

A major task of mathematics today is to harmonize the continuous and the discrete, to include them in one comprehensive mathematics, and to eliminate obscurity from both.

*E.T. Bell, "Men of Mathematics", Simon and Schuster, New York, 1937.*

Diese Aufgabe erfüllt der in meiner Dissertation (1988) grundgelegte

## MASSKETTENKALKÜL

Er ermöglicht, die Differential- und Integralrechnung dahingehend zu verallgemeinern, dass der Definitionsbereich der zu untersuchenden Funktionen ( $\mathbb{R}$ ) durch eine beliebige MASSKETTE (oder ZEITSKALA, engl. TIME SCALE)  $\mathbb{T}$  ersetzt werden kann.

Jede abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}$  trägt in natürlicher Weise die Struktur einer MASSKETTE

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$	Gewöhnliche Differentialrechnung
Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$	Gewöhnliche Differenzenrechnung
Zahlenfolge mit konstantem Abstand $h\mathbb{Z}$	Gewöhnliche Differenzenrechnung mit Schrittweite $h$
Diskrete Punktfolge	Differenzenrechnung bei variabler Schrittweite
Folge von abgeschlossenen Intervallen	Differentialrechnung mit Pulsen
$q^{\mathbb{Z}}$ , $q > 1$	$q$ -Differenzgleichungen
Cantor Diskontinuum $\mathbb{D}$	Exotische Zeitskala, auch hier ist Diff-Rechnung möglich

Die Ableitung für Funktionen  $f : \mathbb{T} \rightarrow X$ , ( $X$  Banachraum) ist definiert durch

$$f^\Delta(t) := \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s},$$

wobei  $\sigma(t) := \inf\{r \in \mathbb{T} \mid r > t\}$  und der Grenzwert bzgl. der Relativtopologie auf  $\mathbb{T}$  zu nehmen ist.

Auf dieser Basis lassen sich nun weite Teile der 1-dimensionalen Analysis entwickeln wie beispielsweise

- Grundlegende algebraische Eigenschaften der Ableitung, Mittelwertsatz,
- Exponential-, trigonometrische, hyperbolische Funktionen und ihre Eigenschaften,
- Existenz-, Eindeutigkeits- und Abhängigkeitssätze für Gewöhnliche Diff-Gleichungen,
- Lineare Theorie, Matrixexponentialfunktion und ihre Eigenschaften,
- Qualitativen Theorie von Differentialgleichungen: Gronwall-Lemma, Invariante Mannigfaltigkeiten, topologische Äquivalenz,
- Sturm-Liouville-Theorie: Trennungssatz, Vergleichssatz, Oszillationssätze, Riccati-Transformation, Randwertprobleme, Symplektische Systeme: Picone-Identität,
- Laplace/ $z$ -Transformation, Fouriertransformation,
- Diskrete Analoga der Heisenberg'schen Unbestimmtheitsrelation, Wärmeleitungsgleichung, Schrödinger Harmonischer Oszillator.

Bisher hat sich bestätigt, dass — wo immer der Grenzübergang  $h \rightarrow 0$  Gegenstand mathematischer Betrachtung ist — die sonst übliche heuristische Vorgehensweise, Argumentation mittels Analogien oder kleinschrittigem Übersetzen von einem Fall in den anderen durch dieses geschlossene innermathematische Konzept abgelöst werden kann.

Stefan Hilger

Der Kalkül auf Zeitskalen hat seit etwa 1997 eine beträchtliche Rezeption — vor allem in den USA — erfahren (Vgl. etwa <http://www.math.unl.edu/apeterso/timescaleaut.html>). Seitdem sind auf seiner Grundlage weltweit etwa 300 Zeitschriftenartikel und drei Monographien [V6 – V8] veröffentlicht worden. Er ist Grundlage mehrerer Dissertationen geworden und hat Eingang in eine Habilitationsschrift ([V4] in Tschechien) gefunden. Seit 2000 sind mehrere Workshops und Kongress-Sektionen über “time scales” veranstaltet worden. Im Juli 2003 ist seine Entwicklung in der “Cover story” der populärwissenschaftlichen Zeitschrift “The New Scientist” [V1] beschrieben worden.

### Einige Veröffentlichungen aus dem Bereich des Maßkettenkalküls

- V1 Vanessa Spedding, Taming nature’s numbers. *New Scientist – The global science and technology weekly*, 179 (2003), S. 28 – 31.
- V2 Christian Pötzsche. *Langsame Faserbündel dynamischer Gleichungen auf Maßketten*. PhD thesis, Universität Augsburg, Augsburg, 2002.
- V3 Stefan Keller. *Asymptotisches Verhalten invarianter Faserbündel bei Diskretisierung und Mittelwertbildung im Rahmen der Analysis auf Zeitskalen*. PhD thesis, Universität Augsburg, Augsburg, 2000.
- V4 Roman Hilscher. *Quadratic Functionals in Discrete optimal Control*. 2002. Habilitation Thesis, Masaryk University Brno.
- V5 Roman Hilscher. *Some Aspects of the Qualitative Theory of Linear Hamiltonian Systems*. PhD thesis, Masaryk University Brno, 1998.
- V6 Billûr Kaymakçalan, V. Lakshmikantham, and S. Sivasundaram. *Dynamic Systems on Measure Chains*, volume 370 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- V7 Martin Bohner and Allan Peterson, editors. *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*. Birkhäuser, Boston, 2003.
- V8 Martin Bohner and Allan C. Peterson. *Dynamic Equations on Time Scales — An Introduction with Applications*. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2001.
- V9 Special issue entitled “Dynamic Equations on Time Scales” of the *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 141, 1 – 2, pp. 1 – 284 (2002).

### **Workshops und Kongress-Sektionen über “Time Scales”**

- First International Workshop on Dynamic Equations on Time Scales, Istanbul, Turkey, June 27 – July 2, 2005.
- Special session on “Time Scales” at the Fourth World Congress of Nonlinear Analysts WCNA–2004, Orlando, Florida USA, June 30 – July 7, 2004.
- Special session on “Time Scales” at the Joint Mathematics Meeting (993) in Phoenix, AZ, January 7–10, 2004.
- Special session Workshop on Time Scales and Applications at the Fourth International Conference on Dynamic Systems and Applications in Atlanta, GA, May 21–24, 2003.
- Time Scales Workshop, Dayton, Ohio, September 20–21, 2002.
- Rocky Mountain Mathematics Consortium Summer Conference on “ Dynamic Equations on Time Scales and Their Applications” July 8–19, 2002, University of Wyoming, Laramie, Wyoming.
- Special session on “Dynamic Equations on Time Scales” at the Spring Southeastern Section Meeting (975) in Atlanta, GA, March 8–10, 2002.
- Special session on “Dynamic Equations on Time Scales” at the Joint Mathematics Meeting (973) in San Diego, CA, January 6–9, 2002.
- Special session on “Dynamic Equations on Time Scales” at the SIAM SEAS Annual Conference at Coastal Carolina University in Myrtle Beach, SC, March 16–17, 2001.
- Fargo Preconference Workshop on BVPs and Oscillation Theory of Differential Equations on Measure Chains, Fargo, North Dakota, October 19, 2000.
- Special session on “Time Scales” at the Third World Congress of Nonlinear Analysts WCNA–2000 in Catania, Sicily, Italy, July 19–26, 2000.