstimmen.

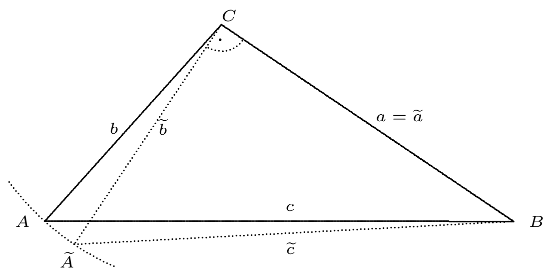
(4) Daraus folgert man, das das gegebene und das vermeintlich neue Dreieck übereinstimmen.

(5) Also muss das gegebene Dreieck auch rechtwinklig sein.

9.6.2 Beweis des Kehrsatzes des Hypotenusensatzes

Es sei ein Dreieck ABC gegeben, für das die pythagoräische Beziehung erfüllt ist:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



(1) Es wird ein Vergleichs-Dreieck $\widetilde{A}BC$ konstruiert, das einen rechten Winkel bei C hat und die gleichen Seitenlängen $\widetilde{a} = a$, $\widetilde{b} = b$ hat.

(2) Aufgrund des Hypotenusensatzes gilt im Dreieck $\widetilde{A}BC$ die Beziehung

$$\widetilde{a}^2 + \widetilde{b}^2 = \widetilde{c}^2.$$

(3) Deshalb ist auch $\widetilde{c} = c$.

(4) Aufgrund des SSS-Satzes 6.10.5 sind beide Dreiecke kongruent.

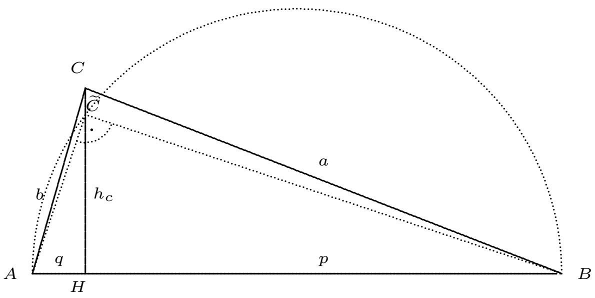
(5) Also muss $\gamma = \widetilde{\gamma} = 90^\circ$ sein.

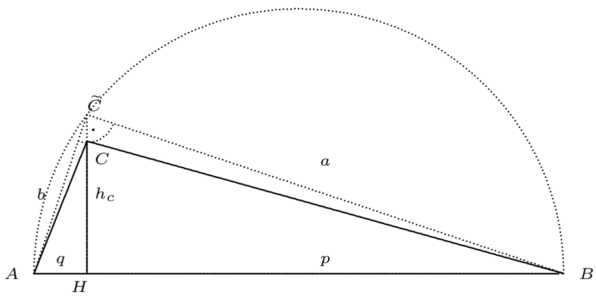
9.6.3 Beweis des Kehrsatzes des Höhensatzes

F14 T1

Es sei ein Dreieck ABC gegeben, für das die Höhensatz-Beziehung erfüllt ist:

$$p \cdot q \quad = \quad h^2.$$





(1) Es wird ein Vergleichs-Dreieck $AB\widetilde{C}$ konstruiert, das einen rechten Winkel bei C hat und die gleichen Hypotenusenabschnitte $\widetilde{p} = p$, $\widetilde{q} = q$ hat. (Hilfsmittel ist der Thaleskreis).

(2) Aufgrund des Höhensatzes gilt im Dreieck $AB\widetilde{C}$ die Beziehung

$$\widetilde{h}_c^2 \quad = \quad \widetilde{p} \cdot \widetilde{q}.$$

(3) Deshalb ist auch $\widetilde{h}_c = h_c$.

(4) Deshalb ist auch $\widetilde{C} = C$.

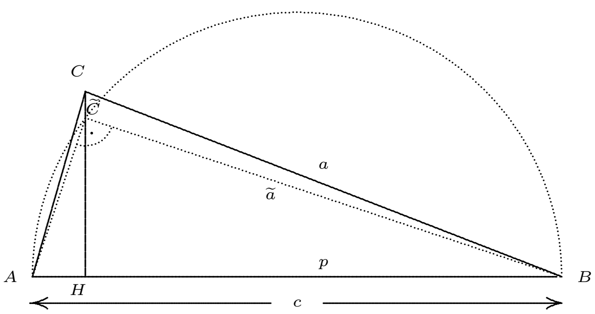
(5) Also muss $\gamma = \widetilde{\gamma} = 90^{\circ}$ sein.

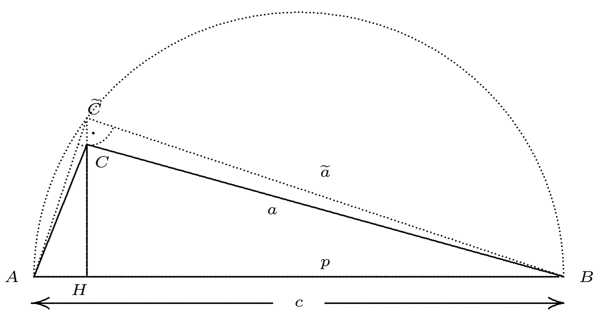
9.6.4 Beweis des Kehrsatzes des Kathetensatzes

F14 T1

Es sei ein Dreieck ABC gegeben, für das die Kathetensatz-Beziehung erfüllt ist:

$$c \cdot p \quad = \quad a^2.$$





(1) Es wird ein Vergleichs-Dreieck $\widetilde{A}BC$ konstruiert, das einen rechten Winkel bei C hat und die gleichen Längen $\widetilde{p} = p$, $\widetilde{c} = c$ hat.

(2) Aufgrund des Kathetensatzes gilt im Dreieck $AB\widetilde{C}$ die Beziehung

$$c \cdot p \quad = \quad \widetilde{a}^2.$$

(3) Deshalb ist auch $\widetilde{a} = a$.

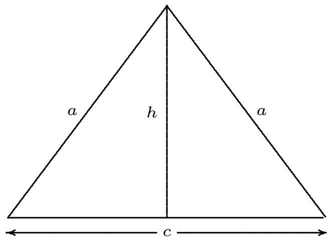
(4) Dann stimmen auch die Punkte C und $\widetilde{C}$ überein.

(5) Also muss $\gamma = \widetilde{\gamma} = 90^{\circ}$ sein.

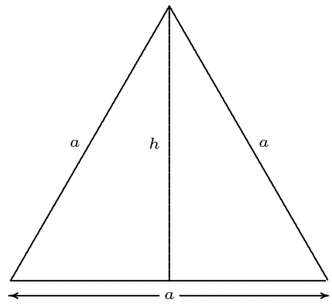
9.7 Kontextfelder zum Hypotenusensatz

9.7.1 Berechnungen an ebenen Figuren

- Höhen in (besonderen) Dreiecken



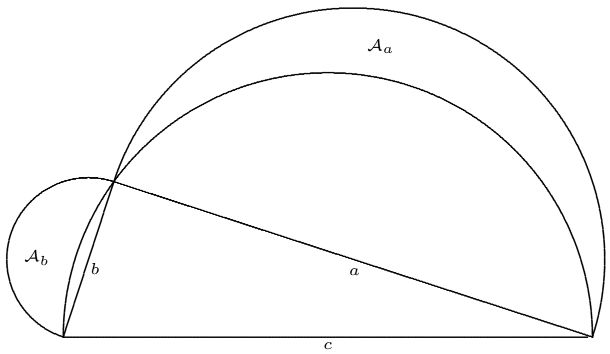
$h = \sqrt{a^2 - (\frac{c}{2})^2}$



$h = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, a$

- Diagonalen in (besonderen) Vierecken
- Begründe die Beziehung im rechtwinkligen Dreieck: $h = \frac{a \cdot b}{c}$.
- Berechnungen an regelmäßigen Vielecken LP+ M9 LB3

9.7.2 Die Möndchen des Hippokrates ⊖



Über die Katheten und die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks werden Halbkreise geschlagen.

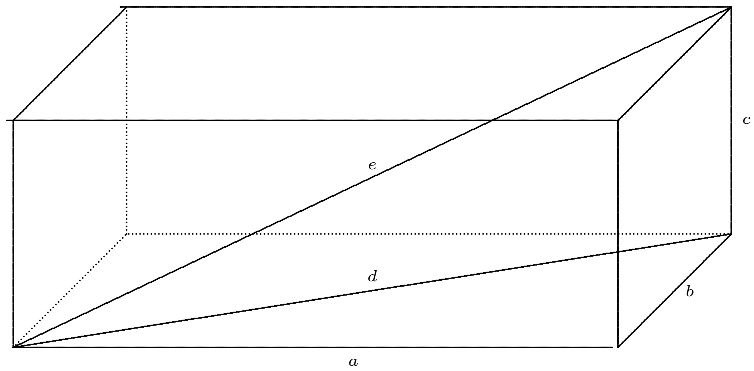
Für die Gesamtfläche der ,,Möndchen" ergibt sich unter Benutzung des Satzes von Pythagoras:

$$\mathcal{A}_a + \mathcal{A}_b \;=\; a^2\,\frac{\pi}{8} + b^2\,\frac{\pi}{8} - c^2\,\frac{\pi}{8} + \frac{ab}{2} \;=\; \frac{ab}{2}.$$

Die beiden Möndchen haben den gleichen Flächeninhalt wie das Dreieck. Die ,,Quadratur" der Möndchen gelingt.

9.7.3 Berechnungen an Körpern im Raum ⊖

- Länge der Raumdiagonale in einem Quader



Für die Flächendiagonale ist zunächst

$$d^2 = a^2 + b^2$$

und dann für die Raumdiagonale

$$e^2 = d^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

so dass

$$e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

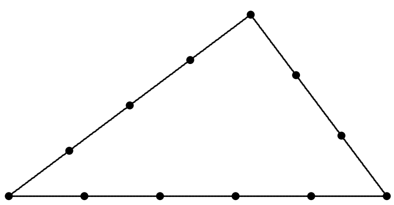
Dies ist ein Beispiel dafür, dass sich die starke Fixierung der Symbole a, b und c im rechtwinkligen Dreieck ungünstig auswirken kann.

- Mantellinien und Höhe in Pyramiden oder Kegeln

9.7.4 Anwendungen in der Praxis

- Maurerdreieck: Auf dem Bau kann ein rechter Winkel damit gezogen oder überprüft werden, dass man ein Schnurdreieck mit den Seitenlängen $3,00\,\text{m}$, $4,00\,\text{m}$ und $5,00\,\text{m}$ geeignet anlegt.

- Das Zwölfknotenseil F13 T3 A2



In eine Seilschleife sind 12 Kugeln in gleichem Abstand eingeknüpft. Wird das Seil zu einem Dreieck mit 3, 4 und 5 Abschnitten gespannt, so ergibt sich ein rechter Winkel.

Der mathematische Grund ist der Kehrsatz des Satzes von Pythagoras.

9.7.5 Ausblick in die Zahlentheorie ⊖

Man nennt eine Zusammenstellung von drei natürlichen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{N}$ ein *pythagoräisches Tripel*, wenn die Beziehung

$$a^2 + b^2 \quad = c^2$$

besteht. Beispiele sind:

$$(3,4,5) \qquad (6,8,10) \qquad (5,12,13) \qquad (12709,13500,18541).$$

Warum gibt es unendlich viele solche Tripel? Haben sie eine weitergehende mathematische Bedeutung?

9.7.6 Weiterführung in der Analysis ⊖

Bei Betrachtung des Einheitskreises:

Aus dem geometrischen Satz des Pythagoras ergibt sich der trigonometrische Satz des Pythagoras:

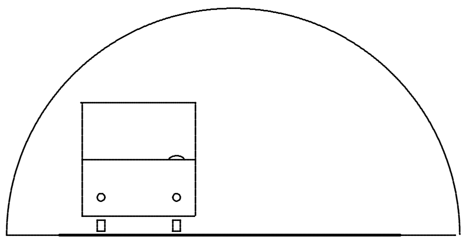
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \quad = \quad 1.$$

9.8 Kontextfelder zum Höhensatz

9.8.1 Sachaufgabe Tunnelhöhe ⊖

Die klassische Sachaufgabe ist die zur „Tunnel-Durchfahrtshöhe", im Beispiel etwa so: Delta9, S. 48

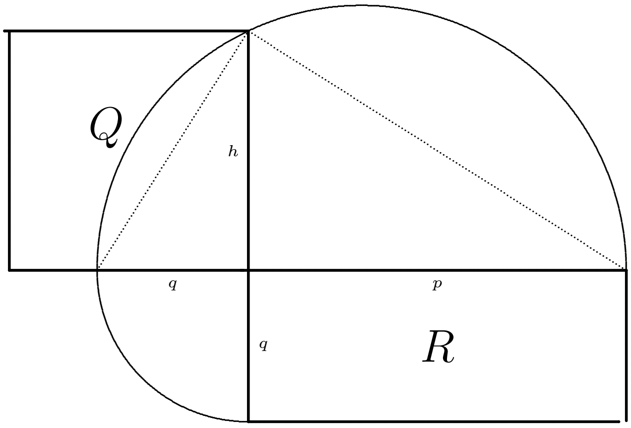
Ein Tunnel hat halbkreisförmigen Querschnitt, die Straße befindet sich auf Durchmesser-Niveau. Der gesamte Tunnel ist 12 m breit, auf beiden Seiten befindet sich ein Randstreifen von 1,4 m. Wie hoch darf ein LKW höchstens sein, so dass er noch passieren kann? Er fährt ganz rechts, aber nicht auf dem Randstreifen.



9.8.2 Quadratur Zu einem vorgegebenen Rechteck, Parallelogramm oder Drachenviereck soll ein flächeninhaltsgleiches Quadrat Q konstruiert werden. H12 T2 A4

F06 T2 A4

Konstruiere, falls nötig, zunächst zu dem gegebenen Parallelogramm oder Drachenviereck ein flächeninhaltsgleiches Rechteck R mit den Seitenlängen p und q.



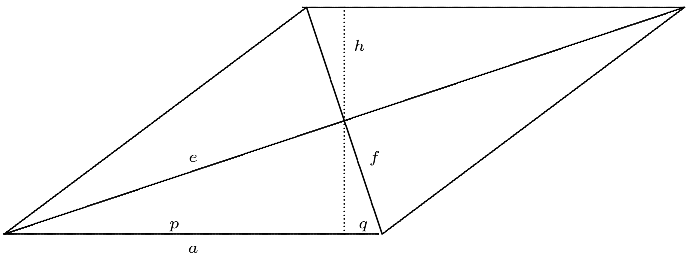
(1) Konstruiere (Viertelkreisbogen) die Strecke mit Länge $p + q$.

(2) Ermittle (Thaleskreis, Lot) das rechtwinklige Dreieck mit den Hypotenusenabschnitten p und q.

(3) Aufgrund des Höhensatzes ist die Höhe des Dreiecks die Seitenlänge des gesuchten Quadrats.

9.8.3 Beispiel: Berechnung an der Raute

Die beiden Diagonalen einer Raute haben die Längen e und f. Berechne die Höhe h!



Mit dem Hypotenusensatz gilt zunächst, dass

$$a^2 = (\tfrac{e}{2})^2 + (\tfrac{f}{2})^2,$$

dann mit den Kathetensätzen

$$p = \frac{(\frac{e}{2})^2}{a} = \frac{\frac{e^2}{2}}{\sqrt{e^2+f^2}}, \qquad q = \frac{(\frac{f}{2})^2}{a} = \frac{\frac{f^2}{2}}{\sqrt{e^2+f^2}}$$

und schließlich mit dem Höhensatz

$$(\tfrac{h}{2})^2 = p \cdot q = \frac{\frac{e^2 f^2}{4}}{e^2+f^2}.$$

Insgesamt also

$$h = p \cdot q = \frac{ef}{\sqrt{e^2+f^2}}.$$

Das besondere an der Aufgabe ist, dass alle Sätze der Satzgruppe zum Einsatz kommen.

10 Körper

10.1 Grundsätzliche Begriffe

10.1.1 Definition: Körper

Eine zusammenhängende und beschränkte Teilmenge des (als Punktmenge aufgefassten) drei–dimensionalen Raumes, die von endlich vielen ebenen oder gekrümmten Flächenstücken nach außen abgegrenzt ist, heißt ein *Geometrischer Körper*, oft auch kurz *Körper*.

Dies ist keine mathematisch rigorose Definition, da die in ihr enthaltenen Begriffe (Flächenstück, Abgrenzung, Beschränktheit) ihrerseits zunächst einer Definition bedürften. Sie ist aber im Hinblick auf den Alltags- oder Schulgebrauch ausreichend genau und aussagekräftig.

10.1.2 Weitere Begriffe

- Im Zusammenhang mit dem Körperbegriff heißt ...
  - ein begrenzendes Flächenstück *Seitenfläche*,
  - die Schnittmenge zweier Seitenflächen eine *Kante*,
  - die Schnittmenge von zwei (oder mehr) Kanten eine *Ecke*.
- Die Vereinigungsmenge aller Seitenflächen heißt *Oberfläche* des Körpers.
- Bei vielen — aber nicht allen — Körpern kann die Oberfläche durch Schneiden und Auseinanderfalten oder Abrollen in eine zusammenhängende ebene Figur umgeformt werden. Eine solche ebene Figur heißt ein *Netz* des Körpers.
- Der ,,Flächeninhalt der Oberfläche" eines Körpers wird als *Oberflächeninhalt* bezeichnet und mit $\mathcal{A}$ (area) bezeichnet. Da dies ein schwerfälliges Wortungetüm ist, spricht man abkürzend ebenfalls von der *Oberfläche* des Körpers.
- Der durch einen Körper erfüllte Raum hat ein Maß, es wird *Volumen* oder *Rauminhalt* genannt. Wird die Oberfläche eines Körpers als mit einer Flüssigkeit zu füllendes Gefäß aufgefasst, so spricht man hier auch vom *Hohlmaß*. Vergleiche Didaktik der Größenbereiche.
- Ein Körper heißt *konvex*, wenn zu je zwei Punkten des Körpers auch die Verbindungsstrecke dazu gehört.

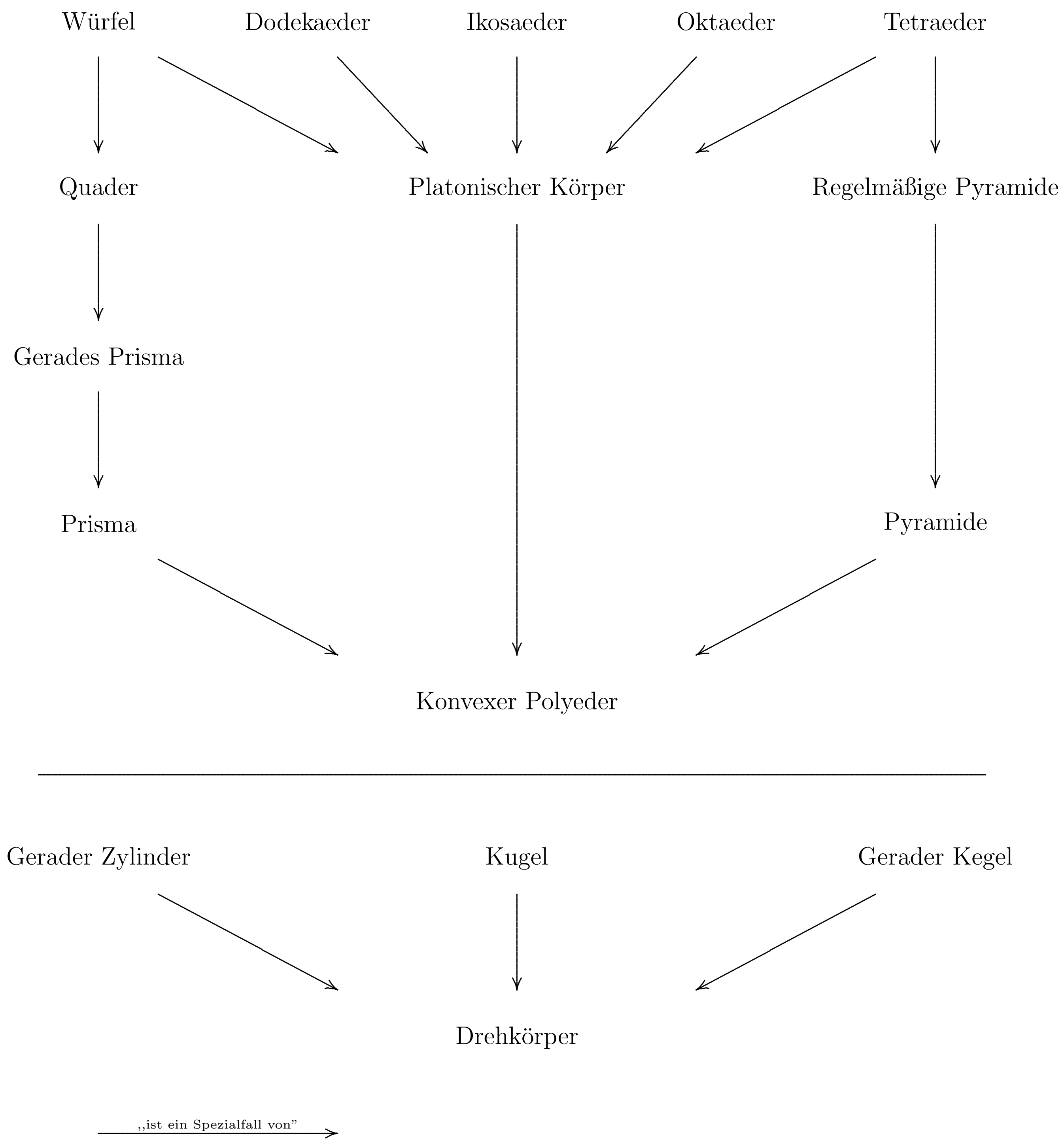
10.1.3 Bemerkungen

- Oft begegnet man der Formulierung, dass ein Körper irgendwelchen x–artigen Seitenflächen ≫ besteht ≪. Im Hinblick auf die obige Definition ist diese Sprechweise falsch, im Hinblick auf die Alltags- oder Schulsprache zu wenig sorgsam.

- Oft wird weder zwischen dem Körper an sich und seiner Oberfläche noch zwischen Oberfläche und Oberflächeninhalt unterschieden. Genauere Unterscheidungen erscheinen im Hinblick auf den Gebrauch im Alltag als zu penibel. Bei genaueren Auseinandersetzungen mit diesen Begriffsbildungen, beispielsweise im Mathematikunterricht können diese Gleichsetzungen aber Verwirrung stiften. Die Lehrkraft sollte sich der Problematik bewusst sein.

Im Rahmen der Schule werden im wesentlichen zwei Grundtypen thematisiert: Die konvexen Polyeder und die Drehkörper.

10.2 Ein Überblick über die Körpertypen



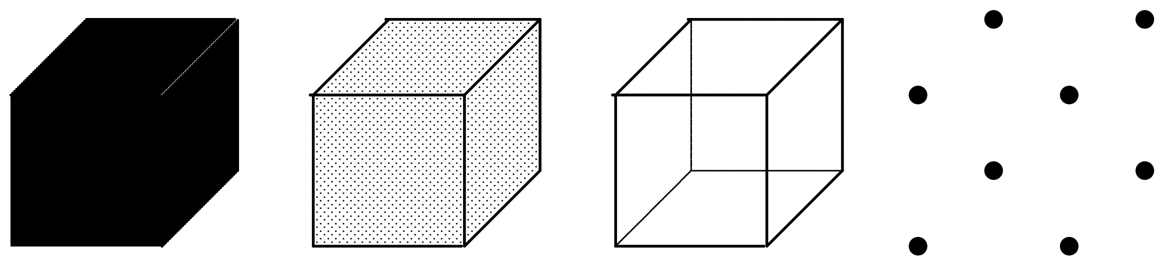
10.3 Körper in der Schul-Welt

Wir beschreiben zunächst allgemein Aktivitäten, die Schülerinnen und Schüler im Zusammenhang mit Körpern entwickeln können. Beispiele und Ideen, die stärker auf die einzelnen Körpertypen Bezug nehmen, werden weiter unten behandelt.

10.3.1 Erfassung in der Wirklichkeit

- Auffinden von Körpern in der Wirklichkeit: Klassenzimmer, Turnhalle, Haushalt, Freizeit.
  - Stück Kreide,
  - Fußball,
  - Kerze, Verpackungen aller Art,
  - Lampions,
- Bilder in Büchern, Arbeitsheften, Katalogen.
- Abstraktion von anderen Körpereigenschaften wie Farbe, Oberflächenbeschaffenheit, Gewicht, Volumen, Konsistenz, Längen,
  oder: Der Körper existiert nicht als Vollmodell: Klassenzimmer.
- Das Problem der Idealisierung: Häufig hat ein Körper in der Wirklichkeit nur strukturell–näherungsweise die exakte Form des mathematischen Modells. (vgl Spielwürfel, Tafelschwamm).
- Beschreibung der Eigenschaften: rund, eckig, kugelförmig, quaderförmig. Die Seitenflächen sind rechteckig, quadratisch.

10.3.2 Handeln an Modellen



3|M Massivmodelle (Vollmodelle): Der Körper existiert als 3-dimensionaler raumerfüllender physikalischer Körper.

- Schneiden aus Kartoffeln oder Käse
- Schneiden aus Styropor
- Sägen aus Holzblöcken oder Ytong–Steinen
- Formen aus Knetgummi, Teig
- Fertige Bausteine

$\boxed{2|\mathrm{F}}$ Flächenmodelle: Der Körper ist materiell in Form seiner 2-dimensionalen Oberfläche verwirklicht.

- Basteln aus Pappe, Papier (→ Lampions, Geschenkverpackungen)
- Plastik- oder Blechdosen, Fertigmodelle
- Anfertigen mit speziellen „Baukästen" (vgl. Polydron, S. 161 RadatzSchipper3)
- Befüllen mit Wasser oder Sand und so Vergleich der Rauminhalte. In diesem Zusammenhang heißen Flächenmodelle auch *Hohlmodelle*.
- Die Seitenflächen eines Klassenzimmers sind als Wände, Boden und Decke „materialisiert".

$\boxed{2|\mathrm{N}}$ Bedeutsam im Zusammenhang mit Flächenmodellen sind die Netze: Schneidet man das Flächenmodell eines Körpers geeignet auf und wickelt oder rollt es ab, so entsteht das ebene 2–dimensionale Netz des Körpers.

$\boxed{1|\mathrm{K}}$ Kantenmodelle: Der Körper ist in Form seiner 1-dimensionalen Kanten verwirklicht.

- Stecken aus Schaschlikspießen (Zahnstochern), die Verbindungen an den Ecken werden durch Knetgummi oder Wachs realisiert.
- Die Kanten werden durch Pfeifenputzerdraht (Draht mir eingeflochtenen farbigen Plastik–Härchen) verwirklicht. Der Draht kann an den Ecken gebogen werden.
- Konstruieren mit Magnetstreben
- Konstruieren mit Fertigbauteilen aus Baukästen
- Fertigmodelle.

$\boxed{1|\mathrm{S}}$ Bedeutsam im Zusammenhang mit Kantenmodellen sind Schrägbilder: Die Kanten werden perspektivisch gezeichnet, so dass ein räumlicher Eindruck für den Betrachter entsteht.

$\boxed{0|\mathrm{P}}$ Punktmodelle sind nur zeichnerisch–perspektivisch darstellbar, nicht aber als reale Modelle herstellbar.

Beim Herstellen all dieser Modelle tritt die oben angesprochene Problematik des idealen Körpers wieder in Erscheinung: Hier gilt es, feinfühlig — je nach Unterrichtssituation — diesem Problem Rechnung zu tragen: Beim Abzählen von Kanten, Ecken oder Seitenflächen eines Würfels kommt es nicht so sehr auf die exakte Form an. Das Herausarbeiten der Parallelität der Kanten erfordert dagegen ein sorgfältiger hergestelltes Modell.

10.3.3 Andere Aktivitäten

- Zähl–Kombinatorik am Körper
  - Zahl der Ecken, Kanten, Seitenflächen am Körper?
  - Wieviele Seitenflächen bzw. Kanten stoßen an einer Ecke zusammen? Wieviele Kanten stoßen an eine Seitenfläche?
  - Zahl der nicht–deckungsgleichen Netze eines Würfels (11) oder Quaders (54).
  - Zahl und Anordnung der Laschen im Netz: Da in einem Würfelnetz 6 Seitenflächen an 5 Kanten (bzw. Falzen) verbunden sind, braucht man $12 - 5 = 7$ Laschen.
  - Kombinatorik bei platonischen Körpern (vgl. später)
  - Euler'sche Polyederformel
  - Spielwürfel: Die Summe der Augen auf je zwei Gegenseitenflächen ist 7.
- Die Lage des Körpers im Raum.
  - Erkennen oder Darstellen aus verschiedenen Perspektiven
  - Veränderung bei Drehungen im Raum (Spielwürfel).
- Konstruieren, Bauen mit Körpern
  - Turmbauten nach Grundriss
  - Dichteste Packungen: Bausteine verpacken, in Kasten einordnen.
- Zeichnen:
  - Schrägbilder (vgl. nächster Abschnitt)
    - Würfel oder Quader
    - Perspektiv–Täuschung: Hintere Teile wirken größer als vordere
    - Darstellung von Verdeckungen
  - Zentralsicht von einer der sechs Hauptseiten (links, rechts, oben, unten, vorne hinten)
  - Netze: Siehe später!
- Rechnen:
  - Wieviel Papier (Zahl der Kästchen) braucht man für ein Flächenmodell?
  - Wieviel Draht braucht man für ein Drahtmodell?

10.4 Exkurs: Schrägbild–Darstellungen ⊖

10.4.1 Einstieg

Unter der Schrägbild–Darstellung (kurz: Schrägbild) eines geometrischen Körpers (3D) versteht man ein perspektivisches Abbild — meistens der Kanten — in der Zeichenebene (2D), die aufgrund der geometrisch–optischen Bedingungen des Sehens beim Betrachter die Illusion der Räumlichkeit hervorruft. Es wird gemäß der folgenden Konvention angefertigt:

- Die Kanten in Ebenen, die senkrecht zur Blickrichtung stehen, werden in maßstäblicher (oder wahrer) Größe gezeichnet.
- Die Kanten, die parallel zur Blickrichtung verlaufen, werden ...
  - bzgl. des Maßstabs gekürzt (mit einem Faktor $q < 1$)
  - unter einem Winkel α gegenüber den horizontalen und senkrecht zur Blickrichtung verlaufenden Kanten

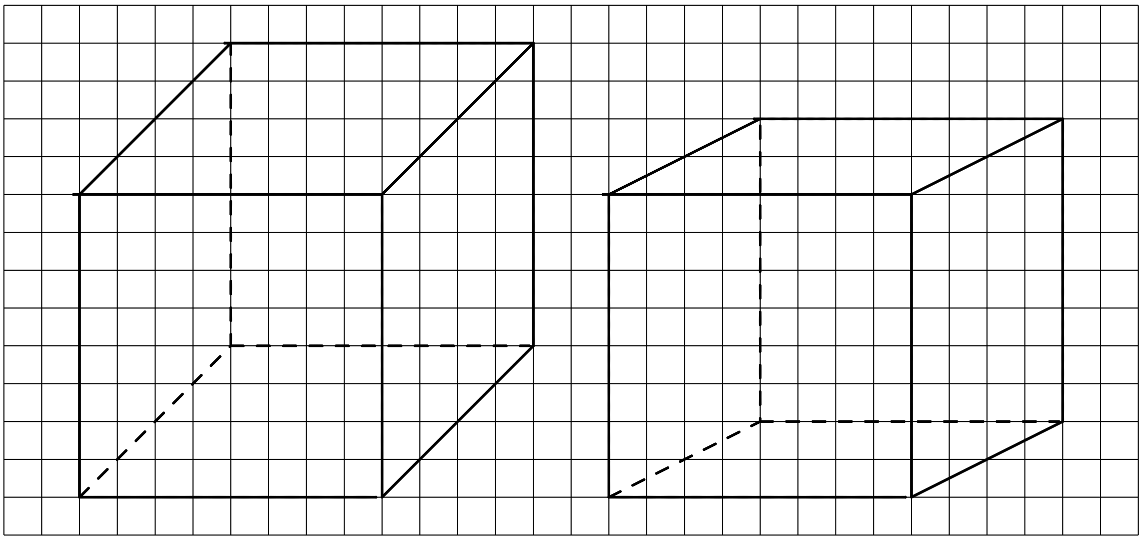
  gezeichnet.
- Alle übrigen (schräg verlaufenden) Kanten und Linien werden zwischen den dann vorgegebenen Endpunkten direkt gezeichnet.

10.4.2 Beispiele Auf der nächsten Seite 126 sind einige konkrete Beispiele zu sehen.

- Die Werte für q und α bei den beiden ersten Beispielen wirken sehr ungewöhnlich, im Hinblick auf ein Zeichnen auf Kästchenpapier sind sie sehr gut geeignet.
- Sehr günstig ist es, verdeckte Kanten durch Strichelung, Punktelung oder Verdünnung nur anzudeuten

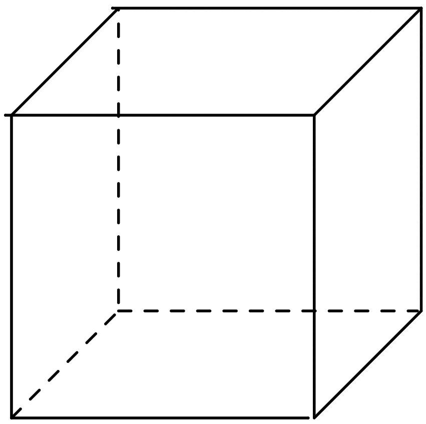
  Unterlässt man dies, so sind im allgemeinen die Tiefen (vorne — hinten) nicht mehr unterscheidbar. Man kann dies beim Necker–Würfel (Mitte unten) wahrnehmen, bei längerer Betrachtung „kippt" die Wahrnehmung auf die Darstellung links oder rechts.
- Für das tatsächliche Zeichnen von Perspektivdarstellungen gibt es noch viele weitere Konventionen, die im Spannungsfeld aus
  - einfachem Anfertigen in der Zeichenebene und
  - leichtgängigem Erfassen der räumlichen Situation

  angesiedelt sind:
  - Militär–Perspektive
  - Verkürzung weiter hinten liegender Kanten.
- Innerhalb der Schulgeometrie erfolgt eine Beschränkung auf Schrägbilder von Würfeln oder Quadern.
- Zur Übung: Zeichnen Sie eine Kugel oder einen Torus (vgl. Abschnitt 12.5) im Schrägbild.

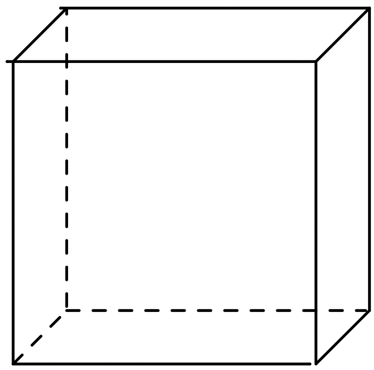


$q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha = 45^{\circ}$

$q = \frac{\sqrt{5}}{4}$, $\alpha = 26,6^{\circ}$

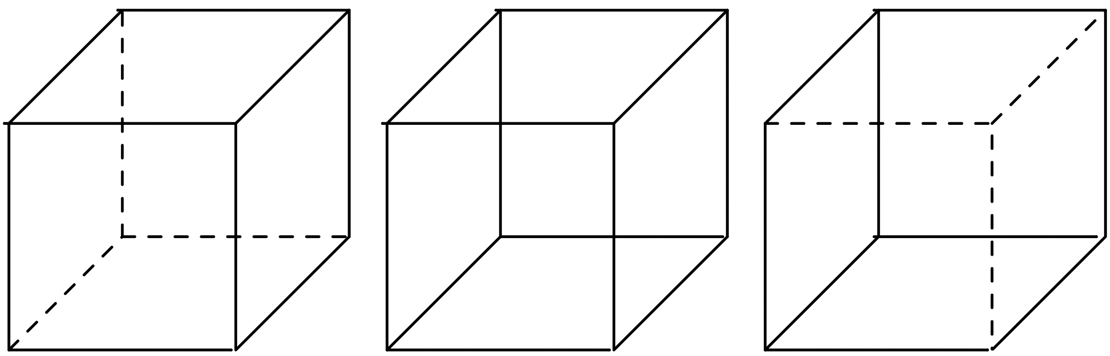


$q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45^{\circ}$



$q = \frac{1}{4}$, $\alpha = 45^{\circ}$

Der Necker–Würfel

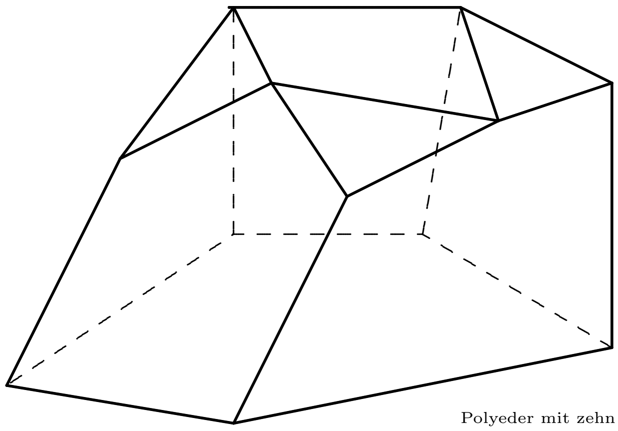


11 Polyeder

11.1 Einstieg

11.1.1 Definition: Polyeder

Ein Körper, der ausschließlich von ebenen Flächenstücken begrenzt ist, heißt *Polyeder (= Vielflach, Vielflächner).*



Polyeder mit zehn Seitenflächen

Ein Massivmodell eines Polyeders erhält man also durch mehrfaches ebenes Abschneiden mit Messer, Säge, Spachtel oder heißem Draht aus einem zuvor ,,unförmigen" Körper.

11.1.2 Die Euler'sche Charakteristik ⊖

Zählt man bei einem beliebigen Polyeder die Ecken (E), Kanten (K) und Seitenflächen (F), so kann man daraus die *Euler'sche Charakteristik* des Polyeders berechnen:

$$\chi \quad := \quad \underbrace{E - K + F}_{\text{math.}} \; = \; \underbrace{E + F - K}_{\text{GS}}.$$

11.1.3 Beispiele ⊖

Wir wollen die Bedeutung dieser Charakteristik an einigen Beispielen erspüren:

- Ermitteln Sie — gedanklich — die Euler–Charakteristik für folgende Polyeder
  - Quader
  - Tetraeder
  - Dreiecks–Prisma
  - Quadratische Pyramide
  - Polyeder wie oben abgebildet
- Experiment: Nehmen Sie ein Quaderstück Käse und schneiden Sie beliebige Stücke ab. Dabei soll gewährleistet sein, dass das Stück ein Polyeder (also ein Vielflach) bleibt. Ermitteln Sie die Euler–Charakteristik des Käse–Stückes!

11.1.4 Die Euler'sche Polyederformel ⊖

Sie werden jeweils den Satz bestätigt finden, dass die Euler–Charakteristik eines **konvexen** Polyeders immer den Wert

$$\chi \quad := \quad E - K + F = 2$$

hat.

11.1.5 Beispiele zur Euler'schen Polyederformel ⊖

- Das sieht man auch bei den weiter unten zu behandelnden platonischen Körpern.
- Überlegung: Wie verändern sich die Zahlen E, K und F, wenn man eine Ecke eines Polyeders abstumpft, das heißt durch Abschneiden abflacht.
  - Ecken: Eine Ecke wird abgeschnitten, es entstehen drei neue: $E' = E + 2$.
  - Kanten: Es entstehen drei neue Kanten: $K' = K + 3$.
  - Seitenflächen: Es entsteht eine neue Seitenfläche: $F' = F + 1$.
  - Insgesamt gilt:
    $$E' - K' + F' = (E + 2) - (K + 3) + (F + 1) = E + F - K.$$
    Das heißt, beim Abstumpfen verändert sich die Euler–Charakteristik nicht.

11.1.6 Mathematisches Sätzchen ⊖

Um das Netz eines konvexen Polyeders mit E Ecken zum Flächenmodell zusammenzukleben, muss man im Netz $(E - 1)$ Laschen vorsehen.

Beispielsweise muss das Netze eines Quaders oder Würfels mit 7 Laschen versehen werden, da diese Körper 8 Ecken haben.

11.1.7 Beweis ⊖

(1) Im Netz hängen F Flächen an $(F - 1)$ Kanten zusammen, für diese Kanten benötigt man keine Laschen.

(2) Der Polyeder hat insgesamt K Kanten. Er muss also an den verbleibenden

$$L = K - (F - 1)$$

Kanten mit Hilfe von Laschen (L = Laschenzahl) verklebt werden.

(3) Durch Umstellung der Euler'schen Polyederformel erkennt man, dass

$$K - F = E - 2.$$

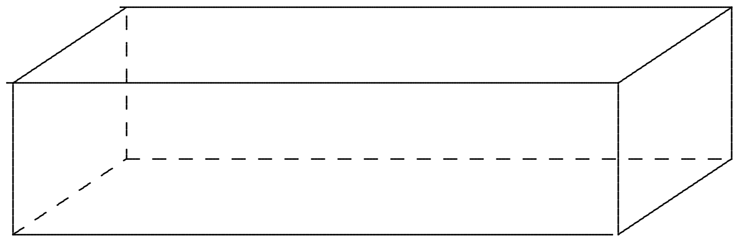
(4) Wird die Formel aus (3) in die Formel aus (2) eingesetzt, so erhält man

$$L = K - (F - 1) = K - F + 1 = E - 2 + 1 = E - 1.$$

11.2 Quader

11.2.1 Definition

Wird ein geometrischer Körper ausschließlich von Rechtecken begrenzt, so wird er *Quader* genannt.



Dies ist eine minimalistische Definition. In ihr wird versucht, eine Liste von eindeutig charakterisierenden Eigenschaften so sparsam wie möglich zu halten.

11.2.2 Weitere Eigenschaften

Je nach Bedarf an weiteren alltagsrelevanten Erkennungsmerkmalen oder fachdidaktischer Ausleuchtung kann man daraus — hier ohne weitere Begründung — viele weitere Eigenschaften erschließen:

- Seitenflächen: Ein Quader wird durch **sechs** Rechtecke begrenzt. Diese Rechtecke lassen sich in drei Paare einteilen, so dass
  - zwei Rechtecke innerhalb eines Paares kongruent und parallel zueinander sind,
  - zwei Rechtecke aus verschiedenen Paaren an einer gemeinsamen Kante senkrecht aufeinander stehen.
- Kanten: Ein Quader hat zwölf Kanten. Diese lassen sich in drei Gruppen zu je vier Kanten einteilen, so dass
  - die Kanten innerhalb einer Gruppe gleich lang sind und parallel verlaufen,
  - je drei Kanten aus verschiedenen Gruppen in einer Ecke senkrecht aufeinander stoßen.

  Die drei verschiedenen Kantenlängen bezeichnet man meist mit *Länge, Breite, Höhe.* Je nach Situation ist einer dieser Begriffe durch den der *Tiefe* ersetzt. Als Symbole dafür sind

  $$a, b, c \qquad \text{oder} \qquad \ell, b, h$$

  üblich.
- Ecken: Ein Quader hat acht Ecken.
- Gelegentlich wird ein Quader, bei dem zwei Seitenflächen quadratisch sind, als *Säulenquader* bezeichnet.

- Die Oberfläche des Quaders ist gegeben durch

$$\mathcal{A}_{\text{Quader}} = 2 \cdot \ell \cdot b + 2 \cdot \ell \cdot h + 2 \cdot b \cdot h.$$

- Das Volumen des Quaders ist gegeben durch

$$V_{\text{Quader}} = \ell \cdot b \cdot h.$$

- Eine Strecke, die zwei Ecken des Quaders verbindet, die nicht in einer gemeinsamen Seitenfläche liegen, bezeichnet man als *Raumdiagonale*.
  - Ein Quader hat vier Raumdiagonalen.
  - Die vier Raumdiagoanlen schneiden sich in einem Punkt innerhalb des Quaders. Dieser Schnittpunkt heißt *Mittelpunkt* = *Schwerpunkt* des Quaders.
  - Die Länge einer Raumdiagonale ist aufgrund des Satzes von Pythagoras gleich $\sqrt{\ell^2 + b^2 + h^2}$, vgl. Abschnitt 9.7.3.
- Netze: Sind bei einem Quader alle drei Kantenlängen verschieden, so gibt es 54 nicht–kongruente Netze.
- Ein Quader ist der Spezialfall eines Prismas, damit auch der eines Polyeders.
- Umgekehrt ist der Würfel der Spezialfall eines Quaders.

11.2.3 Quader in der Schul–Welt

Das Auftreten von **rechten** Winkeln an den Ecken bzw. Kanten von Quadern bedeutet, dass sich quaderförmige Körper in der Realität

- lückenlos sparsam ,,packen” lassen,
- stabil auf Unterlagen stehen,
- selbst stabile Unterlagen sind,
- sich stabil stapeln lassen.

Aus diesen Gründen sind Quader in der uns umgebenden Welt vielfach präsent:

- Verpackungsschachteln für Seife, Schuhe, Lebensmittel, Getränke, Geräte, CDs
- Zündholzschachtel, Geschenke
- Umzugskisten
- Paperback–Taschenbuch
- Ziegelsteine, Bausteine, Jura–Quadersteine
- Spielbausteine aller Art, Lego–Steine(?)

- Möbel: Regale, Kommoden, Truhen, Schubladen, Sitzhocker
- Räume: Zimmer, Säle, Klassenzimmer, Turnhalle, Garage, Industriehalle, Container (auf Eisenbahnwaggons, Lastwägen)
- Im Klassenzimmer: Tafelschwamm, Schultasche, Radiergummi
- Sonstiges: Nougatriegel, Käsestück, Holzbrett

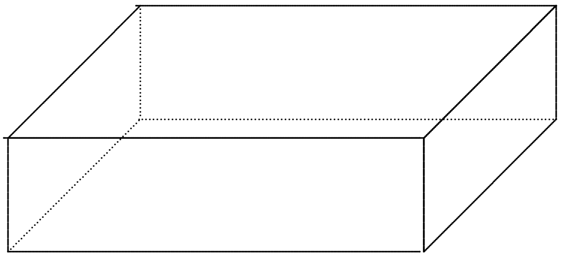
11.2.4 Aktivitäten mit Quadern

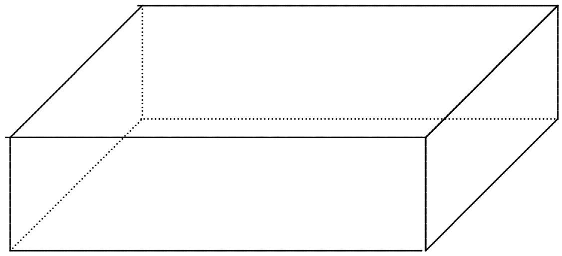
- Herstellen von Quadern, siehe Abschnitt 10.3.2.
- Arbeiten mit Netzen
  - Aufschneiden von Verpackungs-Schachteln.
  - Zusammenkleben eines Quaders.
  - Anordnung und Zahl der Klebelaschen im Netz.
- Schrägbild–Zeichnungen:
  - Zeichnen an sich: Welche Größen werden längen– bzw. winkeltreu gezeichnet, welche erscheinen perspektivisch?
  - Welche Teile sind sichtbar, welche unsichtbar?
  - Verändern der Sichtweise: Beschreiben der Quader aus anderer Perspektive.
- Zentralsicht auf eine oder mehrere der Seitenfächen
- Eine Großpackung Papiertaschentücher enthält entlang der Kanten zwei bzw. drei bzw. fünf Päckchen. Wie viele Päckchen bzw. einzelne Taschentücher enthält die Großpackung?
- Viele der in Abschnitt 11.5.3 über Kopfgeometrie bei Würfeln lassen sich auch allgemeiner mit Quadern durchführen.

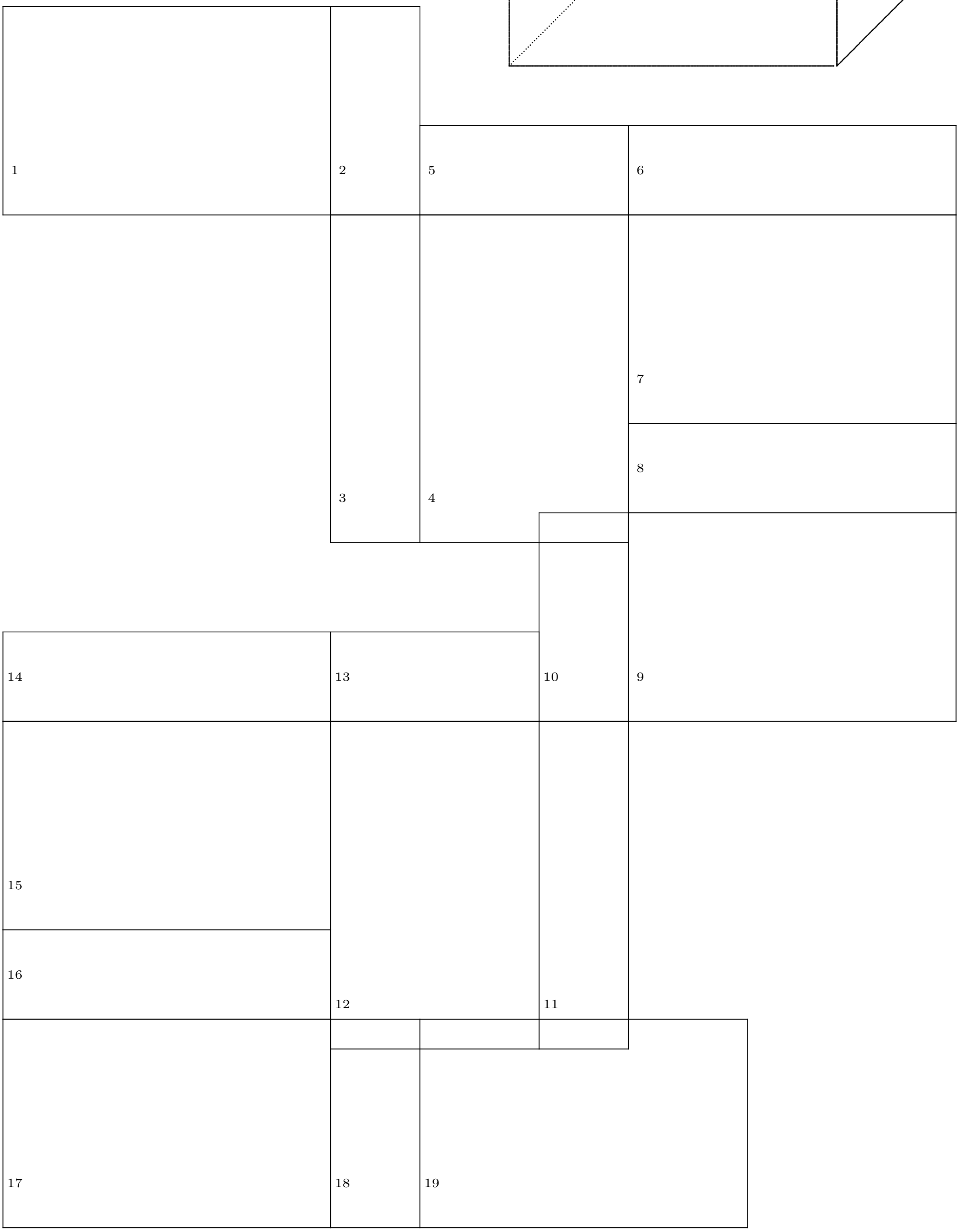
11.2.5 Beispiel: Kipp-Reise einer Streichholzschachtel

Eine Streichholzschachtel (55 mm × 35 mm × 15 mm) wird — beispielsweise entlang einer vorgezeichneten Spur — immer wieder über die Kanten gekippt. Vgl. S. 133.

- Wie muss die Streichholzschachtel bewegt werden?
- Hat die Streichholzschachtel am Ende die gleiche Lage wie am Anfang?
- Auf der Streichholzschachel wird eine Seitenfläche (Kante, Ecke) markiert. Wie bewegt sie sich während der Kipp-Reise?



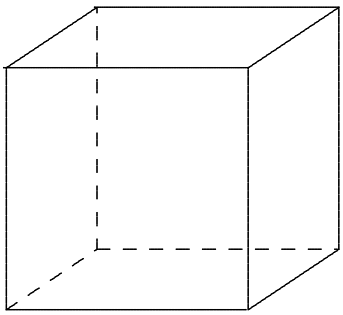



1
2
5
6
7
8
3
4
14
13
10
9
15
16
12
11
17
18
19

11.3 Würfel

11.3.1 Definition

Wird ein geometrischer Körper ausschließlich von Quadraten begrenzt, so wird er *Würfel* (= *Kubus* = *Hexaeder*) genannt.



11.3.2 Weitere Eigenschaften

Daraus lassen sich — wieder ohne weitere Begründung — viele weitere Eigenschaften erschließen:

- Ein Würfel wird durch **sechs** kongruente Quadrate begrenzt. Diese Quadrate lassen sich in drei Paare einteilen, so dass
  - zwei Quadrate innerhalb eines Paares parallel zueinander sind,
  - zwei Quadrate aus verschiedenen Paaren an einer gemeinsamen Kante senkrecht aufeinander stehen.

  An einer gemeinsamen Ecke stehen jeweils drei Quadrate (paarweise) senkrecht aufeinander.

- Ein Würfel hat zwölf gleich lange Kanten. Diese lassen sich in drei Gruppen zu je vier Kanten einteilen, so dass
  - die Kanten innerhalb einer Gruppe parallel verlaufen,
  - je drei Kanten aus verschiedenen Gruppen in einer Ecke senkrecht aufeinander stoßen.

  Als Symbol für die Kantenlänge ist meist

  $$a \quad \text{oder} \quad s$$

  üblich.

- Ein Würfel hat acht Ecken.

- Ein Würfel ist ein spezieller Quader. Vor allem in der Schul- und Didaktikliteratur findet man oft die Auffassung, dass ein Würfel nicht als Quader gilt. Dies mag in Bezug auf den Alltagssprachgebrauch naheliegend sein, im Hinblick auf die Erschließung eines mathematisch–strukturellen Denkens ist diese Auffassung mehr als unglücklich. Im Bayerischen Lehrplan ist als Lernziel festgehalten, dass der Würfel als besonderer Quader erkannt werden soll.

- Die Oberfläche des Würfels ist gegeben durch

$$\mathcal{A}_{\text{Würfel}} \;=\; 6 \cdot a \cdot a \;=\; 6 \cdot a^2.$$

- Das Volumen des Würfels ist gegeben durch

$$V_{\text{Würfel}} \;=\; a \cdot a \cdot a \;=\; a^3.$$

- Wie der Quader hat ein Würfel vier Raumdiagonalen. Ihre Länge ist

$$r \;=\; \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} \;=\; \sqrt{3} \cdot a$$

- Ein Würfel ist zugleich einer der platonischen Körper; er wird deshalb noch einmal in Abschnitt 11.8 thematisiert.

11.4 Aktivitäten mit Würfeln

Generell lässt sich auf die entsprechenden Überlegungen für Quader oder allgemeine Körper verweisen.

11.4.1 Auffinden in der Wirklichkeit

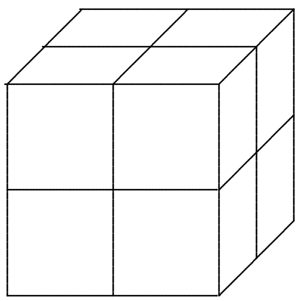
- Eher selten findet man Verpackungen in Würfelform.
- Der Telefon-Werbe-Markt nutzt auffällig oft die Würfelform.
- Würfelzucker: Sind die Zuckerstücke wirklich würfelförmig?
- Spielwürfel. Sie haben eigentlich ,,abgerundete Ecken", sind aber ,,im wesentlichen" als (mathematische) Würfel geformt.

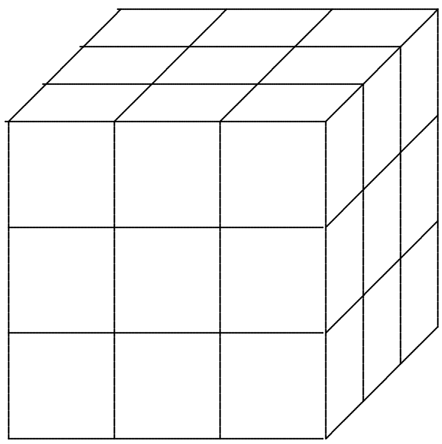
11.4.2 Bauen

- Turmbauen: Aufschichten nach Grundriss–Plan.

11.4.3 Schrägbilder

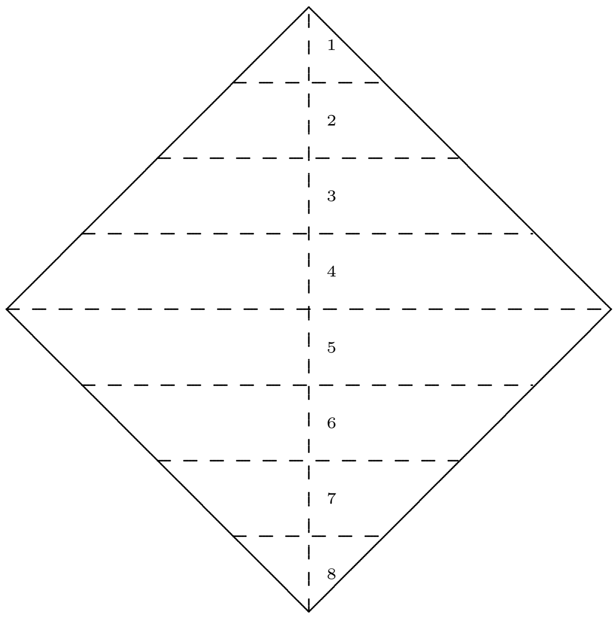
- Zeichne im Schrägbild die Seitenmittelpunkte ein und verbinde sie zu einem neuen Körper!
- Bauen größerer Würfel mit kleineren: Wieviele kleine Würfel werden für einen größeren mit doppelter bzw. dreifacher Kantenlänge benötigt?

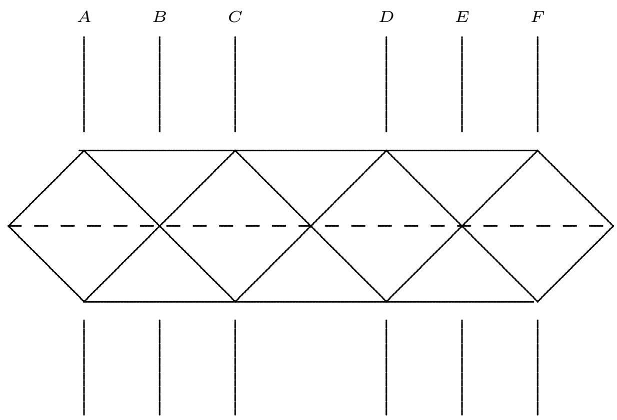




- Die Außenseite des großen Würfel (rechts) wird gedanklich lackiert. Wie viele der kleinen Würfel haben dann keine / eine / zwei / drei gefärbte Seitenflächen?

11.4.4 Herstellen: Ein Würfel aus Papiermodulen ⊖





Man benötigt sechs quadratische Papierblätter.

Mit jedem einzelnen Blatt werden die folgenden Faltungen durchgeführt. Durch Entlangstreifen mit dem Finger sollten die Faltachsen ,,scharf" werden.

1. Bild links: Man verschaffe sich die beiden Diagonalen als Faltachsen und damit auch den Mittelpunkt des Quadrats.

2. Bild links: Durch Faltungen parallel zu einer Diagonalen wird das Quadrat in acht gleich breite Streifen unterteilt.

3. Bild links: Nacheinander werden die drei Streifen mit den Nummern 3, 2, 1 über den Streifen 4 gefaltet. Ebenso werden die drei Streifen mit den Nummern 6, 7, 8 über den Streifen 5 gefaltet. Es entsteht das ...

4. Bild rechts: Man falte die äußeren Dreiecke über die Faltachsen A bzw. F nach innen.

5. Bild rechts: Anschließend werden die beiden äußeren ,,Sechstel"–Rechtecke über die Faltachsen B bzw. E nach innen umgelegt.

6. Bild rechts: Zuletzt werden die — wiederum — äußeren Rechtecke über die Achsen C bzw. D senkrecht aufgerichtet.

Es ist ein Papiermodul in Form einer ,,Wanne" mit quadratischem Boden entstanden.

- Das ,,Bodenquadrat" dieser Wanne wird zu einer Seitenfläche des Würfels,

- die beiden Seitrechtecke der Wanne dienen als Laschen zum Einstecken in die Tasche der benachbarten Seitenfläche des Würfels.

11.4.5 Soma-Würfel ⊖

Der Soma–Würfel ist aus $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ kleineren Würfeln zusammengesetzt. Vgl. 11.4.2. Diese kleineren Würfel sind zu

eine Dreier–Portion und sechs Vierer–Portionen

zusammengeklebt, so dass

- alle Portionen verschieden sind und
- es keine weiteren Dreier– oder Vierer-Portionen

gibt. Damit wird der Soma–Würfel zu einem ,,3–dimensionalen Tangram" bzw. ,,3–dimensionalen Puzzle". Ideen und Informationen finden sich beispielsweise auf

`http://www.mathematische-basteleien.de/somawuerfel.htm` oder

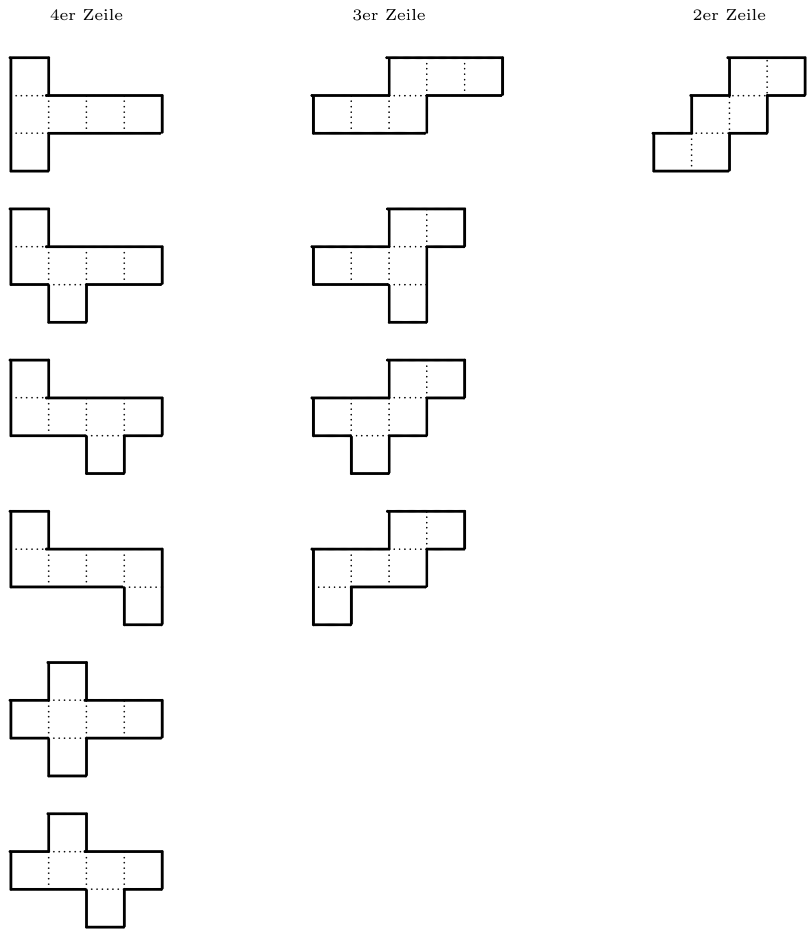
`http://www.fam-bundgaard.dk/SOMA/SOMA.HTM`

11.5 Würfelnetze

11.5.1 Satz Zu einem Würfel gibt es 11 nicht–kongruente Netze.

11.5.2 Begründung

Um zu ermitteln, wie viele nicht-kongruente Würfelnetze es gibt, orientiert man sich am besten an der ,,maximalen Zeilenlänge" und überlegt dann, wie die übrigen Seitenflächen angesetzt werden können. Es ergeben sich die folgenden Netze:



11.5.3 Kopfgeometrie mit Würfelnetzen: Allgemeine Beschreibung

Ganz allgemein lässt sich die Kopfgeometrie mit Würfelnetzen so beschreiben:

$\boxed{\text{R}}$ Ein Würfel liegt in zwei verschiedenen Repräsentationen vor.

- Konkretes materielles Massiv-, Flächen-, oder Kantenmodell.
- Schrägbild
- Netz perspektivisch
- Netz maßstäblich

$\boxed{\text{M}}$ Verschiedenste geometrische Situationen werden in der einen Repräsentation geeignet markiert durch

- Farbe
- Buchstaben
- Ziffern
- Augenzahl-Symbole
- Pfeile

$\boxed{\text{S}}$ Solche Situationen sind

- Ecken oder Mittelpunkte von Kanten
- Kanten oder Diagonalen von Seitenflächen
- ganze Seitenflächen
- geteilte (rechteckige oder dreieckige) Seitenflächen
- Streckenzüge entlang von Kanten oder Diagonalen

$\boxed{\text{A}}$ Es ergeben sich dann die verschiedensten Aufgabenstellungen:

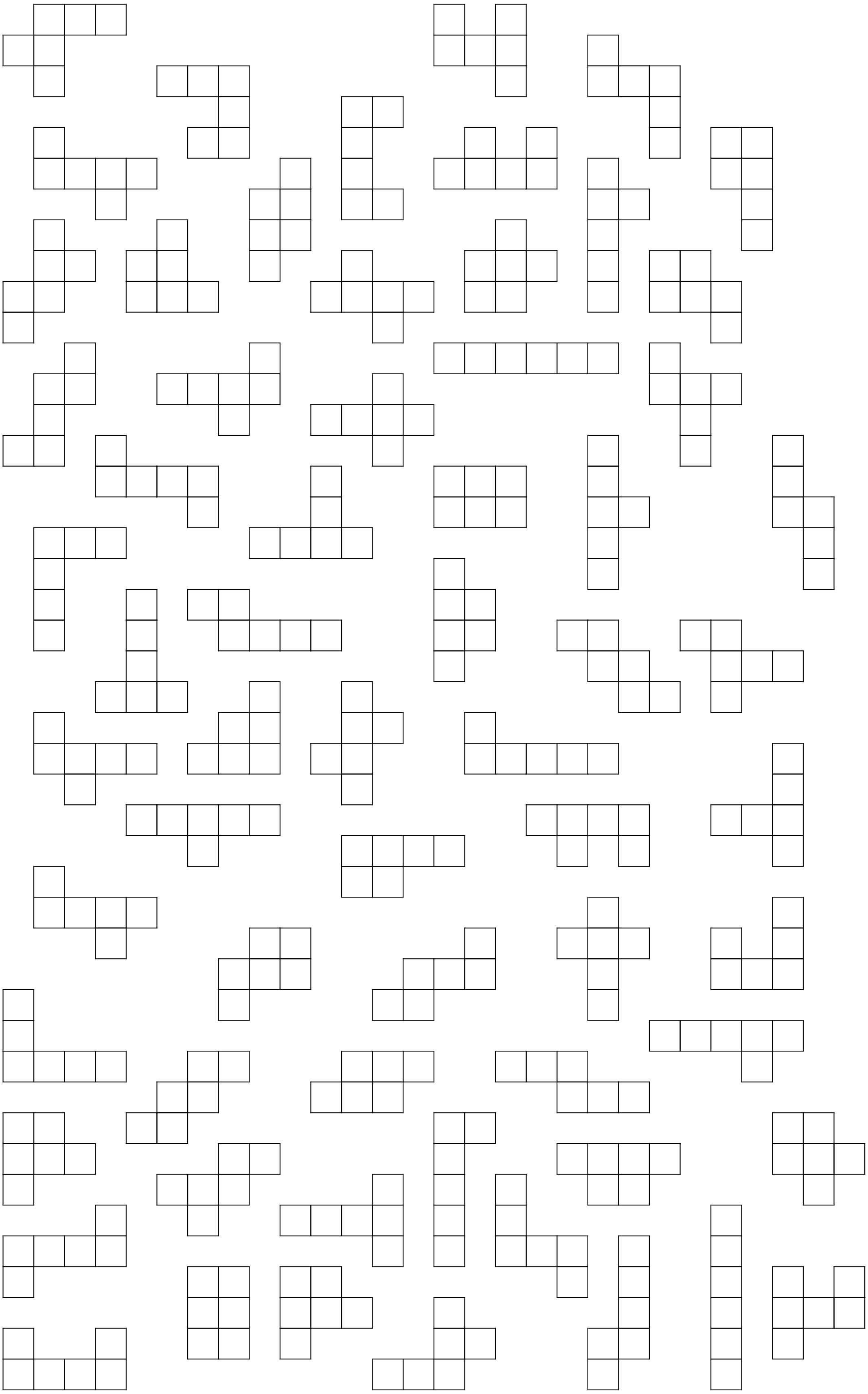
- Übertrage die Situation von einer Repräsentation auf die andere!
- Wie verändert sich die Situation, wenn mit dem Würfel ,,operiert" wird:
  - Drehungen
  - Auseinanderfalten eines Flächenmodells zum Netz oder
  - Zusammenkleben des Netzes zum Flächenmodell
  - Kippbewegungen
  - Teilung des Würfels

11.5.4 Kopfgeometrie mit Würfelnetzen: Konkrete Beispiele

Zu den folgenden Beispielen finden sich Vorschläge für Arbeitsblätter auf den nächsten Seiten.

- Arbeiten mit Punkten
  - Finde zugehörige Ecken in Netz und Flächenmodell!
  - Finde zugehörige Flächen- oder Kantenmittelpunkte in Netz und Flächenmodell!
  - Welche Ecken im Netz kommen beim Zusammenkleben des Würfel zur Deckung?
- Arbeiten mit Strecken
  - Finde zugehörige Kanten, Diagonalen, Strecken.
  - Finde zugehörige Streckenzüge.
  - Finde je zwei Kanten im Netz, die zusammengeklebt werden müssen.
  - Wie viele Laschen braucht man beim Zusammenkleben?
  - Wie viele Kanten müssen beim Auseinanderfalten aufgeschnitten werden?
  - Ein Käfer krabbelt auf dem Würfel. Finde den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten auf der Oberfläche?
- Arbeiten mit Flächen
  - Finde zugehörige Seitenflächen!
  - Finde im Netz die Vorder-, Rück- Ober-, Unter-, rechte und linke Seitenfläche!
  - Finde zugehörige Halb–Seitenflächen (rechteckig oder dreieckig).
  - Die ,,halbe Oberfläche" des Würfels wird eingefärbt. Finde die zugehörige Färbung beim Netz!
  - Finde unter den 32 möglichen Quadrat-Sechslingen die Würfelnetze heraus! Vgl. Abschnitt 11.5.5.
- Andere Ideen:
  - Eine Ecke des Würfels wird — gedanklich — abgeschnitten. Wie wirkt sich das im Netz aus?
  - Wie müssen die Augenzahlen eines Spielwürfels im Netz gezeichnet werden?

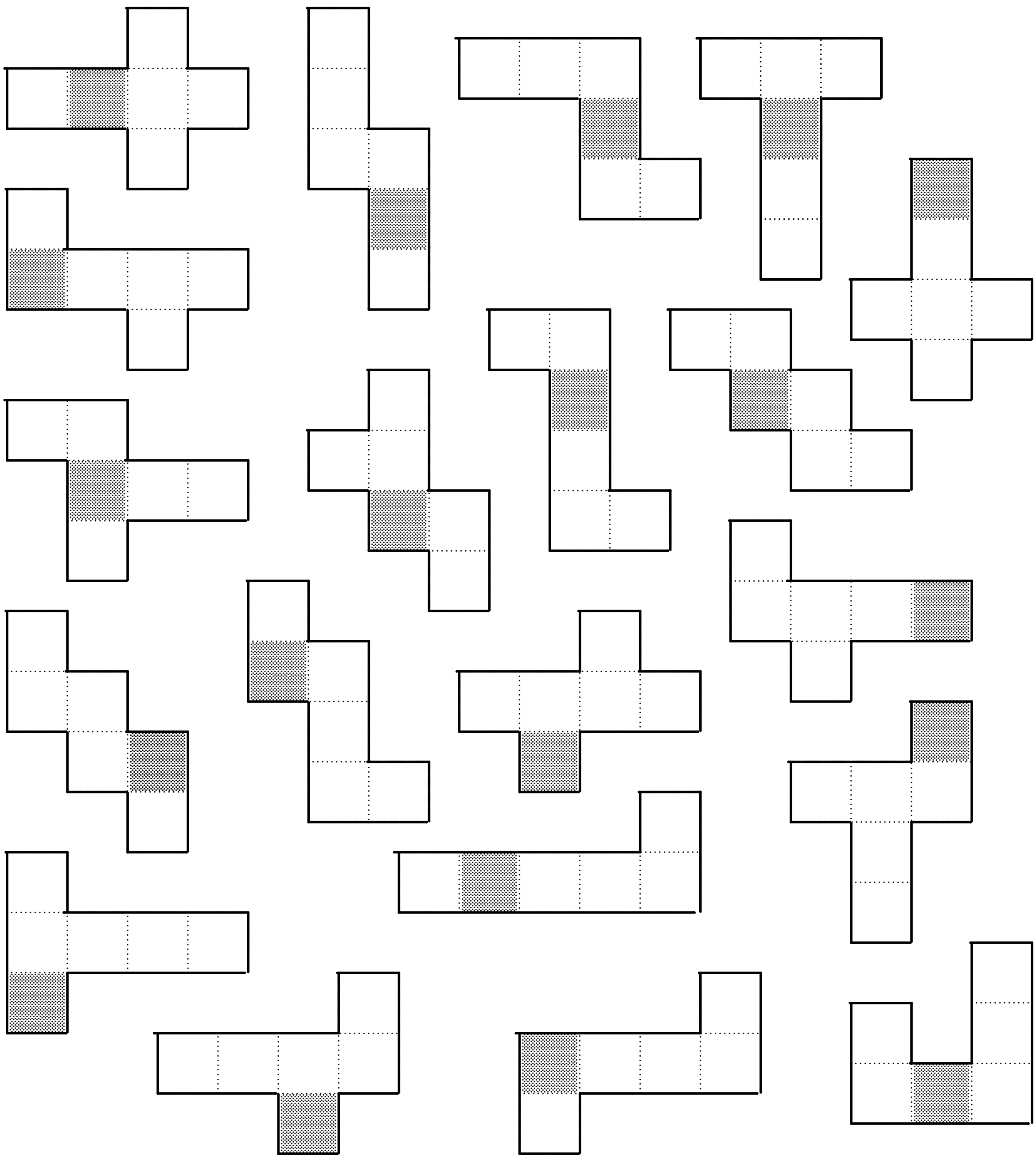
11.5.5 Würfelnetze Welche der 64 Quadrat-Sechslinge stellen Würfelnetze dar?



11.5.6 Flächen in Würfelnetzen

Färbe im Würfelnetz die Seitenflächen gemäß ihrer Lage im zusammengeklebten Würfel ein!

grau	orange	violett	hellgelb	lindgrün	rot
unten	oben	vorne	hinten	links	rechts



11.6 Prismen

LP$^+$ M6 LB 3

H14 T3

H13 T3

H09 T2

F08 T2

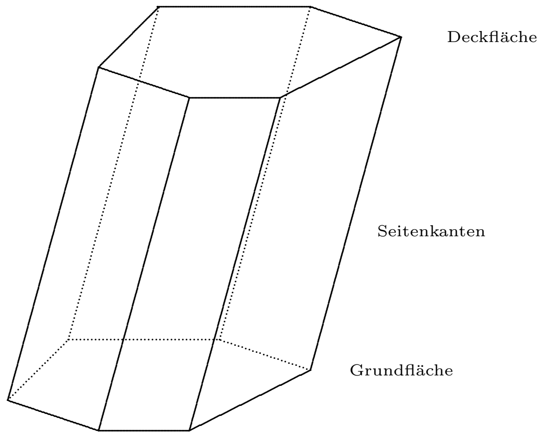
F04 T1

F00 T1

11.6.1 Definition: Prisma

Es sei $n \geq 3$.

Wird ein geometrischer Körper durch zwei kongruente n–Ecke und n Parallelogramme begrenzt, so heißt dieser Körper ein *(n–seitiges) Prisma*.



6-seitiges Prisma

11.6.2 Weitere Eigenschaften

Es ergeben sich daraus viele weitere Eigenschaften (ohne Begründung) und Begriffsbildungen:

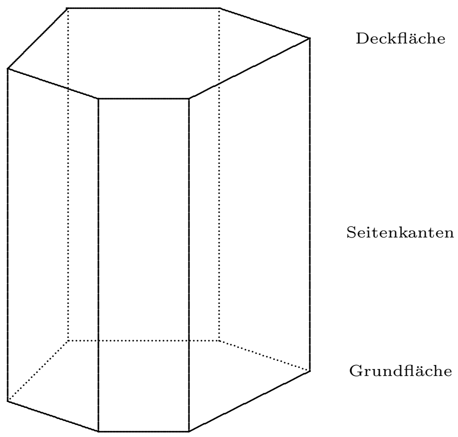
- Man kann sich ein Prisma dadurch entstanden denken, dass ein (ebenes) n-Eck im Raum parallel verschoben wird. Erfolgt die Verschiebung senkrecht zu dem n-Eck, so wird ein gerades Prisma überstrichen.
- Ein n–seitiges Prisma wird durch insgesamt $(n + 2)$ Seitenflächen begrenzt.

  Die beiden in der Definition erwähnten parallelen n–Ecke heißen in diesem Zusammenhang *Grundfläche* und *Deckfläche*. Man stellt sich oft vor, dass die Grundfläche die ,,Unterseite", die Deckfläche die ,,Oberseite" des Prismas ist.

  Die Parallelogramme (oder Rechtecke) bilden zusammen die *Mantelfläche*.
- Ein n–seitiges Prisma hat $3 \cdot n$ Kanten. Die Kanten, die jeweils eine Ecke der Grundfläche mit der zugehörigen in der Deckfläche verbinden, heißen *Seitenkanten*. Die Seitenkanten sind parallel und gleich lang.
- Ein n–seitiges Prisma hat $2 \cdot n$ Ecken.

11.6.3 Definition: Gerades Prisma Es sei $n \geq 3$.

Wird ein geometrischer Körper durch zwei kongruente n–Ecke und n Rechtecke begrenzt, so heißt dieser Körper ein *(n–seitiges) gerades Prisma*.



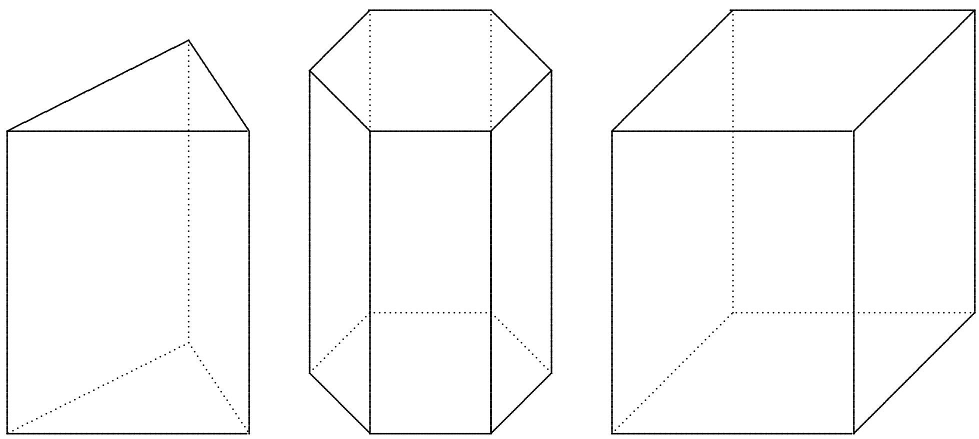
6-seitiges gerades Prisma

11.6.4 Weitere Eigenschaften

Man kann sich ein gerades Prisma dadurch entstanden denken, dass ein (ebenes) n-Eck im Raum parallel verschoben wird. Dabei ist die Richtung der Verschiebung senkrecht zu dem n-Eck.

11.6.5 Regelmäßiges Prisma

- Gelegentlich wird ein gerades Prisma *regelmäßig* genannt, wenn Grund- und Deckfläche regelmäßige n–Ecke sind.
- Ein regelmäßiges Prisma heißt *quadratisch*, wenn Grund- und Deckfläche Quadrate sind. Ein quadratisches Prisma ist nichts anders als ein Säulenquader.



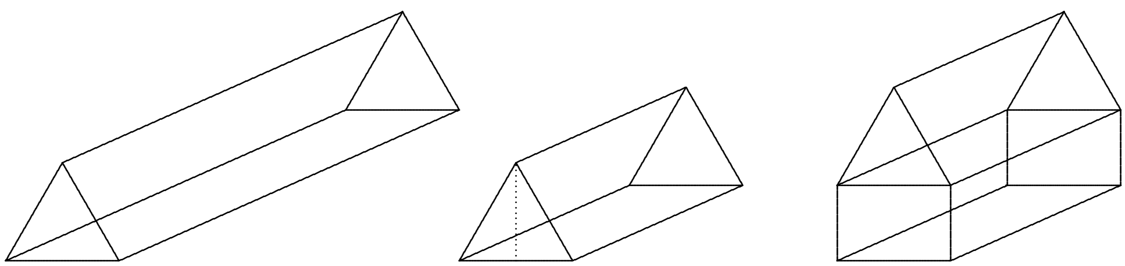
regelmäßiges 3-seitiges Prisma — regelmäßiges 6-seitiges Prisma — quadratisches Prisma = Säulenquader

11.6.6 Diagramm der speziellen Prismen ⊖

$$
\begin{tikzcd}
\text{Würfel} \arrow[d] & \\
\text{Säulenquader = quadratisches Prisma} \arrow[d] \arrow[dr] & \text{dreiseitiges regelmäßiges Prisma (schweizer Schoki)} \arrow[d] \\
\text{Quader} \arrow[dr] & \text{regelmäßiges Prisma} \arrow[d] \\
& \text{gerades Prisma} \arrow[d] \\
& \text{Prisma}
\end{tikzcd}
$$

11.6.7 Prismen in der Schul–Welt

- Typische Umverpackung einer schweizer Schokolade
- Bleistift, Marketing eines Schreibwaren–Herstellers
- Die klassische Form eines Zeltes
- Das Dachgeschoss unter einem Satteldach hat die Form eines Dreiecksprismas. Die Giebelwände bilden die ,,Grund-” und ,,Deck”–Fläche.
- Glasprisma. In der Alltagssprache verbindet man mit dem Begriff am ehesten ein dreiseitiges Prisma aus Glas, an dem das physikalische Phänomen der Dispersion (unterschiedliche Brechung/Ablenkung von Lichtstrahlen unterschiedlicher Farbe) aufgezeigt werden kann.
- Das mysteriöse Internet-Überwachungsprogramm der NSA heißt ,,PRISM”.



Schweizer Schoki Zelt Satteldach

11.7 Pyramiden ⊖

LP 3.1.2

LP+ M6 LB 3

F16 T1

H13 T3

F13 T1

F12 T2

H10 T3

H09 T2

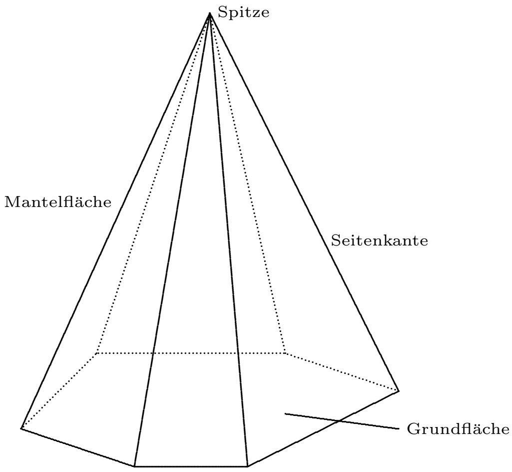
F08 T2

H05 T1

F03 T3

11.7.1 Definition Pyramide Es sei $n \geq 3$.

Wird ein geometrischer Körper durch ein n–Eck und n Dreiecke begrenzt, so heißt dieser Körper eine *(n–seitige) Pyramide*.



11.7.2 Weitere Eigenschaften

Es ergeben sich daraus viele weitere Eigenschaften (ohne Begründung) und Begriffsbildungen:

Die n Dreiecke stoßen an einer Ecke — sie heißt *Spitze* — außerhalb der Grundfläche der Pyramide zusammen. Die Pyramide hat $(n + 1)$ Ecken.

Die Pyramide hat $2 \cdot n$ Kanten. Die von der Spitze ausgehenden Kanten heißen *Seitenkanten*.

Das n–Eck heißt in diesem Zusammenhang *Grundfläche*. Man stellt sich oft vor, dass diese Grundfläche die ,,Unterseite" der Pyramide ist. Die Pyramide wird durch insgesamt $(n + 1)$ Seitenflächen begrenzt. Die Dreiecke bilden zusammen die *Mantelfläche*.

11.7.3 Gerade Pyramiden

Schaut man in die einschlägige Literatur zur Geometrie-Didaktik, in Schulbücher oder ins Internet, so findet man eine Vielzahl verschiedener Auffassungen darüber vor, was eine gerade Pyramide sein soll.

Gemeinsam an allen Auffassungen ist, dass es sich um eine Pyramide handelt, deren Spitze senkrecht über einem ,,Mittelpunkt" der Grundfläche befindet. Es ist aber keineswegs klar, was der Mittelpunkt einer ebenen Figur sein soll, es stehen verschiedene Angebote zur Auswahl:

U Der Umkreismittelpunkt einer ebenen Figur, die einen Umkreis besitzt.

Beispiele: Alle Dreiecke, Quadrate, Rechtecke, gleichschenklige Trapeze, Sehnenvierecke, regelmäßige Vielecke.

Z Das Zentrum einer punkt- oder drehsymmetrischen ebenen Figur.

Beispiele: Gleichseitige Dreiecke, Quadrate, Rechtecke, Rauten, Parallelogramme, regelmäßige Vierecke.

S Der Schwerpunkt.

Beispiele: Alle ebenen Figuren. Bei Dreiecken ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden der Schwerpunkt.

I Der Inkreismittelpunkt einer ebenen Figur, die einen Inkreis besitzt.

Beispiele: Alle Dreiecke, Quadrate, Rauten, Drachenvierecke, Tangentenvierecke, regelmäßige Vielecke.

D Der Diagonalenschnittpunkt bei Vierecken.

11.7.4 Definition

Wir wollen hier eine Pyramide *gerade vom Typ* U, Z, S, I oder D nennen, wenn der Lotfußpunkt der Spitze mit dem zugehörigen Typ von ,,Mittelpunkt" übereinstimmt.

Es geht nicht darum, diese Definitionen genau zu beherrschen, womöglich im Wortlaut auflisten zu können. Interessanter ist die Einsicht, dass die Definition der geraden Pyramide delikat und nicht ,,geradeheraus" ist. Es stellt sich überhaupt die Frage, warum gerade Pyramiden eine besondere Bedeutung haben sollten.

11.7.5 Zusätzliche Beobachtungen

(1) Eine Pyramide hat genau dann gleich lange Seitenkanten, wenn sie gerade vom Typ U ist. Der Beweis besteht in einer Anwendung des Satzes von Pythagoras.

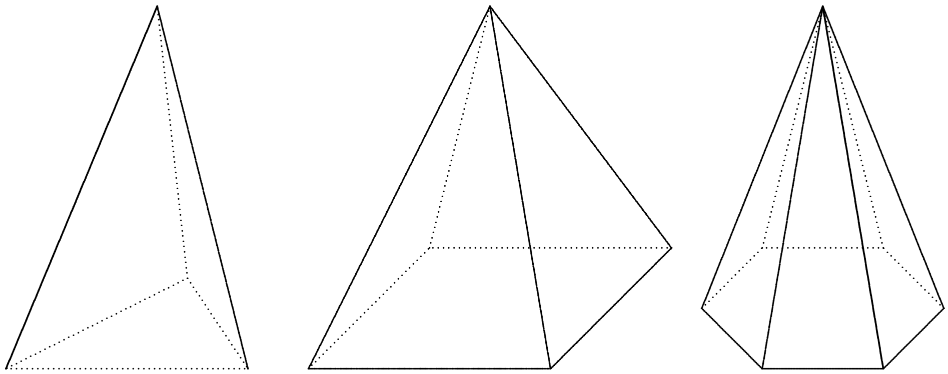
(2) Eine Pyramide mit einer echten Raute als Grundfläche und Lotfußpunkt-Bedingung ist gerade vom Typ Z, aber nicht gerade vom Typ U.

(3) Eine Pyramide mit (beliebig-)dreieckiger Grundfläche und Lotfußpunkt-Bedingung ist gerade vom Typ U, aber nicht gerade vom Typ Z oder S.

(4) Eine Pyramide mit einem echten Drachenviereck als Grundfläche und Lotfußpunkt-Bedingung ist gerade vom Typ D, aber nicht gerade vom Typ U, Z oder S.

11.7.6 Regelmäßige Pyramiden

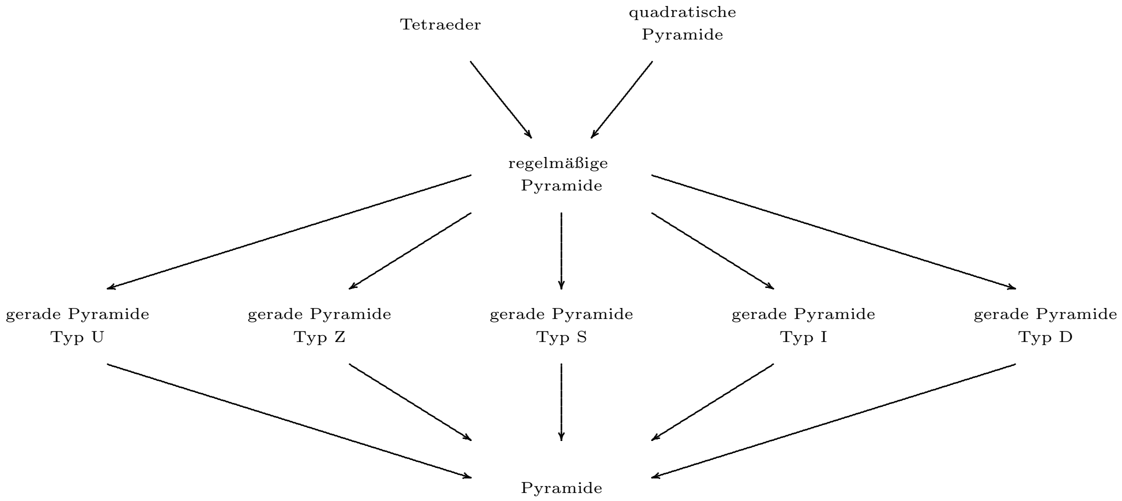
Eine Pyramide heißt *regelmäßig (=regulär)*, wenn die Grundfläche ein regelmäßiges n–Eck ist und die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt liegt.



regelmäßige 3-seitige Pyramide — quadratische Pyramide — regelmäßige 6-seitige Pyramide

Da der Mittelpunkt eines regelmäßigen n–Ecks sowohl Umkreismittelpunkt, Drehzentrum, Schwerpunkt, Inkreismittelpunkt und — im Falle des Quadrats — Diagonalenschnittpunkt ist, ist eine reguläre Pyramide gerade von jedem Typ.

11.7.7 Diagramm der speziellen Pyramiden



11.7.8 Die quadratische Pyramide

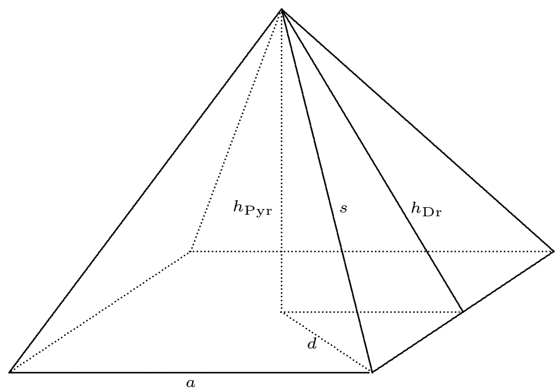
H12 T3 A4

F12 T2

H10 T3 A3

Eine Pyramide heißt *quadratisch*, wenn ihre Grundfläche ein Quadrat ist und die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt des Quadrats ist.

Damit ist eine quadratische Pyramide regelmäßig.



11.7.9 Berechnungen an der quadratischen Pyramide

Aufgrund des Hypotenusensatzes von Pythagoras ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned} d^2 &= \tfrac{a^2}{2} \\ h_{\mathrm{Dr}}^2 &= (\tfrac{a}{2})^2 + h_{\mathrm{Pyr}}^2 \\ s^2 &= d^2 + h_{\mathrm{Pyr}}^2 \end{aligned}$$

Als Oberflächeninhalt und Volumen erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathrm{quPyr}} &= a^2 + 4 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{(\tfrac{a}{2})^2 + h_{\mathrm{Pyr}}^2} = a^2 + a \cdot \sqrt{a^2 + 4h_{\mathrm{Pyr}}^2} \\ V_{\mathrm{quPyr}} &= \tfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_{\mathrm{Pyr}}. \end{aligned}$$

11.7.10 Quadratische Pyramiden in der Schul–Welt

Auffinden in der Wirklichkeit:

- Die Pyramiden von Gizeh: Beachte, dass diese Pyramiden eigentlich gestuft sind.
- Pyramiden als Dachform werden als Zeltdach bezeichnet, bei quadratischer Grundfläche als Pyramidendach bezeichnet.
- Kirchturmdächer
- Zeltdach eines Garten–Pavillons

11.7.11 Der Tetraeder

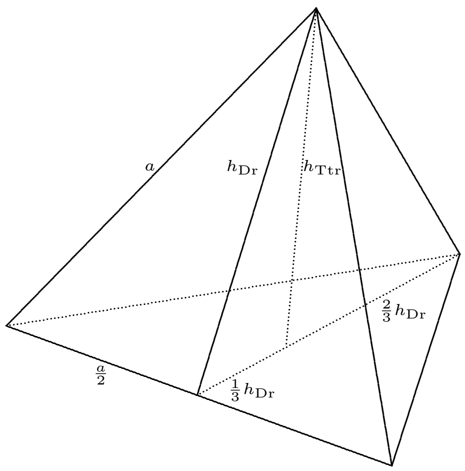
F16 T1 A4

F14 T1 A3

H10 T3 A4

Eine Pyramide heißt (der oder das) *Tetraeder*, wenn ihre Grundfläche ein Dreieck ist und alle Kanten gleich lang sind.

Damit ist ein Tetraeder eine regelmäßige Pyramide und einer der fünf platonischen Körper.



11.7.12 Berechnungen am Tetraeder

Aufgrund des Hypotenusensatzes von Pythagoras und des Satzes **??** über Seitenhalbierende im Dreieck ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned} a^2 &= (\tfrac{a}{2})^2 + h_{\mathrm{Dr}}^2 \\ a^2 &= (\tfrac{2}{3}h_{\mathrm{Dr}})^2 + h_{\mathrm{Ttr}}^2 \end{aligned}$$

und deshalb

$$\begin{aligned} h_{\mathrm{Dr}}^2 &= \tfrac{3}{4}a^2 \\ h_{\mathrm{Ttr}}^2 &= a^2 - \tfrac{4}{9}(h_{\mathrm{Dr}})^2 = a^2 - \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{3}{4}a^2 = \tfrac{2}{3}a^2. \end{aligned}$$

Als Oberflächeninhalt und Volumen erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathrm{Ttr}} &= 4\cdot\tfrac{1}{2}\cdot a\cdot h_{\mathrm{Dr}} = 2\cdot\sqrt{\tfrac{3}{4}}\cdot a^2 = \sqrt{3}\cdot a^2 \\ V_{\mathrm{Ttr}} &= \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot a\cdot h_{\mathrm{Dr}}\cdot h_{\mathrm{Ttr}} = \tfrac{1}{6}\cdot\sqrt{\tfrac{3}{4}}\cdot\sqrt{\tfrac{2}{3}}\cdot a^3 = \tfrac{1}{6\sqrt{2}}\cdot a^3. \end{aligned}$$

11.7.13 Tetraeder in der Schul–Welt

- Verpackungstüten von Orangensaft oder Bunt-Bonbons.
- Tetrapoden als Wellenbrecher an erosionsgefährdeten Küsten
- In Halbleiter-Chips (in Dioden, Transistoren, Elektronik–Chips, Speicherchips, Prozessoren,. . .) sind Siliziumatome (u.a.) tetraedisch angeordnet.
- Die innere Struktur von Diamanten W ist ,,tetraedisch".

- So genannte Krähenfüße sind tetraedisch verbundene spitze Stahlnägel. Werden sie irgendwie auf den Boden gelegt, so zeigen die Spitzen in alle Richtungen. Fährt ein Auto darüber, so platzen die Reifen.

- Besonderheit: Verbindet man die Seitenmittelpunkte des Tetraeders durch Kanten, so entsteht wieder ein Tetraeder. Man sagt dazu, dass der Tetraeder „selbst-dual" sei.

11.8 Platonische Körper $^{\ominus}$

11.8.1 Definition

Ein Polyeder heißt *Platonischer Körper*, wenn er die folgenden ,,Regelmäßigkeiten" aufweist:

- Alle Seitenflächen sind kongruent.
- Die Seitenflächen sind regelmäßige N–Ecke.
- An jeder Ecke stoßen gleich viele Kanten (bzw. Seitenflächen) zusammen.

Das Beispiel einer Doppelpyramide mit einem regelmäßigen 5–Eck als Grundfläche macht deutlich, dass die dritte Eigenschaft wesentlich ist.

Lebensnäher könnte man sagen, dass die platonischen Körper beim Werfen auf eine Tischplatte (Problematische Beschreibung: Würfeln) mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit auf eine ihrer Seiten zu liegen kommen.

11.8.2 Weitere Eigenschaften

Zur genaueren Beschreibung und Erkundung der platonischen Körper legen wir Bezeichnungen fest:

N Zahl der Ecken einer Seitenfläche,
α Innenwinkel der Seitenflächen,
F Zahl der Seitenflächen,
K Zahl der Kanten,
E Zahl der Ecken,
S Zahl der Kanten (bzw. Seitenfächen), die in einer Ecke zusammenstoßen.

Für platonische Körper gelten die Formeln (Begründe!):

$$K = \frac{F \cdot N}{2}, \qquad E = \frac{F \cdot N}{S}, \qquad E + F - K = 2.$$

11.8.3 Beobachtung A Es gibt **mindestens** fünf platonische Körper.

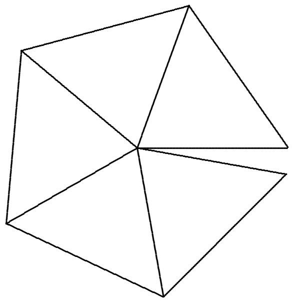
Dies ,,beweist" man dadurch, dass man sie beschreibt, was wir in Form einer Tabelle tun wollen:

Name	Seitenflächen	N	α	F	K	E	S
Tetraeder	Dreiecke	3	60°	4	6	4	3
Würfel (Hexaeder)	Quadrate	4	90°	6	12	8	3
Oktaeder	Dreiecke	3	60°	8	12	6	4
Dodekaeder	Fünfecke	5	108°	12	30	20	3
Ikosaeder	Dreiecke	3	60°	20	30	12	5

Anschaulich umgesetzt wird diese Tabelle durch Abbildungen auf Seite 156.

11.8.4 Beobachtung B Es gibt **höchstens** fünf platonische Körper.

Denken Sie sich zur Begründung einen platonischen Körper „rund um eine Ecke" platt gedrückt.



(1) Daraus lässt sich erkennen, dass

$$S \cdot \alpha \;\leq\; 360^{\circ}$$

(2) Da an dieser Ecke mindestens 3 Seitenflächen aneinander stoßen müssen, hat jeder Winkel Platz von höchstens einem Drittel des Vollwinkels:

$$\alpha < 120^{\circ}$$

(3) Für den Innenwinkel α eines regelmäßigen N–Ecks gilt (vgl. Abschnitt 5.4):

$$\alpha = 180^{\circ} - \frac{360^{\circ}}{N}.$$

(4) Fügt man jetzt die beiden Bedingungen aus (2) und (3) zusammen

$$180^{\circ} - \frac{360^{\circ}}{N} \;<\; 120^{\circ},$$

so folgt daraus

$$N < 6$$

Ein platonischer Körper kann also höchstens durch Dreiecke, Vierecke oder Fünfecke begrenzt sein.

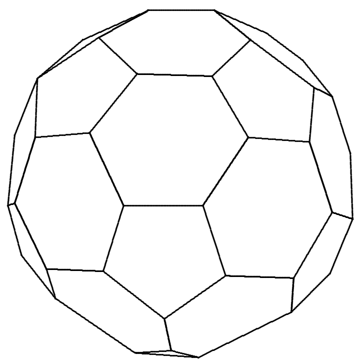
(5) Stellt man nun in einer Tabelle alle gemäß (1) und (4) möglichen Kombinationen aus N und S zusammen, so stellt sich heraus, dass gerade mal 5 Möglichkeiten übrig bleiben. Damit haben wir begründet, dass es höchstens 5 platonische Körper gibt.

N	α	S	$S \cdot \alpha$		
3	60°	3	180°	$\surd$	Tetraeder
3	60°	4	240°	$\surd$	Oktaeder
3	60°	5	300°	$\surd$	Ikosaeder
3	60°	≥ 6	$\geq 360^{\circ}$	–	
4	90°	3	270°	$\surd$	Hexaeder
4	90°	≥ 4	$\geq 360^{\circ}$	–	
5	108°	3	324°	$\surd$	Dodekaeder
5	108°	≥ 4	$\geq 432^{\circ}$	–	

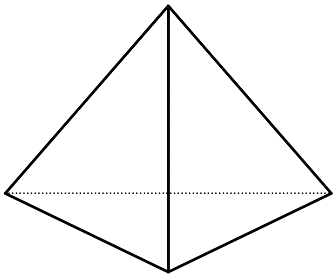
Auf Seite 156 sind diese fünf Typen abgebildet.

11.8.5 Platonische Körper in der Schul–Welt

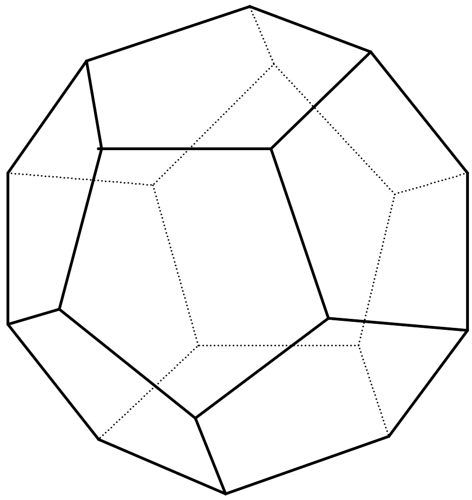
- Platonische Körper kann man als Spiel–„Würfel" verwenden. Beispielsweise wird bei „Ubongo" ein Ikosaeder–Würfel eingesetzt.
- Tetraeder: Siehe Abschnitt 11.7.13.
- In zahlreiche chemischen (naturvorkommenden wie künstlich hergestellten) Molekülen sind die Atome wie die Ecken in einem platonischen Körper angeordnet. Diese Moleküle können wegen der symmetrischen Struktur leicht Kristalle bilden.
  - Beim Methanmolekül CH_4 sitzt das einzelne Kohlenstoffatom in der Mitte eines gedachten Tetraeders, die 4 Wasserstoffatome befinden sich an den Ecken.
  - Beim Methanhydrat ist es so, dass ein Methanmolekül in der Mitte eines gedachten Dodekaeders sitzt, an den 20 Ecken sitzt jeweils ein Wassermolekül.
  - Fullerene $\boxed{\text{W}}$ sind Kohlenstoffmoleküle, die eine hochsymmetrische Struktur, meist die Struktur eines platonischen Körpers, aufweisen.
  - Die innere Struktur von Diamanten $\boxed{\text{W}}$ ist „platonisch". Sie setzt sich makroskopisch fort. Natur-Diamanten zeigen oft die Form von Oktaedern.
- Aus einem gegebenen platonischen Körper P kann man — gedanklich — einen anderen P' dadurch erstellen, dass man die Flächenmittelpunkte von P zu den Ecken von P' werden lässt. Der Körper P' heißt dann *dual* zu P. Es ist dann der Tetraeder dual zu sich selbst. Weiter sind Oktaeder und Hexaeder dual zueinander sowie Dodekaeder und Ikosaeder. Vergleiche Ecken– und Flächenzahlen zweier zueinander dualer Körper.
- Schneide gedanklich die Ecken eines Ikosaeders gleichmäßig so ab, dass anstelle der Ecken regelmäßige Fünfecke entstehen, die von jeweils fünf regelmäßigen Sechsecken umgeben sind: Fertigt man dieses Gebilde aus Leder und dehnt es kugelförmig aus, so sieht man: Der klassische „WM–Fußball" ist ein abgestumpfter Ikosaeder.



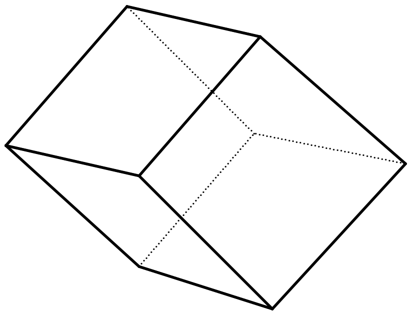
11.8.6 Abbildungen der platonischen Körper



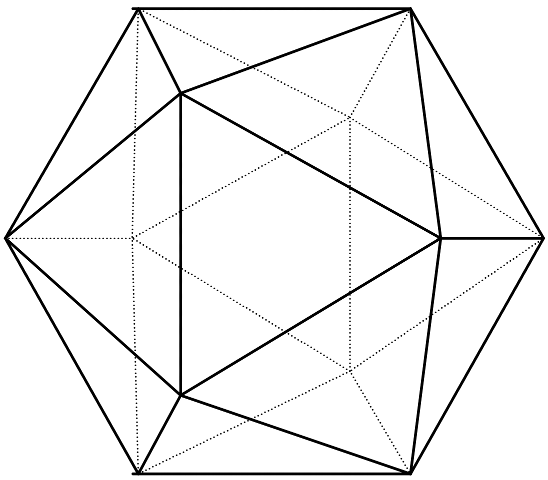
Tetraeder



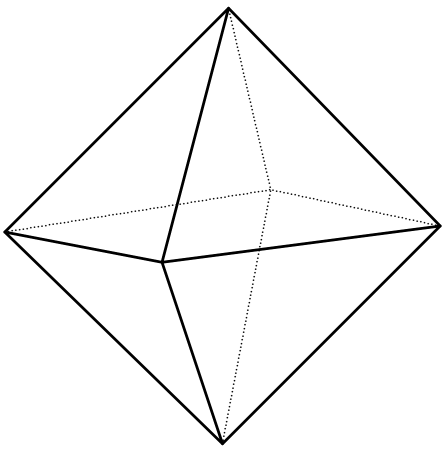
Dodekaeder



Hexaeder (Kubus, Würfel)



Ikosaeder



Oktaeder

12 Drehkörper ⊖

12.1 Allgemeine Drehkörper

12.1.1 Definition

Ein Körper heißt *Rotationskörper (= Drehkörper)*, wenn

es eine Gerade gibt,

so dass alle ebenen Schnitte des Körpers senkrecht zu dieser Gerade

vollständig drehsymmetrisch (vgl. 6.6.1) sind.

12.1.2 Weitere Erläuterungen und Begriffe

- Die oben erwähnte besondere Gerade heißt auch *Rotationsachse* oder *Drehachse* des Körpers.
- Eine ,,vollständig drehsymmetrische Figur" (vgl. Abschnitt 6.6.1) ist nichts anderes als eine Kreisfläche, ein Kreisring oder eine Vereinigung von mehreren Kreisringen. Bei den typischen Fällen der Schulgeometrie sind die Schnitte Kreisflächen.
- Man kann sich einen Drehkörper dadurch entstanden denken, dass sich eine ebene Figur um eine Gerade im Raum dreht und dabei den Körper ,,überstreicht".
- Es lassen sich zwei Ebenen finden
  - mit minimalem Abstand
  - senkrecht zur Rotationsachse
  - zwischen denen sich der Körper befindet.

  Diese beiden Ebenen werden *Grund-* bzw. *Deckfläche* genannt.

  Ob man auch beim Kegel von einer Deckfläche, bei der Kugel von Grund- und Deckfläche sprechen sollte, bleibt dahingestellt.
- Die Oberfläche ohne Grund- und Deckfläche heißt dann auch *Mantelfläche*.
- Der Abstand zwischen Grund- und Deckfläche heißt *Höhe* des Rotationskörpers.
- Die Hauptbeispiele von Rotationskörpern sind Zylinder, Kegel, Kugel.
- Weitere Beispiele, die im Schulkontext gelegentlich eine Rolle spielen, sind Hohlzylinder, Kegelstumpf, Doppelkegel, Halbkugel und Torus.

12.1.3 Aktivitäten an und mit Drehkörpern

- Basteln von Lampions
- Töpfern
- Abrollen zum Netz: Wann ist dies möglich?

12.2 Der Zylinder

LP+ M6 LB 3

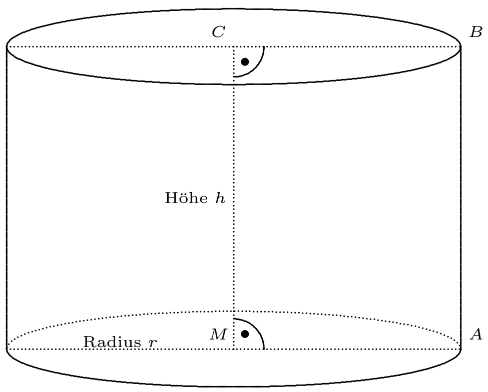
12.2.1 Definition

Es seien zwei Kreisscheiben vorgegeben, ...

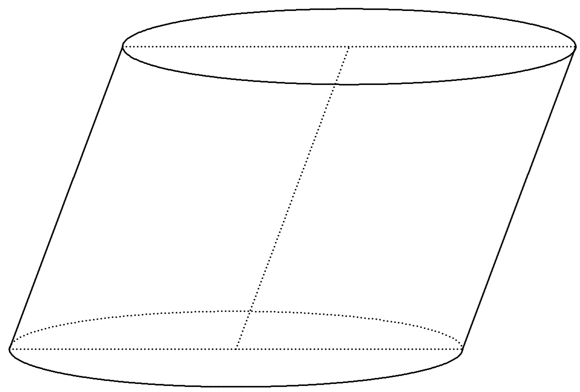
die zueinander kongruent sind, und

so, dass die Verbindungsstrecke der Kreismittelpunkte senkrecht zu den beiden Kreisscheiben steht.

Die Menge aller Verbindungsstrecken zwischen den beiden Kreisscheiben bildet einen *geraden Zylinder*.



gerader Zylinder



schiefer Zylinder

12.2.2 Weitere Eigenschaften

(1) Fachlich genauer spricht man auch vom geraden Kreiszylinder, ungenauer auch nur vom Zylinder.

(2) Die beiden Kreisscheiben werden oft ,,Grundfläche" und ,,Deckfläche" des Zylinders genannt. Dieser anschaulich naheliegende Begriff ist ungünstig insofern, als dadurch eine besondere Lage ,,stehend in Raum" des Zylinders suggeriert wird.

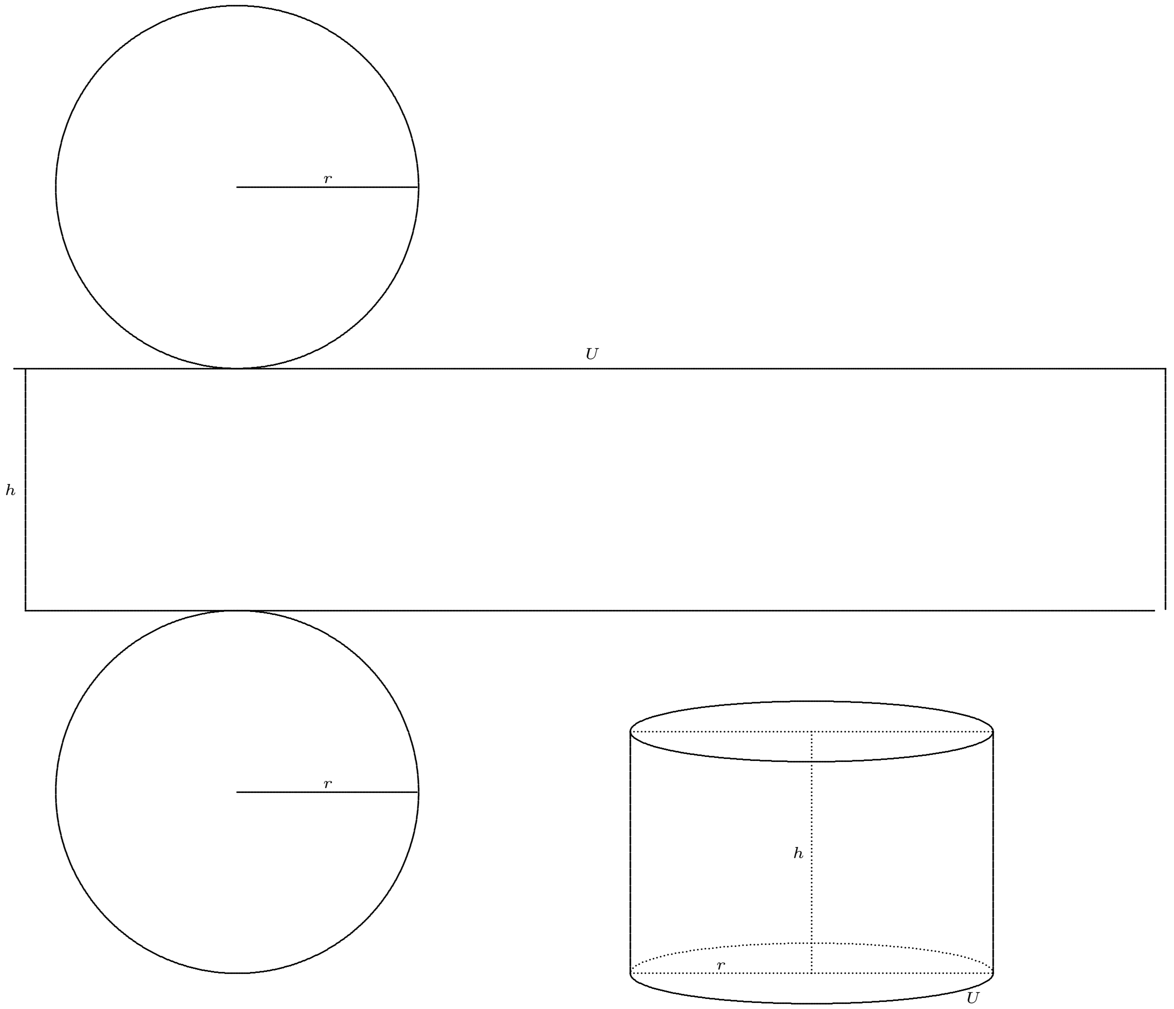
(3) Man kann sich den geraden Zylinder dadurch entstanden denken, dass ein Rechteck $ABCM$ um die Gerade CM rotiert und so der Zylinder überstrichen wird. Der gerade Zylinder ist also ein Drehkörper.

(4) Man kann sich den geraden Zylinder auch so vorstellen, dass eine Kreisscheibe längs einer Gerade, die senkrecht zu ihr steht, verschoben wird.

(5) Wird die zweite Bedingung des Senkrechtstehens dahingehend abgeschwächt, dass die beiden Kreisscheiben nur parallel zueinander sind, so heißt der Zylinder auch *schiefer Zylinder*. Dies ist kein Drehkörper.

12.2.3 Das Netz

Die Oberfläche des geraden Zylinders kann zu einem Netz in Form eines ,,Rechtecks mit zwei Kreisscheiben” abgerollt werden.



12.2.4 Kontextfelder

- Auffinden in der Wirklichkeit. Tafelkreide, Stück Wurst, Konservendose, Küchenrolle, Teig–Rollholz, Klebestift, Smarties–Dose, Kerze.
- Aus DINA4 Blättern werden Rollen zusammengeklebt. Sie können dann für den Bau von Flößen, Häusern, Kantenmodellen verwendet werden.

12.3 Der Kegel

LP+ M6 LB 3

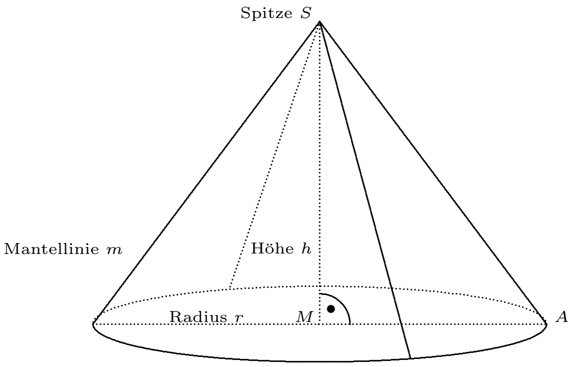
12.3.1 Definition

Es seien vorgegeben ...

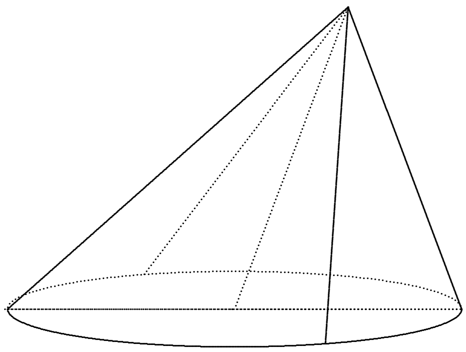
eine Kreisscheibe und

ein Punkt, der auf der Lotgeraden durch den Kreismittelpunkt liegt.

Die Menge aller Verbindungsstrecken zwischen Kreisscheibe k und Punkt S bildet einen *geraden Kegel.*



gerader Kegel



schiefer Kegel

12.3.2 Weitere Eigenschaften

(1) Fachlich genauer spricht man auch vom geraden Kreiskegel, ungenauer auch nur vom Kegel.

(2) Die Kreisscheibe wird oft ,,Grundfläche" des Kegels genannt. Dieser anschaulich naheliegende Begriff ist ungünstig insofern, als dadurch eine besondere Lage ,,stehend in Raum" des Kegels suggeriert wird.

(3) Man kann sich den geraden Kegel dadurch entstanden denken, dass ein rechtwinkliges Dreieck ASM (mit rechtem Winkel bei M) um die Gerade SM rotiert und so der Kegel überstrichen wird. Der gerade Kegel ist also ein Drehkörper.

(4) Befindet sich der Punkt S nicht auf der Lotgeraden, so heißt der Kegel auch *schiefer Kegel.* Dies ist kein Drehkörper.

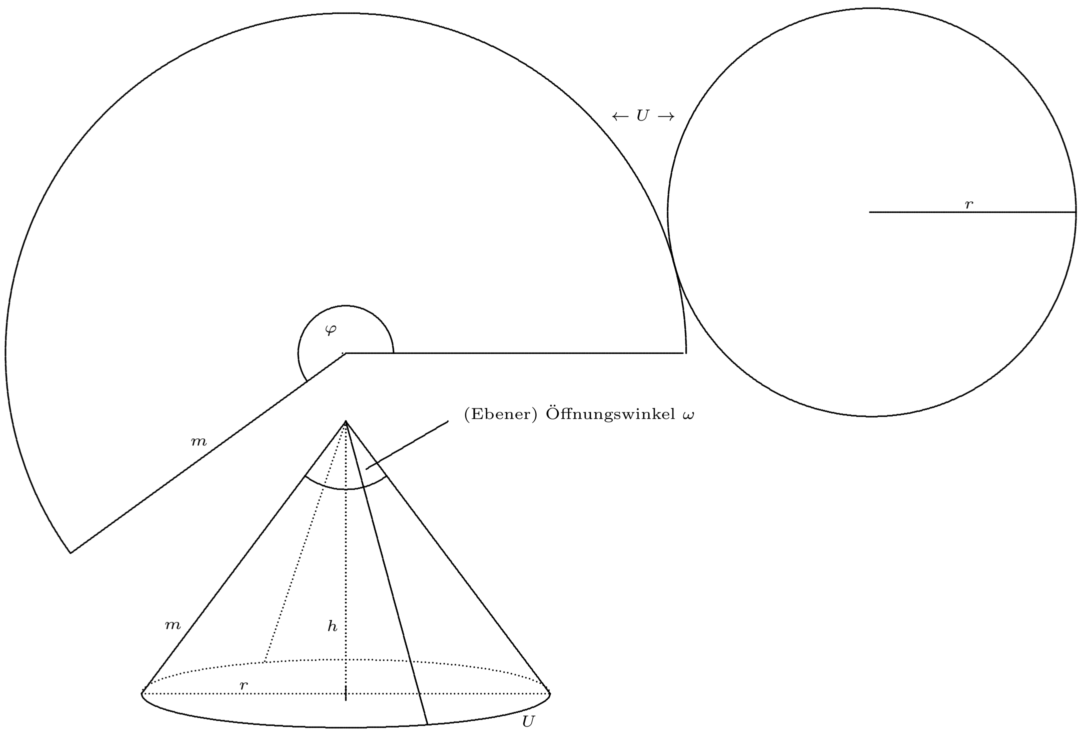
(5) Aufgrund des Satzes des Pythagoras besteht der Zusammenhang

$$h^2 + r^2 = m^2$$

zwischen Höhe, Radius und Mantellinie.

12.3.3 Das Netz ⊖

Die Oberfläche des geraden Kegels kann zu einem Netz in Form eines „Kreissektors mit Kreisscheibe" abgerollt werden.



Der Bezug zwischen Kegel und Netz wird dadurch hergestellt, dass der …

> Umfang U des Kegelgrundkreises mit dem des Sektorbogens übereinstimmt und
> die Länge m der Mantellinie mit dem Radius des Kreissektors übereinstimmt.

Bzgl. des Kegels gelten die folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} U &= 2 \cdot \pi \cdot r \\ \sin \tfrac{\omega}{2} &= \tfrac{r}{m}\,. \end{aligned}$$

Bzgl. des Netzes gilt

$$U = 2 \cdot \pi \cdot m \cdot \tfrac{\varphi}{360^\circ}\,.$$

Es ergibt sich der Zusammenhang

$$\varphi = \tfrac{U}{2\pi m} \cdot 360^\circ = \tfrac{r}{m} \cdot 360^\circ = \sin \tfrac{\omega}{2} \cdot 360^\circ.$$

12.3.4 Kontextfelder

- Eistüte, Schultüte, Weinkorken.
- Kleid eines Weihnachtsengels
- Trichter aus Plastik oder Papier (Flüstertüte)
- Idee des Zuckerhuts
- Warum ist eine Gemüse–Tüte (in etwa) kegelförmig?
- Kegelschnitte entstehen als Schnittmengen der Oberfläche des Kegels mit einer Ebene. Es ergeben sich dabei Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln oder Punkte, Geraden, Geradenpaare.
- Mit welchem Radius rollt ein Kegelstumpf? (Beispiel: Pappbecher oder Flaschenkorken)

12.4 Die Kugel

LP+ M6 LB 3

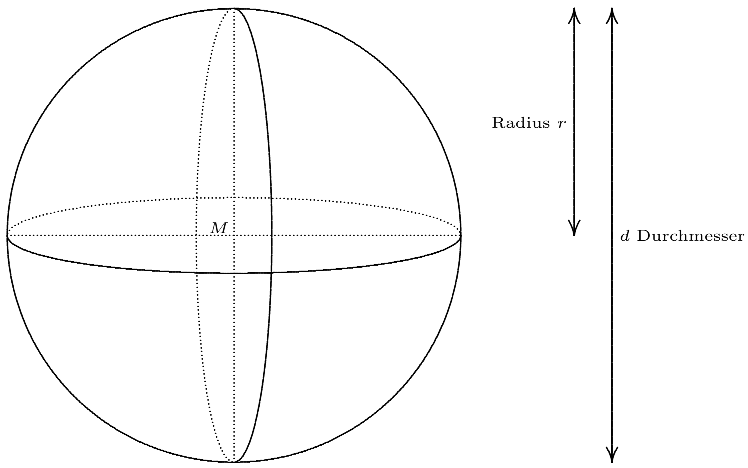
12.4.1 Definition

Es seien im drei-dimensionalen Raum vorgegeben ...

ein Punkt M und

eine Länge r.

Die Menge aller Punkte im drei-dimensionalen Raum, die vom Punkt M die Entfernung höchstens gleich r haben, bilden eine Kugel.



Kugel

12.4.2 Weitere Bezeichnungen und Eigenschaften

- Der gegebene Punkt heißt *Mittelpunkt* der Kugel, die gegebene Länge *Radius* der Kugel.
- Die Oberfläche einer Kugel wird gelegentlich als *Sphäre* bezeichnet.
- Die Länge einer Strecke zwischen zwei Punkten auf der Sphäre durch den Mittelpunkt wird als *Durchmesser* d bezeichnet. Es ist

$$d = 2 \cdot r.$$

- Man kann sich eine Kugel dadurch entstanden denken, dass sich eine Halbkreisscheibe um eine ,,Durchmesser"–Gerade dreht.
- Eine Kugeloberfläche kann **nicht** zu einem Netz abgerollt werden.

12.4.3 Kontextfelder

- Christbaumkugel, Ball.
- Sonne, Mond, Erde und alle anderen Planeten und Sterne. Beachte, dass die Erde nur annähernd eine Kugelgestalt hat. Aufgrund der erhöhten Zentrifugalkräfte bildet sich in den Äquatorbreiten ein leichter ,,Wulst" bzw. umgekehrt an den Polen eine Abplattung.

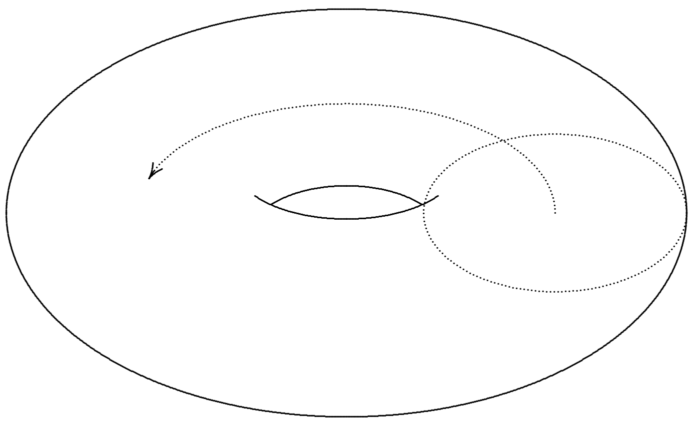
- Explosion einer ,,Kugelbombe” beim Sylvester–Feuerwerk
- Seifenblasen sind kugelförmig
- Wassertropfen im freien Fall sind kugelförmig (Regen)
- Warum spielt man mit Bällen und nicht mit Würfeln?
- Sphärische Oberflächen von Kosmetikspiegeln, Verkehrsspiegeln, Glas–Linsen (in Brillen)
- Warum verwendet man in Kugellagern Kugeln?
- ,,Der Ball ist umgefallen”
- Basteln einer Kugel aus Papier–Trichtern.

12.5 Der Torus ⊖

12.5.1 Beschreibung

In einer Ebene befinden sich eine Kreisscheibe und eine Gerade, die mit der Kreisscheibe keinen Punkt gemeinsam hat (d.h. an ihr vorbeigeht).

Lässt man nun die Kreisscheibe (gedanklich) um die Gerade rotieren, so wird ein *Torus* überstrichen.



12.5.2 Kontextfelder

- Schläuche in Auto- oder Fahrradreifen
- Rettungsring
- Gedankenexperiment: Sie befinden sich auf der Oberfläche des Torus und laufen dann immer ,,geradeaus”. Kommen Sie wieder am Ausgangspunkt an?