



KATHOLISCHE UNIVERSITÄT
EICHSTÄTT-INGOLSTADT

Explorationsbasierte Spielmechaniken zur Förderung mathematischer Lernprozesse

Dr. Dominik Engl

Lehrstuhl Analysis
Mathematisch-Geographische Fakultät





Anstoß des Projektes

Entstanden im Rahmen des KU-Workshops

„Hochschule und Gaming – Kommunikation, Didaktik, Community“

(Dr. Alan Lena van Beek)

- Diskussion expliziter Beispiele der Integration von Gaming in die Hochschullehre
- Studierende sollen beim Spiel einen „Flow“-Zustand erreichen, bei dem die Zeit geradezu verfliegt





Mathematischer Übungsbetrieb im Studium

Wöchentliche Übungsblätter mit Rechen- und Beweisaufgaben

- Aufgaben oft nicht geradlinig lösbar & benötigen mehrere Lösungsversuche

Durchsuchen der
Kursmaterialien/ Literatur

- Definitionen
- Anwendbare Sätze
- Beweistechniken
- Ähnliche Aussagen



Gesammeltes Wissen
kreativ **einsetzen**

- Genaues Prüfen von Voraussetzungen
- Anwendung erlernter Theorie
- Beweisen neuer Aussagen

- Mathematischer Forschungsprozess ähnlich



Mathematischer Übungsbetrieb im Studium

Traditionelle Übungsstunden

Besprechung der Hausaufgaben

KU Präsenzübungen

Gemeinsames **aktives** Lösen von Übungsaufgaben

- Quizzes
- Gruppenarbeiten
- Aktives Plenum
- ...

➤ **Aktivierung** der Studierenden

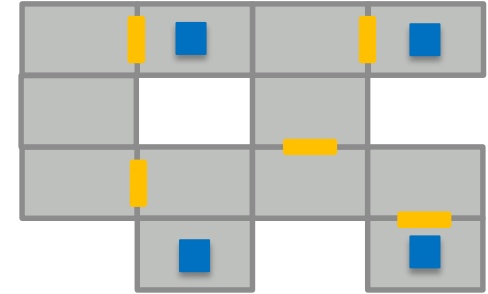


Grundidee des Lehrprojektes

Zielsetzung

Ermutigung zu **aktivem & selbstreflektiertem** Lernen

- nachhaltige Wissensaneignung
- kreative Problemlösekompetenz



Implementierung

- Übersetzung von **Aufgaben** und **Lösungsansätze** in **Hindernisse** und **Items** in labyrinthischer Spielwelt
- Didaktisch sinnvolle Verteilung der **Aufgaben/ Theorie** (und ggf. Hinweise) mittels **Schlüssel-Schloss-Prinzip**
- Audiovisuelle Impulse zur einfacheren Erinnerung
- Dozierende geben Feedback & leiten an

The Legend of Zelda

- Berühmt u.a. für die serientypischen **Dungeons**: in sich geschlossene Labyrinth gefüllt mit **Gegnern & Rätseln**
- (Nichtlineare) Progression in Dungeon durch neues **Item** (& Schlüssel)

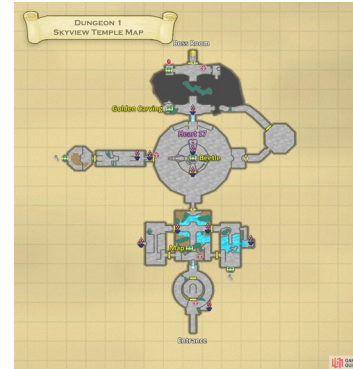
The Legend of
Zelda (1986)



Quelle: https://ian-albert.com/games/legend_of_zelda_maps/

Abbildungen zeigen die Karte des
jeweiligen ersten Dungeons

The Legend of
Zelda: Skyward
Sword (2011)



Quelle: https://www.gamerguides.com/assets/media/17/23/zelda_skyward_sword_skyview_temple1.jpg

➤ Boss Keys Season 1 (Mark Brown, GMTK)
Videoreihe zur Analyse des Zelda Dungeondesigns

Metroidvania – Hilfsmittelbasierte Erkundung

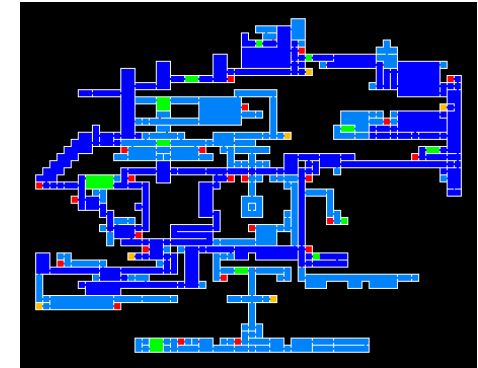
Genre benannt nach den Spielereihen **Metroid** und **Castlevania**

Super Metroid (1994)



Quelle: <https://www.deviantart.com/star-light-shadows/art/Super-Metroid-map-remvamp-828855592>

Castlevania: Symphony of the Night (1997)



Quelle: <https://www.castlevaniacrypt.com/sotn-maps/>

- Zahlreiche Vernetzungen innerhalb der Spielwelt
- (Nichtlineare) Progression durch viele neue **Items**
- Zurückkehren in bekannte Gebiete um dort *alte Hindernisse* mit *neuen Items* zu bewältigen

Abbildungen zeigen die vollständige Karte des jeweiligen Spiels

- Boss Keys Season 2 (Mark Brown, GMTK)
Videoreihe zur Analyse von Metroidvanias



„Metroidbrania“ – Wissen als Items

The Witness (2016)

Outer Wilds (2019)

- Genrename noch nicht im Mainstream etabliert
- Progression in der Spielwelt ähnlich wie in Metroidvanias
- **Items** werden durch **erlangtes Wissen** ersetzt
 - Übertragung dieses Konzepts in die Lehre



Praktische Umsetzung im Pilotversuch

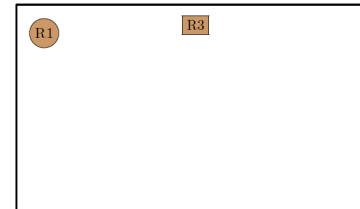
- Raumkarten
- Hinderniskarten
- Itemkarten
- Lösungskarten
- (Punktekarten)
- (Hinweiskarten)

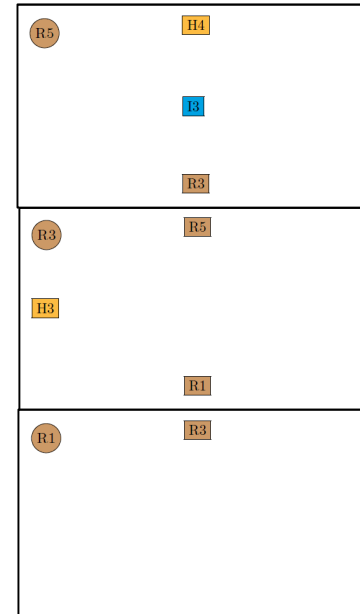
Zur Wiederholung des Stoffs von “Differentialgleichungen I”





Praktische Umsetzung im Pilotversuch







ITEMKARTE 3

(SEPARATION D. VARIABLEN)

Für $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, $g \in C^0(I; \mathbb{R})$, $h \in C^0(J; \mathbb{R})$ mit $h \neq 0$ auf J , $(t_0, y_0) \in I \times J$ betrachte

$$y'(t) = g(t)h(y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

Dann gibt es $\delta > 0$ derart, dass das AWP genau eine Lösung φ auf $B_\delta(t_0) \subset I$ besitzt. Diese erhält man durch Auflösen der folgenden Gleichung nach $\varphi(t)$:

$$\int_{y_0}^{\varphi(t)} \frac{1}{h(s)} ds = \int_{t_0}^t g(s) ds.$$

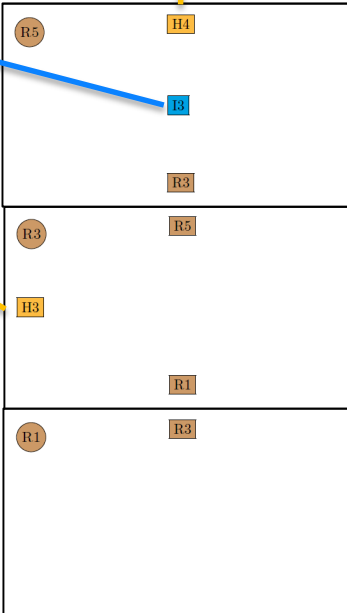
HINDERNISKARTE 3

Ihr findet vor der Villa einen kleinen Schuppen. Zwei verschiedene Arten von giftigen Ranken verzweigen sich miteinander vor der Tür und versperren euch den Weg hinein.

Löst die Aufgabe auf der Rückseite um die Ranken voneinander zu trennen.

HINDERNISKARTE 4

Das große Tor zur Ruine der Villa scheint durch ein magisches Siegel verschlossen zu sein. Ihr findet einige Musikknoten auf der Matte vor der Tür. Löst die Aufgabe auf der Rückseite um das Siegel der Villa zu brechen.



Nicht immer Hindernisbeschreibung mit
Hinweisen zur Lösungsmethode
verknüpfen!



ITEMKARTE 3

(SEPARATION D. VARIABLEN)

Beispiel: Wende den Satz für

$$y'(t) = -ty(t)^2, \quad y(1) = 1$$

an. Setze $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t$ und $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto -y^2$ sowie $t_0 = y_0 = 1$ und berechne

$$\int_2^{\varphi(t)} \frac{1}{h(s)} ds = \int_2^{\varphi(t)} -\frac{1}{s^2} ds = \frac{1}{\varphi(t)} - \frac{1}{2},$$

$$\int_1^t g(s) ds = \int_1^t s ds = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

Auflösen nach $\varphi(t)$ liefert $\varphi(t) = \frac{2}{t^2}$ für $t \in B_\delta(1)$ mit einem kleinen $\delta > 0$.

Sei $g \in C^0(I; \mathbb{R})$, $h \in C^0(J; \mathbb{R})$ mit t betrachte $(y(t)), \quad y(t_0) = y_0$.

Dass das AWP genau eine Lösung φ erhält man durch Auflösen der (t) :

$$ds = \int_{t_0}^t g(s) ds.$$

HINDERNISKARTE 4

Das große Tor zur Ruine der magischen Siegel verschloss einige Musiknoten auf der Villa zu be

Bestimmt eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = y(t) + t, \quad y(0) = 1$$

R5

H4

R3

R3

R5

H3

R1

R1

R3

HINDERNISKARTE 3

Ihr findet vor der Villa einen kleinen Schuppen. Zwei tüchtigen Ranken verzweigen sich und versperrten euch den Weg hinein. Rückseite um die Ranken herum zu trennen.

Bestimmt eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = \frac{1}{t} e^{-y(t)}, \quad y(1) = 0.$$

Nicht immer Hindernisbeschreibung mit Hinweisen zur Lösungsmethode verknüpfen!



LÖSUNGSKARTE 3 ★

Die gesuchte Lösung ist

$$\varphi(t) = \ln(\ln(t) + 1)$$

für $t \in B_\delta(1)$ mit einem hinreichend kleinen $\delta > 0$.

Ihr **trennt** erfolgreich die beiden Ranken voneinander
könnt diese anschließend einzeln unschädlich machen.

Platziert **Raumkarte 2**.



ITEMKARTE 3 🔑

(SEPARATION D. VARIABLEN)

Beispiel: Wende den Satz für

$$y'(t) = -ty(t)^2, \quad y(1) = 1$$

an. Setze $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t$ und $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto -y^2$ sowie $t_0 = y_0 = 1$ und berechne

$$\int_2^{\varphi(t)} \frac{1}{h(s)} ds = \int_2^{\varphi(t)} -\frac{1}{s^2} ds = \frac{1}{\varphi(t)} - \frac{1}{2},$$

$$\int_1^t g(s) ds = \int_1^t s ds = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

Auflösen nach $\varphi(t)$ liefert $\varphi(t) = \frac{2}{t^2}$ für $t \in B_\delta(1)$ mit einem kleinen $\delta > 0$.

Sei $g \in C^0(I; \mathbb{R})$, $h \in C^0(J; \mathbb{R})$ mit $h \neq 0$. Betrachte $y(t)$, $y(t_0) = y_0$.
Dass das AWP genau eine Lösung φ erhält man durch Auflösen der $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t g(s) ds.$$

HINDERNISKARTE 3 🏠

Ihr findet vor der Villa einen kleinen Schuppen. Zwei
starken Ranken verzweigen
sich und versperren euch
den Weg hinein.
Rückseite um die Ranken
zu trennen.

Bestimmt eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = \frac{1}{t} e^{-y(t)}, \quad y(1) = 0.$$

HINDERNISKARTE 4 🏠

Das große Tor zur Ruine der
magischen Insel ist verschlossen.
einige Musiken auf der
Löst die Aufgabe auf der Rückseite
Villa zu be

Bestimmt eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = y(t) + t, \quad y(0) = 1$$

R5

H4

I3

R3

R3

R5

H3

R1

R1

R3



ITEMKARTE 3

(SEPARATION D. VARIABLEN)

Beispiel: Wende den Satz für

$$y'(t) = -ty(t)^2, \quad y(1) = 1$$

an. Setze $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t$ und $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto -y^2$ sowie $t_0 = y_0 = 1$ und berechne

$$\int_2^{\varphi(t)} \frac{1}{h(s)} ds = \int_2^{\varphi(t)} -\frac{1}{s^2} ds = \frac{1}{\varphi(t)} - \frac{1}{2},$$

$$\int_1^t g(s) ds = \int_1^t s ds = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

Auflösen nach $\varphi(t)$ liefert $\varphi(t) = \frac{2}{t^2}$ für $t \in B_\delta(1)$ mit einem kleinen $\delta > 0$.

Sei $g \in C^0(I; \mathbb{R}), h \in C^0(J; \mathbb{R})$ mit $h \neq 0$. Betrachte

$$y'(t) = g(t)h(y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

Man erhält das AWP genau eine Lösung φ erhält man durch Auflösen der

$$\int_{t_0}^t g(s) ds = \int_{y_0}^{\varphi(t)} \frac{1}{h(s)} ds.$$

HINDERNISKARTE 4

Das große Tor zur Ruine der
magischen Siedlung ist verschlossen.
Bestimme eine Lösung des Anfangswertproblems
Löst die Aufgabe auf der Rückseite
Villa zu befreien.

Bestimmt eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = y(t) + t, \quad y(0) = 1$$

R5

H4

R3

R5

H3

R1

R3

R2

H1

H2

R3

R1





LÖSUNGSKARTE 2 ★

Die gesuchte Lösung ist

$$\varphi(t) = 3e^{-t} - e^{-2t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Ihr öffnet die Truhe und finde darin eine magische Okarina.

Zieht **Itemkarte 2**.



HINDERNISKARTE 2 🗝️

Berechnet für

$$y'(t) = -y(t) + e^{-2t}, \quad y(0) = 2.$$

eine Lösung mit Hilfe des Ansatzes $\varphi(t) = c(t)e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$ für ein geeignetes $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Lösbar ohne Itemkarte

ITEMKARTE 3 🔑

(SEPARATION D. VARIABLEN)

Beispiel: Wende den Satz für

$$y'(t) = -ty(t)^2, \quad y(1) = 1$$

an. Setze $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t$ und $h: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto -y^2$ sowie $t_0 = y_0 = 1$ und berechne

$$\int_2^{\varphi(t)} \frac{1}{h(s)} ds = \int_2^{\varphi(t)} -\frac{1}{s^2} ds = \frac{1}{\varphi(t)} - \frac{1}{2}.$$

$$\int_1^t g(s) ds = \int_1^t s ds = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

Auflösen nach $\varphi(t)$ liefert $\varphi(t) = \frac{2}{t^2}$ für $t \in B_\delta(1)$ mit einem kleinen $\delta > 0$.

Sei $g \in C^0(I; \mathbb{R})$, $h \in C^0(J; \mathbb{R})$ mit $h \neq 0$ betrachte $y(t)$, $y(t_0) = y_0$.
Dass das AWP genau eine Lösung φ erhält man durch Auflösen der $\varphi(t)$:

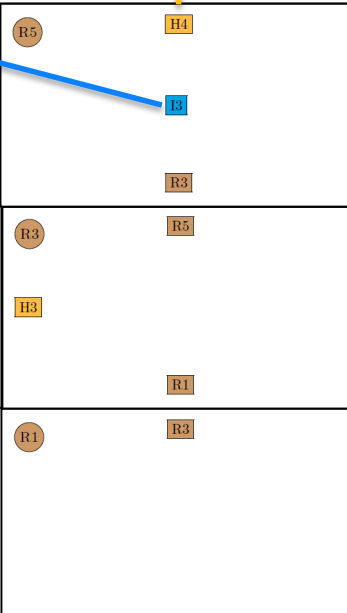
$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t g(s) ds.$$

HINDERNISKARTE 4 🗝️

Das große Tor zur Ruine des magischen Siegel verschloss einige Musiknoten auf der Villa zu be.
Löst die Aufgabe auf der Rückseite.

Bestimmt eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = y(t) + t, \quad y(0) = 1$$





ITEMKARTE 2

(VARIATION D. KONSTANTEN)

Für $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $a, b \in C^0(I; \mathbb{R})$ und $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ besitzt

Beispiel: Wende den Satz für

$$y'(t) = -y(t) + e^{-2t}, \quad y(0) = 2.$$

an. Setze $a(t) = -1$, $b(t) = e^{-2t}$ für $t \in \mathbb{R}$, $t_0 = 0$, $y_0 = 2$, dann

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= e^{\int_0^t -1 ds} \left(2 + \int_0^t e^{\int_0^s 1 ds} e^{-2s} ds \right) \\ &= e^{-t} \left(2 + \int_0^t e^s e^{-2s} ds \right) \\ &= e^{-t} (2 - e^{-t} + 1) = 3e^{-t} - e^{-2t} \end{aligned}$$

ITEMKARTE 3

(SEPARATION D. VARIABLEN)

Beispiel: Wende den Satz für

$$y'(t) = -ty(t)^2, \quad y(1) = 1$$

an. Setze $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t$ und $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto -y^2$ sowie $t_0 = y_0 = 1$ und berechne

$$\begin{aligned} \int_2^{\varphi(t)} \frac{1}{h(s)} ds &= \int_2^{\varphi(t)} -\frac{1}{s^2} ds = \frac{1}{\varphi(t)} - \frac{1}{2}, \\ \int_1^t g(s) ds &= \int_1^t s ds = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Auflösen nach $\varphi(t)$ liefert $\varphi(t) = \frac{2}{t^2}$ für $t \in B_\delta(1)$ mit einem kleinen $\delta > 0$.

Sei $g \in C^0(I; \mathbb{R})$, $h \in C^0(J; \mathbb{R})$ mit $h \neq 0$. Betrachte $y(t)$, $y(t_0) = y_0$.
Dass das AWP genau eine Lösung φ erhält man durch Auflösen der $t(t)$:

$$ds = \int_{t_0}^t g(s) ds.$$

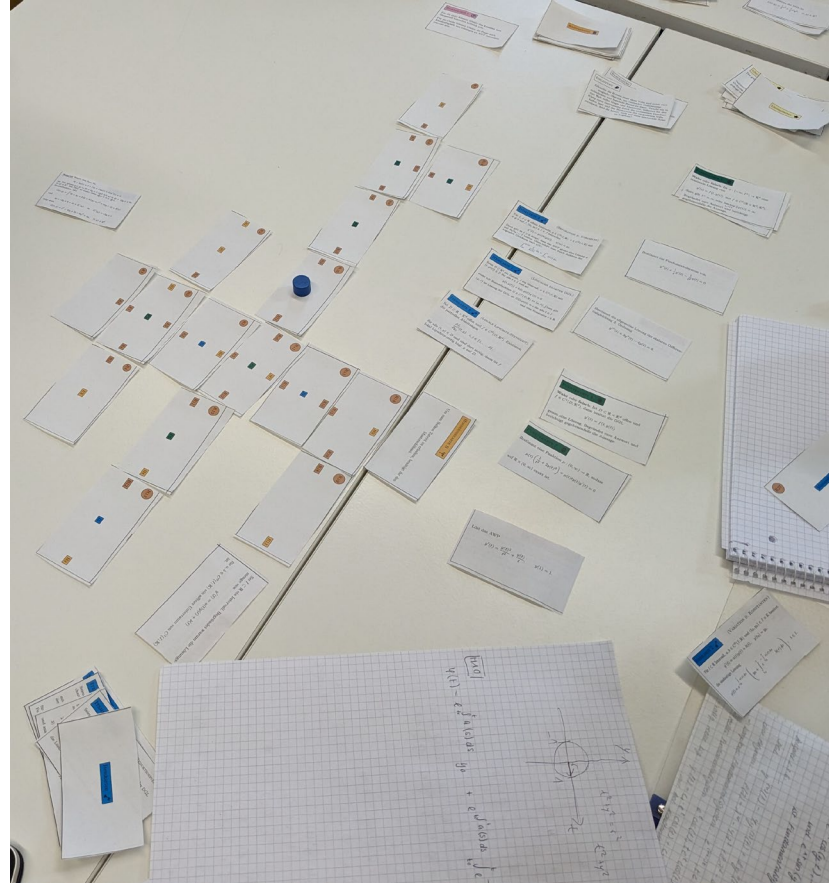
HINDERNISKARTE 4

Das große Tor zur Ruine der magischen Sichel verschloss einige Musiknoten auf der Villa zu be

Bestimmt eine Lösung des Anfangswertproblems

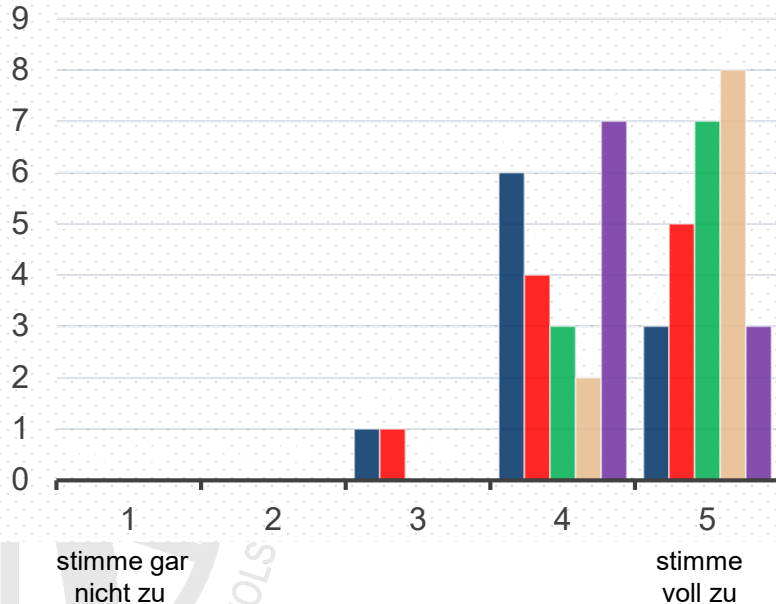
$$y'(t) = y(t) + t, \quad y(0) = 1$$





Feedback der Studierenden

Ziel des Lehrprojektes: Ermutigung zu **aktivem** & **selbstreflektiertem** Lernen



- Das Spielkonzept habe ich schnell verstanden
- Die Erkundung der Spielwelt war motivierend gestaltet
- Das Schlüssel-Schloss-Prinzip hat mir die Wiederholung des Stoffs erleichtert
- Mein Lernerfolg hat durch das Spielkonzept profitiert
- Dieses Spielkonzept könnte mir in einer angepassten Variante auch beim Erarbeiten neuer Themen helfen



Positives Feedback

„Öfter einbauen! Evtl. für Übung anstelle von Blättern“

„Viel ansprechender als nur „trockene“ Übungsaufgaben“

„Man musste überlegen, welche Aufgaben man schon lösen kann zum jeweiligen Zeitpunkt“

„Die Zeit ist beim Spiel wirklich verfolgen & es hat viel Spaß gemacht“

Konstruktives Feedback

„War manchmal etwas chaotisch, weil man sehr viele Räume gleichzeitig aufdecken konnte“

„zu lang“

„Die Zusatzaufgaben waren weniger interessant, da nicht klar war, wozu man sie macht, also was man dafür bekommt“

„Ich würde eine schriftliche Anleitung empfehlen mündlich war es doch ein bisschen schnell“

Lessons Learned

- Deutlichere Instruktionen zu Spielablauf & Spielmaterial
- Sorgfältige Balance bei der Wahlmöglichkeit von Aufgaben vs. Geradlinige Anleitung
- Insbesondere am Anfang Spießrutenlauf aus Aufgaben vermeiden um Spielfluss zu verbessern
- Bei Wiederholung von Stoff separate Schlüsselkarten einführen um für gut vorbereitete Studis die „vorgesehene“ Progression nicht auszuhebeln
- Dynamische Spielwelt um den Spielenden mehr das Gefühl zu geben, sich in einer *lebendigen* Welt zu befinden

Ausblick

- Nächster Test des Spiels zum Erlernen **neuen Stoffs** in „Differentialgleichungen II“ im WiSe 2023/24
- **Digitalisierung** um einen nachhaltigeren, breiteren Zugang zu ermöglichen
 - Proof-of-Concept Version (via RPG Maker MV) bereits in Arbeit

